Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК [53:51](075.8)
ББК 22.311я73
В31

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

Рецензент: Петрова В.В. доцент каф. высшей математики и теоретической механики РГГМУ

Веретенников В.. Н., Ржонсницкая .Ю. Б., Бровкина Е.А.

В31 Уравнения математической физики. Учебное пособие / Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 76 с.

ISBN 978-5-86813-545-3

Пособие является 14-м выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам. Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

ISBN 978-5-86813-545-3

Глава 1

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1 Основные понятия. Примеры

Пусть Ω область n-мерного евклидова пространства R^n точек с декартовыми ортогональными координатами

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ n \geq 2.$$

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение вида

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Оно связывает независимые переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, искомую функцию $u = u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и частные производные искомой функции (наличие хотя бы одной производной обязательно).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в уравнение частных производных.

Так, если $x,\ y$ – независимые переменные, $u = u(x;\ y)$ – искомая функция, то

$y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$ – дифференциальные уравнения 2-го порядка.

В уравнениях, связанных с задачами гидрометеорологии, переменные часто суть время и пространственные координаты; для их обозначения будем пользоваться буквами $t,\ x,\ y,\ z$.

Наиболее общее уравнение с частными производными 1-го порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F\left(x;\ y;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{1.2}$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными 2-го порядка имеет вид

$$F\left(x;\ y;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Для упрощения записи пользуются также следующими обозначениями:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \ldots .$$

Уравнение называется ***квазилинейным***, если оно линейно относительно всех старших производных от искомой функции.

Так, **например**, уравнение

$$a_{11}(x;\ y;\ u;\ u_x;\ u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x;\ y;\ u;\ u_x;\ u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+a_{22}(x;\ y;\ u;\ u_x;\ u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x;\ y;\ u;\ u_x;\ u_y)$$

есть квазилинейное уравнение 2-го порядка.

Пусть имеем дифференциальное уравнение с частными производными (1.1) порядка k. Обозначим через $C^k(\Omega)$ множество функций, непрерывных в области Ω вместе со всеми производными до порядка k включительно.

Определение. ***Решением*** дифференциального уравнения (1.1) в некоторой области Ω изменения независимых переменных $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ называется всякая функция

$$u = u(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \in C^k(\Omega)$$

такая, что подстановка этой функции и производных функции в уравнение (1.1) обращает последнее в тождество по $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ в области Ω.

1.2 Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Свойства их решения

Уравнение с частными производными называется ***линейным уравнением***, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных, входящих в уравнение.

В противном случае уравнение называется ***нелинейным***.

Пример 1.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{-x^2}$ – линейное уравнение;

$y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0,\ u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 y$ – нелинейные уравнения.

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции двух независимых переменных x, y в общем случае имеет вид

$$a_{11}(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+ a_{22}(x;\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x;\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x;\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x;\ y) = f(x;\ y), \tag{1.4}$$

где $a_{11}(x;\ y)$, $a_{12}(x;\ y)$, $\ldots$, $c(x;\ y)$, $f(x;\ y)$– функции переменных x, y, заданные в некоторой области Ω плоскости Oxy. Если $f(x;\ y)\equiv 0$ в области Ω, то уравнение (2.1) называется ***однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Обозначив левую часть уравнения (2.1) через $L\,[u]$, запишем (2.1) в виде

$$L\,[u]=f(x;\ y). \tag{1.5}$$

соответствующее однородное уравнение запишется так:

$$L\,[u]=0. \tag{1.6}$$

Здесь L – линейный дифференциальный оператор, определенный на линейном пространстве $C^2(\Omega)$ функций $u=u(x;\ y)$.

Пользуясь свойством линейности оператора L, легко убедиться в справедливости следующих теорем, выражающих свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Теорема 1. *Если $u(x;\ y)$ есть решение однородного линейного уравнения (2.3), то $C\,u(x;\ y)$, где C – любая постоянная, есть также решение уравнения (2.3).*

Теорема 2. *Если $u_1(x;\ y)$ и $u_2(x;\ y)$ – решения однородного линейного уравнения (2.3), то сумма $u_1(x;\ y)+u_2(x;\ y)$ есть также решение этого уравнения.*

Следствие. *Если каждая из функций $u_1(x;\ y)$, $u_2(x;\ y)$, $\ldots$, $u_k(x;\ y)$ является решением уравнения (2.3), то линейная комбинация*

$$C_1u_1(x;\ y)+C_2u_2(x;\ y)+\ldots+C_ku_k(x;\ y),$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_k – произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Обыкновенные однородные линейные дифференциальные уравнения имеют конечное число линейно независимых частных решений. Линейная комбинация решений дает общее решение этого уравнения. Уравнения с частными производными могут иметь бесконечное множество линейно независимых частных решений.

Поэтому в линейных задачах для уравнений с частными производными нам придется иметь дело не только с линейными комбинациями конечного числа решений, но и с рядами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x;\ y)$, членами которых являются произведения постоянных c_n на частные решения $u_n(x;\ y)$ дифференциального уравнения.

Для неоднородного линейного уравнения

$$L\,[u] = f \tag{1.7}$$

справедливы следующие предложения.

Теорема 3. *Если* $u(x;\ y)$ *есть решение неоднородного линейного уравнения* (1.7)*, а* $v(x;\ y)$*– решение соответствующего однородного уравнения* (2.3)*, то сумма* $u(x;\ y) + v(x;\ y)$ *есть решение неоднородного уравнения* (1.7)*.*

Теорема 4 (принцип суперпозиции)**.** *Если* $u_1(x;\ y)$ *– решение уравнения* $L\,[u] = f_1$*, а* $u_2(x;\ y)$ *– решение уравнения* $L\,[u] = f_2$*, то* $u_1 + u_2$ *– решение уравнения* $L\,[u] = f_1 + f_2$*.*

1.3 Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Прежде чем формулировать математические постановки решения различных физических задач, сводящихся к линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка, необходимо классифицировать эти уравнения.

Классификация уравнений – принадлежность уравнения к тому или иному классу – определяется коэффициентами при старших производных. Произведем классификацию для уравнений, в которых искомая функция u зависит лишь от двух переменных: $u = u(x;\ y)$. В этом случае линейные уравнения можно записать в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x;\ y), \tag{1.8}$$

где $a_{i\,j},\ b_i,\ c$ – функции только переменных $x,\ y$.

Любое такое уравнение (2.4) с помощью замены переменных может быть приведено к более простому – ***каноническому виду***. Поэтому при изучении уравнений с двумя переменными можно ограничиться в дальнейшем лишь каноническими уравнениями

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \xi(x;\ y),\ \eta = \eta(x;\ y), \tag{1.9}$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, равносильное данному уравнению. Будем требовать, чтобы функции $\xi(x;\ y)$ и $\eta(x;\ y)$ были непрерывны вместе с их частными производными 1-го и 2-го порядка.

Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее ***простую*** форму?

Введем матрицу коэффициентов при вторых производных («матрицу старших коэффициентов»). Будем считать, что $a_{12} = a_{21}$, так что матрица эта называется симметричной

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Матрица старших коэффициентов имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$

Пример 3 . Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

Матрица его старших коэффициентов имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$

Уравнения второго порядка в частных производных классифицируются в зависимости от свойств характеристических чисел.

Зафиксируем некоторую точку $(x;\ y)$, в которой определены коэффициенты уравнения (2.4), и пусть в этой точке матрица его старших коэффициентов имеет α положительных, β отрицательных и γ нулевых характеристических чисел; очевидно,

$$\alpha + \beta + \gamma = n, \quad n = 2.$$

А. Будем говорить в этом случае, что в рассматриваемой точке $(x;\ y)$ уравнение (2.4) принадлежит к ***эллиптическому типу***, если в ней ***все характеристические числа матрицы старших коэффициентов отличны от нуля и имеют один и тот же знак***.
Б. Уравнение (2.4) в данной точке принадлежит к ***параболическому типу***, если в этой точке ***матрица старших коэффициентов имеет одно характеристическое число равное нулю, а все остальные отличны от нуля и одного знака***.
В. Уравнение (2.4) будет ***гиперболического типа*** в данной точке, если в этой точке ***характеристические числа матрицы старших коэффициентов все отличны от нуля, причем одно из этих чисел отличается по знаку от всех остальных***.

Уравнение (2.4) принадлежит к одному из названных типов на некотором конечном множестве, если оно принадлежит к этому типу в каждой точке данного множества. Очевидно, если старшие коэффициенты a_{ij} в уравнении (2.4) постоянные. То тип этого уравнения один и тот же во всем пространстве.

Важность выделенных здесь трех типов уравнений в частных производных – эллиптических, параболических и гиперболических – определяется двумя обстоятельствами. С одной стороны, все до сих пор известные задачи гидрометеорологии приводят, как правило, к уравнениям названных типов; с другой стороны, теория этих уравнений разработана с несравненно большей полнотой, чем теория уравнений в частных производных других типов.

Уравнение в частных производных 2-го порядка с двумя переменными примечательно тем, что его можно привести к какому-то виду не только в отдельно взятой точке, но и в некоторой области, в которой тип уравнения не меняется.

Будем считать, что в каждой точке хотя бы один из коэффициентов $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ отличен от нуля.

Напишем уравнение характеристических чисел матрицы старших коэффициентов (2.4)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Это уравнение имеет вещественные корни

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2};$$

они одного знака, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, и разных знаков, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$; если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то один их корней равен нулю, а другой отличен от нуля.

Отсюда следует, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка (2.4) в некоторой области Ω на плоскости Oxy

1. ***Эллиптическое уравнение***, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
2. ***Параболическое уравнение***, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$, и
3. ***Гиперболическое уравнение***, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

другие типы невозможны.

Пользуясь этим определением, легко проверить, что уравнения

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$ – гиперболические уравнения при всех x и y,

уравнение

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – параболическое уравнение при всех x и y,

а уравнение

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – эллиптическое уравнение при всех x и y.

Уравнение

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

эллиптическое уравнение при $y > 0$, параболическое на линии $y = 0$ и гиперболическое в полуплоскости $y < 0$.

Произведем в уравнении (2.4) замену независимых переменных по формулам

$$\xi=\xi(x;\ y),\ \eta=\eta(x;\ y)\ (\xi,\ \eta\in C^2),$$

устанавливающим взаимно однозначное соответствие между точками $(\xi;\ \eta)$ и $(x;\ y)$ соответствующих областей. Мы будем требовать, чтобы функции $\xi(x;\ y)$ и $\eta(x;\ y)$ были непрерывными вместе с их частными производными первого и второго порядков, причем якобиан

$$J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\quad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,$$

$$\begin{gathered}u_{xx}=(u_x)_x=(u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x)_x=\\ =(u_\xi\xi_x)_x+(u_\eta\eta_x)_x=(u_\xi)_x\cdot\xi_x+u_\xi\cdot(\xi_x)_x+(u_\eta)_x\cdot\eta_x+u_\eta\cdot(\eta_x)_x=\\ =((u_\xi)_\xi\xi_x+(u_\xi)_\eta\eta_x)\,\xi_x+((u_\eta)_\xi\xi_x+(u_\eta)_\eta\eta_x)\,\eta_x+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=\\ =u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}u_{xy}&=(u_x)_y=(u_\xi)_y\cdot\xi_x+u_\xi\cdot\xi_{xy}+(u_\eta)_y\cdot\eta_x+u_\eta\cdot\eta_{xy}=\\ &=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\end{aligned}$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.$$

Подставляя значения полученных производных в уравнение (2.4) и объединяя члены с одинаковыми производными, получим преобразованное уравнение

$$\alpha_{11}u_{\xi\xi}+2\alpha_{12}u_{\xi\eta}+\alpha_{22}u_{\eta\eta}+\Phi\,(u_\xi;\ u_{\eta;}\ u;\ \xi;\ \eta)=0,$$

где

$$\alpha_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,$$

а функция Φ не зависит от вторых производных. Заметим, что, т. к. исходное уравнение линейное, то функция Φ имеет вид

$$\Phi\,(u_\xi;\ u_\eta;\ u;\ \xi;\ \eta)=\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u+\delta,$$

т. е. уравнение остается линейным.

Переменные ξ и η выберем так, чтобы коэффициент α_{11} был равен нулю

$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$ или $a_{11}\dfrac{\xi_x^2}{\xi_y^2} + 2a_{12}\dfrac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$

Получили уравнение с частными производными первого порядка, которое можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Для этого рассмотрим линию уровня (характеристику)

$$\xi(x;\ y) = C\ (C - const).$$

Имеем

$d\left(\xi(x;\ y)\right) = dC$ или $\xi_x dx + \xi_y dy = 0$,

откуда

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{dy}{dx}.$$

Окончательно получаем

$a_{11}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\dfrac{dy}{dx} + a_{22} = 0$ или $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dy\,dx + a_{22}(dx)^2 = 0$. (2.6)

Это уравнение называется ***уравнением характеристик*** для уравнения (2.4). Решая его относительно $\dfrac{dy}{dx}$, получаем два эквивалентных уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}\,dy - \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\,dx = 0, \\ a_{11}\,dy - \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\,dx = 0. \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Уравнение гиперболического типа

Если уравнение (2.4) относится в области Ω к гиперболическому виду $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$, то значения $\dfrac{dy}{dx}$ вещественны и различны. Общие решения $\varphi_1(x;\ y) = C_1$ и $\varphi_2(x;\ y) = C_2$ уравнений (2.7) определяют в области Ω два различных семейства вещественных характеристик. В этом случае через каждую точку M области Ω проходят две характеристики, принадлежащие различным семействам и пересекающиеся под ненулевым углом.

С помощью замены переменных $\xi = \varphi_1(x;\ y)$, $\eta = \varphi_2(x;\ y)$ дифференциальное уравнение (2.4) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = \Phi\left(\xi;\ \eta;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial\xi};\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\ (\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0). \qquad (1.11)$$

Уравнение гиперболического типа можно привести к другому каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Phi\left(\xi;\ \eta;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial\xi};\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\ (\alpha_{11} = -\alpha_{22},\ \alpha_{12} = 0), \quad (1.12)$$

если перейти к новым переменным по формулам

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi_1(x;\ y) + \varphi_2(x;\ y)\,,\ \eta = \frac{1}{2}(\varphi_1(x;\ y) - \varphi_2(x;\ y)\,.$$

Уравнение параболического типа

В случае если в области Ω уравнение (2.4) является параболическим ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$), то значения $\frac{dy}{dx}$ вещественны и совпадают. Общее решение (дифференциальные уравнения (3.4) совпадают) $\varphi(x;\ y) = C$ определяет одно семейство вещественных характеристик. В этом случае замена $\xi = \varphi_1(x;\ y)$, $\eta = \varphi_2(x;\ y)$, где $\varphi_2(x;\ y)$ – произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (якобиан $\mathbf{J}$ ни в одной точке области Ω не равен нулю).

После замены переменных получаем каноническое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Phi\left(\xi;\ \eta;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial\xi};\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\ (\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0). \qquad (1.13)$$

Уравнение эллиптического типа

Если уравнение (2.4) относится к эллиптическому типу ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$) в области Ω, то значения $\dfrac{dy}{dx}$ комплексно-сопряжённые. Они определяют два семейства мнимых характеристик. Общие решения уравнений (2.7) имеют вид $\varphi_1(x;\ y) = C_1$ и $\varphi_2(x;\ y) = C_2$, где $\varphi_1(x;\ y)$ и $\varphi_2(x;\ y)$ – комплексно-сопряжённые функции. Если теперь сделать замену переменных

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi_1(x;\ y) + \varphi_2(x;\ y)\,,\ \eta = \frac{1}{2i}(\varphi_1(x;\ y) - \varphi_2(x;\ y)$$

(ξ и η являются уже вещественными функциями от x и y), то сведём данное эллиптическое уравнение к следующему каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi;\ \eta;\ u;\ \frac{\partial u}{\partial \xi};\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\ (\alpha_{11} = \alpha_{22},\ \alpha_{12} = 0). \quad (1.14)$$

Здесь Φ – некоторая функция, которая зависит от искомой функции u, ее первых производных $u_\xi,\ u_\eta$ и независимых переменных $\xi,\ \eta$. Вид функций Φ определяется исходным уравнением (2.4).

В некоторых случаях каноническая форма уравнения позволяет найти общее решение исходного уравнения.

Мы ограничимся рассмотрением линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. К таким уравнениям приводит большое количество различных гидрометеорологических задач.

Так, колебательные процессы различной природы описываются уравнениями гиперболического типа. Простейшим из таких уравнений является уравнение колебания струны (одномерное волновое уравнение):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(t;\ x). \quad (1.15)$$

Здесь x – пространственная координата, t – время, $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, где T – натяжение струны, ρ – ее линейная плотность.

Процессы теплопроводности и диффузии приводят к уравнениям параболического типа. В одномерном случае простейшее уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; u = u(t;\; x). \tag{1.16}$$

Здесь $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, где ρ – плотность среды, c – удельная теплоемкость, k – коэффициент теплопроводности.

Наконец, установившиеся процессы, когда искомая функция не зависит от времени, определяются уравнениями эллиптического типа, типичными представителем которых является уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; u = u(x;\; y). \tag{1.17}$$

1.4 Постановка основных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Для полного описания того или иного физического процесса мало иметь только дифференциальное уравнение процесса, надо еще задать начальное состояние этого процесса (***начальные условия***) и режим на границе $\partial\Omega$ той области Ω, в которой процесс происходит (***граничные условия***). Это обусловлено неединственностью решения дифференциальных уравнений.

Начальные условия в случае нестационарных процессов, изучаемых во всем пространстве, задают значения искомой функции или её производных во всей рассматриваемой области в начальный момент времени.

Так в задаче о распространении тепла может быть задано распределение температур $u(t;\; M)$ в области $\Omega \subset R^n$ в начальный момент времени

$$u(t_0; M) = \varphi(M) \; \forall M \in \Omega \subset R.$$

В задаче о малых поперечных колебаниях мембраны могут быть известны отклонения $u(t;\ M)$ точек M мембраны от положения равновесия в начальный момент времени и их начальная скорость

$$u(t_0; M) = \varphi(M), u_t(t_0; M) = \varphi_1(M)\ \forall M \in \Omega \subset R^2.$$

В *задачах о гидрометеорологических процессах в ограниченных областях* могут быть известны значения искомой функции, её производных или соотношения между ними на границе области в любой момент времени. Такие условия (как было отмечено) называются ***граничными*** или ***краевыми***. Краевое условие ***линейное***, если искомая функция , её производные входят в него линейно.

Пусть $\partial\Omega$ – граница области $\Omega \subset R^n$. На практике часто приходят к следующим трем видам линейных краевых условий на границе $\partial\Omega$:
1) первого рода

$$u\,|_{\partial\Omega} = \varphi\ ,$$

2) второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \varphi$$

3) третьего рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)|_{\partial\Omega} = \varphi\ ,\ \sigma > 0.$$

При рассмотрении конкретных гидрометеорологических процессов могут возникать задачи со смешанными краевыми условиями, когда на части границы задается одно краевое условие, а на остальной части – другое краевое условие.

Различают три основных типа задач для дифференциальных уравнений с частными производными (число независимых переменных равно n):

1. ***задача Коши*** для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область Ω совпадает со всем пространством R^n, граничные условия отсутствуют;

2. ***краевая задача*** для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе $\partial\Omega$ области Ω, начальные условия отсутствуют;

3. ***смешанная задача*** для уравнений гиперболического типа и параболического типа: задаются начальные и граничные условия, $(\Omega \neq R^n)$.

Рассмотрим постановку задач для уравнения теплопроводности, волнового уравнения, уравнения Лапласа и Пуассона.

Задача Коши (начальная задача)

Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0,\ -\infty < x < \infty,\\
&u(0;\ x) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Задача Коши для волнового уравнения

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, && t > 0,\ -\infty < x < \infty,\\
&u(0;\ x) = \varphi(x),\ u_t(0;\ x) = \varphi_1(x),\ -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Смешанные задачи (***начально-краевые задачи***)

Первая (соответственно вторая или третья) смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx}, && t > 0,\ a < x < b,\\
&u(0;\ x) = \varphi(x), && a \leq x \leq \infty,\\
&u(t;\ a) = \psi_a(t),\ u(b;\ t) = \psi_b(t),\ t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Первая (соответственно вторая или третья) смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, && t > 0,\ a < x < b,\\
&u(0;\ x) = \varphi(x),\ u_t(0;\ x) = \varphi_1(x),\ a \leq x \leq \infty,\\
&u(t;\ a) = \psi_a(t),\ u(b;\ t) = \psi_b(t),\ t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Краевые задачи

Краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле) для уравнения Лапласа (Пуассона) ставится так

Требуется найти решение уравнения $\Delta u = 0$ ($\Delta u = f$) в некоторой области пространства (плоскости), принимающее на границе заданные значения. Математическая модель явления

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0 \ \left(\Delta u(M) = f\right), \ M \in \Omega, \\ &u(M)\,|_{\partial\Omega} = \varphi(M). \end{aligned}$$

Краевая задача с граничными условиями второго рода (задача Неймана) для уравнения Лапласа (Пуассона) ставится так

Требуется найти решение уравнения $\Delta u = 0$ ($\Delta u = f$) в некоторой области пространства (плоскости) на границе которой задана внешняя нормальная производная $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ (пропорциональная втекающему потоку тепла, вещества). Эта общая задача о нахождении потенциала скорости при стационарном движении несжимаемой жидкости, и для стационарной теплопроводности, если на границе задан поток, записывается так

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0 \ \left(\Delta u(M) = f\right), \ M \in \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(M)\,|_{\partial\Omega} = \varphi(M). \end{aligned}$$

Краевая задача с граничными условиями третьего рода (задача Робэна) для уравнения Пуассона ставится так

Требуется найти решение $u(M)$ уравнения в некоторой области Ω пространства (плоскости), удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ условию $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)|_{\partial\Omega} = \varphi$, $\sigma > 0$, где σ и φ – заданные функции на границе $\partial\Omega$. Эта задача записывается так

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = f, \ M \in \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(M) + \sigma u\,|_{\partial\Omega} = \varphi(M). \end{aligned}$$

1.5 Задача Штурма-Лиувилля.

Собственные функции и собственные значения. Их основные свойства

При решении задач математической физики методом Фурье (разделения переменных) часто приходится встречаться со следующей задачей Штурма-Лиувилля о собственных значениях и собственных функциях.

Рассматривается краевая задача

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)\,y + \lambda\,\rho(x)\,y = 0, \tag{1.18}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{1.19}$$

Здесь $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ определены и непрерывны $\forall\, x \in [a;\ b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, параметры α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяют условиям $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют отличные от тождественного нуля (нетривиальные) решения дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющие краевым условиям (3.2).

Определение. Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (3.1) – (3.2), называются ***собственными значениями*** (с.з.) краевой задачи (3.1) – (3.2), а соответствующие им нетривиальные решения – ***собственными функциями*** (с.ф.) краевой задачи (3.1) – (3.2).

Если $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ $(\alpha_2 = \beta_2 = 0)$, то условия (3.2) называются ***краевыми (граничными) условиями первого типа***.

Если $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$ $(\alpha_1 = \beta_1 = 0)$, то условия (3.2) называются ***краевыми (граничными) условиями второго типа***.

Краевые условия третьего типа представлены в виде (3.2).

Собственные значения и собственные функции краевой задачи Штурма-Лиувилля обладают следующими свойствами.

1. Существует бесконечное множество с.з. $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, которым соответствуют с.ф. $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$.

2. Если $y(x)$ есть собственная функция, отвечающая собственному значению λ, то и $C\,y(x)$ (C – константа) есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению.

3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – собственные функции, отвечающие собственному значению λ, то и любая линейная комбинация $C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ есть собственная функция, отвечающая тому же λ.

4. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m ($\lambda_n \neq \lambda_m$), ортогональны на отрезке $[a;\ b]$ с весом $\rho\,(x)$, т. е.

$$\int_a^b \rho\,(x)\,y_n(x)\,y_m(x)\,dx = 0,\ n \neq m.$$

5. Все собственные значения задачи (3.1) – (3.2) ***вещественны***.

6. Все собственные значения задачи (3.1) – (3.2) ***неотрицательны***.

Замечание. Для первой и третьей краевых задач все собственные значения ***положительны***. Для второй краевой задачи А $q(x) \equiv 0$, $\lambda = 0$ является собственным значением, а $y(x)$ – отвечающей ему собственной функцией.

Теорема 5 (Стеклов). *Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям (3.2) и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $y_n(x)$:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x),\ C_n = \frac{\int_a^b \rho(x)\,f(x)\,y_n(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,y_n^2(x)\,dx}.$$

Пример 4. Найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

$$\begin{cases} y'' + \lambda\, y = 0, \ 1 \le x \le 2, \\ y(1) = 0, \ y'(2) = 0. \end{cases}$$

Здесь $p(x) = 1, \ q(x) = 0, \ \rho(x) = 1$. Сделав замену переменной $t = x - 1$, получим

$$\begin{aligned} & y''_{tt} + \lambda\, y(t) = 0, \ 0 \le t \le 1, \\ & y(0) = 0, \ y'_t(1) = 0. \end{aligned}$$

Это – третья краевая задача ($\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \beta_1 = 0, \ \beta_2 = 1$). Все ее с.з. вещественны и положительны ($\lambda_n \in R$,$\lambda_n > 0$).

Найдём общее решение уравнения

$$y''_{tt} + \lambda\, y(t) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \lambda = 0,$$

откуда

$$k_1 = -\,i\,\sqrt{\lambda}, \ k_2 = i\,\sqrt{\lambda}.$$

Поэтому общее решение уравнения можно записать в виде

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

Найдем решение, удовлетворяющее краевым условиям. Из граничного условия на левом конце при $\underline{\underline{t = 0}}$ находим

$$y(0) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) \Leftrightarrow A = 0.$$

Следовательно,

$$y(t) = B\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

и $B\neq 0$ (поскольку ищем нетривиальное решение $y(t)\neq 0$).

Из граничного условия на правом конце при $\underline{\underline{\ell=1}}$ находим:

$$y'_t(t)=B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,t\Rightarrow$$

$$y'(1)=B\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot 1\right)\Rightarrow 0=B\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B=0,\\ \lambda=0,\\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\right)=0.\end{array}\right.$$

Следовательно,
$\cos\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$, т. к. $B\neq 0,\ \lambda>0$
откуда

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\pi}{2}+n\,\pi,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Собственные значения равны

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)..$$

Соответствующие им собственные функции суть

$$y_n(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\,\pi\right)\,t,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или, возвращаясь к переменной x, имеем

$$y_n(x)=\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\,\pi\right)\,(x-1)\right),\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом,
$\dfrac{\pi^2}{4},\ \dfrac{9\pi^2}{4},\ \dfrac{25\pi^2}{4},\ \ldots,\ \left(\dfrac{\pi}{2}+n\,\pi\right)^2,\ \ldots,$ – собственные значения,
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right),\ \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}(x-1)\right),\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{2}(x-1)\right),\ \ldots,$ – собственные функции
данной задачи Штурма-Лиувилля.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными параболического типа возникают при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

2.1 Уравнение теплопроводности

Задача теплопроводности для тела (стержня), температура которого зависит только от одной из координат x и времени t, а поток тепловой энергии направлен вдоль оси Ox, приводит к уравнению

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_1(x;\ t).$$

Здесь $u = u(x;\ t)-$ температура, является искомой функцией , $k-$ теплопроводность, $c-$ теплоемкость, $\rho-$ плотность, $f_1(x;\ t)-$ мощность тепловых источников, распределенных в теле. Если k и c зависят от температуры, то уравнение нелинейное.

Важнейший частный случай, когда коэффициенты c, k, ρ постоянны:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t),$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x;\ t) = \frac{1}{c\rho} f_1(x;\ t).$$

При отсутствии тепловых источников получаем однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Матрица старших коэффициентов этого уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение характеристических чисел

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -a^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда характеристическое число $\lambda = 0$. Т. е. действительно, уравнение параболического типа. Дифференциальное уравнение характеристик имеет вид $\dfrac{dt}{dx} = 0$, это уравнение имеет единственное семейство характеристик $t = const$, представляющих собой прямые, параллельные оси x (перпендикулярные оси t).

Для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры $u(x;\ t)$ в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничные условия).

2.2 Распространение тепла в конечном стержне

Если стержень имеет конечную длину и занимает отрезок $a \le x \le b$ оси Ox, то для постановки задачи о распространении тепла в таком стержне помимо уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t)$$

и начального условия

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x)$$

необходимо задать еще температурный режим на концах стержня $x = a$ и $x = b$, т. е. задать граничные условия. Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на концах стержня. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На концах стержня задана температура

$$u(a;\ t) = \psi_1(t), \quad u(b;\ t) = \psi_2(t),$$

   где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)-$ функции, заданные для отрезка времени $0 \le t \le T$, в течение которого изучается процесс.

2. На концах стержня заданы значения производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \psi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \psi_2(t).$$

   Эти условия возникают, если заданы тепловые потоки, проходящие через торцевые сечения стержня, которые пропорциональны частной производной по x. Если функция $\psi_1(t)$ (или $\psi_2(t)$) тождественно равна нулю, то говорят, что соответствующий конец стержня теплоизолирован.

3. На концах стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру, являющейся известной функцией от времени

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = h\left(u(a;\ t) - \psi_1(t)\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = -h\left(u(b;\ t) - \psi_2(t)\right),$$

Перечисленные основные задачи далеко не исчерпывают возможных краевых задач для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x;\ t).$$

Например, на разных концах стержня могут задаваться условия разных типов. Мы ограничимся рассмотрением первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Задача ставится так: найти решение $u(x;\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t) \tag{2.1}$$

в области $0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad u(x;\ t) \in C^2\{0 < x < \ell,\ t > 0\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$u \Big|_{t=+0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{2.2}$$

и граничным условиям

$$u \Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u \Big|_{x=\ell} = \psi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{2.3}$$

Считаем, что функция $u(x;\ t)$ непрерывна в замкнутой области $\Omega = \{0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T\}$ (рис. 2.1), для чего необходимо, чтобы функции $\varphi(x),\ \ \psi_1(t),\ \ \psi_2(t)$ были непрерывными и выполнялись условия согласования $\varphi(0) = \psi_1(0),\ \ \varphi(\ell) = \psi_2(0)$.
Замечание. Функция $u(x;\ t)$ ищется только для $0 < x < \ell$ и $t > 0$ (но не при $t = 0,\ x = 0$ и $t = 0,\ x = \ell$, где значения функции $u(x;\ t)$ заранее задаются начальными и граничными условиями).

Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Теорема 6. *Если функция $u(x;\ t) \in C(\Omega)$, удовлетворяет уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

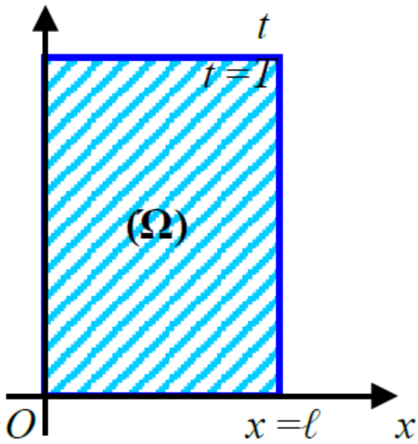

Рис. 2.1: замкнутая область Ω

в точках области $\{0 < x < \ell,\ 0 < t \leq T\}$, *то максимальное и минимальное значения функции* $u(x;\ t)$ *достигаются или в начальный момент времени* $t = 0$, *или в точках границы на отрезках* $x = 0$ *или* $x = \ell$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура тела не превосходит некоторого значения M в граничных точках или в начальный момент, то внутри тела (источники отсутствуют!) не может возникнуть температура, большая M.

Как следствия из принципа максимального значения вытекают теоремы.

Теорема 7 (единственности). *Решение задачи* (2.1) – (2.3) *в прямоугольнике* $\{0 < x < \ell,\ 0 < t \leq T\}$ *единственно.*

Теорема 8. *Решение задачи* (2.1) – (2.3) *непрерывно зависит от начальных и граничных функций.*

2.3 Метод разделения переменных (Фурье) решения смешанной задачи для однородного уравнения с однородными краевыми условиями

Рассмотрим основные идеи метода.

На ***первом этапе*** отыскание множества решений сводят к решению системы более простых краевых и начальных задач для функций меньшего числа переменных, представляя решение в виде произведения функции только времени t на функцию только пространственной переменно x.

Линейная комбинация решений однородного уравнения, удовлетворяющего нулевым краевым условиям, есть также решение данного уравнения, удовлетворяющее нулевым краевым условиям. На ***втором этапе*** из найденного бесчисленного множества таких решений конструируют решение, удовлетворяющее и начальным условиям.

Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье

Займемся решением первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности: найти решение $u(x;\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t),\ t > 0,\ 0 < x < \ell, \tag{2.4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\,\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{2.5}$$

и граничным условиям

$$u\,\Big|_{x=0} = \psi_1(t),\ u\,\Big|_{x=\ell} = \psi_2(t),\ t \ge 0 \tag{2.6}$$

1. Начнем с ***простейшей задачи***: найти решение $u(x;\ t)$ однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.8}$$

и нулевым (однородным) граничным условиям

$$u\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=\ell} = 0 \tag{2.9}$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (2.7), удовлетворяющие граничным условиям (2.9), в виде произведения двух функций,

$$u(x;\ t) = T(t)X(x), \tag{2.10}$$

где $X(x)$ – функция только переменной x, $T(t)$ – функция только переменной t. Тогда

$$u_t = X(x)\,T'(t)$$

и

$$u_{xx} = X''(x)\,T(t).$$

Подставив эти равенства в уравнение (2.7) имеем:

$$T'(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''(x).$$

Разделив это равенство $= 0\ \ a^2 T(t)\,X(x)$, получим:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{2.11}$$

В левой части имеем функцию от времени t, а в правой – функцию от координаты x.

Такое равенство возможно тогда и только тогда, когда обе эти функции равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $(-\lambda)$.

Таким образом, уравнение (2.11) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'(t) + a^2\lambda\,T(t) = 0, \tag{2.12}$$

$$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0. \tag{2.13}$$

Чтобы получить нетривиальные решения $u(x;\ t)$ вида (2.10), удовлетворяющие граничным условиям (2.9), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (2.15), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0) = 0,\ X(\ell) = 0. \tag{2.14}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы приходим к задаче на собственные значения: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \tag{2.15}$$

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \tag{2.16}$$

Это – первая краевая задача. Все ее собственные значения ***положительны***. Поэтому общее решение уравнения (2.15) можно записать в виде (т. к. характеристическое уравнение $k^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow k_1 = i\sqrt{\lambda} \vee k_2 = -i\sqrt{\lambda}$)

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Из граничного условия на левом конце находим $A = 0$. Следовательно,
$X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ и $B \neq 0$.

Из граничного условия на правом конце находим $B\sin(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0$. Следовательно,

$$\sin(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda}\,\ell = n\,\pi$$

и

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Таковы собственные значения. Соответствующие им собственные функции суть

$$X_n(x) = \sin\frac{n\,\pi}{\ell}x$$

Что касается уравнения первого порядка (2.12), то оно решается элементарно. Запишем его в виде:

$$\frac{dT}{d\,t} = -\lambda\, a^2 T$$

и разделим переменные:

$$\frac{dT}{T} = -\lambda\, a^2 d\,t.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln T = -\lambda\, a^2 t + \ln C,$$

где C – постоянная интегрирования. Произведя далее потенцирование, получим выражение для функции $T(t)$

$$T(t) = Ce^{-\lambda\, a^2 t}.$$

Для каждого $\lambda = \lambda_n$ находим соответствующие функции $T_n(t)$:

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} = C_n e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(C_n – произвольные постоянные величины). Функции

$$u_n(x;\ t) = C_n e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\,\pi}{\ell} x \ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяет уравнению (2.7) и граничным условиям (2.9).

Так как любая комбинация частных решений дифференциального уравнения также удовлетворяет ему, то образуем формальный ряд

$$u(x;\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\,\pi}{\ell} x. \qquad (2.17)$$

Потребовав, чтобы функция $u(x;\ t)$, определяемая формулой (2.17), удовлетворяла начальному условию $u(x;\ 0) = \varphi(x)$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x \tag{2.18}$$

Ряд (2.18) представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям в интервале $(0;\ \ell)$. Коэффициенты C_n разложения определяются по известным формулам (см. теорему В. А. Стеклова)

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x\, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.19}$$

Предположим, что $\varphi(x) \in C^2[0;\ \ell]$ и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$. Тогда ряд (2.18) с коэффициентами, определяемыми по формулам (2.19), будет сходиться к функции $\varphi(x)$ абсолютно и равномерно. Так как

$$0 < e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} \le 1$$

при $t \ge 0$, то ряд (2.17) при $t \ge 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x;\ t)$– сумма ряда (2.17) – непрерывна в области $0 < x < \ell,\ \ t > 0$ и удовлетворяет начальному и граничному условиям.

Остается показать, что функция $u(x;\ t)$ удовлетворяет уравнению (2.7) в области $0 < x < \ell$, $t > 0$. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (2.17) почленным дифференцированием по t один раз и почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся при $0 < x < \ell,\ \ t > 0$. Но это следует из того, что при любом $t > 0$

$$0 < \frac{n^2\pi^2a^2}{\ell^2} e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 t} < 1,$$

если n достаточно велико.

2. Рассмотрим теперь следующую задачу: найти решение $u(x;\ t)$ неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t),\ t > 0,\ 0 < x < \ell \tag{2.20}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq \ell \tag{2.21}$$

и однородным граничным условиям

$$u \Big|_{x=0} = 0,\ u \Big|_{x=\ell} = 0,\ t \geq 0 \tag{2.22}$$

предположим, что функция $f(x;\ t)$ непрерывна, имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и при всех значениях $t > 0$ выполняется условие $f(0;\ t) = f(\ell;\ t) = 0$.

Решение задачи (2.20) – (2.22) будем искать в виде

$$u(x;\ t) = \upsilon(x;\ t) + w(x;\ t) \tag{2.23}$$

где $\upsilon(x;\ t)$ определим как решение задачи

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + f(x;\ t), \tag{2.24}$$

$$\upsilon \Big|_{t=0} = 0, \tag{2.25}$$

$$\upsilon \Big|_{x=0} = 0,\ \upsilon \Big|_{x=\ell} = 0, \tag{2.26}$$

а функцию $w(x;\ t)$ – как решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.27}$$

$$w \Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2.28}$$

$$w \Big|_{x=0} = w \Big|_{x=\ell} = 0. \tag{2.29}$$

Задача (2.27) – (2.29) рассмотрена в пункте 1. Будем искать решение $\upsilon(x;\ t)$ задачи (2.24) – (2.26) в виде ряда

$$\upsilon(x;\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x \tag{2.30}$$

по собственным функциям $\left\{\sin \dfrac{n\,\pi}{\ell} x\right\}$ краевой задачи

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0,\ X(0) = X(\ell) = 0.$$

Подставляя $\upsilon(x;\ t)$ в виде (2.30) в уравнение (2.24), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{\ell^2} T_n(t)\right) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x = f(x;\ t). \tag{2.31}$$

Разложим функцию $f(x;\ t)$ в ряд Фурье по синусам,

$$f(x;\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x, \tag{2.32}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi;\ t) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} \xi\, d\xi, \tag{2.33}$$

Сравнивая два разложения (2.31) и (2.32) функции $f(x;\ t)$ в ряд Фурье, получаем

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\,\pi\, a}{\ell}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)\ (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.34}$$

Пользуясь начальным условием для $\upsilon\,(x;\ t)$,

$$\upsilon(x;\ t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x,\ 0 \le x \le \ell,$$

находим, что

$$T_n(0) = 0\ (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.35}$$

Решения уравнений (2.34) при начальных условиях (2.35) имеют вид:

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Подставляя найденные выражения для $T_n(t)$ в ряд (2.30), получим решение $\upsilon(x;\ t)$ задачи (2.24) – (2.26)

$$\upsilon(x;\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-\left(\frac{n\,\pi\,a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin \frac{n\,\pi}{\ell} x \qquad (2.36)$$

Функция $u(x;\ t) = w(x;\ t) + \upsilon(x;\ t)$ будет решением исходной задачи (2.20) – (2.22).

3. Рассмотри задачу: найти в области $\{0 < x < \ell,\ t > 0\}$ решение $u(x;\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\ t) \qquad (2.37)$$

при начальном условии

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2.38)$$

и при неоднородных граничных условиях

$$u \Big|_{x=0} = \psi_1(t),\ u \Big|_{x=\ell} = \psi_2(t) \qquad (2.39)$$

Непосредственно метод Фурье неприменим из-за неоднородности условий (2.39).

Введем новую неизвестную функцию $\upsilon(x;\ t)$, положив

$$u(x;\ t) = \upsilon(x;\ t) + w(x;\ t)$$

где

$$w(x;\ t) = \psi_1(t) + (\psi_2(t) - \psi_1(t))\, \frac{x}{\ell}.$$

Тогда решение задачи (2.37) – (2.39) сведется к решению задачи (2.20) – (2.22) для функции $\upsilon(x;\ t)$.

Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье.

Решение задачи

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, && t > 0,\ a < x < b,\\
&u(0;\ x) = \varphi(x),\ u_t(0;\ x) = \varphi_1(x),\ a \le x \le \infty,\\
&u(t;\ a) = \psi_a(t),\ u(b;\ t) = \psi_b(t),\ t \ge 0.
\end{aligned}$$

на отрезке $[0;\ l]$ с однородными граничными условиями ($\psi_a(t) = \psi_b(t) = 0$) может быть представлено как сумма бесконечного ряда:

$$u(x;\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\,\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.40}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ n \in \mathrm{N}. \tag{2.41}$$

2.4 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

соответствующий случаю $f(x;\ t) \equiv 0$, т. е. отсутствию источников.

Задача Коши ставится так: найти функцию $u(x;\ t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.42}$$

и начальному условию

$$u\,\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2.43}$$

Физический смысл задачи состоит в том, чтобы определить температуру однородного бесконечного стержня в любой момент времени $t > 0$ по известной его температуре $\varphi(x)$ в момент времени $t = 0$. Считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что через нее тепло из стержня не уходит.

Требования, которым надо подчинить заданную функцию $\varphi(x)$, укажем в процессе решения задачи.

Как и ранее, будем использовать метод разделения переменных:

$$u(x;\ t) = X(x)\,T(t);$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv a^2 \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad T'(t) + \lambda\, a^2 T(t) = 0$$

В ранее разобранной задаче для определения функции $X(x)$ кроме дифференциального уравнения имели еще граничные условия. Именно вследствие этого мы и получали задачу Штурма-Лиувилля, а из нее – хотя и бесконечное, но дискретное множество значений λ, при которых существовали ненулевые функции $X(x)$. Теперь граничных условий у нас нет. Однако некоторое ограничение накладывает то обстоятельство, что наши решения должны иметь физический смысл и не выходить из области применимости тех физических законов, с помощью которых выводили дифференциальное уравнение задачи.

Наши решения – функции $X(x)$ и $T(t)$ – должны быть ***вещественными и ограниченными***. Так как

$$T(t) = C\, e^{-\lambda\, a^2 t},$$

то, для того чтобы $T(t)$ было вещественной функцией, нужно, чтобы λ было вещественным, а для ограниченности $T(t)$ нужна положительность λ (если λ – вещественное число), поэтому полагаем:

$$\lambda = \mu^2,\ X(x) = A_1 \cos\mu x + B_1 \sin\mu x,\ T(t) = C\, e^{-\mu^2 a^2 t},$$

$$u(x;\ t) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)\, e^{-\mu^2 a^2 t}.$$

По самому своему построению функция $u(x;\ t)$ является решением исходного уравнения при любых A и B. При этом для каждого вещественного μ можно выбрать свои значения A и B. Поэтому решением уравнения теплопроводности является функция

$$u(x;\ t) = (A(\mu)\cos\mu x + B(\mu)\sin\mu x)\ e^{-\mu^2 a^2 t}. \tag{2.44}$$

Но функция $u\,(x;\quad t)$, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию. В предыдущей задаче, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям, мы суммировали полученные решения, придавая все допустимые значения параметру λ, суммируя по всему спектру собственных значений. Естественно и теперь поступить аналогично. Но допустимые значения λ теперь – вся положительная полуось, а допустимые значения μ – вся числовая ось.

В этом случае рассмотрим функцию

$$u(x;\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\mu)\cos\mu x + B(\mu)\sin\mu x)\ e^{-\mu^2 a^2 t} d\mu, \tag{2.45}$$

Очевидно, что если выбором $A(\mu)$ и $B(\mu)$ будет обеспечена законность дифференцирования под знаком интеграла, то функция $u(x;\ t)$ будет удовлетворять исходному дифференциальному уравнению. Для того чтобы функция $u(x;\ t)$ удовлетворяла и начальному условию, должно также выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A(\mu)\cos\mu x + B(\mu)\sin\mu x)\ d\mu = \varphi(x). \tag{2.46}$$

Предположим теперь, что заданная функция $\varphi(x)$ в любом конечном промежутке удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, (второе условие означает конечность тепловой энергии стержня). Тогда эта функция представима в виде интеграла Фурье

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\mu\,(x-\xi)\,d\xi,$$

или с помощью преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a(\mu)\cos\mu x + b(\mu)\sin\mu x\right)\, d\mu, \tag{2.47}$$

$$a(\mu) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\cos\mu x\, dx,\ b(\mu) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin\mu x\, dx. \tag{2.48}$$

Сравнивая равенства (2.46) и (2.47), получаем выражения для коэффициентов:

$$A(\mu) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\mu\xi\, d\xi,\ B(\mu) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\mu\xi\, d\xi,$$

и потому решение принимает вид

$$u(x;\ t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\mu\,(x-\xi)\, d\xi\right)\, e^{-\mu^2 a^2 t} d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \left(\tfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\mu^2 a^2 t}\cos\mu\,(x-\xi)\, d\mu\right)\, d\xi$$

(так как $\cos\mu\,(\xi - x)$ – четная функция относительно ξ).

По существу задача уже решена. Построенная функция $u(x;\ t)$ есть решение исходного уравнения (и притом ограниченное), удовлетворяющее заданному начальному условию. Можно только преобразовать полученное выражение к более удобному виду.

Внутренний интеграл можно вычислить

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\mu^2 a^2 t}\cos\mu\,(\xi - x)\, d\mu.$$

Действительно, положим

$$a\,\mu\,\sqrt{t} = z,\ \mu\,(\xi - x) = \omega\, z,$$

откуда

$$d\mu = \frac{dz}{a\,\sqrt{t}},\ \omega = \frac{(\xi - x)\,\mu}{z} \Rightarrow \omega = \frac{\xi - x}{a\,\sqrt{t}} \quad \left|\frac{\mu}{z}\right|\frac{0}{0}\left|\frac{\infty}{\infty}\right. .$$

Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-\mu^2 a^2 t} \cos\mu\,(\xi - x)\,d\mu = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\omega\, z\, dz = \frac{1}{a\sqrt{t}} J(\omega). \tag{2.49}$$

Дифференцируя интеграл

$$J(\omega) = \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\omega\, z\, dz$$

по параметру ω, найдем, что

$$J'(\omega) = -\int_0^\infty e^{-z^2} z \sin\omega\, z\, dz,$$

причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного интеграла. Интегрируя теперь по частям, получаем

$$J'(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin\omega\, z & d\,u = \omega\cos\omega\, z \\ d\,v = e^{-z^2} z\, d\,z & v = \\ = -\frac{1}{2} e^{-z^2} & \end{array} \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{-z^2} \sin\omega\, z \,\Big|_0^\infty - \tfrac{1}{2}\omega \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\omega\, z\, dz =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\omega \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\omega\, z\, dz = -\tfrac{1}{2}\omega\_J(\omega).$$

Имеем дифференциальное уравнение для функции $J(\omega)$

$$J'(\omega) + \tfrac{1}{2}\omega\_J(\omega) = 0.$$

Решая его, получаем

$$\frac{d\,J(\omega)}{J(\omega)} + \tfrac{1}{2}\omega d\,\omega = 0 \Leftrightarrow \ln J(\omega) = -\tfrac{1}{4}\omega^2 + \ln C \Leftrightarrow J(\omega) = C\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Чтобы найти постоянную величину C, полагаем здесь $\omega = 0$. Это дает

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} d\,z = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому

$$J(\omega) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

и в силу (2.49)

$$\int_0^\infty e^{-a^2\mu^2 t} \cos\mu\,(\xi - x)\,d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,a\,\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\,a^2 t}}$$

и

$$u(x;\ t) = \frac{1}{2a\,\sqrt{\pi\,t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a^2 t}}\, d\xi. \qquad (2.50)$$

Полученная формула дает решение исходной задачи (2.42) – (2.43) и называется ***интегралом Пуассона***.

В самом деле, можно доказать, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ функция $u(x;\ t)$, определяемая формулой (2.50), имеет производные любого порядка по x и по t при t > 0, удовлетворяет уравнению (2.42) при t > 0 и $\forall x$.

Сформулируем следующий важный результат.

Теорема 9. *В классе ограниченных функций*

$$u(x;\ t) = \{|u(x;\ t)| < M,\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0\}$$

решение задачи Коши (2.42) – (2.43) *единственно и непрерывно зависит от начальной функции.*

2.4.1 Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Функция

$$G(x;\ t;\ \xi) = \frac{1}{2\,a\,\sqrt{\pi\,t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a^2 t}},$$

входящая в формулу Пуассона (2.50), называется ***фундаментальным решением*** уравнения теплопроводности. Рассматриваемая как функция аргументов x, t, она удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Фундаментальное решение имеет важный физический смысл, связанный с понятием теплового импульса.

Допустим, что начальное распределение $\varphi(x)$ температур таково:

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0, & |x - x_0| > \varepsilon. \end{array} \right.$$

Тогда в силу (2.50) распределение температур $u(x;\ t)$, $t > 0$, в стержне будет иметь вид

$$u(x;\ t) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\,a\sqrt{\pi\,t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a^2 t}}\,d\xi. \tag{2.51}$$

По теореме о среднем

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a^2 t}}\,d\xi = 2\,\varepsilon\, e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4\,a^2 t}},$$

где $\tilde{\xi} \in [x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon]$, так что из (2.51) имеем

$$u(x;\ t) = \frac{1}{2\,a\sqrt{\pi\,t}} e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4\,a^2 t}}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$u(x;\ t) = \frac{1}{2\,a\sqrt{\pi\,t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\,a^2 t}} = G(x;\ t;\ x_0).$$

Это означает, что функция $G(x;\ t;\ x_0)$ представляет распределение температур в стержне в момент $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ в точке $x = x_0$ имелся бесконечный пик температур при $\varepsilon \to 0$ $\varphi_\varepsilon(x) \to +\infty$), а в остальных точках стержня температура была равна нулю. Такое начальное распределение температур может быть приближенно реализовано следующим образом: в момент $t = 0$ к точке $x = x_0$ стержня на очень короткий промежуток времени подносится узкое пламя очень высокой температуры (тепловой импульс плотности $c\,\rho$).

Это начальное распределение температур описывается так называемой δ – ***функцией Дирака***, **обозначаемой** символом $\delta\,(x - x_0)$. Не являясь функцией в обычном смысле, δ -функция определяется формально при помощи соотношений

$$1)\delta\,(x - x_0) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \neq x_0, \\ +\infty, & x = x_0; \end{array} \right.$$

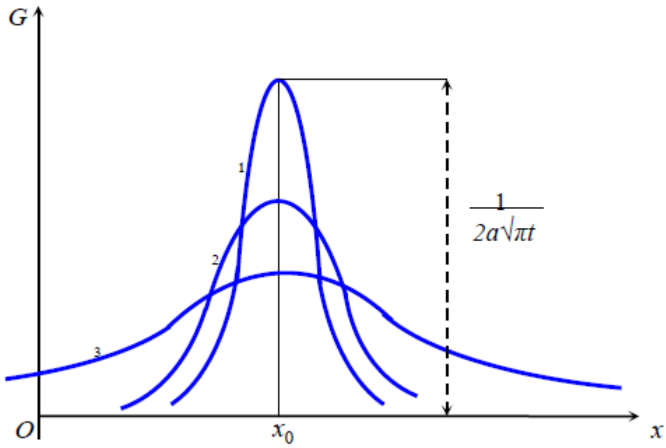

Рис. 2.2: график функции $G(x;\ t;\ x_0)$ при различных значениях t

2) $\int_\alpha^\beta \delta\,(x - x_0)\,dx = 1$ на любом интервале $(\alpha;\ \beta)$, содержащем точку x_0.

Основным свойством, определяющим δ– функцию, является следующее: для всякой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\delta\,(x - x_0)\,dx = \left[\begin{array}{ll} f(x_0), & x_0 \in (\alpha;\ \beta), \\ 0, & x_0 \notin (\alpha;\ \beta). \end{array}\right.$$

Таким образом, фундаментальное решение $G(x;\ t;\ x_0)$ является решением уравнения теплопроводности в бесконечном стержне при начальном распределении температуры

$$\varphi(x) = \delta\,(x - x_0).$$

График функции $G(x;\ t;\ x_0)$ при различных значениях $t > 0$ имеет вид (рис. 2.2). Кривые 1, 2, 3 соответствуют момента времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Рисунок показывает, как выравнивается температура в стержне после теплового импульса.

1. График функции $G(x;\ t;\ x_0)$ при любых значениях t симметричен относительно прямой $x = x_0$, максимум достигается при $x = x_0$ и он равен $\frac{1}{2\,a\,\sqrt{\pi\,t}}$.

2. Площадь под каждой из этих кривых равна

$$\frac{1}{2\,a\,\sqrt{\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\,a^2 t}}\,d\xi =$$

$$= \left\{ \frac{\xi - x}{2\,a\,\sqrt{t}} = \alpha\ d\alpha = \frac{d\xi}{2\,a\,\sqrt{t}} \quad \left| \frac{\xi}{\alpha} \right| \frac{-\infty}{-\infty} \left| \frac{\infty}{\infty} \right. \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1,$$

где $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\,\alpha = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ – интеграл Лапласа.

Это означает, что количество тепла, сообщенное стержню в начальный момент времени в результате теплового импульса остается неизменным с течением времени.

Решение $u(x;\ t) = \frac{1}{2a\,\sqrt{\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a^2 t}}\,d\xi$ задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном условии $u\,\big|_{\,t=0} = \varphi(x)$ можно рассматривать как результат суперпозиции температур, возникающих в точке x в момент времени t вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов интенсивности $\varphi(\xi)$ в точке ξ, приложенных в момент $t = 0$.

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ГИПЕР-БОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний (задача о колебаниях струны, мембраны, акустических колебаний упругого газа и т. д.). Характерной особенностью процессов, описываемых гиперболическими уравнениями, является конечная скорость распространения возмущений.

К простейшему волновому уравнению приводит задача о поперечных колебаниях струны. Струна – это тонкая, гибкая натянутая нить, закрепленная в двух точках. Если струну отклонить от положения равновесия (которое совпадает с осью Ox), то она будет совершать поперечные колебания. Будем обозначать смещение точек струны через u. Ясно, что u является функцией координаты x и времени t: $u = u(x;\ t)$.

Задача состоит в том, чтобы найти положение струны в любой момент времени, т. е. найти явный вид функции $u(x;\ t)$. Можно показать, что при малых отклонениях функция $u(x;\ t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных про-

изводных
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.1 Решение задачи Коши (начальной задачи) для неограниченной струны

3.1.1 Метод бегущих волн. Решение Даламбера

Займемся интегрированием уравнения свободных колебаний однородной струны
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{3.1}$$
Здесь $u(x;\ t)$ – смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u = u(x;\ t)$ дает форму струны в момент времени t.

Для решения этой задачи заменой независимых переменных приведем уравнение (3.1) к характеристикам. В нашем случае
$$a_{11} = a^2,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = -1,\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения характеристик:
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a},\ \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a}; \tag{3.2}$$
$x - at = C_1$ и $x + at = C_2$ – их общие интегралы.

Введем новые независимые переменные:
$$\xi = x - at,\ \eta = x + at. \tag{3.3}$$

Преобразованное уравнение будет иметь вид:
$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3.4}$$
В этом легко убедиться, вычислив производные u_{tt} и u_{xx},
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a\,(u_\eta - u_\xi),$$
$$u_{tt} = (u_t)_t = a^2 u_{\xi\xi} - 2\,a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta},$$

и подставив полученные выражения в уравнение (3.1).

Уравнение
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$$
интегрируется весьма просто. Запишем его в виде
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0.$$

Для решения полученного уравнения введем новую функцию ω по формуле
$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \omega,$$
Тогда $\omega_\eta = 0$. В этом уравнении ω_η можно рассматривать как обычную производную по η, а ξ при этом считать параметром. Тогда уравнение перепишется в виде:
$$\frac{d\omega}{d\eta} = 0.$$

Это уравнение первого порядка, решая его, получим $\omega = C(\xi)$, где $C(\xi)$ – произвольная функция от ξ.

В уравнении
$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = C(\xi)$$
переменная η рассматривается как параметр. Интегрируя полученное уравнение по ξ, найдем,
$$u(\xi;\ \eta) = \int C(\xi)\,d\xi + C_2(\eta),$$
где $C_2(\eta)$ – произвольная функция аргумента η. Полагая
$$\int C(\xi)\,d\xi = C_1(\xi),$$

получим

$$u(\xi;\ \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta).$$

Если найденную функцию дважды продифференцировать по ξ и η, то получим

$$u_\xi = C'_\xi(\xi),\ u_{\xi\eta} = (u_\xi)_\eta = 0$$

и, следовательно, найденная функция является решением канонического уравнения.

Возвращаясь к исходным переменным x, t, получим

$$u(x;\ t) = C_1(x - a\,t) + C_2(x + a\,t). \tag{3.5}$$

Таким образом, предположив существование решения, мы пришли к заключению, что оно должно иметь вид (3.7). Для того чтобы функции $u(x;\ t)$, определяемые формулой (3.7), являлись решениями уравнения (3.1), необходимо, чтобы функции $C_1(x-a\,t)$ и $C_2(x+a\,t)$ обладали производными первого и второго порядков. При этих условиях непосредственной проверкой убеждаемся, что каждая из функций $C_1(x-a\,t)$ и $C_2(x+a\,t)$ является решением уравнения (3.1). Это ***общее решение*** (***решение Даламбера***) волнового уравнения (3.1): всякое решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде (3.7) при соответствующем выборе функций C_1 и C_2. В частности, каждое слагаемое в формуле (3.7) также является решением уравнения (3.1).

Физическая интерпретация решения $u = C_1(x - a\,t)$. Функцию $u(x;\ t)$ будем называть ***отклонением*** в точке x в момент времени t. Рассмотрим точку x_0. Вообразим, далее, что из этой точки в положительном направлении оси Ox в момент времени $t = 0$ начинает двигаться наблюдатель со скоростью a, так что для абсциссы его положение имеем

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

откуда $x = a\,t + x_0$.

В момент времени t_1 он окажется в точке $x_1 = x_0 + a\,t_1$. Величина отклонения, которую наблюдатель будет видеть в точке x_1

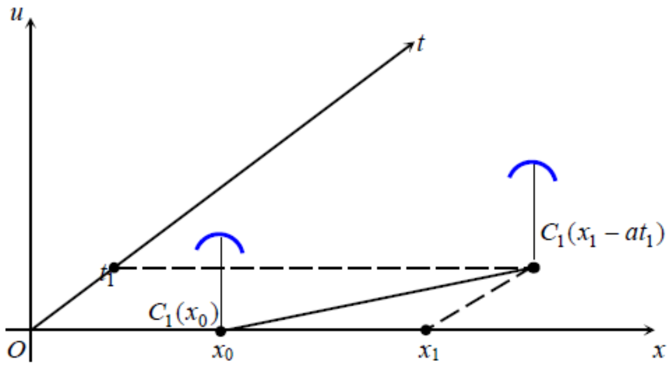

Рис. 3.1: прямая волна $u = C_1(x - a\,t)$

в момент времени t_1, будет равна

$$u = C_1(x_1 - a\,t_1) = C_1(x_0) = const.$$

Таким образом, наблюдатель в любой момент времени будет видеть в точке, где он находится, одну и туже величину отклонения, равную $C_1(x_0)$. Следовательно, начальный профиль $u(x;\ 0) = C_1(x)$ будет двигаться со скоростью a в положительном направлении оси Ox, как жесткая система, не изменяя формы (рис. 3.1). Тем самым, решение $u = C_1(x - a\,t)$ представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси Ox со скоростью a. Если за $C_1(\xi)$ взять $\sin\xi$, то будем иметь ***синусоидальную*** волну.

Ввиду этого решение $u = C_1(x - a\,t)$ называют ***прямой бегущей волной***. Аналогичное истолкование можно дать и решению $u = C_2(x + a\,t)$. Оно называется ***обратной бегущей волной***. При этом профиль движется как жесткая система в отрицательном направлении оси Ox со скоростью a.

Таким образом, любое решение уравнения (3.1) представляется в виде ***суперпозиции*** (наложения) прямой и обратной бегущих волн.

Описанный выше метод построения решения задачи Коши называется ***методом характеристик***, или ***методом бегущих волн***.

3.1.2 Решение задачи Коши для неограниченной струны

Задача Коши для неограниченной струны состоит в следующем: найти функцию $u(x;\ t) \in C^2$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$

и начальным условиям

$$u(x;\ 0) = \varphi_0(x),\ u_t(x;\ 0) = \varphi_1(x),\ -\infty < x < +\infty, \qquad (3.6)$$

где $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$. В начальный момент $t = 0$ функция $\varphi_0(x)$ определяет форму струны, а функция $\varphi_1(x)$ задает распределение скоростей u_t вдоль струны.
Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой

$$u(x;\ t) = C_1(x - a\,t) + C_2(x + a\,t). \qquad (3.7)$$

Определим функции C_1 и C_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (3.6). Имеем

$$u(x;\ 0) = \varphi_0(x) \equiv C_1(x) + C_2(x), \qquad (3.8)$$

$$u_t(x;\ 0) = \varphi_1(x) \equiv -a\ \left(C_1'(x) - C_2'(x)\right). \qquad (3.9)$$

Интегрируя последнее тождество, получим два уравнения для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = \varphi_0(x), \\ C_1(x) - C_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha + C, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная величина.

Из этих равенств находим

$$C_1(x) = \tfrac{1}{2}\varphi_0(x) - \tfrac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \tfrac{C}{2},$$

$$C_2(x) = \tfrac{1}{2}\varphi_0(x) + \tfrac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(\alpha)\,d\alpha - \tfrac{C}{2}.$$

Подставляя найденные выражения для C_1 и C_2 в формулу (3.7), получим

$$u(x;\ t) = \tfrac{1}{2}\varphi(x_0 - a\,t) - \tfrac{1}{2a}\int_0^{x-a\,t} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+\tfrac{1}{2}\varphi_0(x + a\,t) + \tfrac{1}{2a}\int_0^{x+a\,t} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha,$$

или

$$u(x;\ t) = \frac{\varphi_0(x - a\,t) + \varphi_0(x + a\,t)}{2} + \frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha \qquad (3.10)$$

– ***формулу Даламбера***.

Нетрудно проверить, что если $\varphi_0(x) \in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(R^1)$, то функция $u(x;\ t)$, определяемая формулой (3.10), удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.6), т. е. решает поставленную задачу.

Полученное решение единственно. В самом деле, если бы существовало другое решение задачи (3.1), (3.6), то оно также представлялось бы формулой (3.10) и, значит, совпадало с построенным решением.

3.1.3 Область зависимости

Из формулы Даламбера (3.10) видно, что значение решения $u(x;\ t)$ в точке M с координатами $(x;\ t)$ зависит только от значений функций φ_0 и φ_1 в точках отрезка

$$\Delta_M = [x - a\,t;\ x + a\,t]$$

оси Ox.

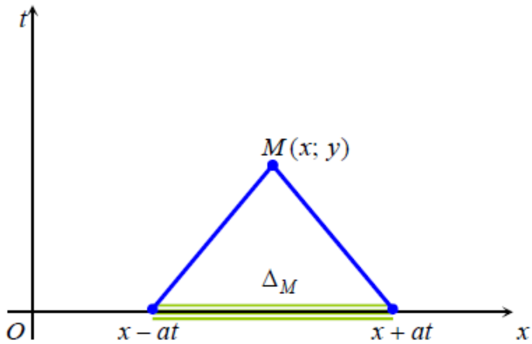

Рис. 3.2: область зависимости

Отрезок Δ_M оси Ox называют ***областью зависимости*** для точки M (рис. 3.2).

Фактически значения φ_0 входят в решение только в концах этого отрезка, в то время, как значения φ_1 берутся на всем отрезке Δ_M.

Говорят также, что решение $u(M)$ «не замечает» данных задачи вне Δ_M.

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

4.1 Определения. Постановка краевых задач

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т. е. не меняющихся во времени, процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1}$$

Оно описывает потенциал скорости безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии в потоке источников и стоков, и оно же справедливо для температуры однородной изотропной среды при установившемся движении тепла.

В случае функции $u = u(x;\ y)$ двух независимых переменных x, y уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\, y^2} = 0 \qquad (4.2)$$

В случае функции одного аргумента $u = u(x)$ имеем

$$\Delta\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} = 0 \qquad (4.3)$$

Решениями уравнения (4.3) являются функции

$$u = C_1 x + C_2,$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные величины.
Определение. Функция $u = u(x;\ y;\ z)$ называется ***гармонической*** в области $\Omega \subset R^3$, если $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в области Ω уравнению Лапласа (4.1).

Пусть область Ω ограничена поверхностью $\partial\Omega$. Типичной для уравнения Лапласа является задача: найти функцию $u(M),\ M \in \Omega$, гармоническую 2 Ω и удовлетворяющую $= 0$ $\partial\Omega$ граничному условию, которое может быть одного из следующих видов:

1. $u\,|_{\partial\Omega} = f_1(M),\ M \in \partial\Omega$**,** – ***первая краевая задача***, или ***задача Дирихле*** (определить функцию, гармоническую в области Ω, если заданы ее значения на поверхности $\partial\Omega$ этой области);

2. $\left.\frac{\partial\, u}{\partial\, n}\right|_{\partial\Omega} = f_2(M),\ M \in \partial\Omega$, – ***вторая краевая задача***, или ***задача Неймана*** определить функцию, гармоническую в области Ω, если заданы значения ее нормальной производной на поверхности $\partial\Omega$ области);

3. $\left.\left(\frac{\partial\, u}{\partial\, n} + h\, u\right)\right|_{\partial\Omega} = f_3(M),\ M \in \partial\Omega$, – ***третья краевая задача***.

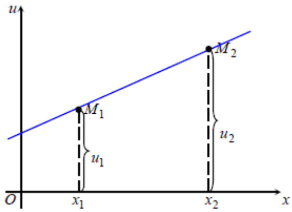

Рис. 4.1: одномерные гармонические функции

Здесь $f_1,\ f_2,\ f_3,\ h$ – заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная в направлении внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Геометрический смысл задачи Дирихле для одномерного уравнения Лапласа тривиален. Одномерные гармонические функции $u = C_1x+C_2$ суть прямые линии, и задача Дирихле сводится к следующей задаче: провести прямую через две точки $M_1(x_1;\ u_1)$ и $M_2(x_2;\ u_2)$ (рис. 4.1).

В зависимости от того, где ищется решение задачи – внутри области, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$ или в области, расположенной вне поверхности $\partial\Omega$, различают ***внутренние*** и ***внешние*** краевые задачи для уравнения $\Delta\, u = 0$.

Другими представителями эллиптических уравнений являются ***уравнение Пуассона***

$$\Delta\, u = f(x;\ y;\ z),$$

которое отвечает равновесному состоянию под действием внешней силы с плотностью, пропорциональной $f(x;\ y;\ z)$, и ***уравнение Гельмгольца***

$$\Delta\, v + k^2 v = 0.$$

Как и для уравнения Лапласа, для уравнений Пуассона и Гельмгольца типичными являются 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи.

4.2 Фундаментальные решения уравнений Лапласа

Декартовы, цилиндрические и сферические координаты являются наиболее употребительными. Оператор Лапласа в декартовых координатах $(x;\ y;\ z)$ определяется формулой

$$\Delta\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в цилиндрических координатах $(r;\ \varphi;\ z)$

$$\Delta\, u \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в сферических координатах $(r;\ \theta;\ \varphi)$

$$\Delta\, u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от переменной r.

Пользуясь сферическими координатами, видим, что решение $u = u(r)$, обладающее сферической симметрией, определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\,r}\left(r^2\frac{d\,u}{d\,r}\right) = 0$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2\ (C_1,\ C_2 = const)$$

Полагая, например, $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, получаем функцию

$$u_0(r) = \frac{1}{r},$$

которую называем ***фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве***. Функция $u_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где u_0 обращается в бесконечность.

Пользуясь цилиндрическими координатами, находим, что решение $u = u(r)$, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$u = C_1 \ln r + C_2$$

Выбирая $C_1 = -1,\ C_2 = 0$, будем иметь

$$u_0(r) = \ln\frac{1}{r}.$$

Функцию $u_0(r)$ называют ***фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости***.

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $r = 0$, где $u = \ln\frac{1}{r}$ обращается в бесконечность.

4.3 Формулы Грина

Будем исходить из формулы Гаусса-Остроградского

$$\oint_{\partial\Omega} (a, n^0)\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} a\, d\Omega. \tag{4.4}$$

Положим $a = v \operatorname{grad} u$, и будем считать, что функции u, v имеют непрерывные вторые производные в области Ω и непрерывны вместе с первыми производными в ее замыкании $\bar\Omega = \Omega \bigcup \partial\Omega$, т. е.

$$u,\ v \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar\Omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\Omega = \iiint_{\Omega} gradu \cdot gradv\, d\Omega.$$

Применяя очевидные тождества

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) - u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

перепишем J в виде

$$J = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)\, d\Omega -$$

$$- \iiint_\Omega u\,\Delta\, v\, d\Omega.$$

Преобразуем, первое из слагаемых в правой части по формуле Гаусса-Остроградского

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\, d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\, dS,$$

где

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x},\ Q = u\frac{\partial v}{\partial y},\ R = u\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\alpha = (n^0, Ox), \beta = (n^0, Oy), \gamma = (n^0, Oz).$$

Имеем

$$J = \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\cos\left(n^0, Ox\right) + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos\left(n^0, Oy\right) + u\frac{\partial v}{\partial z}\cos\left(n^0, Oz\right)\right)\, dS -$$

$$- \iiint_\Omega u\,\Delta\, v\, d\Omega$$

или

$$J = \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \iiint_\Omega u\,\Delta\, v\, d\Omega,$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n^0, Ox) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n^0, Oy) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n^0, Oz)$$

– производная по направлению, n^0– единичный вектор внешней нормали к гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности $\partial\Omega$.

Итак, приходим к предварительной формуле Грина

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \iiint_\Omega u\,\Delta\,v\,d\Omega, \tag{4.5}$$

Из формулы (4.5) вытекает, что

$$\iiint_\Omega (grad u \cdot grad v + v\,\Delta\,u)\;d\Omega = \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS. \tag{4.6}$$

Это – ***первая формула Грина***.

Левая часть равенства (4.5) не меняется при перестановке функций u и v, а потому то же относится и к правой части, т. е. мы можем написать

$$\iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \iiint_\Omega u\,\Delta\,v\,d\Omega = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \iiint_\Omega v\,\Delta\,u\,d\Omega,$$

откуда находим

$$\iiint_\Omega (u\,\Delta\,v - v\,\Delta\,u)\,d\Omega = \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{4.7}$$

Это – ***вторая формула Грина***.

Наконец, полагая в (4.6) $v = u$, получим

$$\iiint_\Omega \left((grad u)^2 + u\,\Delta\,u\right)\;d\Omega = \iint_{\nabla\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS. \tag{4.8}$$

Это – ***третья формула Грина***.

Иногда пользуются не внешней, а внутренней нормалью. При этом надо только изменить знаки у производных по нормали в правой части формул.

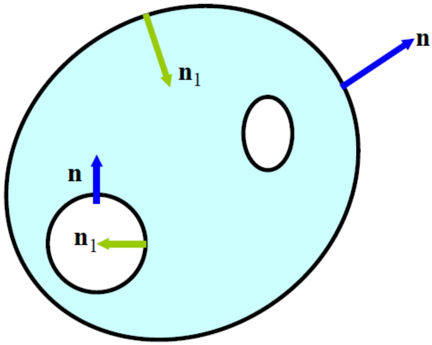

Рис. 4.2: здесь n_i – внутренняя нормаль

Область Ω может быть ограничена и несколькими поверхностями $\partial\Omega$.

Формулы Грина применимы и в этом случае, но только поверхностные интегралы, стоящие в правых частях этих формул, надо брать по всем поверхностям, ограничивающим область Ω. При этом нормаль n, внешняя по отношению к области Ω, будет на поверхностях, ограничивающих эту область изнутри, направлена внутрь поверхности.

4.4 Основная интегральная формула Грина

Мы установили, что функция

$$v\,(M) = \frac{1}{r_{M\,M_0}},$$

где $r_{M\,M_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – расстояние между точками $M(x;\ y;\ z)$ и $M_0(x_o;\ y_0;\ z_0)$, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\,u = 0$$

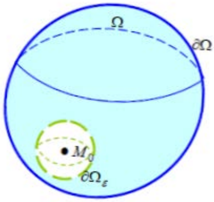

Рис. 4.3:

для

$$\forall M,\ \ M \neq M_0.$$

Пусть Ω – область в R^3 с границей $\partial\Omega$ и $u(M) \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$. Пусть M_0 – некоторая внутренняя точка области Ω. Поскольку функция $v(M) = \frac{1}{r_{M\,M_0}}$ разрывна в точке $M_0 \in \Omega$ непосредственно применить вторую формулу Грина (4.22) к функциям u и v нельзя.

Рассмотрим область $\Omega_1 = \Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ с границей $\partial\Omega\bigcup\partial\Omega_\varepsilon$, получающуюся из области Ω выбрасыванием шара Ω_ε радиуса ε с центром в точке M_0 и поверхностью $\partial\Omega_\varepsilon$ (рис. 4.3).

Область $\Omega_1 = \Omega\backslash\Omega_\varepsilon$ особенностей функции $v(M)$ не содержит. Применяя вторую формулу Грина к функциям $u(M)$ и $v(M) = \frac{1}{r_{M\,M_0}}$ в области Ω_1, получаем

$$\iiint_{\Omega_1}\left(u\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\Delta\,u\right)d\Omega =$$

$$= \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial\,n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\,u}{\partial\,n}\right)dS + \iint_{\partial\Omega_{\varepsilon 1}}\left(u\frac{\partial}{\partial\,n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\,u}{\partial\,n}\right)dS =$$

$$= \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial\,n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\,u}{\partial\,n}\right)dS + \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial\,n}\left(\frac{1}{r}\right)dS - \iint_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial\,u}{\partial\,n}\,dS. \tag{4.9}$$

Преобразуем, второй интеграл в правой части равенства (4.9). На сфере $\partial\Omega_\varepsilon$ нормаль n направлена внутрь сферы прямо про-

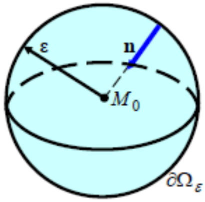

Рис. 4.4:

тивоположно направлению радиуса r, так что производная по направлению нормали $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$ под знаком интеграла по $\partial\Omega_\varepsilon$ есть взятая с обратным знаком производная по r.

Вычисляя производную в направлении внешней нормали к области $\Omega_1 = \Omega \backslash \Omega_\varepsilon$ на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$ (рис. 4.4), найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

откуда, воспользовавшись теоремой о среднем для интеграла по поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$, получим

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} u\, dS = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\,\pi\varepsilon^2 \tilde{u} = 4\,\pi\,\tilde{u}, \quad (4.10)$$

где $\tilde{u}$ – среднее значение функции $u(M)$ на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$.

Преобразуем теперь третий интеграл в правой части (4.9)

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} 4\,\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\bullet} = 4\,\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\bullet}, \quad (4.11)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\bullet}$ – среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере $\partial\Omega_\varepsilon$. Подставляя выражения (4.10) и (4.11) в формулу (4.9) и учитывая, что $\Delta\left(\frac{1}{r_{M\,M_0}}\right) \equiv 0$ в Ω_1, будем иметь

$$\iiint_{\Omega_1}\left(-\frac{1}{r}\right)\Delta u\,d\Omega = \\ = \iint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + 4\pi\tilde{u} - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\bullet}. \tag{4.12}$$

Устремим теперь радиус ε к нулю. Тогда получим:
1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{u} = u(M_0)$, т. к. $u(M)$ – непрерывная функция, а $\tilde{u}$ – ее среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_0;
2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\,\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\bullet} = 0$, т. к. из непрерывности первых производных функции $u(M)$ внутри Ω вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

в окрестности точки ;
3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega_1}\left(-\frac{1}{r}\right)\Delta u\,d\Omega = -\iiint_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}d\Omega$ по определению несобственного интеграла.

В результате указанного предельного перехода в (4.12) при $\varepsilon\to 0$ приходим к основной интегральной формуле Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}d\Omega. \tag{4.13}$$

Таким образом, всякая функция $u(M)\in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$ представима как сумма трех интегралов

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}d\Omega,\ \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS,\ -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

которые называются ***объемным потенциалом, потенциалом простого*** и ***двойного слоя*** соответственно.

Если $u(M)$ – гармоническая в Ω функция, то $\Delta u\equiv 0$ и формула (4.13) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS \tag{4.14}$$

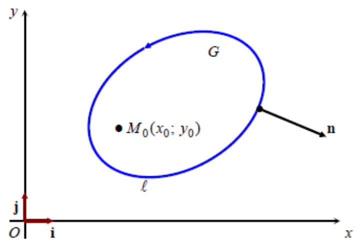

Рис. 4.5:

(точка M_0 внутри Ω). Это – основная формула теории гармонических функций. Она показывает, что значение гармонической функции в любой внутренней точке области Ω выражается через значение этой функции, ее нормальной производной на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Из формулы (4.21) следует

Утверждение. *Всякая гармоническая в области Ω функция $u(M)$ есть сумма потенциалов простого и двойного слоя.*

Для уравнения Лапласа на плоскости фундаментальное решение имеет вид

$$v_0 = \ln\frac{1}{r}.$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получаем основную интегральную формулу для гармонической функции двух аргументов:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\ell}\left(\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)d\ell. \tag{4.15}$$

Здесь ℓ – граница области G, n – вектор внешней нормали к границе (рис. 4.5).

Таким образом, всякая гармоническая в области G функция $u(x;\ y)$ есть сумма двух потенциалов

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\ell}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\ell, -\frac{1}{2\pi}\oint_{\ell}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\,d\ell,$$

логарифмического потенциала простого слоя и ***логарифмического потенциала двойного слоя*** соответственно.

4.5 Свойства гармонических функций

Теорема 5.1. *Если $u(M)$ – гармоническая в области Ω функция, непрерывная вместе с первыми производными в $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, то ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условию*

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{4.16}$$

В самом деле, применяя вторую формулу Грина

$$\iiint_{\Omega} (u\,\Delta\,v - v\,\Delta\,u)\,d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

к гармонической функции $u(M)$ и к функции $v(M) \equiv 1$, получаем

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Это свойство гармонических функций выражает факт отсутствия источников внутри области Ω.

Теорема 10. *Если существует решение задачи Неймана для уравнения Лапласа, то оно определено с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что решение $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Пусть решений два: $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда

$$\Delta\,u_1 \equiv 0, \Delta\,u_2 \equiv 0,$$

$\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f(P)$ и $\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f(P)$.

Разность $u = u_1 - u_2$ будет решением задачи

$$\Delta\,u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для такой функции $u(M)$ третья формула Грина

$$\iiint_{\Omega} \left((gradu)^2 + u\,\Delta\,u\right)\,d\Omega = \iint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

дает

$$\iiint (gradu)^2 = 0,$$

или

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\,d\Omega = 0.$$

В силу непрерывности и неотрицательности подынтегральной функции отсюда следует, что ,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \equiv 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$$

так что $u(x;\ y;\ z) \equiv 0$ и, следовательно, $u_1(M) - u_2(M) \equiv const$.

Подчеркнем, что в задаче Неймана функция $f(P),\ P \in \partial\Omega$, должна удовлетворять условию

$$\iint_{\partial\Omega} f(P)\,dS = 0. \tag{4.17}$$

Если это условие не выполнено, задача Неймана решения не имеет.

Теорема 11 (о среднем значении гармонической функции)**.** . *Если функция $u(M)$ – гармоническая внутри шара радиуса R с центром в точке M_0 и непрерывна вместе с первыми производными вплоть до его границы $\partial\Omega_R$, то значение функции $u(M)$ в центре M_0 сферы $\partial\Omega_R$ равно среднему арифметическому всех значений $u(M)$ на этой сфере,*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2}\iint_{\partial\Omega_R} u(P)\,dS. \tag{4.18}$$

Для доказательства применим основную интегральную формулу теории гармонических функций

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS$$

к сфере $\partial\Omega_R$. Для этой сферы (4.16) $r = M_0 P = R$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ и потому

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{1}{R^2} \right) dS. \tag{4.19}$$

В силу теоремы 5.1 имеем

$$\iint_{\partial\Omega_R} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0,$$

и формула (4.19) дает

$$u(M_0) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2} \int_{\partial\Omega_R} u(P)\, dS.$$

Для одномерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

эта теорема является теоремой о средней линии трапеции: длина отрезка $M_0 M$ равна полусумме длин отрезков $a\,A$ и $b\,B$ (рис. 4.7).

Теорема 12 (об экстремальных значениях гармонической функции)**.** *Гармоническая в области* Ω *функция* $u(M)$*, не равная тождественно постоянной, не может иметь локальных экстремумов внутри области* Ω*.*

Будем вести доказательство методом рассуждения от противного. Пусть в точке $M_0 \in \Omega$ функция $u(M)$ имеет, например, локальный максимум. Иными словами, неравенство

$$u(M_0) > u(M) \tag{4.20}$$

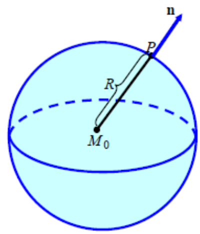

Рис. 4.6:

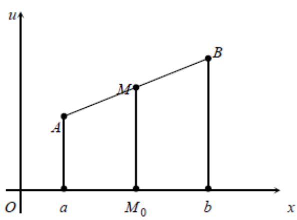

Рис. 4.7: одномерный случай теоремы Лапласа

выполняется во всех точках M шара достаточно малого радиуса с центром в точке M_0. По теореме о среднем значении гармонической функции

$$u(M_0) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2} \iint_{\partial\Omega_R} u(M)\,dS$$

($\partial\Omega_R$ – сфера в указанном шаре), откуда по теореме о среднем для двойного интеграла получаем, что

$$u(M_0) = \frac{1}{4\,\pi\,R^2} \cdot 4\,\pi\,R^2 u(M_C) = u(M_C).$$

Полученное противоречие с неравенством (4.20) доказывает теорему.

Таким образом, функция $u(M)$, гармоническая в ограниченной области Ω и непрерывная в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе $\partial\Omega$ области Ω (принцип максимального значения).

Отсюда легко получаем следующие теоремы.

Теорема 13 (теорема единственности)**.** *Решение внутренней задачи Дирихле*

$$\Delta\, u = 0,\ u \Bigg|_{\partial\Omega} = f(P),\ P \in \partial\Omega,$$

непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$*, единственно.*

Пусть две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$ являются решениями задачи. Тогда их разность

$$u(M) = u_1(M) - u_2(M)$$

является гармонической 2 Ω функцией, непрерывной в $\bar{\Omega}$ и равной нулю в $\partial\Omega$. По теореме 7 об экстремальных значениях отсюда следует, что наибольшее и наименьшее значения $u(M)$ в Ω равны нулю.

Следовательно, $u(M) = u_1(M) - u_2(M) \equiv 0$ в Ω, т. е. $u_1(M) \equiv u_2(M)$.

Теорема 14 (о непрерывной зависимости решений внутренней краевой задачи от граничных значений)**.** *Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$– решения задач*

$$\Delta\, u = 0, \qquad\qquad \Delta\, u = 0,$$

$$\mathrm{u}\,\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_1(P) \qquad \mathrm{u}\,\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_2(P),$$

непрерывные в $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$. *Тогда если всюду на границе $\partial\Omega$ выполняется неравенство*

$$|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \varepsilon,\ P \in \partial\Omega,$$

то всюду в области Ω

$$|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon,\ M \in \Omega.$$

Функция $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является гармонической 2 Ω, непрерывна 2 $\bar{\Omega}$, и

$$u\,\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_1(P) - \varphi_2(P).$$

Поскольку $-\varepsilon < \varphi_1(P) - \varphi_2(P) < \varepsilon$, то по теореме 5.4 об экстремальных значениях наибольшее и наименьшее значения функции $u(M)$ заключены между $-\varepsilon$ и ε. Следовательно,

$$|u_1(M) - u_2(M)|\ < \varepsilon \quad \forall M \in \Omega.$$

4.6 Метод функций Грина

Одним из методов решения краевых задач для уравнений эллиптического типа является ***метод разделения переменных*** (***метод Фурье***).

Другим методом решения краевых задач для уравнений эллиптического типа является ***метод функций Грина***.

4.6.1 Определение функции Грина

Пусть область Ω ограничена поверхностью $\partial\Omega$. Будем рассматривать задачу Дирихле: найти функцию $u(M),\ M \in \Omega$, гармоническую на Ω и удовлетворяющую на $\partial\Omega$ граничному условию.

$$\Delta\, u(M) = 0,\ M \in \Omega$$

$$u\mid_{\partial\Omega} = f_1(P),\ P \in \partial\Omega.$$

Основная интегральная формула Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{4\,\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\, u}{\partial\, n} - u \frac{\partial}{\partial\, n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\,S \qquad (4.21)$$

непосредственно не дает решения задачи, так как под знак двойного интеграла входит не только само значение u, для которого значения на поверхности заданы, но и $\frac{\partial\, u}{\partial\, n}$. Надо исключить второе слагаемое, чтобы получить решение задачи.

Пусть M_0 – фиксированная точка внутри области Ω. Пусть нам известна функция $G_1(M;\ M_0)$, обладающая следующими двумя свойствами:

1. как функция переменной точки M, это есть гармоническая функция внутри области Ω;
2. на поверхности $\partial\Omega$ ее предельные значения равны $\frac{1}{r}$, где r – расстояние переменной точки до точки M_0.

Пусть $u(M)$– искомое решение задачи Дирихле. Применяя вторую формулу Грина

$$\iiint_{\Omega} (u\,\Delta\, v - v\,\Delta\, u)\, d\,\Omega = \iint_{\partial\Omega}\left(u \frac{\partial\, v}{\partial\, n} - v\frac{\partial\, u}{\partial\, n}\right) d\,S \qquad (4.22)$$

к гармоническим функциям $u(M)$ и $G_1(M;\ M_0)$, можем написать

$$0 = \iint_{\partial\Omega}\left(u(M) \frac{\partial\, G_1(M;\ M_0)}{\partial\, n} - G_1(M;\ M_0)\frac{\partial\, u(M)}{\partial\, n}\right) d\,S,$$

или в силу предельного условия для $G_1(M;\ M_0)$

$$0 = \iint_{\partial\Omega}\left(u(M) \frac{\partial\, G_1(M;\ M_0)}{\partial\, n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\, u(M)}{\partial\, n}\right) d\,S.$$

Умножая это равенство на величину $\frac{1}{4\pi}$, и складывая с формулой (4.21), получим

$$u(M_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(u(M) \frac{\partial G_1(M;\ M_0)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u(M)}{\partial n} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(M)}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS$$

или

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} - G_1(M;\ M_0) \right) dS. \qquad (4.23)$$

Эта формула и дает решение задачи Дирихле, если известна функция $G_1(M;\ M_0)$. Разность, стоящая в скобках

$$G(M;\ M_0) = \frac{1}{r} - G_1(M;\ M_0) \qquad (4.24)$$

называется функцией Грина для области, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$ с полюсом в точке M_0. Из определения функции $G_1(M;\ M_0)$вытекают основные свойства функции Грина:

1. $G(M;\ M_0)$ есть гармоническая функция внутри области Ω, кроме точки M_0, где она обращается в ∞, причем разность $G(M;\ M_0) - \frac{1}{r}$ остается ***конечной*** и является везде внутри Ω гармонической функцией

2. Предельные значения $G(M;\ M_0)$на поверхности $\partial\Omega$ равны нулю.

3. Функция Грина обладает свойством симметрии, т. е. $G(M;\ M_0) = G(M_0;\ M)$.

Нетрудно видеть, что может существовать только одна функция Грина с указанными свойствами. Действительно, если бы их было две: $G^1(M;\ M_0)$ и $G^2(M;\ M_0)$, то их разность была бы гармонической везде внутри Ω и имела бы нулевые предельные значения $= 0\ \partial\Omega$, т. е. была бы тождественно равной нулю внутри Ω.

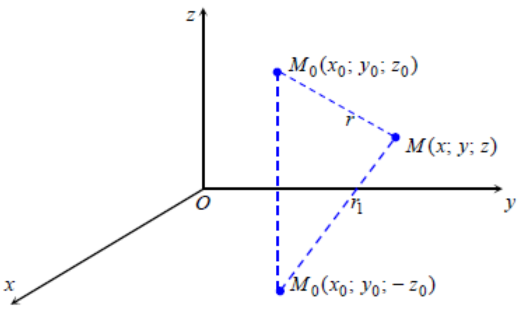

Рис. 4.8:

4.6.2 Построение функций Грина. Задача Дирихле для полупространства

Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти решение исходной задачи Дирихле. Одним из методов построения функций Грина является ***метод отражения***.

Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z > 0$

$$\Delta u = 0,\ \Omega = \{-\infty < x;\ y < +\infty,\ \ 0 < z < +\infty\},$$

$$u(x;\ y;\ 0) = \varphi(x;\ y),\ -\infty < x;\ y < +\infty.$$

Пусть r – расстояние от переменной точки $M(x;\ y;\ z)$ до особой точки функции Грина $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, причем $z_0 > 0$, и r_1 – расстояние от переменной точки $M(x;\ y;\ z)$ до точки $M_1(x_0;\ y_0;\ -z_0)$ симметричной с точкой $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ относительно плоскости $z = 0$ (рис. 4.8).

Поскольку

$$G(M;\ M_0) = \frac{1}{r} - G_1(M;\ M_0),$$

то задача сводится к отысканию функции $G_1(M;\ M_0)$, гармонической в рассматриваемом полупространстве ($z>0$) и равной $\frac{1}{r}$ на его границе ($z=0$), т. е.

$$G_1\Big|_{z=0}=\frac{1}{r}.$$

Дробь $\frac{1}{r_1}$ есть гармоническая функция точки M в полупространстве $z>0$, ибо точка M_1 лежит вне этого полупространства. Если точка M находится на плоскости $z=0$, то, очевидно,

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}.$$

Таким образом, функция Грина в рассматриваемом случае имеет вид

$$G(M;\ M_0)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}.$$

Направление нормали к плоскости $z=0$, внешней по отношению к полупространству $z>0$, есть направление противоположное оси Oz, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial z}$$

и формула (4.23) дает

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x;\ y)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\Big|_{z=0}\,dx\,dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)=$$

$$=-\frac{z-z_0}{\sqrt{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^3}}+$$

$$+\frac{z+z_0}{\sqrt{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right)^3}}=$$

$$= \frac{2z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{z=0}.$$

Окончательно

$$u(M_0) = \frac{z_0}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x;\ y) \frac{dx\,dy}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.25}$$

Интеграл (4.25) называется интегралом Пуассона для полупространства. Следует иметь в виду, что интеграл (4.25) несобственный и для его сходимости граничные значения $\varphi(x;\ y)$ должны достаточно хорошо вести себя в ∞, например, быть ограниченными.

Оглавление