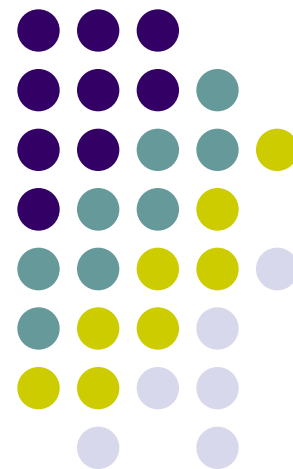
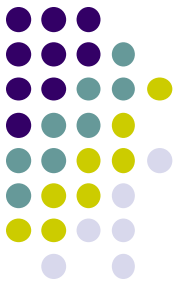


Завгородний В.Н. Оптимизация задач нелинейного программирования

учебное пособие: презентация.—
СПб: РГГМУ, 2025. — 48 с.—
Текст: электронный



Содержание



Особенности задач нелинейного программирования	3
Задача выпуклого программирования	13
<i>Выпуклые множества</i>	
<i>Выпуклые и вогнутые функции</i>	
Метод неопределённых множителей Лагранжа	18
Теорема Куна-Таккера. Общая теорема математического программирования	25
Условия оптимальности задачи квадратичного программирования	29

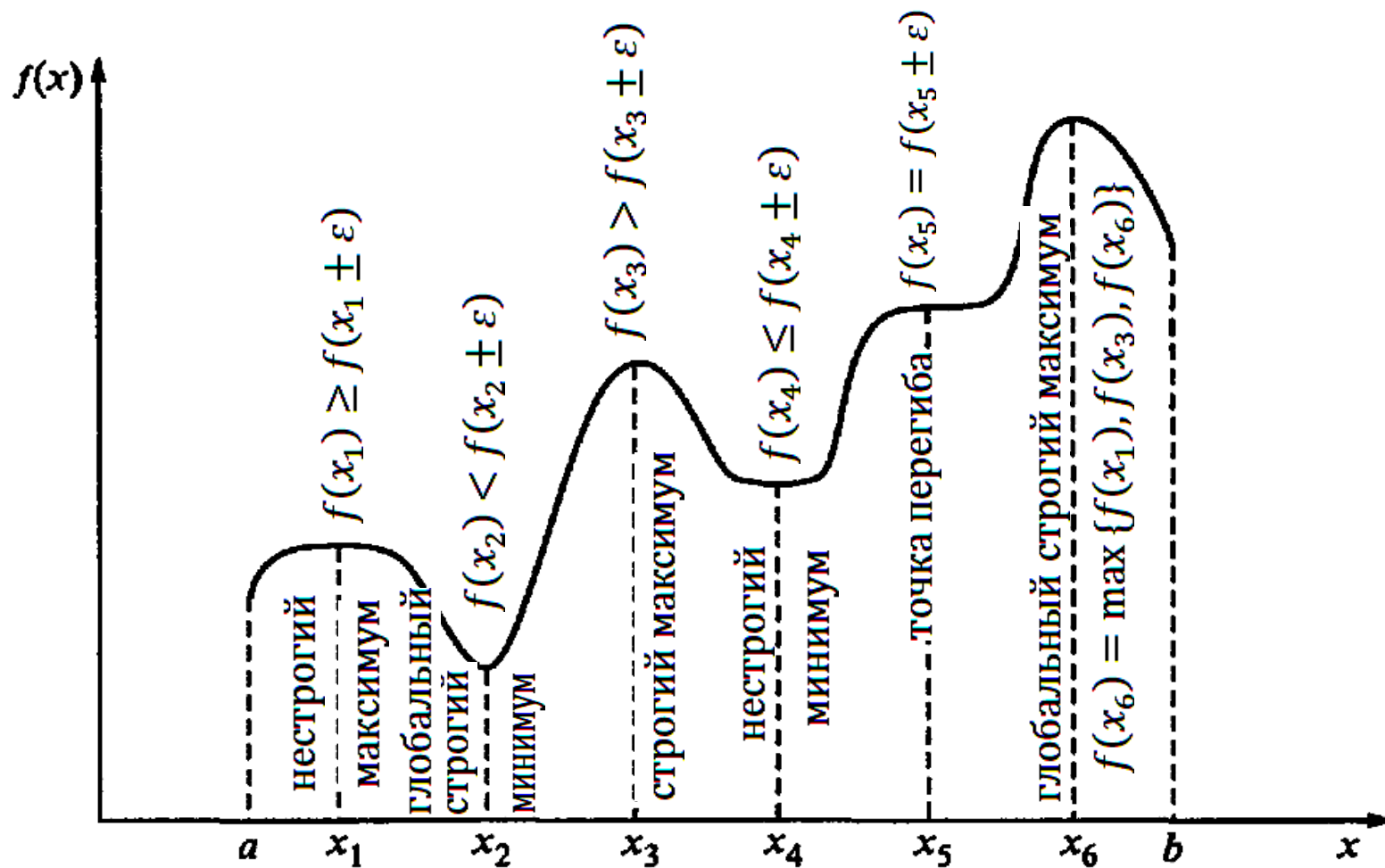
Общая задача нелинейного программирования



- Задача нахождения максимума (минимума) целевой функции $f(x)$ на множестве X допустимых решений, определяемом системой ограничений $X:G=\{g_i\}$, где хотя бы одна из функций $f(x)$, $g_i(x)$ нелинейная, называется общей задачей нелинейного программирования (**NLP**, *NonLinear Programming*):

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \max(\min), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_i(x) &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1, \\ g_i(x) &\geq b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad m_1 \leq m_2, \\ g_i(x) &= b_i, \quad i = m_2 + 1, \dots, m, \quad m_2 \leq m, \end{aligned} \right\}$$
$$x \geq 0.$$

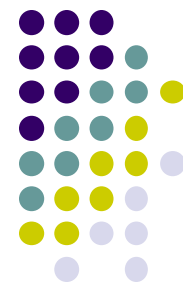
Экстремумы нелинейной функции: локальные, глобальные, условные



- Необходимое условие экстремума.** Если в точке X^* функция $z = f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю:

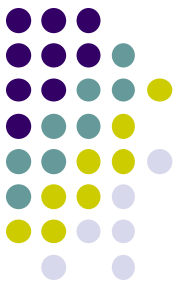
$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Метод безусловной оптимизации



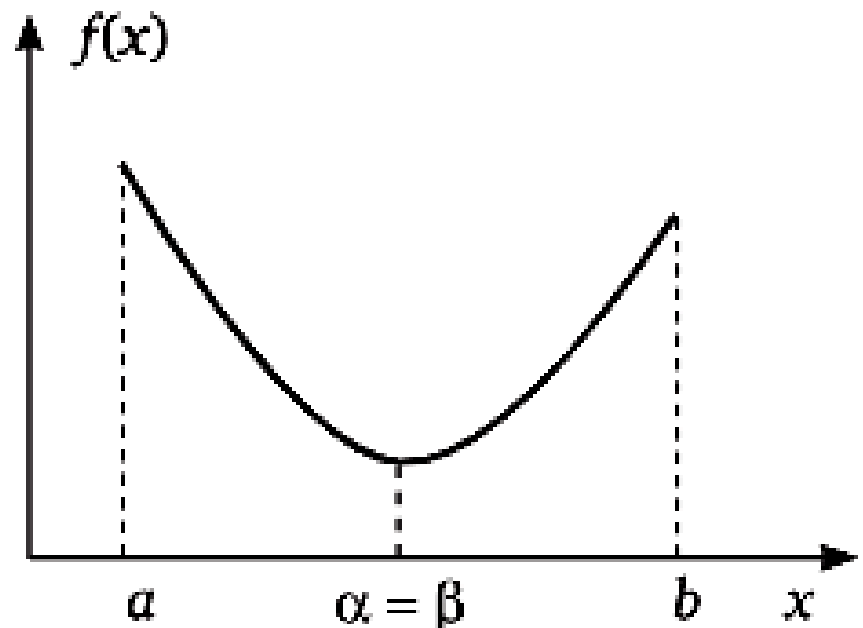
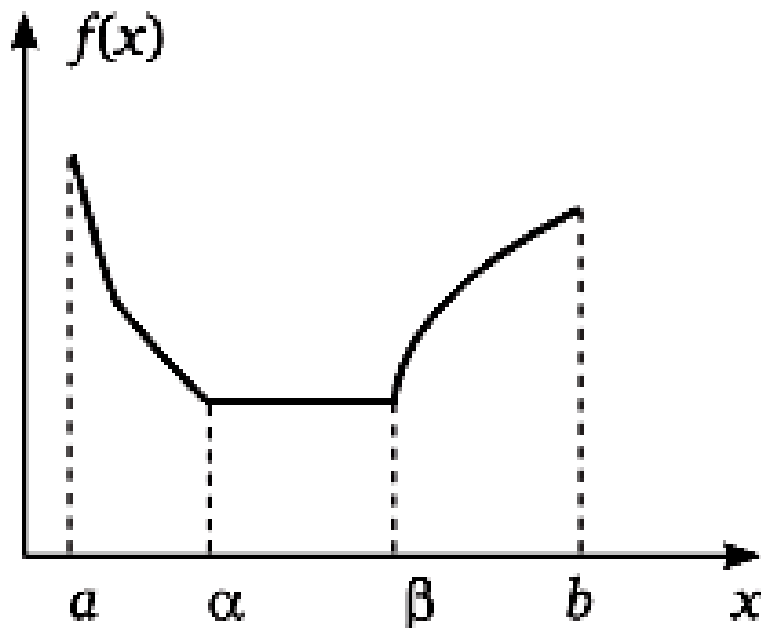
- Говорят, что функция $z = f(X)$ имеет в точке X^0 заданной области D глобальный максимум (наибольшее значение) или глобальный минимум (наименьшее значение), если неравенство $f(X) \leq f(X^0)$ или $f(X) \geq f(X^0)$ соответственно выполняется для любой точки $X \in D$.
- Если область D замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция $z = f(X)$ достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области (**теорема Вейерштрасса**) .
- Следовательно, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $z = f(X)$ в области D , нужно:
 - 1) найти все стационарные точки внутри области D и вычислить значения функции в них;
 - 2) исследовать функцию на экстремум на границе области D ;
 - 3) сравнить значения функции, полученные в п. 1 и 2: наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области.

Класс унимодальных (одноэкстремальных) функций

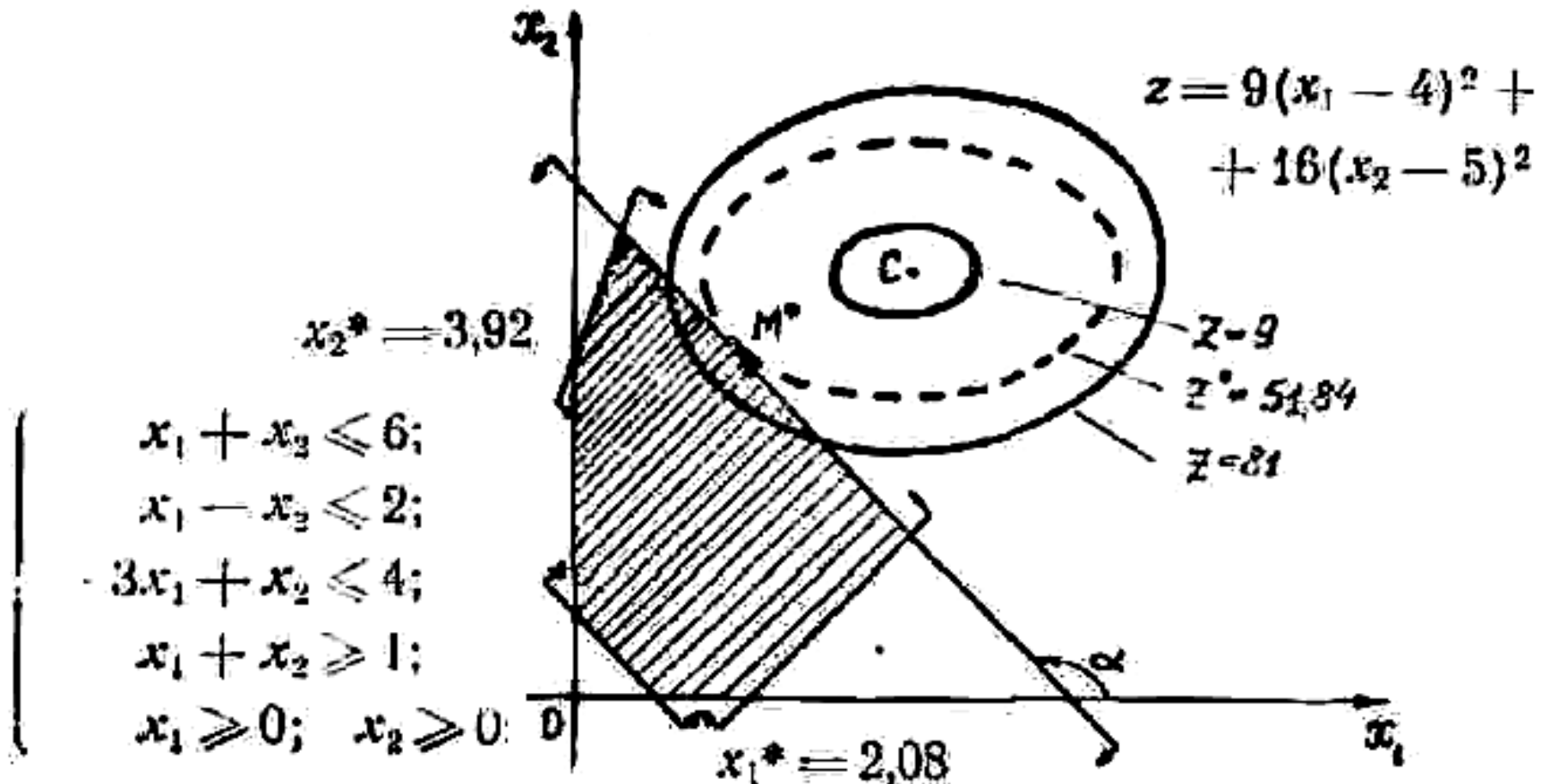
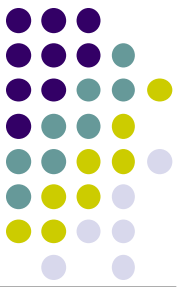


• Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и существуют такие α и β ($a \leq \alpha \leq \beta \leq b$), что:

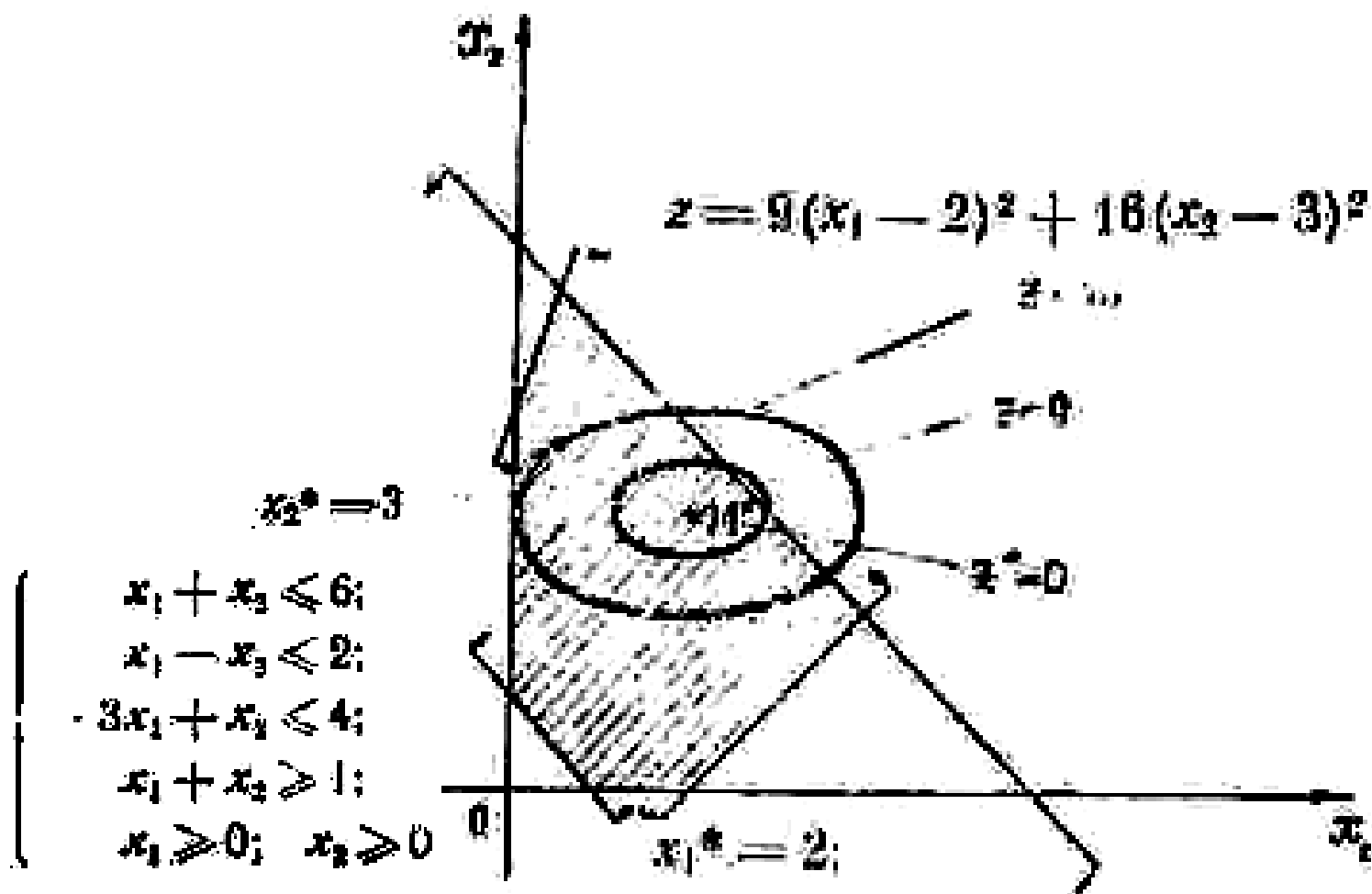
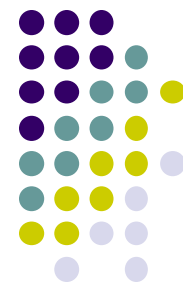
- 1) на отрезке $[a, \alpha]$ при $a < \alpha$ $f(x)$ монотонно убывает;
- 2) на отрезке $[\beta, b]$ при $\beta < b$ $f(x)$ монотонно возрастает;
- 3) существует минимум $f(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$.



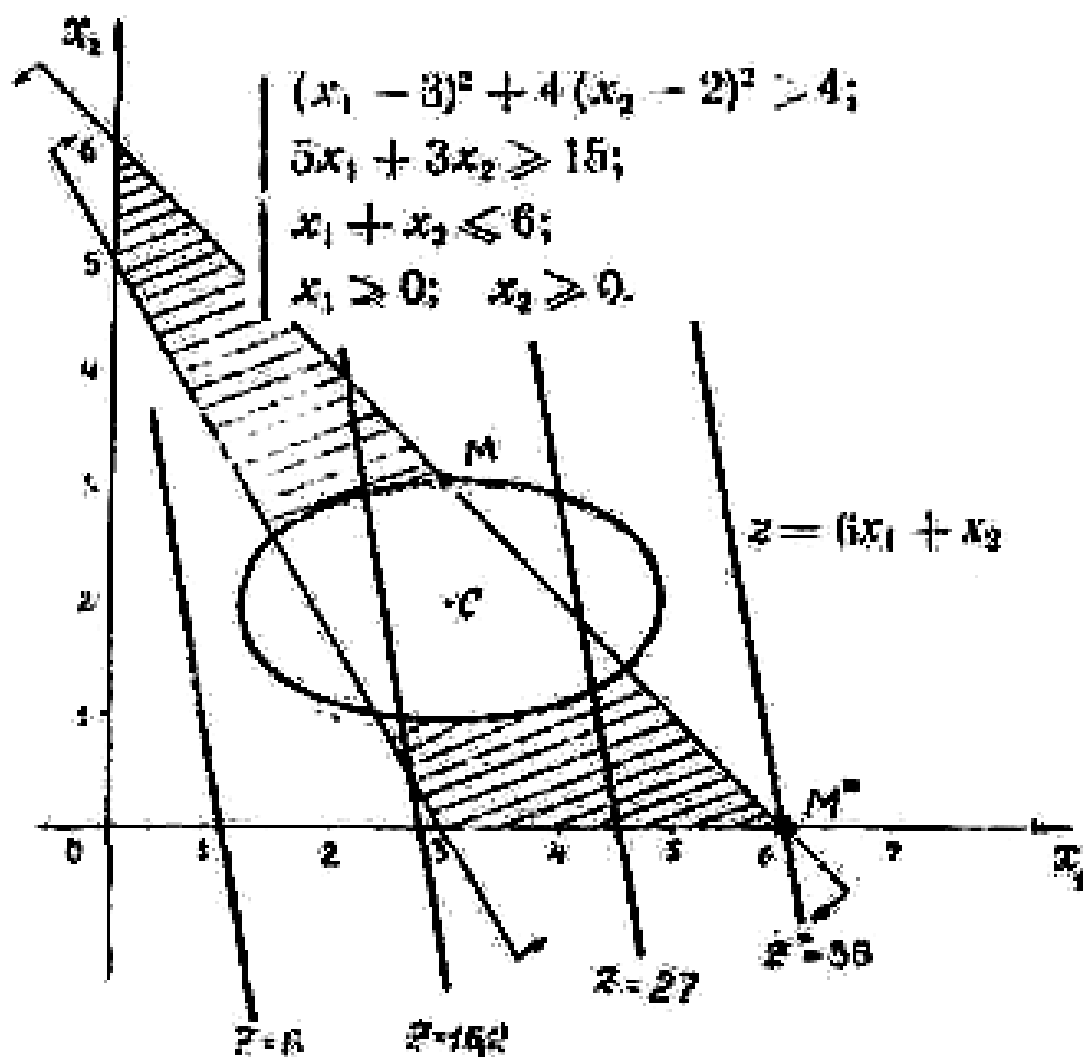
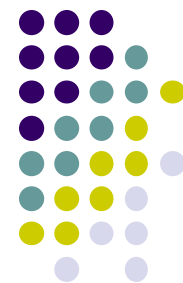
Особенности задач нелинейного программирования. Пример 1



Особенности задач нелинейного программирования. Пример 2



Особенности задач нелинейного программирования. Пример 3

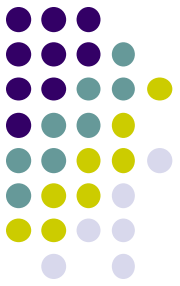


Свойства задачи нелинейного программирования



- Целевая функция может иметь на множестве допустимых планов не один, а **несколько относительных (локальных) экстремумов.**
- Глобальный максимум (минимум) может достигаться **внутри или на границах ОДР и не совпадать ни с одной из её вершин.**
- Множество допустимых планов ОДР может быть **невыпуклым или несвязным.**
- Целевая функция м.б. **недифференцируемой**

Классификация методов нелинейного программирования



Аналитические (точные) методы

- метод множителей Лагранжа
- условия Каруша — Куна — Таккера

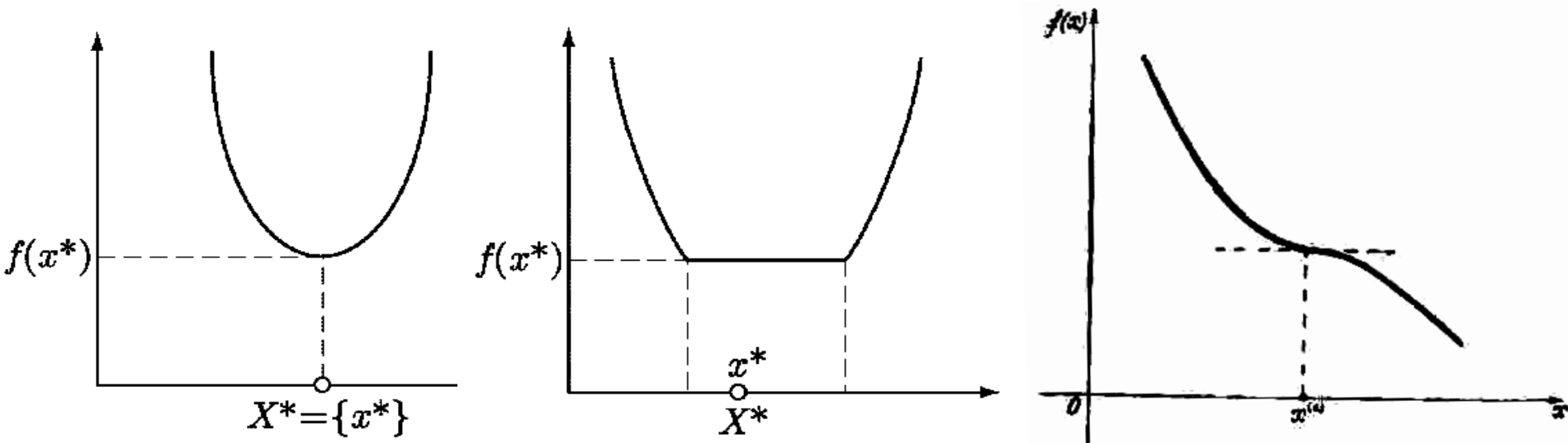
Численные методы

- *прямые методы*: с вычислением целевой функции в точках приближений
 - допустимых направлений (метод Зойтендейка)
- *методы первого порядка*: требуют вычисления первых частных производных функции
 - градиентные методы: наискорейшего спуска, дробления шага
- *методы второго порядка*: требуют вычисления вторых частных производных (гессиана) целевой функции.

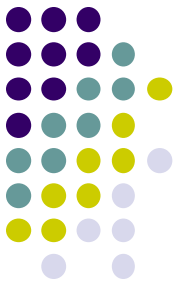
Задача выпуклого программирования



- Найти $(x^*, f^*(x) = f_{\min}(x))$: $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \{\operatorname{argmin} f(x) \mid g_{i=1, \dots, m}(x) \leq 0\}$, если $f(x), g_i(x)$ – выпуклые
- **Теорема.** Если $f(x)$ выпуклая (вогнутая) функция и $\nabla f(x^*) = 0$, то x^* – точка глобального минимума (максимума)

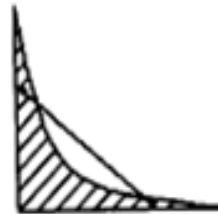


Элементы теории выпуклых множеств

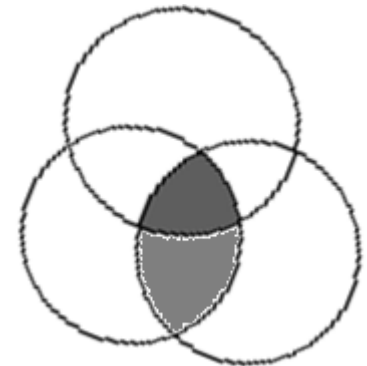


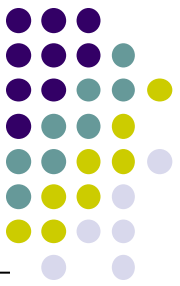
- Множество X называется *выпуклым*, если оно содержит любую *выпуклую комбинацию* любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из этого множества:

$$(\lambda x^{(1)}) + (1 - \lambda)x^{(2)} \subseteq X, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$



- Теорема.** Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

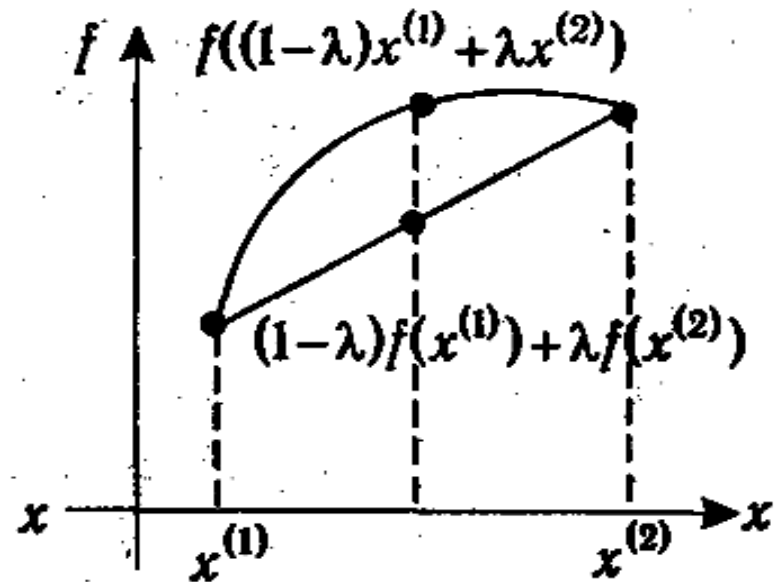
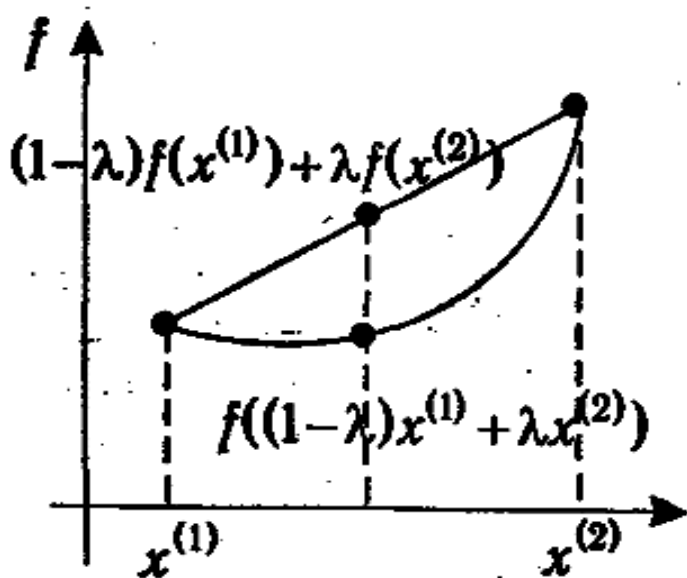




Выпуклая (вогнутая) функция. Геометрическое представление

- Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется **выпуклой** на непустом выпуклом множестве X , если для любой линейной комбинации точек x_i справедливо неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$



Свойства выпуклых функций

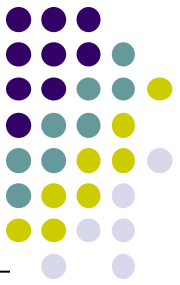


1. Если функция $F(X)$ выпукла, то функция $-F(X)$ вогнута.
2. Функция $F(X) = C$ и линейная функция $F(X) = aX + b$ являются всюду выпуклыми и всюду вогнутыми.
3. Если функции $F_i(X)$ $i = 1, \dots, m$, выпуклы, то при любых действительных числах $\alpha_i \geq 0$ функция $\sum_{i=1}^m \alpha_i F_i(X)$ также является выпуклой.
4. Если функция $F(X)$ выпукла, то для любого числа α область решений неравенства $F(X) < \alpha$ является либо выпуклым множеством, либо пустым.
5. Выпуклая (вогнутая) функция, определенная на выпуклом множестве M , непрерывна в каждой внутренней точке этого множества.
6. Дважды дифференцируемая функция $F(X) = F(x_1, \dots, x_n)$ является выпуклой в том и только в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \geq 0$$

для любых $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$, не обращающихся в нуль одновременно.

Выпуклая (строго выпуклая) функция. Достаточные условия



- **Гессианом** $H(x)$ функции $f(x)$ называется квадратичная форма, составленная из вторых частных производных:

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

- **Теорема.** Функция $f(x)$ является выпуклой (строго выпуклой) на выпуклом множестве X , если ее квадратичная форма (гессиан) является *неотрицательно (положительно) определенной* для любой точки $x \in X$:

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq (>) 0.$$

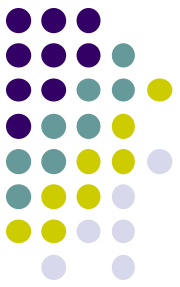
де $a_{II} = a_{II}$, или в развернутой форме

$$x^t = \begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \\ \vdots \\ x_n^t \end{bmatrix}$$

$\lambda_i, (i=1, 2, \dots, n)$

$$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Классическая задача условной оптимизации



- $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min),$
 $g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i, i = 1, 2, \dots, m$
 - система ограничений содержит только уравнения
 - отсутствуют условия неотрицательности переменных
 - $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g_i(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными
- **Функция Лагранжа:** $\Phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$
 - $f(x)$ - доход соответствующий плану $x = (x_1, \dots, x_n)$
 - $g_i(x)$ - издержки i -го ресурса соответствующие плану x
 - $u_i(x)$ - цена i -го ресурса, характеризующая изменение значения целевой функции $f(x)$ от величины i -го ресурса

Необходимые условия условного экстремума



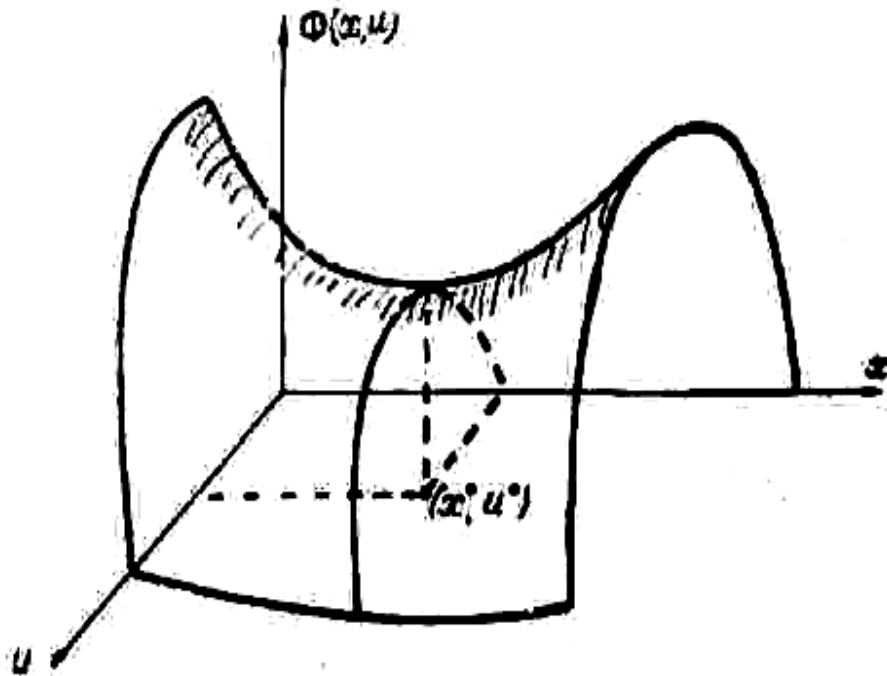
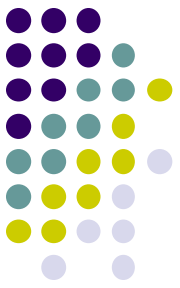
- **Теорема.** Если x^* является точкой условного экстремума функции $f(x)$ и ранг матрицы первых частных производных функций $g_i(x)$ в ограничениях-равенствах $g_i(x)=0, i=1, \dots, m$:

$$\left\| \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$$

равен m , то существуют такие $u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*$, не равные одновременно нулю, при которых

$$\nabla \Phi(x^*, u^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Функция Лагранжа $\Phi(x, u)$. Понятие седловой точки



$$\Phi(X, U) = f(X) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(X).$$

$$g_j(\bar{X}) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

$$X \geq 0, \quad U \geq 0.$$

- Пара векторов (x^*, u^*) называется **седловой точкой** функции $\Phi(x, u)$ для любых $x \in X$ и $u \in U$, если:

$$\Phi(x, u^*) \leq \Phi(x^*, u^*) \leq \Phi(x^*, u)$$

Метод неопределённых множителей Лагранжа



- Составить уравнение Лагранжа $\Phi(x_1, x_2, u)$

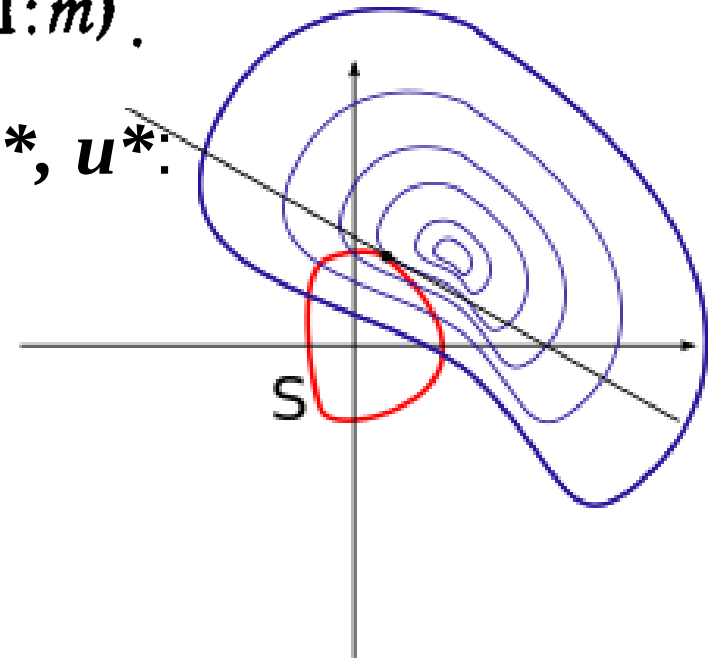
$$\nabla \Phi(x^*, u^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

- Найти частные производные:

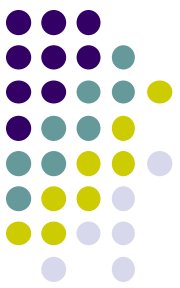
$$\frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x_j} \quad (j \in 1:n) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial u_i} \quad (i \in 1:m).$$

- Нахождение переменных x^*, u^* :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial x_j} = 0, \quad (j \in 1:n); \\ \frac{\partial \Phi(x, u)}{\partial u_i} = g_i(x) = 0, \quad (i \in 1:m) \end{cases}$$



Алгоритм метода неопределённых множителей



$$(\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\vec{x}), \text{ где } \vec{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T \text{ и } \vec{H} = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$$

1. Составление функции Лагранжа

$$L(\vec{x}, \vec{\Lambda}) = f(\vec{x}) + (\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}).$$

2. Нахождение частных производных

$$\frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\Lambda})}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\Lambda})}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, \dots, m.$$

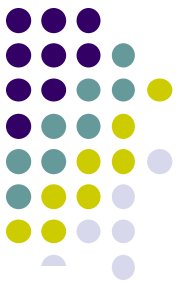
3. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\Lambda})}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\Lambda})}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

4. Исследование решения системы точек $\vec{x}^0$ на минимум.

Метод множителей Лагранжа.

Пример

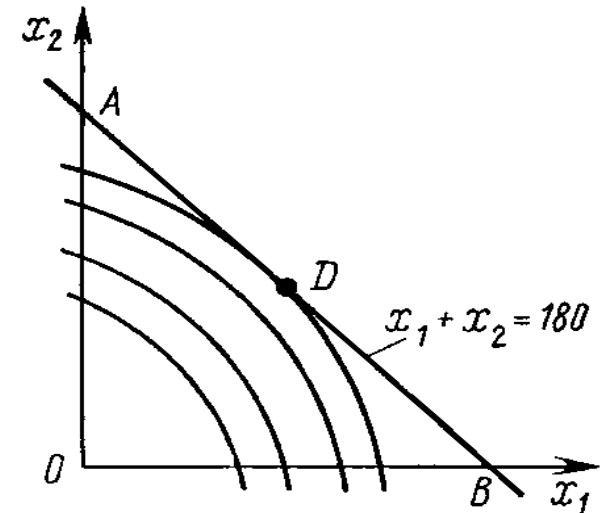


- Найти минимальное значение:

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

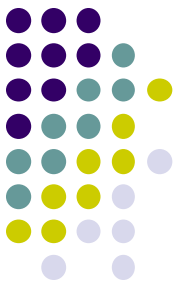


$E(-2; -4)$

- $\Phi(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0,$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0,$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0$
- $4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ или } x_1 - x_2 = 2.$
- $180 - x_1 - x_2 = 0$
- $x_1^* = 91 \text{ и } x_2^* = 89.$

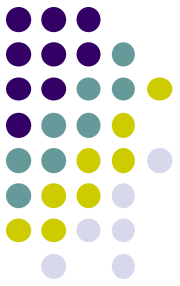
Метод множителей Лагранжа.

Д/з_1, 2



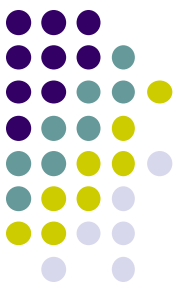
- Найти методом множителей Лагранжа:
 1. точки экстремума функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 5$.
 2. минимум целевой функции $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow \min$ при ограничениях
$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ h_2(x_1, x_2) = x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Регулярные условия задачи выпуклого программирования



- **Определение.** ЗНП называется задачей выпуклого программирования, если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(X) (i = \overline{1, m})$ — выпуклыми.
- **Определение.** Множество допустимых решений ЗНП удовлетворяет условию регулярности, если в ОДР существует такая точка x_i , что $g_i(X_i) < b_i (i = \overline{1, m})$.
 - **Условие Слейтера.** Область допустимых решений должна иметь внутреннюю точку:
$$\exists x^* : g_i(x^*) < 0, (i = \overline{1, m})$$
 - **Условие дополняющей нежёсткости:**
$$u_i g_i(x^*) = 0, (i = \overline{1, m})$$

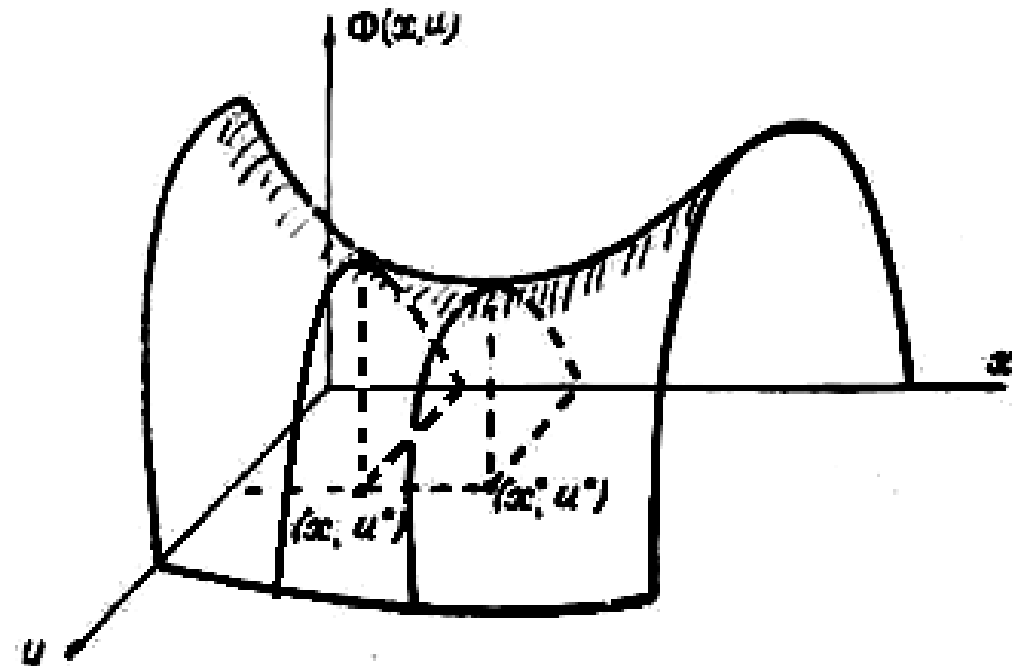
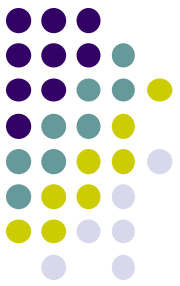
Необходимые и достаточные условия существования решения задачи выпуклого программирования



- **Теорема Куна-Таккера.** Для задачи выпуклого программирования, множество допустимых решений которой обладают свойством регулярности $g_i(x) > 0$, точка $x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$ является оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует такой вектор $u^* = (u^*_1, u^*_2, \dots, u^*_m)$, что (x^*, u^*) является седловой точкой функции Лагранжа:

$$\Phi(x, u^*) \leq \Phi(x^*, u^*) \leq \Phi(x^*, u)$$

Дифференциальные условия Куна-Таккера



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(X^*, U^*)}{\partial X} \geq 0; \\ X^{*\tau} \frac{\partial \Phi(X^*, U^*)}{\partial X} = 0; \\ X^* \geq 0; \\ \frac{\partial \Phi(X^*, U^*)}{\partial U} \leq 0; \\ U^{*\tau} \frac{\partial \Phi(X^*, U^*)}{\partial U} = 0; \\ U^* \geq 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} (i=1, 2, \dots, m) \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{array}$$

Квадратичное программирование



● **О п р е д е л е н и е.** Квадратичной формой относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + \dots + c_{n1}x_nx_1 + \dots + c_{nn}x_nx_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj}x_kx_j.$$

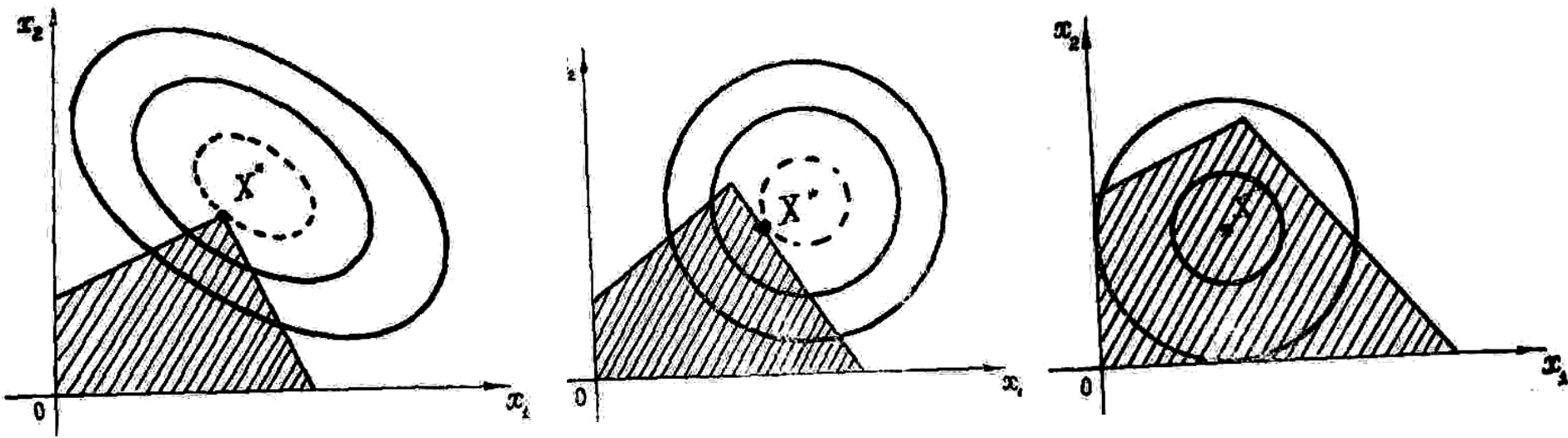
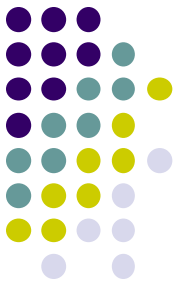
● **О п р е д е л е н и е .** Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^n d_jx_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj}x_kx_j$$

при ограничениях $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}),$
 $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$

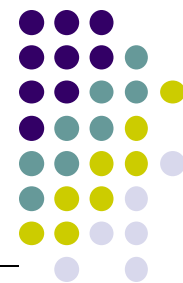
где $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj}x_kx_j$ — отрицательно (положительно)-полуопределенная квадратичная форма, называется задачей квадратичного программирования.

Геометрическая интерпретация ЗКП



$$I. \min \{Q(X) / AX \leq B, \quad X \geq 0\}.$$

Задача квадратичного программирования (ЗКП)



$$F(X) = \sum_{j=1}^n p_j X_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (C_{kj} X_k X_j) \rightarrow \min$$

$$\varphi_i(X) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j - b_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad X_j \geq 0$$

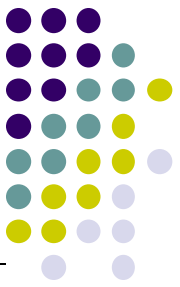
В матричном виде:

$$F = p'X + X'CX \rightarrow \min, \quad P, X, B - \text{векторы-столбцы}$$

C – матрица квадратичной формы

$$AX < b, \quad X \geq 0$$

Формы задач квадратичного программирования



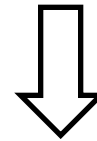
I. $\min \{Q(X) / AX \leq B, X \geq 0\}.$

II. $\min \{P^T X + X^T C X / AX = B, X \geq 0\};$

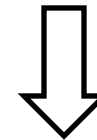
III. $\min \{P^T X + X^T C X / AX \leq B\}.$

$$Q(X) = P^T X + X^T C X,$$

Если $AX - B \leq 0$



$$g_j(X) = A_j^T X - b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$



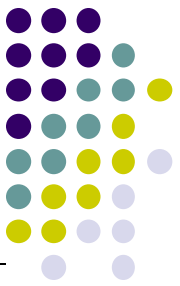
минимизировать $Q(X) = P^T X + X^T C X$

при ограничениях:

$$A_j^T X - b_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$X \geq 0.$$

Условия Куна-Такера для задачи КП



$$\left. \begin{array}{l} AX + V = b \\ 2CX - V + A'\lambda = -p \\ X \geq 0; Y \geq 0; V \geq 0; \lambda \geq 0 \\ XV + Y\lambda = 0 \quad (\#) \end{array} \right\}$$

$$\Phi(X\lambda) = \underbrace{p'X + X'CX}_{F(X)} + \underbrace{\lambda(A'X - b)}_{\text{штраф}};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = V = p' + 2CX + A'\lambda;$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = Y = -A'X + b$$

Условия Куна-Таккера для задач I, II, III



I. $\min \{P^T X + X^T C X / AX \leq B, \quad X \geq 0\}$

а) $AX + Y = B$

б) $2CX - V + A^T U = -P$

в) $X \geq 0, \quad V \geq 0, \quad Y \geq 0$
 $U \geq 0$

г) $X^T V + Y^T U = 0$

II. $\min \{P^T X + X^T C X / AX = B, \quad X \geq 0\}$

а) $AX = B$

б) $2CX - V + A^T U = -P$

в) $X \geq 0, \quad V \geq 0$

г) $X^T V = 0$

III. $\min \{P^T X + X^T C X / AX \leq B\}$

а) $AX + Y = B$

б) $2CX + A^T U = -P$

в) $Y \geq 0, \quad U \geq 0$

г) $Y^T U = 0$

Задача КП.

Пример



$$F(x) = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$A = (1, 1);$$

$$B = 2;$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

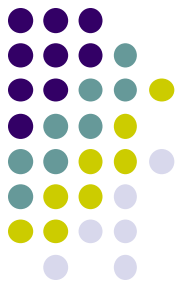
$$p = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$n = 2; \quad m = 1;$$

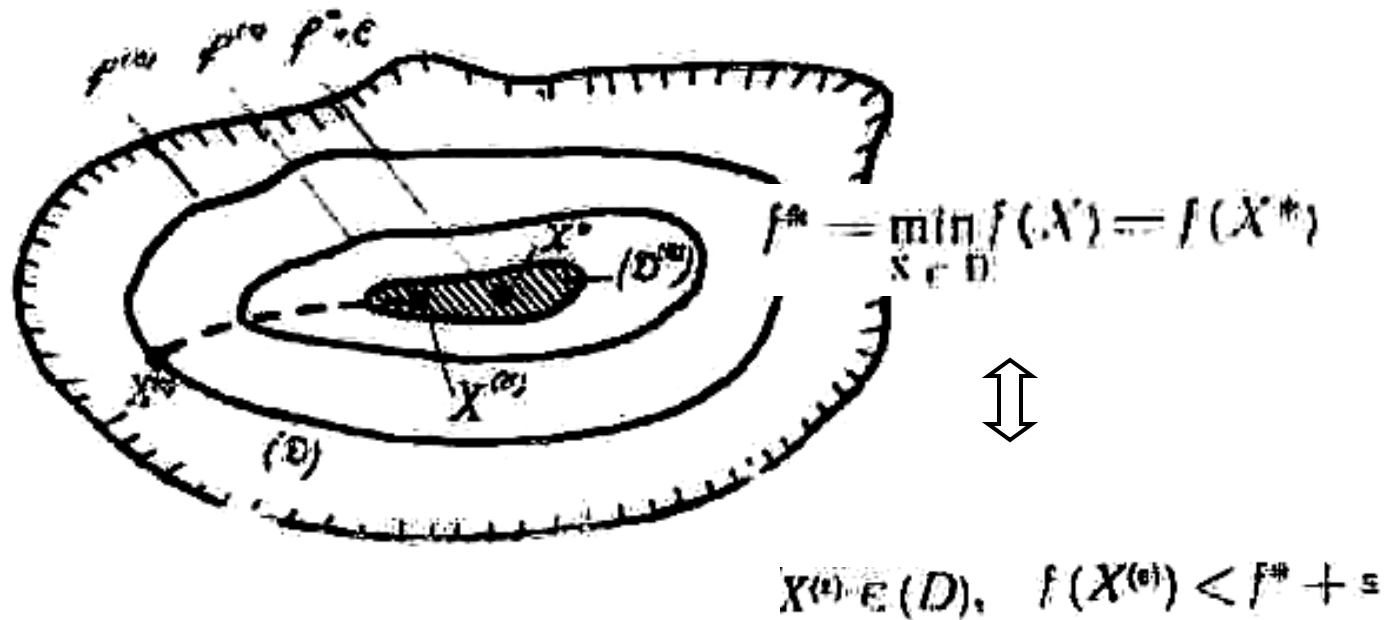
$$x_1 + x_2 + y_1 = 2$$

$$4x_1 - 2x_2 - V_1 + \lambda_1 = 6$$

$$-2x_1 + 4x_2 - V_2 + \lambda_1 = 0$$



Численные методы поиска экстремума. Сущность

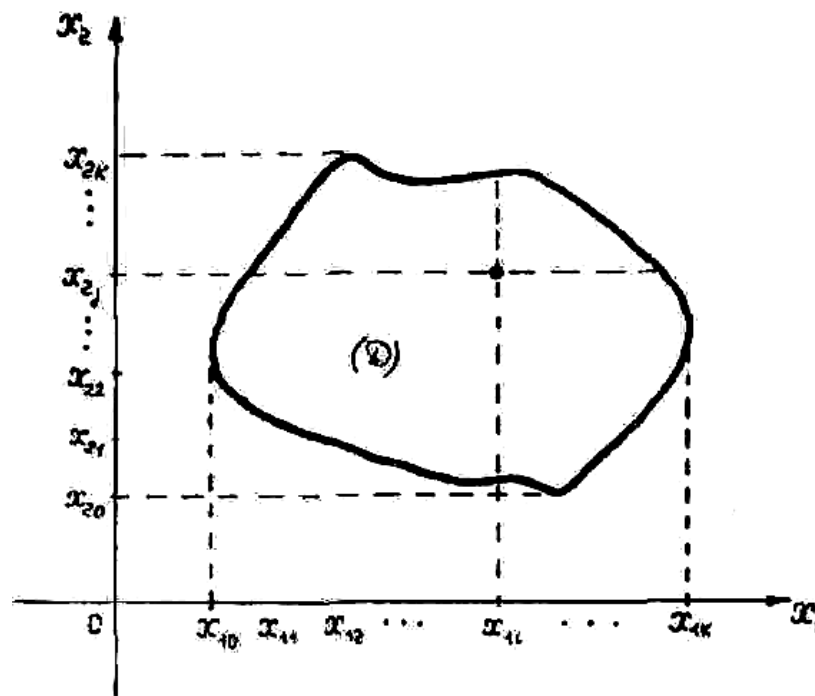
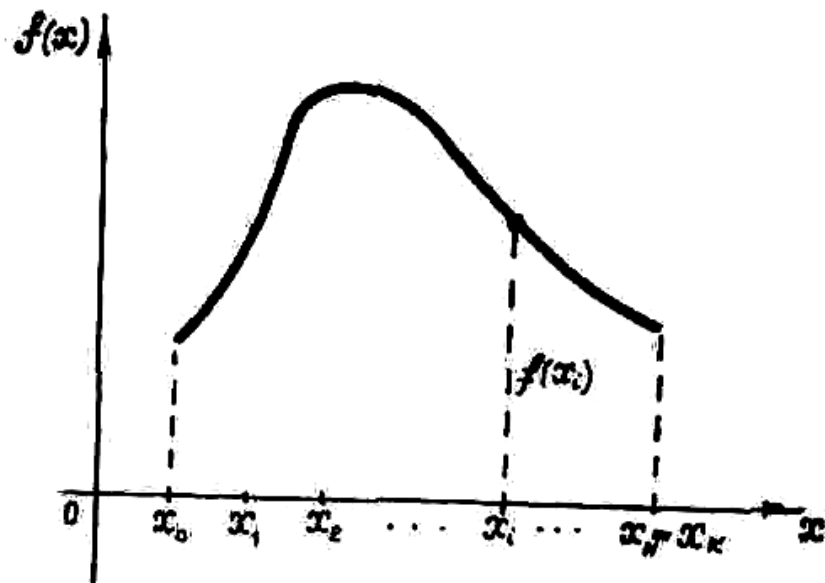


Пассивные методы поиска.

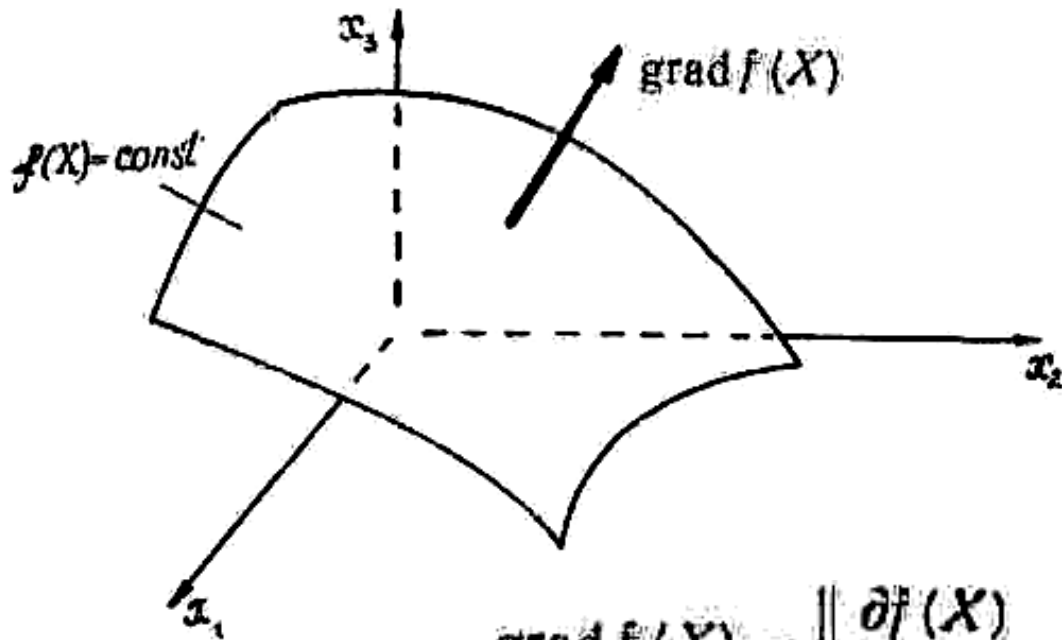
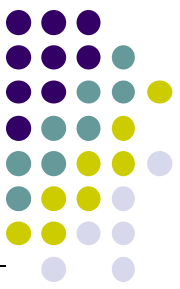
Слепой поиск



- Метод равномерного поиска путём равномерного деления отрезка на N одинаковых интервалов
- Метод поразрядного поиска, пока не выполнится условие $f(x_i^r) < f(x_{i+1}^r)$



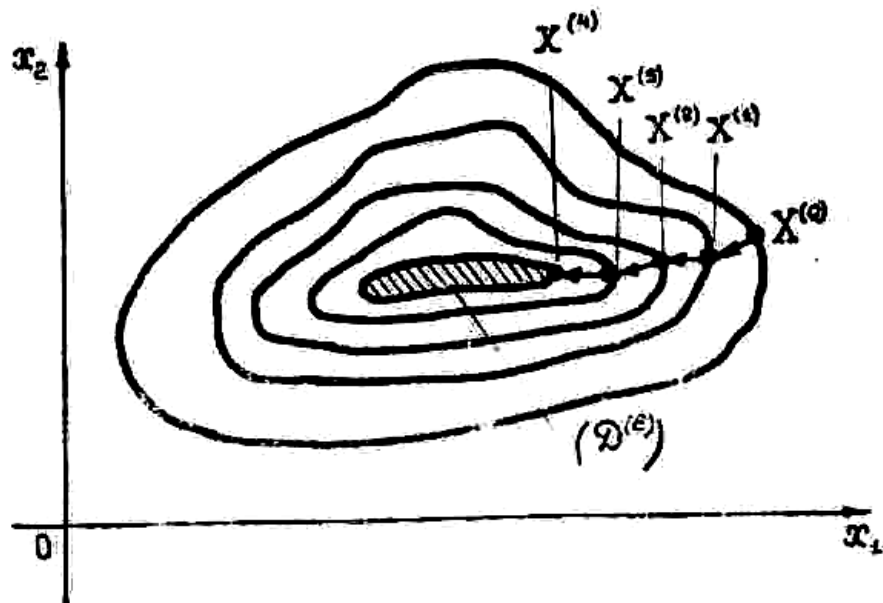
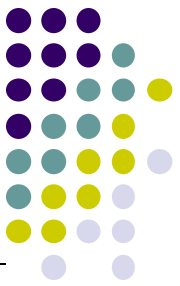
Направленный поиск. Градиентные методы



$$\text{grad } f(X) = \left\| \frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \right\|$$

$$\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j} \approx \frac{f(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k)} + \Delta x_j, \dots, x_n^{(k)}) - f(x_1^{(k)}, x_j^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\Delta x_j}$$

Направленный поиск



$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \pm \rho^{(k+1)} \text{grad } f(X^{(k)}),$$

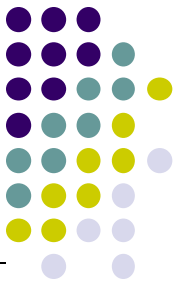
$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \pm \rho^{(k+1)} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\rho^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\rho} f(x_j^{(k)} - \rho^{(k)} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j})$$

$$\rho^{(k+1)} = \frac{1}{k+1} \rho_1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Метод наискорейшего спуска

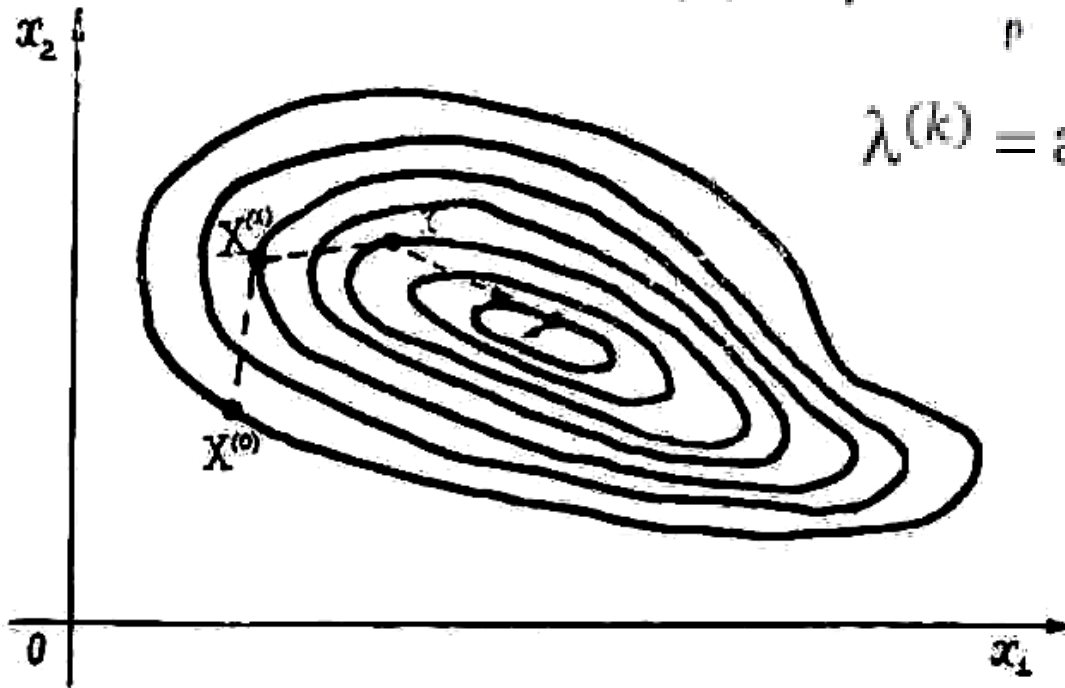


- шаг варьируется на каждой итерации одномерной задачи оптимизации

$$f(X^{(0)}) = \max_p f(X^{(0)} + p \operatorname{grad} f(X^{(0)}))$$

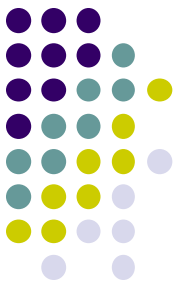
$$\lambda^{(k)} = \operatorname{argmin}_{\lambda} f(\bar{x}^{(k)} - \lambda \bar{s}^{(k)})$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} \bar{s}^{(k)}$$



Метод наискорейшего спуска.

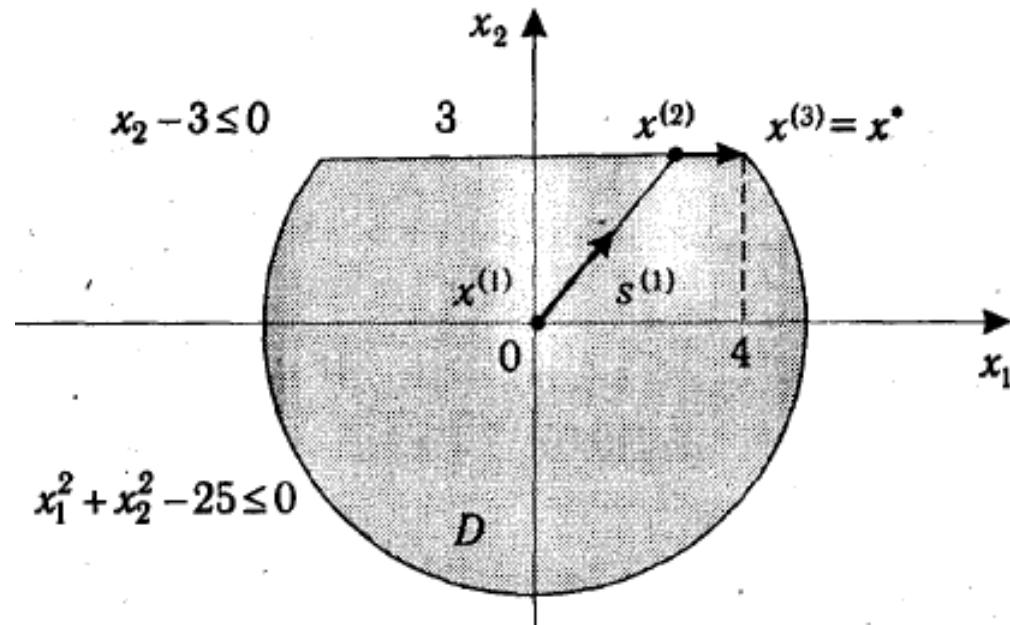
Пример



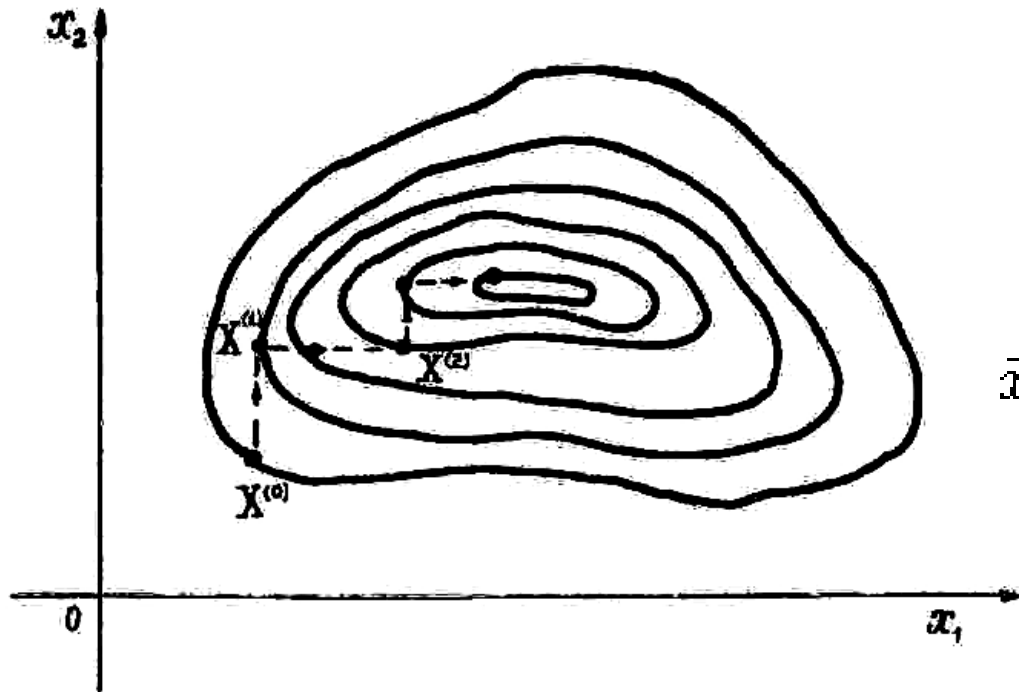
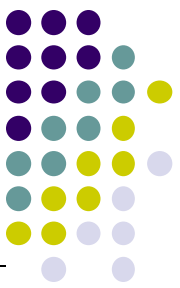
$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$D = \left\{ x \in R^2, \left| \begin{array}{l} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 25 \leq 0, \\ g_2(x) = x_2 - 3 \leq 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$x^* = (4, 3), f^* = x_1^{(3)} + x_2^{(3)} = 7$$



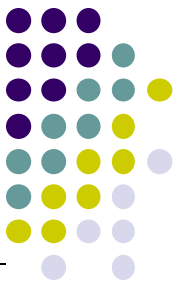
Метод Гаусса-Зейделя



$$\vec{x}_i^j = \vec{x}_{i-1}^j - \lambda^j \frac{\partial F(\vec{x}_{i-1}^j)}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

$$\lambda_i^j = \operatorname{argmin}_{\lambda} F \left(\vec{x}_{i-1}^j - \lambda^j \frac{\partial F(\vec{x}_{i-1}^j)}{\partial x_i} \vec{e}_i \right)$$

Случайный поиск



С возвратом при неудачном шаге:

$$\Delta X^{(k+1)} = \begin{cases} aW^{(k+1)}, & \text{если } \Delta f(X^{(k)}) = f(X^{(k)}) - f(X^{(k-1)}) > \epsilon; \\ -\Delta X^{(k)}, & \text{если } \Delta f(X^{(k)}) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

С самообучением и возвратом при неудачном шаге:

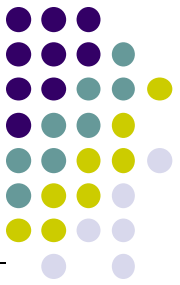
$$\Delta X^{(k+1)} = \begin{cases} \Delta X^{(k)} + aW^{(k+1)}, & \text{если } \Delta f(X^{(k)}) > \epsilon; \\ -\Delta X^{(k)}, & \text{если } \Delta f(X^{(k)}) < 0; \end{cases} \quad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ — номер узла сетки;

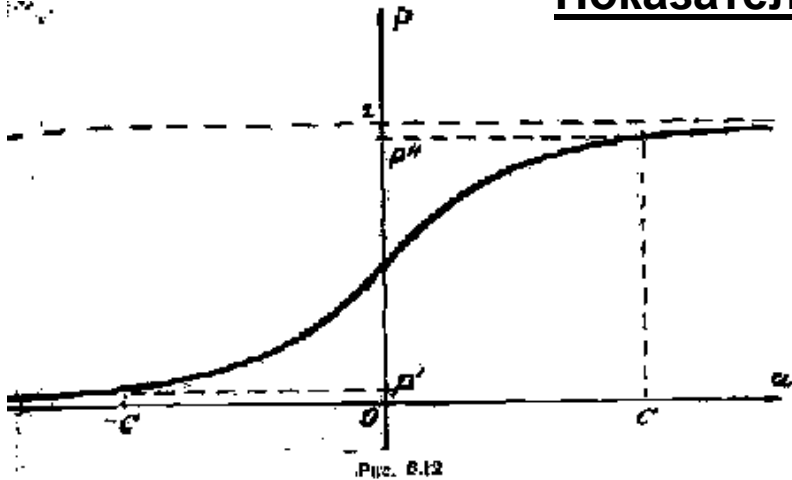
$\Delta f^{(k+1)} = f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})$ — приращение целевой функции на $(k+1)$ -м шаге;

$W^{(k+1)}$ — n -мерный случайный вектор.

Законы случайного поиска

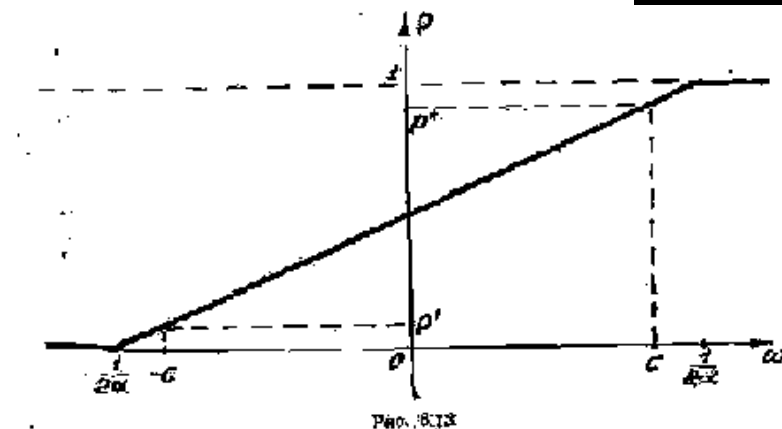


Показательный закон

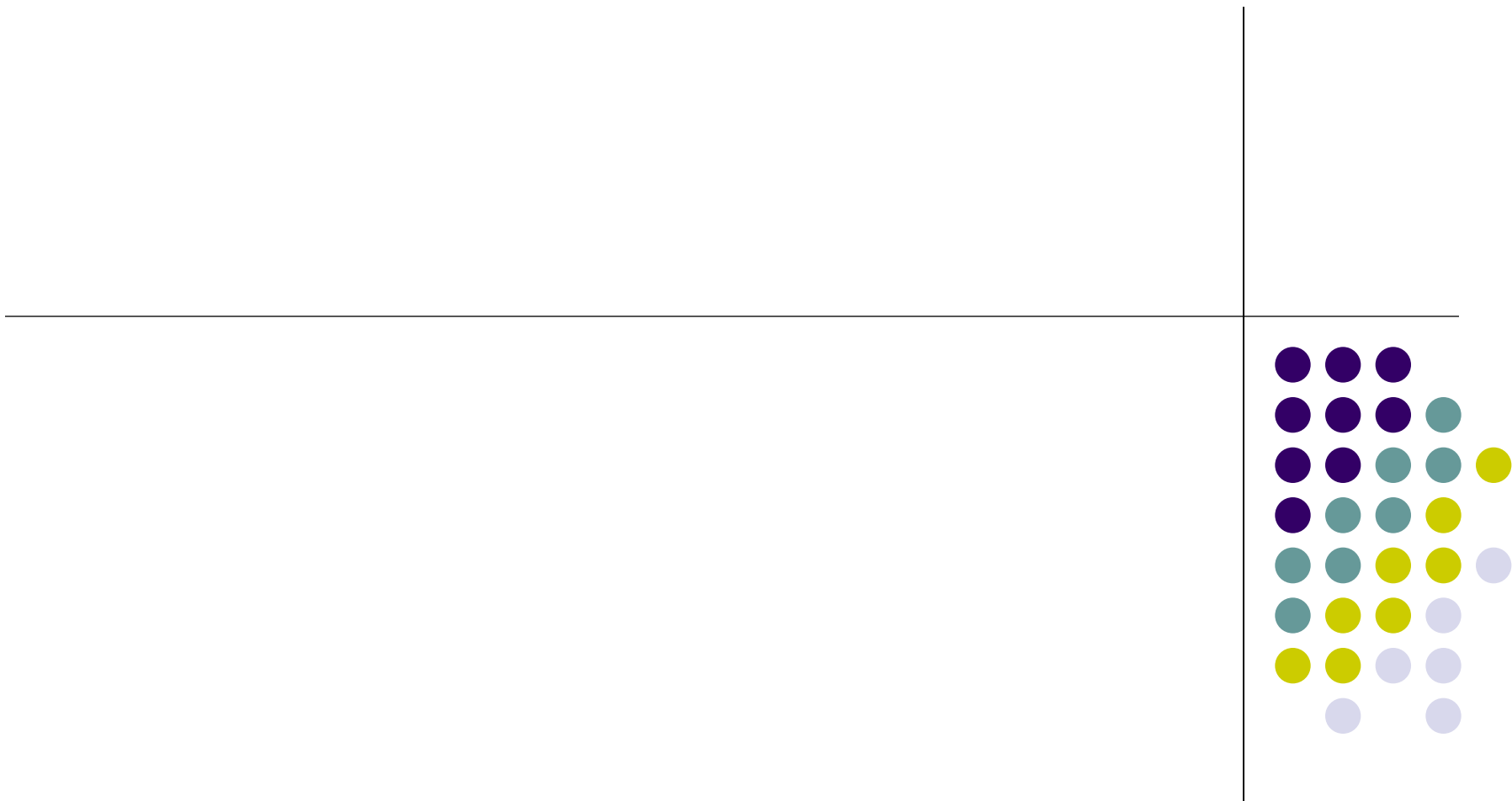


$$p(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{a\omega}, & \omega \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-a\omega}, & \omega > 0. \end{cases}$$

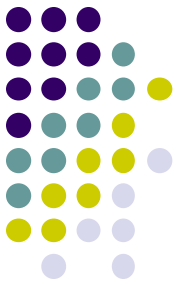
Линейный закон



$$p(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq -\frac{1}{2a}; \\ \frac{1}{2} + a\omega, & -\frac{1}{2a} < \omega < \frac{1}{2a}; \\ 1, & \omega \geq \frac{1}{2a}. \end{cases}$$



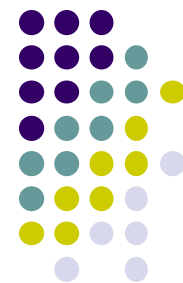
Теория оптимизации нелинейных задач



- **при отсутствии в оптимизационных задачах ограничений :**
 - методы дифференциального исчисления проверки необходимых и достаточных условий экстремума функции (методы с использованием первых и вторых частных производных, метод Ньютона-Рафсона)
- **с ограничениями-равенствами:**
 - метод неопределенных множителей Лагранжа
- **с ограничениями в виде неравенств:**
 - условия Куна-Таккера

Метод множителей Лагранжа.

Д/з_1



- Найти методом множителей Лагранжа точки экстремума функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 5$.

- Ответ:

$$x_1 = 5/2; x_2 = 5/2$$

$$F_{\min} = 25/2.$$

Метод множителей Лагранжа.

Д/з_2



- Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$$

- Дифференцируя функцию $L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$ по переменным $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ и приравнявая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda_1 = 0, \\ x_2 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_2 + \lambda_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

- Из первого и третьего уравнения следует $\lambda_1 = \lambda_2 = -x_2$. Решая данную систему, находим $x_1 = x_2 = x_3 = 1; f = 2$.