

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Коваленко

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЧАСТИЧНО
ИНФИНИТНОЙ ГИДРОЛОГИИ**



Санкт-Петербург
2012

УДК 556.16.06.072
ББК 26.222
К56

Коваленко В.В. Метод характеристик в частично инфинитной гидрологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2012. – 136 с.: ил.

ISBN 978-5-86813-315-2

Рецензент: д-р философии Ривера Эберт Гонсало (Ph. D), Universidad Santo Tomas de Aquino – USTA, Колумбия

В книге рассматриваются возможности применения метода характеристик в задачах частично инфинитной гидрологии, связанной с моделированием и прогнозированием развивающихся гидрологических объектов с дробной (фрактальной) размерностью стоковых характеристик.

Предназначена специалистам-гидрологам, студентам, аспирантам и лицам, интересующимся методологией науки.

Kovalenko V.V. Method of the characteristics in partially infinity hydrology. – St. Petersburg, RSHU Publishers, 2012. – 136 pp.

In the book the opportunities of application of a method of the characteristics in tasks of partially infinity hydrology connected to modeling and forecasting of developing hydrological objects with fractional (fractal) by dimension of the flow characteristics are considered.

Is intended to the experts-hydrologists, students, post-graduate students and persons interested by methodology of a science.

ISBN 978-5-86813-315-2

© В. В. Коваленко, 2012

© Российский государственный

гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2012

Введение

В монографии показаны возможности применения метода характеристик в задачах эволюционной гидрологии, связанных с моделированием и прогнозированием развивающихся гидрологических объектов. Под развитием, в данном случае, понимается качественное изменение составляющих вектора состояния, т. е. изменение их числа, приобретение моделируемым объектом новых свойств (а не просто, как это обычно бывает, изменение численных значений зафиксированных в начальный момент времени искомым функций). Новые свойства у гидрологического объекта могут появиться объективно в процессе его естественного развития (например, превращение озера в болото или увеличение порядка речных систем). Тогда мы будем говорить об онтологической новизне. Однако чаще всего меняется не объект, а наши представления о нем. Обычно происходит следующее. В процессе практического его использования возникают проблемы, решаемые существующими на данный момент математическими моделями объекта, например, выполняются краткосрочные или долгосрочные прогнозы. Если они по определенным критериям оказываются неудовлетворительными, то надо менять математическую модель, учитывая с ее помощью ранее игнорируемые свойства интересующего нас объекта. Это будем называть новизной гносеологической (это новизна субъективная). В любом из этих случаев возникает проблема «мутации» модели. Одним из возможных вариантов ее решения является использование метода характеристик, чему и посвящена монография.

Рассмотрение ведется на примере двух наиболее востребованных в практической гидрологии предметных областей: речной гидравлики (которая служит основой гидрометрии, русловых процессов, прогнозов половодий и паводков) и многолетнего речного стока (который является основным элементом нормативных документов в области обеспечения гидрологической надежности при строительном проектировании). Исследования частично финансировались грантами Министерства образования и науки (проекты № 2.1.1/9596, № П740).

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

1.1. Гносеологические основания

В этой книге показывается возможность применения метода характеристик в частично инфинитной гидрологии (ЧИГ). Среди читателей наверняка найдутся такие, кто впервые видит подобное сочетание слов, а если и встречались с ним раньше, то плохо представляют, что реально за ними стоит. Это новое научное направление, посвященное моделированию и прогнозированию развивающихся гидрологических объектов. Под развитием понимается не просто количественное изменение компонентов вектора состояния изучаемого гидрологического объекта, а его качественная эволюция – появление новых компонентов, характеризующих ранее отсутствующие (или игнорируемые гидрологами, по разным причинам) свойства. Ниже, смысл и технология подобных процессов рассматриваются подробно, но в общих чертах их моделирование состоит из следующих этапов:

1. Ставится (насколько возможно математически корректно) задача в фиксированной предметной области и теми или иными методами (обычно численными) ищется ее решение.

2. При решении могут быть (по крайней мере) три ситуации:

а) решение найдено и по общезначимым критериям отвечает фиксируемому измерением процессу;

б) в определенном диапазоне численных значений параметров (коэффициентов) модели решение ведет себя неустойчиво;

в) реализуется пункт а), но в изучаемой предметной области экспериментально наблюдаются также явления, не имеющие ничего общего с корректным решением.

Примером последней ситуации является наличие автоволов в открытых потоках. Система уравнений Сен-Венана допускает относительно корректную постановку краевых задач и имеется большой опыт ее применения. Однако несколько десятилетий назад в реках были обнаружены низкочастотные колебания скоростей (с периодом порядка десятков минут). Они наблюдаются повсеместно (обзор работ см. [18]), но с помощью классических уравнений одномерной гидравлической идеализации их не объяснить – периодических решений при непериодических граничных условиях

система Сен-Венана не имеет. (Многолетние попытки, см. [17], построить замкнутые циклы на фазовой плоскости в координатах уровень – скорость успехом не увенчались.)

Примером неустойчивости решений является ее возникновение при использовании для моделирования и прогнозирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов, аппроксимирующих уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), описывающего эволюцию вероятностных распределений марковских случайных процессов, к числу которых относится и многолетний речной сток. При больших значениях интенсивностей мультипликативных шумов моменты распределения плотности вероятности теряют устойчивость (сначала старшие, потом младшие).

Обе рассмотренные ситуации интерпретируются как гносеологический тупик. Именно гносеологический, а не онтологический, так как неустойчивым оказывается наше мышление (придуманные им математические модели). (Тупик можно было бы назвать онтологическим, если бы, например, низкочастотных колебаний никогда не было в природе и вдруг они появились в силу какого-то усложнения самих природных процессов.)

3. Следующий этап заключается в поиске выхода из выявленного тупика. Этот этап разбивается на два подэтапа. Первый (формализуемый) заключается в поиске необходимого числа фазовых переменных, которых достаточно для выхода из тупика. Он реализуется с помощью так называемой фрактальной диагностики. Она позволяет найти число реально задействованных в процессе взаимодействующих фазовых переменных по информации только об одной из них, доступной непосредственным измерениям. Фрактальная (дробная) размерность показывает степень «недоразвитости» изучаемой системы (например скомканный лист бумаги – уже не «кусочек» плоскости, но еще и не «настоящий» трехмерный объект: слишком «рыхлый»). Ближайшее к ней целое число указывает на размерность пространства, в которое необходимо «помещать» решаемую задачу (пространство вложения), чтобы можно было успешно выйти из тупика. (Это отдельная область ЧИГ [20], которая опирается на известные в теории нелинейных систем методы фрактальной геометрии [4, 36].) С точки зрения моделирования этот подэтап позволяет определить число обыкновенных диффе-

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

ренциальных уравнений первого порядка, которые обеспечивают устойчивое прогнозирование.

Второй подэтап является неформализуемым: что из себя конкретно представляет (тем более представляют) новая фазовая переменная формализуемым путем не выяснить. Надо самому «войти» (почувствовать «шкурой») в расширенную предметную область (эмоционально ее почувствовать, затратить энергию) чтобы ее идентифицировать. Конечно, не надо слово «самому» понимать буквально. Ведь субъектом познания является не просто биологическое существо (Иванов Иван Иванович), а человек, т. е. личность (существо социальное, пронизанное множеством пространственно-временных информационных взаимосвязей, включая предысторию объективных процессов и их субъективного освоения социумом).

Например, если при построении одномерного распределения плотности вероятности расхода $p(Q)$ мы не вписываемся в рамки классических распределений из семейства кривых Пирсона, а фрактальная диагностика ряда расходов в замыкающем створе изучаемого речного бассейна дает размерность пространства вложения равную двум, то первое, что приходит в голову в качестве кандидата на вторую фазовую переменную – испарение. Это следует, хотя бы, из балансового соотношения:

$$\dot{X} = Q + E \pm \Delta U, \quad (1.1)$$

где \dot{X} – интенсивность осадков; E – испарение; $\pm U$ – изменение запасов воды в почво-грунтах.

Многие гидрологи до меня изучали водные балансы и я (социальное существо) могу с большой долей вероятности предположить, что второй фазовой переменной, привлекаемой для перехода к двумерным устойчивым распределениям, должно быть испарение ($p(Q, E)$). Но только предположить, можно и ошибиться – формальных путей для правильного ответа не существует. (Что-то «извне» влияет на процесс, но что именно – из предыдущих знаний и логики манипулирования ими, «строго» не узнать.)

4. Заключительным этапом является «обычное, устойчивое» моделирование и прогнозирование в расширенном (на третьем

этапе) фазовом пространстве. До очередного гносеологического (а может быть и онтологического) тупика. И далее «по новой».

Наличие второго подэтапа третьего этапа и дает основание назвать весь этот процесс «частично инфинитным» (или, «опошляя» глубокий философский смысл слова «инфинитность», – «частично неопределенным»).

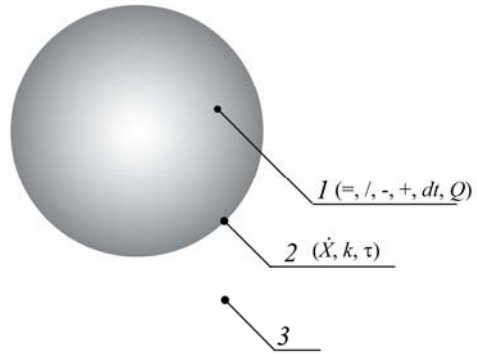


Рис. 1.1. Иллюстрация «ученого незнания»: 1 – финитное, 2 – частично инфинитное, 3 – инфинитное.

Возможную наглядную интерпретацию изложенного можно дать, опираясь на взгляды немецкого кардинала XV в. Николая Кузанского (Никола из Кузы). В его трактате «Об ученом незнании» [32] проводится мысль о том, что новое знание порождается благодаря осознанию степени своего незнания (рис. 1.1). Все, что находится внутри шара 1 есть наше знание, т. е. освоенные и закреплённые рациональными понятиями сведения об окружающей нас реальности (финитная часть реальности). Под цифрой 3 представлена реальность инфинитная (непознанная), т. е. невыразимая в тех понятиях, которые закреплёны (освоены) в области 1. Из этой инфинитной реальности мы черпаем (создаем) знания. Спрашивается, каким образом, если у нас нет понятий для ориентации в области 3? Благодаря границе (сфере) 2, которая частично инфинитна, т. е. с одной стороны является **замыканием** области 1, а с другой – **открывает** доступ к инфинитным сферам реальности, но не с помощью рациональных понятий, а с помощью **действий**; а также размытых образов, философских рассуждений, веры, наконец. (Слова «замыканием» и «открывает» противоречат друг другу, но это противоречие диалектическое.) Причем важно, что любое пополнение знаний (расширение области 1) увеличивает поверхность контакта 2 с непознанной реальностью 3. Это и есть иллюстрация ученого незнания (знания о своем незнании).

Отдаленную аналогию можно провести на примере самой простой модели формирования речного стока:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau, \quad (1.2)$$

где k – коэффициент стока; τ – параметр релаксации; t – время.

В это уравнение входит набор различных по смысловому статусу параметров. Финитных: расход Q , время t , минус $-$, равно $=$, делить $/$, сложить $+$, дифференциал d (финитной является и сама модель – алгоритм оперирования величинами, входящими в (1.2)). Частично инфинитных: интенсивность осадков \dot{X} , коэффициент стока k , время релаксации τ .

Действительно, с одной стороны, нам понятна роль трех последних параметров в процессе формирования стока с речного бассейна. Если их зафиксировать конкретными численными значениями, то они становятся полностью финитными, что позволяет конечным («финитным») числом шагов найти гидрограф стока $Q(t)$. Но, с другой стороны, у нас нет четкого и однозначного понимания, что за ними стоит в реальности – осадки (например) могут вызываться циклонами, а могут быть и внутримассовыми; они могут быть твердыми и жидкими. Эти понятия – за пределами модели (1.2) – из другой (метеорологической) предметной области. Коэффициент стока может зависеть как от метеорологических факторов («потери стока» на испарение), так и от социально экономических (например, вырубка лесов). Расширение финитной области 1 происходит через поверхность 2 за счет включения в модель (1.2) метеорологических и социальных понятий из инфинитной (для гидрологической логики) области 3. Например используем для задания коэффициента стока в модели (1.2) следующее выражение (см. [27, 54]) $k = k_0 + a\gamma$, где γ – степень урбанизации речного бассейна; k_0 – коэффициент стока в естественных условиях; a – параметр, зависящий от географической широты местности. Расширив область финитности, мы увеличиваем и поверхность ее контакта с социальными аспектами реальности (в модели (1.2) появится новый параметр γ , характеризующий степень урбанизации).

Конкретные примеры будут рассматриваться ниже, а сейчас остановимся на таком вопросе: есть ли общие теоремы, относящиеся к теории познания, которые как-то обосновывают приведенные

рассуждения? В последних есть два ключевых момента, которые хотелось бы как-то «объяснить высокой наукой».

Первый – связан с тем, что расширение финитной области рационализированных понятий требует выхода за ее пределы в объемлющую ее инфинитную реальность, в «другое измерение» (причем опираться надо не столько на логику, соответствующую зафиксированной предметной области, сколько на рискованные **действия**, управляемые, возможно, не осознаваемой логически интуицией). (Сюда же относится и такой вопрос: можно ли, «действуя» в этой инфинитной реальности, – «другом измерении» – сделать **несколько** новых познавательных шагов, расширяющих размерность финитной области сразу на несколько фазовых переменных?)

Второй – если старой логикой нельзя познать нового, то какую роль она вообще играет в наших «действиях» в инфинитной реальности?

Это может показаться странным (ведь теория познания у «технарей» обычно ассоциируется с философско-методологическими «гуманитарными» рассуждениями), но такие теоремы существуют (пусть даже иногда скорее в метафорическом смысле).

Обратимся к знаменитой гипотезе А. Пуанкаре (сейчас это уже теорема Пуанкаре–Перельмана): «...всякое компактное односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно сфере» (из научно-популярного издания [53]), т. е. трехмерная сфера ограничивает четырехмерный шар.

Существует космологическая интерпретация этого утверждения: если Вселенная обладает указанными свойствами многообразия, то она в смысле гомеоморфизма есть трехмерная сфера. Но последняя недоступна нашему непосредственному наблюдению, хотя мы в ней и живем. Нам доступна только трехмерная («финитная») проекция этой реальности, но фактически мы контактируем и с другим измерением («инфинитной реальностью»), не ощущая (на понятийном уровне) этого. Однако многообразия возникают не только в связи с геометрическими представлениями как подмногообразия например евклидовых пространств, но и «сами по себе». Также можно говорить о многообразии, находящемся в фазовом пространстве как финитной, освоенной познанием, его части. Освоение очередного n -го измерения оставляет утверждение в силе

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

(парадоксальным образом n -мерные версии гипотезы Пуанкаре были доказаны раньше трехмерной).

Что представляют собой свойства многообразия, которые обеспечивают частично-инфинитный интерфейс этих двух реальностей? **Односвязность** обычно иллюстрируют на примере резиновой нити со склеенными концами, которая будучи как угодно расположенной в пределах какой-либо геометрической фигуры, может беспрепятственно стягиваться в точку, не выходя за ее пределы [53]. (Например круг односвязан, а круг с дыркой – нет: мешает дырка, вокруг которой мы захотим расположить резинку.) Свойство односвязности несовместимо с неориентированностью (неориентированной является, например, лента Мёбиуса). Не ориентированы трехмерные фигуры, если они компактны и без края (локально однородны, открыты) не умещаются в четырехмерном пространстве (в пятимерном – различие в двух размерностях – умещаются). (Образно говоря, в ориентируемой поверхности нельзя превратиться в своё зеркальное отражение, иначе как побывав в дополнительном измерении – инфинитной реальности, т. е. получив новые знания.)

Что касается **гомеоморфизма**, то это понятие указывает на определенную «геометрическую одинаковость». Это такое соответствие, при котором сохраняется свойство замкнутости [53]: «всякая замкнутая (незамкнутая) часть исходной фигуры обязана перейти в замкнутую же (незамкнутую) часть исходной результирующей фигуры» (образно, – когда одну фигуру можно превращать в другую без разрывов и склеиваний, т. е. только топологическим преобразованием).

Второй ключевой момент (невозможность или, более мягко, проблематичность получения нового знания чисто логическим путем) имеет не такой (во многом метафорический) фундамент и обосновывается настоящей теоремой теории познания – теоремой о неполноте Геделя. Для того, чтобы ее сформулировать, в требуемом логикой рассуждении настоящего раздела контексте, дадим пояснения двум аксиоматическим методам: неформальному и формальному.

Аксиоматический метод состоит в выборе основных положений (аксиом) рассматриваемой теории (принимаемых без доказательства) и в выводе остальных положений (теорем) доказательным

путем. В неформальном методе доказательство может быть неформальным, психологическим.

В формальном методе фиксируются как сами аксиомы, на которые надо опираться при доказательстве теорем, так и сами дозволенные способы рассуждений. Для него утверждений «вообще» не существует. Они осмыслены только одновременно с задаваемой логикой рассуждений и даже формой их записи («правилами вывода»).

Теорема Геделя о неполноте констатирует, что возможны утверждения, не имеющие формального доказательства, которые, однако, истинны в рамках доказательств содержательных. Существуют различные вариации подобного утверждения. Если и не напрямую, то косвенно из этой теоремы следует, что новую истину (лежащую в инфинитной реальности) старой логикой (фиксируемой финитной реальностью) получить невозможно.

Тогда с помощью чего? Можно «угадать» (были «угаданы» практически все уравнения, открывающие новые направления в науке – Ньютона, Максвелла, Шредингера и т. п.), либо найти истину «конструктивно», прямым действием, понимаемым, конечно, достаточно широко. В этих «действиях» должна быть психологическая убедительность, пополняющая число сторонников доказываемой истины.

Появление на сцене такого неформализуемого термина как «действие» выбивает фундамент из аксиоматических априорных «существований» истин. Их надо не столько доказывать формально, сколько конструировать содержательно, вникая в их природу и «сопереживая» им. Истину надо конструировать. Это последовательность всё более приемлемых ее аппроксимаций («становящаяся» последовательность в духе Броуэра). В инфинитной среде происходит постоянное выжигание ресурсов на основе которых происходит формирование (рационализация) новых понятий путем деятельности субъекта познания (социальной среды). В роли критерия правильности таких «действий» выступает отнюдь не гильбертовская «непротиворечивость» принятых аксиом и вычислительных правил (эта непротиворечивость применяется к формулам, за которыми вообще может не стоять какая-либо предметная область), а реальная действительность.

1.2. Пример возникновения гносеологического тупика

В данном разделе на конкретном примере решения задачи об оценке гидрологических последствий антропогенного изменения климата иллюстрируется механизм возникновения проблемной ситуации. События начали развиваться в 1987/88 гг. Директор Главной геофизической обсерватории Е. П. Борисенков добился (видимо с помощью АН СССР) финансирования на проведение НИР по теме «Оценить влияние возможных колебаний климата на основные отрасли народного хозяйства» (по крайней мере так назывался раздел, выполняемый ЛГМИ – Ленинградский гидрометеорологический институт). Тема была «закрытая», курировалась Военно-промышленной комиссией при ЦК КПСС и Совете министров СССР, хотя методические результаты никто не запрещал публиковать («закрытыми» на тот момент была часть сценариев, связанных с «ядерной зимой»). Был и «открытый» сценарий М. И. Будыко. Сам Борисенков не очень верил ни в потепление, ни в похолодание (еще меньше, думаю, верил в «атомную войну»). Но рассуждал он примерно так: если тот или иной сценарий начнет реально (по статистически значимым инструментальным наблюдениям) реализовываться, то хорошо бы иметь цепочку математических моделей климат – гидрология – экономика, чтобы можно было оценить возможные последствия изменения климата на различные отрасли экономики. Кафедра гидрофизики и гидропрогнозов РГГМУ (ЛГМИ) пришлось заниматься двумя последними звеньями этой цепочки, включая их интерфейс – производственные функции водозависимых отраслей, – но ниже будут обсуждаться только проблемы гидрологического характера.

Гидрологический режим – понятие многогранное, но если иметь в виду многолетний речной сток, то основной нормативный документ СНиП 2.01.14-83 (СП 33-101-2003) [46, 47] достаточно полно его характеризует. Приложение к СНиПу содержит пакет географических карт с указанием (в разных вариантах – изолинии, районирование) распределения статистических характеристик различных видов речного стока (годового, максимального, минимального). Это статистические моменты или их комбинации, для которых существуют таблицы, позволяющие построить исполь-

1.2. Пример возникновения гидрогеологического типа

зубые в инженерной гидрологии кривые обеспеченности. Среди них многолетние нормы (в слоях \bar{h} или модулях \bar{q}), коэффициенты вариации C_v и асимметрии C_s . Все водозависимые отрасли экономики так или иначе «привязаны» к этим картам. Поэтому, чтобы решать главную задачу по оценке чувствительности основных отраслей экономики к колебаниям климата надо научиться строить подобные пакеты карт под те или иные климатические сценарии. (При этом особенности сценариев – похолодание или потепление, – а также их причины, с точки зрения методологии прогнозирования гидрогеологических последствий изменения климата, безразличны; смысл имеет только содержащаяся в них информация, а она на тот момент во всех сценариях была одинаковой: распределение по территории СССР климатических норм температуры воздуха и осадков.)

В общих чертах, на описательном уровне была сформулирована решаемая задача: найти способ (модели), позволяющий переводить указанные выше климатические сценарные параметры в расчетные гидрогеологические характеристики, по которым можно строить прогнозные кривые обеспеченности речного стока, повсеместно используемые на практике.

Ясно, что должны были существовать какие-то аналоги (пусть суррогатные) решения подобной задачи, а также ближайший аналог – прототип. Они действительно лежали на поверхности. Проще всего было оценить изменения норм: по предшествующим рядам наблюдений за стоком, осадками и температурой воздуха строились уравнения регрессии (типа $\bar{h} = f(\dot{X}, T^0 C)$), по которым (в предположении, что коэффициенты этих уравнений не изменяются при колебаниях климата) давались сценарные оценки норм [8]. Например, были сделаны следующие выводы о вероятных изменениях годового стока при потеплении на $0,5^{\circ}\text{C}$:

- 1) сток рек Центрального и Волго-Вятского районов Европейской части страны уменьшается на 10–20%;
- 2) сток Оби в верхнем течении увеличивается на –7%;
- 3) сток Енисея в верховье увеличивается на 7–10%;
- 4) сток Амура увеличивается на 5–20%.

В работе [8] приведены оценки относительных изменений годового стока рек СНГ при потеплении внеэкваториальной части

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Северного полушария, которые наряду с такими же оценками осадков можно рассматривать как основу для прогнозов.

Однако, сам по себе прогноз изменения общей водности различных регионов не полностью устраивает основных потребителей гидрологической информации (гидроэнергетику, водное хозяйство и мелиорацию, строительное проектирование, речной транспорт и т. д.), которая применяется в виде кривых обеспеченности стоковых характеристик. Необходимо было предложить способ оценки не только норм, но и двух других используемых в инженерной практике параметров (коэффициентов вариации C_v и асимметрии C_s), чтобы рассчитывать обеспеченные характеристики стока, причем не только годового, но и экстремальных видов многолетнего стока (минимального и максимального).

Такой способ нашелся. В теории случайных процессов в научной школе академика В. С. Пугачева (кстати, ученика А. Н. Колмогорова) достаточно подробно (включая приложения) развито моделирование марковских случайных процессов [42, 43]. В его основе лежит уравнение линейного формирующего фильтра:

$$d\bar{y} = [-(\bar{c} + \tilde{c})\bar{y} + \bar{x} + \tilde{x}] dt, \quad (1.3)$$

где \bar{x} – вектор внешних воздействий на изучаемую систему; \bar{y} – вектор ее состояния; \bar{c} – вектор задаваемых параметров (символ « $\bar{\cdot}$ » означает статистическую норму, а « $\tilde{\cdot}$ » – белый шум).

В случае речного стока: $y = Q$ (h или q); $c = 1/k\tau$, k – коэффициент стока, τ – время релаксации; $x = \dot{X}/\tau = N$. Модель (1.3) это «зашумленное» уравнение первого порядка, описывающее формирование стока на речном бассейне:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) статистически эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка параболического типа Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), описывающего эволюцию плотности вероятности $p(\bar{y}, t)$ ($\bar{y} = y_i, i = 1, n$):

1.2. Пример возникновения геосеологического тупика

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial(A_i p)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2(B_{i,j} p)}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (1.5)$$

где A_i и B_{ij} – коэффициенты сноса и диффузии, определяющие скорость изменения математического ожидания приращений вектора состояния \bar{y} и их квадратов.

В одномерном случае ($\bar{y} = Q$) они имеют следующий вид:

$$A(Q, t) = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})Q - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}}\bar{N}; \quad (1.6)$$

$$B(Q, t) = G_{\bar{c}}Q^2 - 2G_{\bar{c}\bar{N}}Q + G_{\bar{N}}, \quad (1.7)$$

где $G_{\bar{c}}$ и $G_{\bar{N}}$ интенсивности, а $G_{\bar{c}\bar{N}}$ – взаимная интенсивность шумов.

Физический смысл коэффициентов A и B метафорично иллюстрирует рис. 1.2, *a*. Пятно загрязнений, попавшее в реку из притока, сносится вниз по течению (за это «отвечает» коэффициент сноса A) и расширяется, диффундирует (за счет коэффициента диффузии B). Если вернуться от этой экологической метафоры к плотности вероятности $p(y, t)$, то распределение также «сносится» по «оси» y влево и вправо (в зависимости от, в основном, вектора внешних воздействий и параметра \bar{c}), а также расплывается по y (в зависимости от интенсивности шумов).

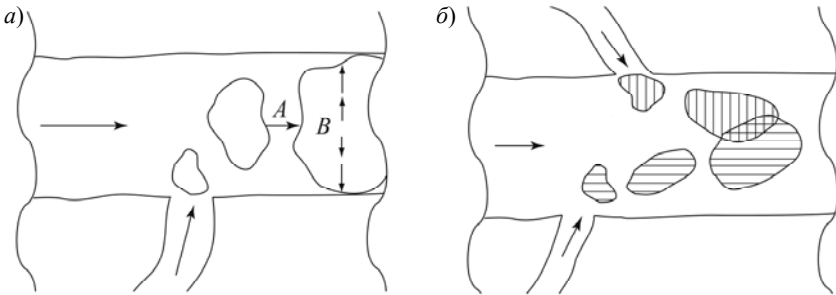


Рис. 1.2. К иллюстрации действия коэффициентов сноса и диффузии.

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Если речь идет о группе компонентов, например, двух пятен грязи разных цветов, то будет происходить их смещение, распластывание и взаимодействие (рис. 1.2, б). В общем случае уравнение (1.3) может быть нелинейным (по y ; соответствующее ему уравнение ФПК (1.5) в любом случае остается линейным по p), картинки на рис. 1.2 усложняются (например, одноцветное пятно на рис. 1.2, а станет «двухмодальным – с двумя центрами концентрации грязи).

Классическую гидрологию вполне устраивает линейная модель (1.4) и ее стохастическое обобщение (1.3), так как последняя через уравнении ФПК приводит к решению в виде семейства кривых Пирсона и, в частности, к кривой Пирсона III типа и ее модификации, выполненной С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем. В гидрологии ограничиваются несколькими начальными моментами (эмпирические оценки которых можно считать статистически значимыми при продолжительности рядов в несколько десятилетий). Поэтому аппроксимируем уравнение (1.5) для случая $p(Q, t)$ системой дифференциальных уравнений для начальных моментов m_i i -го порядка (подобная процедура также давно известна в теории случайных процессов [42]):

$$\begin{aligned} dm_1/dt &= -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})m_1 + \bar{N} - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}}; \\ dm_2/dt &= -2(\bar{c} - G_{\bar{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\bar{c}\bar{N}}m_1 + G_{\bar{N}}; \\ dm_3/dt &= -3(\bar{c} - 1,5G_{\bar{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\bar{c}\bar{N}}m_2 + 3G_{\bar{N}}m_1; \\ dm_4/dt &= -4(\bar{c} - 2G_{\bar{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 4 \cdot 3,5G_{\bar{c}\bar{N}}m_3 + 6G_{\bar{N}}m_2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, нам практически ничего не пришлось выдумывать, чтобы получить прогнозную модель (в виде уравнения ФПК (1.5) для плотности вероятности $p(Q, t)$ или систему уравнений для начальных моментов (1.8)).

На самом деле использование уравнения (1.5) для долгосрочного прогнозирования проблематично. Это уравнение параболического типа и ее решение для задачи Коши (с начальным стартовым распределением $p(Q, t_0)$) приводит к расплывающейся (и, естественно, смещающейся) кривой плотности вероятности. Ситуация

1.2. Пример возникновения гляциологического тупика

похожа на решение уравнения Шредингера для волновой функции, но там это расползание прекращается при коллапсе – измерении, приводящем к редукции волнового пакета. В нашей прогнозной ситуации измерять на интервале прогнозирования некому и прогноз с каждым временным шагом становится все более и более бессмысленным.

Ситуацию спасает сам климатический сценарий, который носит равновесный (статистически стационарный) характер. Раньше он представлял собой просто указание новых климатических норм, начиная с какого-либо момента времени (например, 2020 г.); сейчас дается их указание на фиксированных двадцатилетках (точнее указывают внутригодовые распределения метеорологических характеристик – «типовой метеограф» – по аналогии с типовым гидрографом).

Подобная стационарность внешнего воздействия на речные бассейны (неизменность осредненных за двадцатилетие статистических норм осадков и температуры воздуха) позволяет (в случае долгосрочных сценарных оценок характеристик многолетних видов речного стока) в системе (1.8) принять $dm_i/dt = 0$, т. е. ограничиться алгебраической системой уравнений. (Это оправдано еще и тем, что время релаксации – радиус корреляции для автокорреляционных функций годового стока – как правило не превышает одного года, по крайней мере на таком интервале можно говорить о статистически значимых значениях коэффициентов автокорреляции. Это указывает на то, что переходные процессы в отношении характеристик многолетнего стока быстро затухают.)

Сама процедура долгосрочных оценок состоит из двух этапов. На первом – из гидрологических карт (приложений к СНиПу 2.01.14-83) находят численные значения моментов m_i , по которым параметризуют прогнозную модель (1.8). На втором этапе численные значения некоторых из параметризованных характеристик меняют в соответствии со сценарными значениями климатических параметров, т. е. новой нормой осадков \bar{X} и коэффициентом стока $k(\bar{X}, \bar{T}^0 \text{C})$. Эта процедура выполняется для точек расчетной сетки (обычно 1,5–2 градуса по долготе и широте) и по результатам расчетов строятся прогнозные карты расчетных характеристик стока (нормы, C_v и C_s). (Для задания новых значений

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

величин $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{c}\bar{N}}$, $G_{\bar{N}}$ используются региональные эмпирические и полуэмпирические формулы, а если таковые отсутствуют, то их оставляют неизменными – таков современный научный уровень гидрологии; аналогичным образом, через параметр k , климатические сценарии, представляющие собой внешние воздействия, можно дополнять сценариями социального развития территории – урбанизация, демография, залесенность и т. п.).

На рис. 1.3, *a* представлен иллюстрированный пример прогноза коэффициента вариации годового стока Пермского края по одному из сценариев на 2060 г. Накоплен двадцатилетний опыт практического применения подобной методики прогноза в различных вариантах для разных видов многолетнего речного стока. Достоверность прогнозирования кривых плотности вероятности была проверена для многолетнего годового стока по критерию Колмогорова на ретроспективном материале (табл. 1.1).

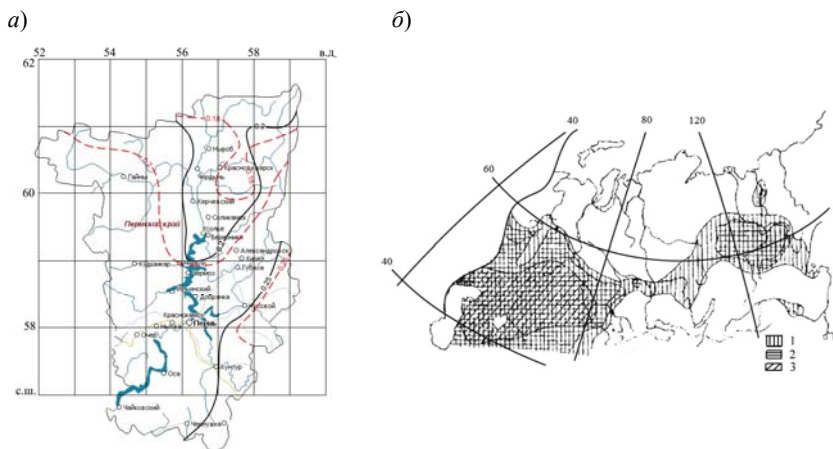


Рис. 1.3. Прогнозная карта коэффициента вариации годового стока Пермского края (по одному из климатических сценариев на 2060 г.) (*a*) и распределение зон неустойчивости годового стока Сибири (*б*): 1 – $\beta > 2/3$; 2 – $\beta > 1$; 3 – $\beta > 1,8$ (<2).

В табл. 1.1 приведено абсолютное и относительное число прогнозов по всей территории СНГ и отдельно для увлажненных ($\bar{X} > 450$ мм) и засушливых ($\bar{X} < 150$ мм) регионов. Бросается в глаза,

1.2. Пример возникновения гносеологического тупика

что в засушливых регионах результаты на 15–30% хуже, чем в увлажненных. Особой нестабильностью отличаются прогнозные оценки третьих начальных моментов (а значит и коэффициентов асимметрии).

Таблица 1.1

Результаты ретроспективных прогнозов				
Район	Общее число прогнозов	Число оправдавшихся прогнозов при уровне значимости		
		5 %	10 %	20 %
Территория СНГ в целом	214	170/79,4	161/75,2	145/67,8
Увлажненный	151	125/82,8	120/79,4	108/74,5
Засушливый	63	45/71,4	41/66,0	37/58,7
Примечание: В знаменателе – процент общего числа прогнозов.				

Оказалось возможным оценить (см. [26]) степень устойчивости решения системы (1.8) строго математически (т. е. логикой, заложеной в саму модель формирования стока). При $\beta = G_{\bar{c}}/\bar{c} > 0,67$ теряет устойчивость третий начальный момент, при $\beta > 1$ – второй. На рис. 1.3, б представлена карта распределения β по Сибири. Действительно, начиная с определенных широт речной сток (в рамках модели (1.5)) формируется неустойчиво по старшим моментам (для ЕТР с 55 ° с. ш.). На что это указывает? На недееспособность подобной модели в регионах неустойчивости, т. е. на то, что реальные кривые распределения плотности вероятности выходят за класс распределений семейства кривых Пирсона. Куда «выходят» – вопрос открытый (обычно распределения «толстохвостые» и полимодальные).

До этого момента мы действовали «финитно», в рамках общепринятых в гидрологии логики и моделей формирования речного стока. Конечно, использование для прогноза уравнения ФПК (или его различных модификаций) внесло новую струю в гидрологию. Например, вывод уравнения Пирсона из уравнения ФПК раскрывает физический смысл коэффициентов, которые раньше считались просто «подгоночными». Уравнение Пирсона, как известно, имеет вид

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{F(Q)} p, \quad (1.9)$$

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

являясь стационарным «огрызком» уравнения ФПК. В гидрологии обычно ограничиваются квадратичной аппроксимацией функции распределения $F(Q) = b_0 + b_1Q + b_2Q^2$ и связывают коэффициенты a, b_0, b_1, b_2 с первыми четырьмя начальными моментами. Уравнение (1.9) было получено Пирсоном без всякой связи с моделью ФПК (последнего на момент появления модели (1.9) еще не существовало). Если уравнение (1.9) вывести из модели ФПК, то коэффициентам можно придать наглядный физический (в нашем случае гидрологический) смысл: $a = (G_{\bar{c}\bar{N}} + 2\bar{N})/d$; $b_0 = -G_{\bar{N}}/d$; $b_1 = G_{\bar{c}\bar{N}}/d$; $b_2 = -G_{\bar{c}}/d$ (здесь $d = 2\bar{c} + G_{\bar{c}}$). Параметры $G_{\bar{c}\bar{N}}$, \bar{N} , $G_{\bar{N}}$, $G_{\bar{c}}$, \bar{c} характеризуют физико-статистические свойства речного бассейна и внешних климатических воздействий на него. Именно это раскрытие гидрологического смысла коэффициентов a, b_0, b_1, b_2 позволило «вставить» в модель формирования стока климатический сценарий.

Но все-таки это новизна относительная (относительно гидрологии). В академической науке (теории случайных процессов) это сделал впервые А. Н. Колмогоров и широко применяли В. С. Пугачев и его ученики в теории автоматического управления. С момента осознания возможности потери устойчивости решения системой (1.8) мы вступаем в область инфинитности. (Инфинитности, с точки зрения логики и моделей, основанных на линейном формирующем фильтре (1.3).) Об абсолютной инфинитности говорить глупо. Инфинитными могут быть только предметные области относительно друг друга, т. е. когда одна из них не может быть выражена в терминах другой, и наоборот. Например, экономика и экология инфинитны относительно друг друга. Но их можно частично состыковать через производственные функции отраслей экономики: с одной стороны – природный ресурс в виде характеристик стока, а с другой – выпуск продукции.

Сейчас, с точки зрения разд. 1.1, мы оказались перед третьим этапом частично инфинитного моделирования, «пропастью», через которую нельзя перешагнуть «формальным доказательством» (если пользоваться терминологией теоремы Геделя). Но прежде чем через эту пропасть все-таки перепрыгнуть, визуализируем появление неустойчивостей при решении системы уравнений для начальных моментов (1.8), см. рис. 1.4, $a, б, в$.

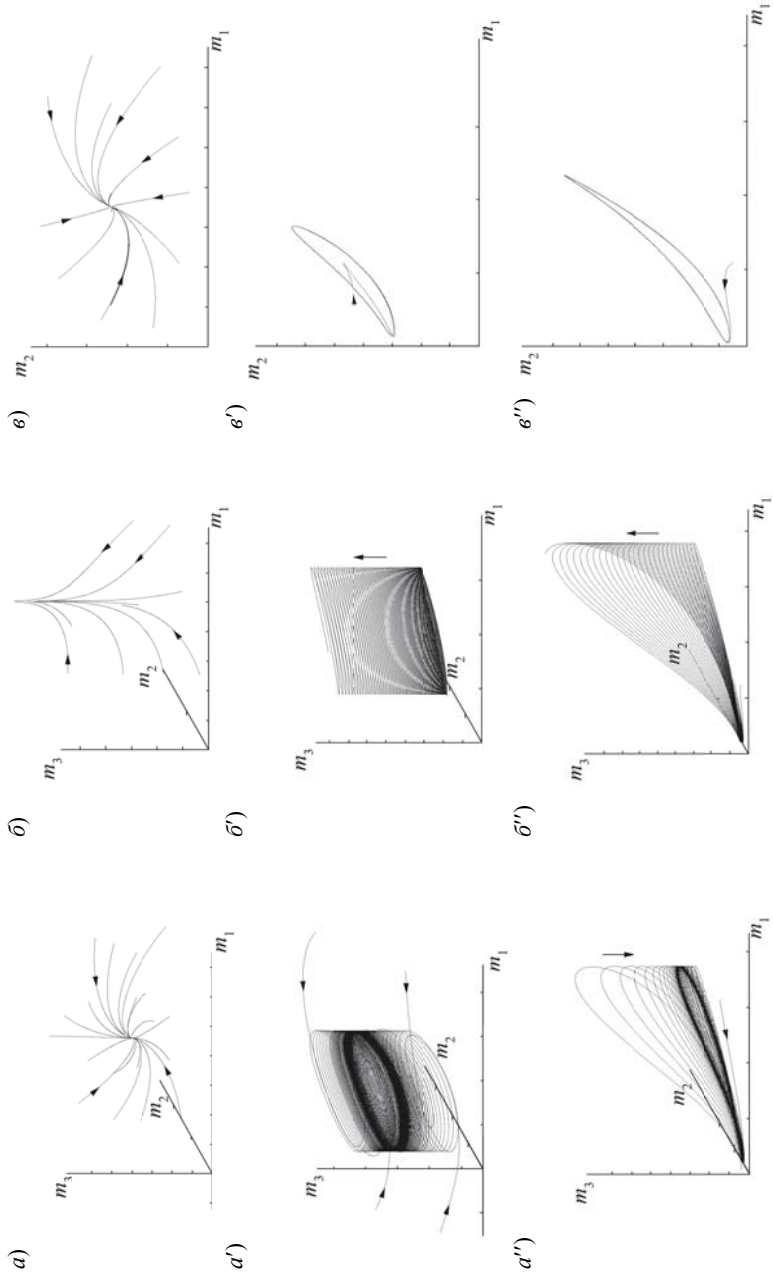


Рис. 1.4. Различные варианты решения системы (1.8): *a* – устойчивое по трем моментам; *б* – устойчиво по m_1 и m_2 и неустойчиво по m_3 ; *в* – двумерная проекция рис. *б* (*a'*, *б'*, *в'* – при $a_0 \neq 0$; $a_1 \neq 0$; $a_2 = 0$; a'' , *б''*, *в''* – при $a_0 \neq 0$; $a_1 \neq 0$; $a_2 \neq 0$).

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Дополним систему (1.8) уравнением для периодического изменения параметра \bar{c} (это позволит визуализировать появление и исчезновение неустойчивости (так как $\beta = G_{\bar{c}}/\bar{c}$)):

$$d\bar{c}/dt = -a_0\bar{c} + a_1 \sin(\omega_1 t), \quad (1.10)$$

а осадки сделаем периодическими и «высокочастотными» ($\bar{X} = \bar{X}_0 + a_2 \sin(\omega_2 t)$, $\omega_2 \gg \omega_1$ – последнее для лучшего восприятия картинок; здесь a_0, a_1, a_2 – коэффициенты), см. рис. 1.4. Рис. 1.4, a' , b' и v' повторяют рис. 1.4, a , b и v при $a_0 \neq 0$; $a_1 \neq 0$; $a_2 = 0$, т. е. когда осадки \bar{X} и параметр \bar{c} не «взаимодействуют» (так как \bar{c} обратно-пропорционален коэффициенту стока, а последний для многолетнего режима определяется «потерями» на испарение, то не «взаимодействуют» осадки и испарение). Рис. 1.4 a'' , b'' , v'' повторяют предыдущие рисунки при $a_2 \neq 0$. В этом случае соотношение между \bar{c} и $G_{\bar{c}}$ (т. е. значение параметра β) периодически меняет степень устойчивости фазовых траекторий.

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

Рассмотрим более подробно, как надо понимать неустойчивость решения системы уравнений для начальных моментов (1.8).

Во-первых, не надо путать существование решения и его устойчивость. Решение задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа (1.8) существует и единственно [35]. А вот его стационарное решение (распределения Пирсона при $dm_i/dt = 0$ устойчивым может и не быть: чем старше момент, тем более он неустойчив. Математическое ожидание по критерию β устойчиво практически всегда. Действительно, критерий устойчивости на практике вычисляется по формуле [26]

$$\beta = 2k \ln r + 2, \quad (1.11)$$

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

где k и r – коэффициенты стока и автокорреляции (при годовой сдвижке) соответственно.

Чтобы значение β равнялось двум – ситуация, при которой может потерять устойчивость матожидание – надо иметь либо $k = 0$, либо $r = 1$. В первом случае имеем бессточную область, для которой модель формирования стока (линейный формирующий фильтр (1.3)) вообще не причем, а во втором – не причем случайные процессы и устойчивость решений их моделей. Критерий β всегда меньше двух, и можно говорить только о тенденции первого момента к неустойчивости.

Во-вторых, обсуждаемая неустойчивость это не экзотика: в среднем, по бассейнам всего Земного шара, речной сток в рамках системы уравнений (1.8), т. е. распределений Пирсона, всегда неустойчив по третьему моменту. Действительно, для всех бассейнов поверхности суши Земли коэффициент стока в среднем равен 0,38 [49], а коэффициент автокорреляции среднегодового многолетнего стока 0,2 [14] (по Северному полушарию; по Южному – данных нет). Поэтому $\beta = 2 \cdot 0,38 \cdot \ln 0,20 + 2 \approx 0,777$ (больше критического значения β для третьего момента равного 0,66).

В третьих (и это самое главное), надо правильно «отвечать» на обычно возникающий вопрос: как же так, всегда была устойчивость (уже много десятилетий строятся карты характеристик многолетнего стока) и вдруг такое...? На самом деле неустойчивости не то чтобы не было, а не было разговоров о ней. (Если и употреблялась подобная терминология, то только в отношении неустойчивости статистических оценок эмпирически вычисленных моментов на основе рядов реальных наблюдений.) Для того чтобы говорить о неустойчивости решений системы дифференциальных уравнений для моментов, эта система должна существовать, а в гидрологии ее не было. Распределения Пирсона были, эмпирические распределения были, но не было модели, показывающей механизм формирования этих распределений, т. е. параметры уравнения Пирсона носили формально-«подгоночный» характер и никак не связывались с факторами формирования стока. О подобной модели, объединяющей генетические и статистические аспекты формирования стока, только мечтали: «... создание генетического метода в таком его понимании – сложная и большая задача» [16].

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Появилась модель – возникла и проблема устойчивости ее решений. В общем случае устойчивость может пониматься в разных смыслах (обычно имеется в виду линейная устойчивость относительно либо стационарного состояния, либо какого-нибудь движения, выбранного за невозмущенное). В рассматриваемом нами варианте системы (1.8) речь идет о критерии линейной устойчивости, но ниже потребуется и более общий критерий диссипативности системы $\operatorname{div} m_i = \sum_{i=1}^n dm/dm_i < 0$ (в данном случае оба критерия совпадают).

Хотя мы пытаемся моделировать эволюцию вероятностных моментов, система уравнений (1.8) является динамической (строго детерминистической), и процесс можно «прокручивать» в обе стороны: как на распад (упрощение) кривой плотности вероятности, так и на ее «конструирование» (усложнение). Какой из этих механизмов будет реализовываться зависит от знака дивергенции $\operatorname{div} m_i$, т. е. от того, «кто кого сжимает»: инфинитная реальность (испарительная) финитную предметную область (зафиксированную системой из четырех дифференциальных уравнений для моментов) или стоковое финитное ядро начнет «давить» на эту инфинитную реальность.

[На самом деле все обстоит сложнее. Любая модель отражает не явление, а сущность. Сущность же зафиксированной моделью предметной области лежит в той реальности, которая ее фиксирует (см. [20]). В нашем случае параметры \bar{c} и $G_{\bar{c}}$, соотношение между которыми определяет знак дивергенции, порождается в основном режимом испарения, хотя эти параметры «сидят» в модели формирования стока они являются частично инфинитными.]

Зависимость степени сжимаемости распределения плотности вероятности от числа аппроксимирующих ее моментов представлено на рис. 1.5. На этом же рисунке представлены зависимости критерия β и его модификации β_{m_i} (см. ниже) от порядка момента. Критерий β_{m_i} имеет немного другой смысл, по сравнению с β . Он вытекает из условия смены знака у $\operatorname{div} m_i$. У «системы», состоящей из одного уравнения для первого момента [$\operatorname{div} m_i = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})$], устойчивость теряется, как и обычно, при $\beta_{m_i} = \beta = 2$.

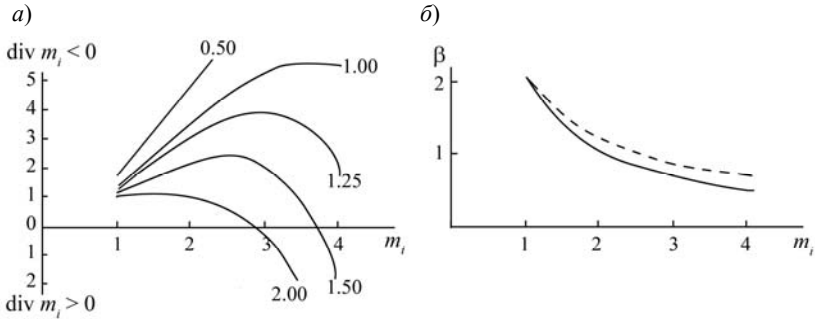


Рис. 1.5. Влияние числа аппроксимирующих моментов на степень сжимаемости (а) и устойчивости (б). Кривые на рис. а построены для $\bar{c} = 2$ (значения $G_{\bar{c}}$ показаны на графиках). Штриховая линия на рис. б соответствует значениям β_{m_i} , а сплошная – β .

Для нормального распределения $[\text{div } m_2 = -(3\bar{c} - 2,5G_{\bar{c}})]$ – при $\beta_{m_2} = 1,2$. Для системы из трех уравнений для моментов $[\text{div } m_3 = -(6\bar{c} - 7G_{\bar{c}})]$ – при $\beta_{m_3} = 0,88$, а для случая четырех учитываемых моментов $[\text{div } m_4 = -(10\bar{c} - 15G_{\bar{c}})]$ – при $\beta_{m_4} = 0,67$ (обозначения $\text{div } m_i$ и β_{m_i} надо понимать в том смысле, что значения дивергенции и критерия устойчивости вычисляются для системы, состоящей из 1, ..., i моментов).

Полученные графики требуют осмысления. Например, если рассматривать одно уравнение для второго момента, то устойчивость теряется при $\beta = 1$. Если же рассматривать систему из уравнений для первого и второго момента и определять критерий β_{m_2} по смене знака у дивергенции $\text{div } m_2$, то получается, что $\beta_{m_2} = 1,2$, т. е. систему развалить трудней, чем каждый момент в отдельности. Исходя из идеологии частично инфинитного моделирования, вроде бы так и должно быть, но ведь система (1.8) является «развязанной» по моментам (правда, развязана она только для млад-

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

ших моментов по отношению к старшим), и моменты все-таки не являются в прямом смысле фазовыми переменными.

Система (в нашем случае распределение плотности вероятности расходов воды) будет развиваться (увеличивать число устойчивых моментов) за счет уменьшения $\beta_{m_i} = G_{\tilde{c}}/\bar{c}$, т. е. за счет подавления активности инфинитного окружения. В роли последнего выступает прямой конкурент расхода – испарение, а также более сложно ведущая себя переменная ΔU (изменение запаса воды в почво-грунтах). Но если этот конкурент еще не «ожил» (представлен в финитной части модели только константами), то для расхода это действительно просто внешняя среда (наряду с \dot{X} и ΔU). Получается, что чем меньше интенсивность вариаций испарения (для данного конкретного бассейна), тем более «изошренным» (сложным) может быть распределение $p(Q)$. При $\text{div } m_i < 0$ объект (распределение) «питается» средой (осадками, но не «жиреет», так как его скрытый конкурент (испарение) через соотношение $G_{\tilde{c}}/\bar{c}$ тормозит рост моментов. Если $G_{\tilde{c}} \approx \bar{c}$, то $\text{div } m_i > 0$ и объект начинает сжимать гидрометеорологическую среду (точнее – она становится «податливой»). В работе [22] представлены результаты численной реализации подобной модели «развития» и «гибели» распределения $p(Q)$ на уровне 4-х моментов.

Есть, по крайней мере, две возможности избежать неустойчивости: либо вообще ликвидировать внешние (они же «внутренние») шумы \tilde{c} с интенсивностью $G_{\tilde{c}}$ («поместить» процесс формирования стока в «термостат», изолировав его от внешнего мультипликативного шума и оставив в модели только постоянную составляющую \bar{c} внешних воздействий, норму осадков \bar{N} и аддитивный внешний шум $G_{\bar{N}}$), либо, наоборот, мультипликативную часть внешнего воздействия (испарение) ввести в модель как вторую переменную двумерного распределения $p(Q, E)$. Фактически оба варианта сводятся к одному: ослаблению мультипликативной составляющей. В первом случае это делается путем упрощения модели (уменьшения ее размерности), а во втором – путем ее усложнения (расширения размерности фазового пространства).

Для того чтобы ослабить удивление читателя от того, что одна и та же цель может быть достигнута противоположными метода-

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

ми, можно привести следующий пример. При наступлении ледникового периода у человекообразных обезьян – обезьяноподобных людей (уже частично потерявших волосяной покров в связи с освоением огня) есть две возможности выжить: либо вернуться в первобытное состояние и вновь обрасти «шерстью», либо быстро «поумнеть», освоив некоторые блага цивилизации (одежда, дома и т. п.).

Упрощение [в случае системы (1.8) и уравнения Пирсона (1.9)] сводится к игнорированию 4-го момента и принятию коэффициента b_2 равным нулю (т. е. сделав G_c , а значит и β , равными нулю). Проблема неустойчивости сразу исчезает. Однако, это только способ уйти от «головной боли», связанной с проблемой неустойчивости, а не ее решение.

(Проблемы рака тоже «не было», пока не знали о его существовании: «Бог дал – бог взял». В этом контексте можно вообще отказаться от использования статистики: в Древнем Риме строили акведуки и мосты, которые стоят, без аварий до сих пор; при этом не только об устойчивости, но и вообще о существовании статистики не знали. Вопрос: какой ценой достигались такие поразительные результаты? Характеристики надежности перекрывались в разы соответствующим масштабом материальных затрат и рабского труда.)

Поэтому тупик надо преодолевать увеличением размерности фазового пространства, в которое «погружается» модель формирования стока. Определение этой размерности осуществляется с помощью фрактальной диагностики, при которой, анализируя только одну фазовую переменную, доступную непосредственному измерению, можно судить об общем числе переменных, участвующих в процессе. (Не надо путать эту методику с методом остаточных корреляций, в котором все более-менее значимые переменные известны и представлены рядами наблюдений: остается выбрать наиболее существенные с точки зрения коэффициентов корреляции между ними и основной переменной, характеризующей процесс.) Мы не будем излагать технику этой диагностики, рассмотренной в ряде монографий по нелинейной динамике (см. ее изложение с позиций гидрологии в работах [20, 21, 27], но в контексте частично инфинитного моделирования ситуация сводится к следующему.

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Мы никогда не имеем дело с объектом «вообще», а только с конечномерными проекциями, зафиксированными его моделью, выделяющий конкретную предметную область, которая нас интересует (например речной сток с бассейна, хотя можно выделить и другие предметные области для исследования). Эволюция любой (в том числе и одномерной) проекции (например расхода воды) объекта инфинитной реальности происходит не сама по себе, а при влиянии ближайших соседей (например испарения). Если мы изучаем двумерную проекцию (Q, E) («лист бумаги» – см. разд.1.1), то возможно частичное влияние запасов воды в почво-грунтах. Фрактальная диагностика ряда расхода покажет дробную размерность (например, 2, 31). Это означает, что фазовое многообразие (фрактал) «вкладывается» в трехмерное фазовое пространство (сравни с рыхлым комком бумаги из разд. 1.1). Фрактальная размерность является продуктом влияния на формирование стока со стороны геолого-социально-метеорологической среды. Чтобы сформировалась полноценная трехмерная фазовая проекция $(Q, E, \Delta U)$, т. е. увеличилась размерность фрактала (получился спрессованный комок бумаги – в терминах разд. 1.1) надо реализовать переходной гносеологический процесс, пожертвовав частью размерности пространства вложения $(0,69)$. Частично инфинитная реальность – это питательная среда для роста фрактала, поставляющая ресурсы для его развития. Если она несжимаема («неподатлива») (например для уравнения ФПК (1.5)

$$\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^n \partial A_i / \partial x_i = 0$$
; для одномерного случая это будет при $2\bar{c} = G_{\bar{c}}$), то стационарное решение отсутствует.

Таким образом, основной тезис частично инфинитной гидрологии заключается в том, что при расширении фазового пространства частично инфинитная реальность (ее размерность равна разности размерности пространства вложения и числа реально учитываемых фазовых переменных) сжать проще. Это означает, например, что «толстый хвост», возникающий при неустойчивости по дисперсии, можно «размазать» по вновь вводимой фазовой переменной, сделав тем самым двумерное распределение устойчивым. Это процедура предполагает умение прогнозировать появление неустойчивости и зарождение новой фазовой переменной, которая эту неустойчивость и создала.

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

Если вернуться к метафорам разд. 1.1, то фрактальная диагностика – это реализация механизма «ученого незнания» кардинала XV в. Николая Кузанского (Николаи из Кузы). Если мы оперируем двумерной моделью (наше знание), а фрактальная диагностика указывает, что размерность пространства вложения – пять, то знание о трех «спрятанных» фазовых переменных и есть знание о том, что мы еще должны узнать, т. е. что конкретно они собой представляют. То, что эти поиски не бессмысленны обещает теорема Пуанкаре–Перельмана: мы только думаем, что живем в n -мерном многообразии, но есть еще скрытая (от наших представлений) $(n+1)$ -мерная переменная, найти которую обещает теорема Геделя. Но для этого придется встать из-за письменного стола и найти новую фазовую переменную не просто из «общих соображений – аксиом», а психологически убедить окружающих в ее реальном существовании и раскрытии некоей тайны (получении нового знания), предпринимая определенные действия (может быть и ценой собственной жизни).

Рассмотрим два примера имитации выхода из тупика. «Имитации» – так как мы сейчас «прокрутим» ситуации «задним числом» (которым, как известно, все умны). В реальности конечный результат не висит морковкой перед носом, его конструируют конкретной деятельностью.

В частично инфинитной гидрологии (да и вообще в нелинейной динамике) считается возможным (а с практической точки зрения – необходимым) аппроксимировать бесконечномерные модели конечномерными в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В достаточно общем случае подобная система имеет вид:

$$dY_i = \left(\left(\sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} + \tilde{c}_{ij} \right) \varphi_{ij}(\bar{Y}) + \bar{N}_i + \tilde{N}_i \right) dt \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.12)$$

где \bar{Y} – вектор состояния системы («набор» фазовых переменных, например Q, E и т. д.); основные обозначения уже использовались ($\bar{c}_{ij} < 0$).

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Переходя от (1.12) к уравнению ФПК и аппроксимируя последнее системой дифференциальных уравнений для моментов, получаем (из-за нелинейности функции $\varphi_{ij}(\vec{Y})$) незамкнутую систему уравнений, в которой младшие моменты зависят от старших. Ситуация существенно упрощается, если $\varphi_{ij}(\vec{Y}) = Y_j$. В этом случае можно получить (подобные процедуры в теории случайных процессов известны) «развязанную» систему для первых ($m_i = M[\vec{Y}]$) и вторых ($\alpha_{ij} = M[\vec{Y}\vec{Y}']$) начальных моментов (см. [23]). Нам сейчас потребуется только уравнение для m_i :

$$\dot{m}_i = \sum_{p,q=1}^n (\bar{c}_{ip} + 0,5G_{\bar{c}_{iqp}}) m_p + 0,5 \sum_{p=1}^n G_{(\bar{c}\bar{N})_{pp}} + \bar{N}_i. \quad (1.13)$$

Смысл «развязанности» в том, что уравнение для m_i никак не зависит от уравнения для α_{ij} (в нелинейном случае такой «развязки» нет). Запишем систему (1.13) для одной переменной (математического ожидания):

$$\dot{m}_Q = -(\bar{c}_Q - 0,5G_{\bar{c}_Q}) m_Q + 0,5G_{(\bar{c}\bar{N})_Q} + \bar{N}_Q. \quad (1.14)$$

Если $G_{\bar{c}_Q} > 2\bar{c}_Q$, то расходы воды не представляют больше статистическую совокупность (по крайней мере в рамках распределений Пирсона). Но ведь расходы воды никуда не делись, река осталась. Разрушился только «карточный домик» наших представлений о том, как живет (в статистическом смысле) река (ее режим стока). Построим более прочный «карточный домик», чтобы он не «пугался» больших значений интенсивности шума $G_{\bar{c}_Q}$.

Давайте разберемся «кто шумит»? Параметром c так или иначе учитываются потери на испарение, которым «управляет» в основном что-то инфинитное для речного бассейна. Поэтому можно включить испарение в состав вектора \vec{Y} . Но тогда система (1.13) примет вид

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

$$\dot{m}_Q = -c_Q m_Q - c_E m_E + \bar{N}_Q, \quad (1.15)$$

$$\dot{m}_E = -c_E m_E - c_Q m_Q + \bar{N}_E$$

(взаимные интенсивности шумов $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ примем нулевыми, так как в данном контексте это не существенно). Если в бассейне нет влияния других фазовых переменных, а времена релаксации для стока и испарения постоянны (собственно, только в этом случае они и могут называться временем релаксации в строгом смысле этого слова), то коэффициенты c_Q и c_E являются константами и всякие основания для неустойчивости вообще исчезают. Имеем «термостат» по мультипликативным шумам \tilde{c} (но не по аддитивной \tilde{N}). Закон распределения $p(Q, E)$ стал устойчивым (по крайней мере в отношении математического ожидания), но произошел «выброс размерности». (В реальности это может быть и не так из-за влияния запасов воды в почвогрунтах ΔU , но их вес по сравнению с Q и E , по-видимому, менее существенен.)

Мы упростили систему (1.13) до одного уравнения (1.14), перегрузив (говоря языком C++) коэффициенты \bar{c}_Q и $G_{\tilde{c}Q}$. Пока оставшиеся «в тени» остальные уравнения ведут себя тихо (например $\dot{m}_E \approx 0$: метафорически – система отсчета в пространстве фазовых переменных «инерциальна», см [22]), то подобная идеализация срабатывает. В противном случае переменная m_E «выходит на сцену» и «говорит», что без нее нельзя. Правда, обычно мы не знаем, что реально остается в тени, хотя методами фрактальной диагностики можно определить, сколько потенциальных фазовых переменных «затаилось».

Проиллюстрируем ситуацию на наглядных картинках. Пусть имеем исходную модель для математического ожидания расхода

$$\dot{m}_Q = -cm + \bar{N}_Q, \quad (1.16)$$

где c включает в себя как среднее значение \bar{c} , так и интенсивность шума $G_{\tilde{c}} (c = \bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})$.

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

Будем считать, что такое же по структуре уравнение (теневое) справедливо для матожидания испарения m_E (оба уравнения «не знают» друг о друге).

В зависимости от знака коэффициента c в уравнении (1.16) получаются устойчивые ($c > 0$) или неустойчивые ($c < 0$) решения, см. рис. 1.6, *a*. Неустойчивость по матожиданию m_Q можно проиллюстрировать более наглядно, если ввести в коэффициенты и внешние воздействия уравнений для m_Q и m_E периодические составляющие (см. рис. 1.6, *b* – режим для m_E периодический, но устойчивый, в отличие от решения для m_Q , которое нарастает из-за отрицательного значения $c: G_{\bar{c}} > 2\bar{c}$).

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что рис. 1.6, *b* есть просто «иллюзия»: на нем совмещены в одной фазовой плоскости две независимые переменные m_Q и m_E (они независимы, пока мы не перейдем к системе (1.15)). Сама по себе неустойчивость решения модели для m_Q просто индикатор: что-то не так, есть какое-то влияние, выводящее ситуацию за рамки предметной области, зафиксированной моделью (1.16). Природу этого влияния в самой модели не «выловить», нужны не формализуемые моделью творческие действия познающего субъекта.

Неустойчивость – индикатор «выброса размерности», проявление действия второй фазовой переменной. Объединив разрозненные уравнения типа (1.16) для m_Q и m_E в единую систему (1.15), мы ликвидировали мультипликативные шумы. Процесс стал устойчивым. (По физическому смыслу переменных m_Q и m_E они не могут быть отрицательными. Поэтому в модель (1.15) для членов ct необходимо вводить либо знаковую функцию

$f(m) = \begin{cases} 0, & m \leq 0 \\ 1, & m \geq 0 \end{cases}$, либо множитель $\exp(-a|m|)\exp(am)$, где значение

постоянной a должно согласовываться с шагами численного интегрирования.)

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

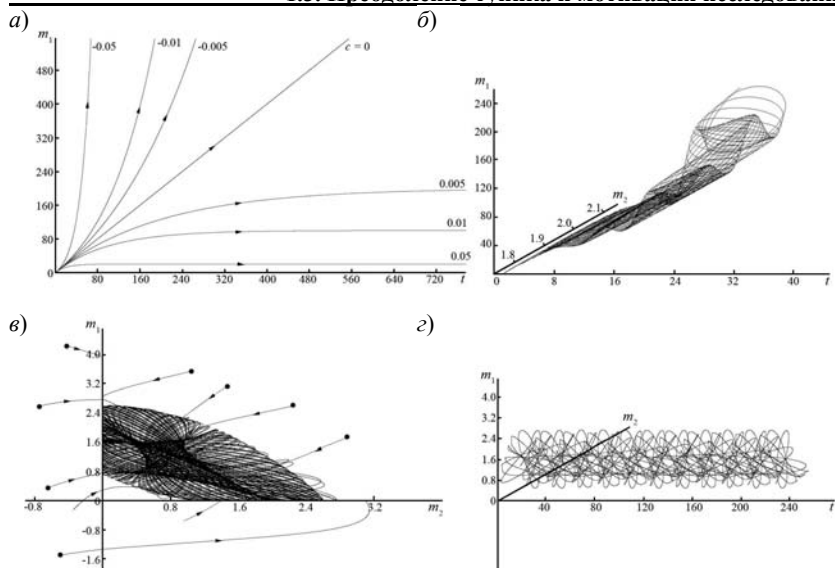


Рис. 1.6. Превращение неустойчивого (за счет «выброса размерности») одномерного процесса в устойчивый двумерный: *a* – влияние параметра c в модели (1.16) на поведение решения; *б* – двумерная траектория, устойчивая по фазовой переменной m_2 и неустойчивая по переменной m_1 ; *в* – пример появления аттрактора при переходе от неустойчивой одномерной модели с сильным шумом к двумерной модели, в которой «ответственность» за шумы из инфинитной реальности «взяла на себя» вновь введенная фазовая переменная; *г* – временная развертка аттрактора, изображенного на рис. 1.6, в.

Каков критерий или индикатор того, что мы имеем модель с устойчивым решением? В частном случае – это численные значения β , а в более общем случае для произвольной n -мерной системы $\dot{\vec{x}} = F(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – $\text{div } \vec{x} < 0$. Действительно, для модели (1.16) при неустойчивости ее решения $d\dot{m}_Q/dm_Q > 0$ (при $c < 0$). При увеличении размерности фазового пространства, т. е. в случае системы (1.15), $d\dot{m}_Q/dm_Q + d\dot{m}_E/dm_E = -(c_Q + c_E) < 0$ (при отсутствии мультипликативных шумов).

Элементарный объем V , ограниченный в фазовом пространстве $\{\vec{x}\}$ изменяется в соответствии с теоремой о дивергенции по уравнению

$$\frac{dV}{dt} = \int_V d^n x \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right).$$

В зависимости от знака суммы $\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i$ объем может сжиматься ($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i < 0$), оставаться неизменным ($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i = 0$) или расширяться ($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i > 0$). Траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям и устойчивыми по другим.

Скорость разбегания («сбегания») по каждому из направлений характеризуется средним по траектории ляпуновским показателем. В случае $n = 3$ стационарное состояние имеет три показателя Ляпунова, все они отрицательные: (-, -, -). Для предельного цикла (-, -, 0), для тора (0, 0, -). Но может быть еще ситуация, когда (+, 0, -). Последнее означает, что порождается множество точек, размерность которого меньше трех (ведь объем в этом случае в 3-х мерном пространстве равен нулю). Но его размерность не равна и двум, так как по теореме Пуанкаре–Бендиксона (см. [19, 60]) в ограниченной области двумерного пространства аттракторами могут быть только предельные циклы и неподвижные точки. Это специфическое множество (странный аттрактор) имеет хаусдорфову размерность между 2 и 3 (т. е. дробную, фрактальную). Его зрительный образ дает тарелка (объект, который недоосвоил третью координату). На рис. 1.7 из монографии [60] показаны 4 типа множеств, которые в принципе могут служить предельными (аттракторами), к которым стремятся устойчивые (но в разных смыслах) решения моделей формирования стока. Для того чтобы обладать аттрактором (любым!) система уравнений должно иметь отрицательную сумму показателей Ляпунова $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 3$, т. е. отрицательный показатель по абсолютному значению должен быть больше положительного.

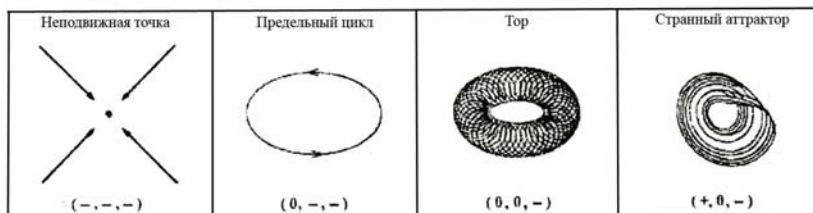


Рис. 1.7. Влияние показателей Ляпунова на тип предельного множества.

Ниже, на примере аттрактора Реслера, представлена умозрительная схема преодоления неустойчивостей (тупиков), приводящая в конечном итоге, к нужному результату. Система уравнений Реслера имеет вид:

$$dx_1/dt = -(x_2 + x_3); \quad (d\dot{x}_1/dx_1 = 0) \quad (1.17)$$

$$dx_2/dt = x_1 + (1/5) \cdot x_2; \quad (d\dot{x}_2/dx_2 = 1/5 > 0) \quad (1.18)$$

$$dx_3/dt = 1/5 + x_3(x_1 - c); \quad (d\dot{x}_3/dx_3 = x_1 - c \lesseqgtr 0), \quad (1.19)$$

где c – константа.

«Морковка» (см. выше), ее двумерные проекции и временные развертки представлены на рис. 1.8.

Я не знаю какой физический смысл имеют переменные x_1, x_2, x_3 ; это сейчас и неважно. Назовем их «расходом» (x_3), «испарением» (x_2) и «запасом воды в почво-грунтах» (x_1). В стартовой позиции познающему субъекту («гидрологу») информация, представленная на рис. 1.8, не известна (также не знает он и систему уравнений (1.17) – (1.19)). Но из наблюдений ему известны ряды «среднегодовых расходов», рис. 1.8, z (чтобы не смущали отрицательные значения можно считать, что показаны отклонения от «нормы») или даже пусть известны «настоящее» расходы, рис. 1.9, a , обрабатывая которые он получил распределения плотности вероятности (из семейства кривых К. Пирсона, рис. 1.9, a справа). Опираясь на результаты, известные в теории случайных процессов, он («гидролог») установил, что подобные решения дает уравнение ФПК и статистически эквивалентный ему линейный формирующий фильтр (1.3). В данном случае его динамическим

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

ядром является уравнение (1.19), которое приводит к стохастическому уравнению

$$dQ = -(\bar{c}_1 + \tilde{c}_1)Q + \bar{N} + \tilde{N} dt, \quad (1.20)$$

где $Q \sim x_3$; $c_1 \sim (x_1 - c)$; $N = 1/5$ (время релаксации $\tau = 1$).

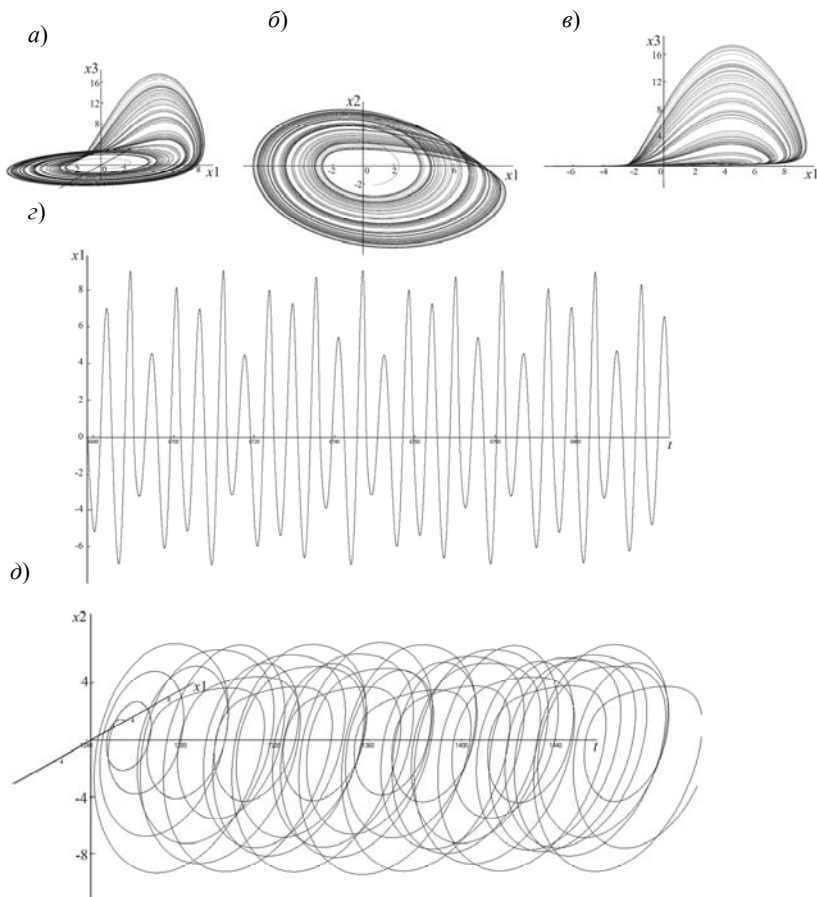


Рис. 1.8. Аттрактор Реслера (а), его двумерные проекции (б, в) и примеры временных разверток (з, д).

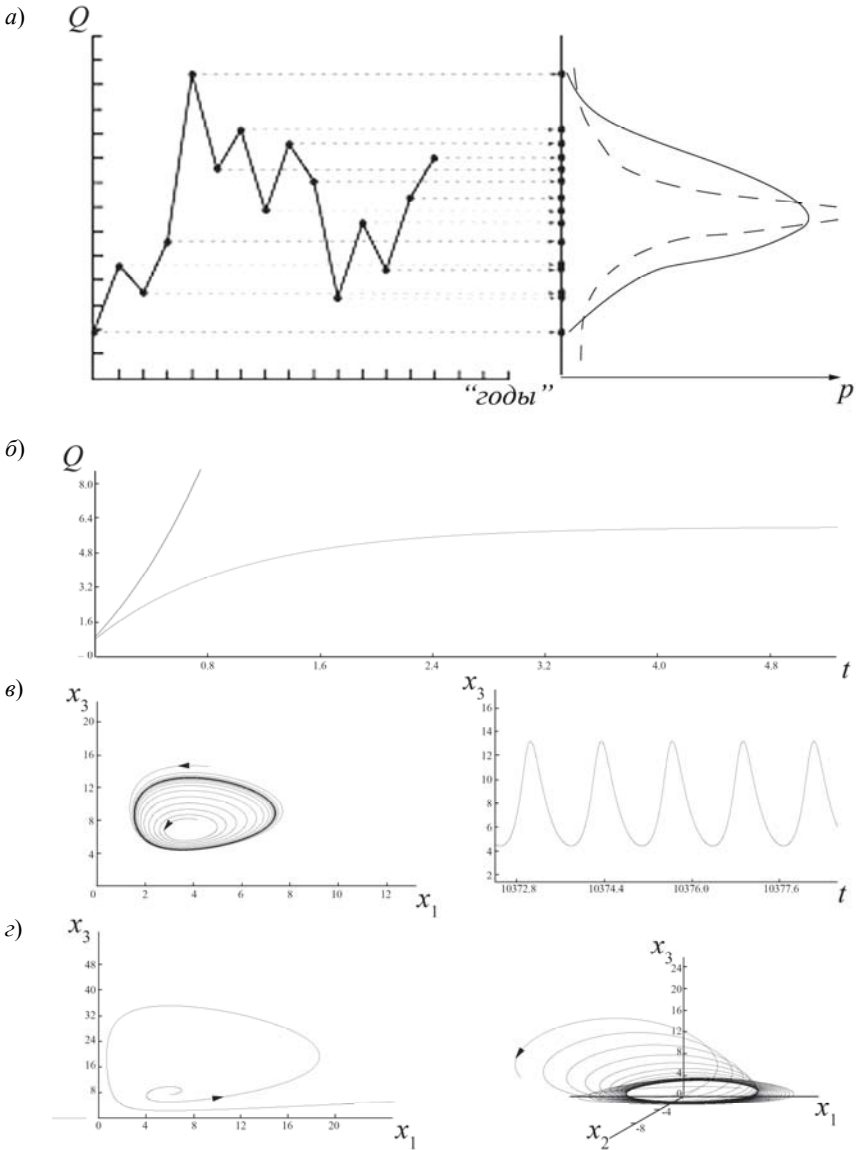


Рис. 1.9. Эмпирический ряд и распределение соответствующей ему плотности вероятности (а); иллюстрация неустойчивого и устойчивого решений (б); аттрактор и соответствующая ему временная развертка (в); проекции неустойчивых решений (г).

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

В уравнении (1.20) переменная x_1 не выделена и представлена совместно с константой c частично инфинитным параметром c_1 , причем уравнение (1.19) динамическим ядром фильтра является только при $\operatorname{div}(x_3 = Q) = c_1 < 0$. Со временем выяснилось одно неприятное обстоятельство: «хвосты» эмпирических распределений часто стремятся к нулю не по экспоненте, а степенным образом (метафорически – идут почти параллельно оси расходов, рис. 1.9, a – пунктир). Но это может быть либо при $\beta \rightarrow 2$ (неустойчивость по моментам), либо при $c_1 > 0$, т. е. когда теневая переменная $x_1 \geq c$ («выходит из тени»). Траектория $Q(t)$ «уходит» на бесконечность (рис. 1.9, b , верхняя кривая), которая становится притягивающим множеством. Но это противоречит экспериментальным данным: диапазон наблюдаемых значений расходов конечен (для исследователя это пока просто эмпирический факт – никаких аттракторов и их проекций он еще не знает).

Бесконечных расходов быть не может (рассуждал «гидролог»), значит траектория расходов идет не в бесконечность, а в другое измерение x_1 (1.17) и весь процесс формирования «стока» происходит не в одномерном фазовом пространстве (x_3), а в двумерном (x_1, x_3), т. е. на плоскости.

Но что такое x_1 исследователь еще не знает, никакого уравнения (1.17) нет. Есть понимание того, что траекторию $Q(t)$ надо как-то «завернуть». Хотя гипотезы Пуанкаре (а тем более теоремы Пуанкаре–Перельмана) наш «гидролог» не знает и с мыслями Геделя о неполноте не знаком, но обеспечить гидрологическую надежность проектируемых гидротехнических сооружений хочется не прибегая к бессмысленным затратам, связанных с ожидаемыми «бесконечными» расходами. Наверное, рассуждает он, расходу не дает «разгуляться» испарение, конкурирующее с ним за ресурс – осадки, и предлагает вместо модели (1.19) описывать ситуацию двумя уравнениями:

$$dx_1/dt = (x_1 - x_3) \cdot x_1 + c_2; \quad (1.21)$$

$$dx_3/dt = c_3 + x_3(x_1 - c) \quad (1.22)$$

1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований

(он же еще не знает о существовании уравнений (1.17) и (1.18).

(Разумеется, «гидрологи-оппоненты» начинают над ним «издеваться» – подумайте, почему? – поэтому с этого момента будем иметь дело с абстрактным исследователем, а к гидрологии вернемся в третьей главе без всякой связи с аттрактором Реслера.)

Решение системы (1.21), (1.22) при определенных значениях параметров (c, c_2, c_3) имеет предельный цикл, рис. 1.9, *в* слева (для уравнения (1.18) показатель Ляпунова нулевой, так как $d\dot{x}_2/dx_2 = 0$ из-за отсутствия на текущей момент второго слагаемого в правой части). Теперь исследователь ушел от бесконечных расходов (проекция цикла на ось x_3 ограничена), но временная развертка этой проекции (рис. 1.9, *в* – справа) совсем не похожа на квазислучайный процесс на рис. 1.8, *з*, а тем более – эмпирический ряд на рис. 1.9, *а*. Исследователь не стал тратить время на поиски в пространстве (x_1, x_3) возможности получить запутанные («случайные») траектории (он был знаком с теоремой Бендексона) и сразу увеличил размерность фазового пространства до трех (x_1, x_2, x_3) , найдя (опускаем как) систему (1.17) – (1.19), проскочив через неустойчивый (раскручивающийся) цикл (рис. 1.9, *з* слева).

Таким образом он получил модель, отвечающую эмпирическим данным, но на этом закончилось преодоление только гносеологического тупика, т. е. нашего незнания как формируется «сток». Но если меняется сама природа его формирования, то тогда возникает онтологическая неустойчивость т. е. неустойчивость самого аттрактора (рис. 1.9, *з* справа) и снова надо расширять фазовое пространство для создания возможности моделировать и прогнозировать процессы.

Из всего до сих пор изложенного следует вывод, что выход из проблемных ситуаций связан с увеличением размерности фазового пространства, в которое погружается частично инфинитная гидрологическая задача. Если при фиксированной размерности n возникают проблемы, связанные с неустойчивостью (понимаемой в общем случае более широко, чем просто потеря диссипативности: например не соответствие по какому-либо критерию устойчивости решения эмпирическим данным), то надо увеличивать n в многомерном уравнении ФПК (1.5), системе (1.3) или в каких-либо дру-

1. Элементы частично инфинитной гидрологии

гих моделях гидрологических процессов, сводя их к конечномерным тем или иным способом. Реально это можно сделать либо прямыми численными методами, либо методом характеристик. Обе эти возможности будут рассмотрены во втором разделе. В разделах 3 и 4 метод характеристик будет применен для моделирования процессов в деформируемых руслах, а также формирования и прогноза многолетнего речного стока.

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

2.1. Обзор существующих возможностей

Гидрология – наука многоплановая, она затрагивает много предметных областей, на перечисление которых ушла бы не одна страница. Но если иметь в виду ее практическую направленность, связанную с гидрометобеспечением водозависимых отраслей экономики и экологии, то она включает гидрометрию, речную гидравлику, гидропрогнозы и речной сток (последний – в аспекте обеспечения гидрологической надежности существующих и проектируемых сооружений). В таком, относительно узком, ее понимании класс используемых в ней эволюционных уравнений (напомню, что в монографии речь идет о частично инфинитной гидрологии, занимающейся изучением эволюционного развития гидрологических объектов) не так уж велик.

Во-первых, это модель неустановившегося движения воды в реках – известная уже более ста лет система уравнений Сен-Венана, которая в случае деформируемых русел имеет вид:

$$i_0 - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{gF} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2\alpha Q}{gF^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + F'_{\text{тр}}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1(x, t); \quad (2.2)$$

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = q_2(x, t); \quad (2.3)$$

$$G = f(d, U, \dots), \quad (2.4)$$

где $i_0 = -\partial z/\partial x$ – уклон дна; h – глубина; g – ускорение свободного падения; F – площадь живого сечения; Q – расход воды в русле; B – ширина потока; z – отметка дна; G – расход наносов (обычно донные наносы превосходят взвешенные); q_i – задавае-

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

мые источники (стоки) жидкой ($i = 1$) и твердой ($i = 2$) фазы; d – диаметр частиц; U – скорость течения; α – коэффициент Кориолиса; x – координата; t – время.

Для соотношения (2.4) используются какие-либо эмпирические формулы, а член трения выражается формулой Шези ($F_{\text{тр}}' = U^2/C^2h$), где C – коэффициент Шези.

Во-вторых, это появившиеся в последние два десятилетия модели формирования многолетнего стока типа (1.5). Если говорить о гидрогеологии, то это все-таки «другая специальность», смежная с гидрологией. Но дело даже не в этом, а в том, что ее модели диффузии почвенной влаги относятся также к параболическому типу как и система (1.5). (К такому же типу относятся и подавляющее число моделей гидрофизики: распространение тепла, оттаивания или промерзания почвы и т. п.)

Таким образом эволюционные модели представлены двумя типами: гиперболической системой (2.1) – (2.4) и различными вариантами параболических моделей. В этой монографии мы хотим показать, какие на сегодняшний день существуют возможности их численной реализации. Их много, но нужны такие, чтобы расширение этих моделей путем добавления новых фазовых переменных: 1) не «ломало» общую методологию их решения (т. е. чтобы численные схемы не были сильно «эмерджентны») и их модернизация была бы по возможности аддитивна по отношению к схеме решения задачи, погруженную в фазовое пространство меньшей размерности; 2) чтобы можно было визуализировать действие вновь вводимых фазовых переменных или, «по-другому», чтобы можно было «крутить» аттрактором, представляющим решение, визуализируя его проекции на подпространства любой размерности, не превышающей трех.

Этим условиям можно удовлетворить, если решение моделей будет сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых представляет свою фазовую переменную (естественно взаимодействующую с частью других). Поэтому нужен либо прямой численный метод, который как-то отражает (пусть частично) эти два условия, либо переход от уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одним из путей (он будет основным в монографии) реализации этой программы является переход от уравнений второго порядка типа (1.5) к уравнениям в частных производных первого порядка и использованию в дальнейшем метода характеристик, т. е. решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению (или их системы) в частных производных первого порядка. В отношении системы (2.1) – (2.4) задача упрощается, так как она уже представлена уравнениями первого порядка. Получаемые таким образом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) обычно будем решать численным методом Рунге-Кутты (см. ниже).

Прием, позволяющий перейти от уравнения (1.5) (и даже от системы уравнений произвольного порядка, причем этот порядок может быть своим для каждой из неизвестных функций, см. [38], стр. 23–26) к системе уравнений первого порядка, заключается в следующем. Запишем уравнение (1.5) для двух переменных Q и E в следующем виде:

$$F(Q, E, p, p_Q, p_E, p_{QQ}, p_{QE}, p_{EE}) = 0 \quad (2.5)$$

и введем вспомогательные искомые функции $\tilde{p} = p_Q$, $\tilde{\tilde{p}} = p_E$. Тогда уравнение (2.5) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} F(Q, E, p, \tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}, \tilde{p}_Q, \tilde{p}_E, \tilde{\tilde{p}}_E) &= 0; \\ p_Q - \tilde{p} &= 0; \\ p_E - \tilde{\tilde{p}} &= 0; \\ \tilde{p}_E - p_Q &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Существуют, по крайней мере, две возможности решения системы (2.6): прямые численные методы, связанные с ее конечно-разностной аппроксимацией, и более «тонкий» метод характеристик, сводящий (2.6) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим, пока в общих чертах (будем опираться сейчас и в дальнейшем на книгу [12]), оба эти подхода на примере

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

одного уравнения в частных производных первого порядка, представляющего собой модель кинематической волны, которую можно получить из уравнения неразрывности (2.2). Ограничимся самым простым случаем бесприточного ($q_1(x, t) = 0$) канала с прямоугольным поперечным сечением ($F = B \cdot h$). В этом случае (2.2) приводится к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

(считаем, что $\partial v / \partial x \approx 0$; здесь $v \equiv U$).

Для решения (2.7), т. е. нахождения функции $h = h(x, t)$, необходимо задать скорость $v(x, t)$ и начальное распределение глубин

$$h|_{t=t_0} \equiv h(x, t_0) = h_0(x). \quad (2.8)$$

Для решения таким образом поставленной задачи можно воспользоваться конечно-разностной аппроксимацией (2.7), (2.8):

$$h(x, t_{i+1}) = h(x, t_i) - h'_x(x, t_i) \cdot v(x, t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

(здесь $h'_x \equiv \partial h / \partial x$).

В стартовой позиции ($t = t_0$) функции $h(x, t_0)$ и $h'_x(x, t_0)$ известны из (2.8), а на последующих шагах вычислений ($t_i, i \neq 0$) они известны из предыдущего временного слоя. Однако при этом надо выполнять операцию дифференцирования вычисленных значений h на предыдущем шаге. А так как эта экспериментальная информация (измеренная в момент t_0 или полученная из вычислений в остальные моменты t_i), всегда содержит погрешности, то при переходе от i к $i+1$ эти погрешности могут существенным образом нарастать, делая вычисления, в конечном итоге, бессмысленными.

Можно было бы избежать этих последовательных дифференцирований, аппроксимировав производную следующим образом:

$$(h'_x)_i = (h_i(x + \Delta x) + h_i(x - \Delta x))/2\Delta x,$$

но тогда получим неправильную физическую картину процесса, а именно – зависимость в створе x глубины в последующий момент времени от глубин в предыдущий момент в двух створах $x + \Delta x$ и $x - \Delta x$, что для прямых волн быть не может (по крайней мере в задаче Коши (2.7), (2.8)).

Поэтому оправдан переход к другому методу решения данной задачи с использованием лагранжевых координат. В переменных Эйлера x, t мы можем получить либо профиль водной поверхности $h(x)$ при $t = \text{const}$, либо изменение глубины $h(t)$ в фиксированном створе $x = \text{const}$. Если же хотим проследить индивидуальную «судьбу» глубины, которая в момент t_0 была в створе $x = \xi$, то это можно сделать, решая уравнение

$$dx/dt = v(x, t) \tag{2.9}$$

при начальном условии $x(t = t_0) = \xi$ (напомним, что $v(x, t)$ считается известной).

Решениям (2.9) $x = x(t, \xi)$ отвечают законы перемещения различных глубин, характеризуемых значениями координат ξ . Можно привести следующую образную аналогию: рассматривая зависимость $h(t)|_{x=\text{const}}$, мы измеряем глубину в фиксированном створе («сядя на берегу»); если рассматривается зависимость $h(t)|_{\xi=\text{const}}$, то проводим измерения, плывя на льдине.

Связь между производными по времени в координатах Эйлера и Лагранжа иллюстрирует формула

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_t \cdot \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\xi} + \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_x \cdot \left. \frac{\partial t}{\partial t} \right|_{\xi},$$

из которой следует, что $\partial h/\partial t|_{\xi} \neq \partial h/\partial t|_x$. Это и понятно: «мы взобрались на плывущую льдину», т. е. «зарегистрировали» глубину в точке с координатой $x = \xi$ и отслеживаем в дальнейшем судьбу

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

именно этой глубины (помеченной меткой ξ), которая меняет свое значение в каждый фиксированный момент времени за счет скорости льдины $\partial x / \partial t|_{\xi}$, проходящей координату x .

Если процесс стационарный, то наблюдатель, сидящий на берегу, не увидит никаких изменений уровня, так как $\partial h / \partial t|_x = 0$, но это не значит, что и производная $\partial h / \partial t|_{\xi}$ будет нулевой. Ведь она есть результат наблюдения за глубиной с движущейся льдины. А у льдины есть скорость $\partial x / \partial t|_{\xi}$, перемещаясь с которой наблюдатель фиксирует в любой момент времени разные глубины ($\partial h / \partial x|_t \neq 0$). Поэтому скорость изменения глубины при наблюдении с движущейся льдины не равна нулю ($\partial h / \partial t|_{\xi} \neq 0$ – это, в данном случае, конвективная часть полного изменения глубины, а $\partial h / \partial t|_x$ – локальная ее часть).

В связи с изложенным, в общем случае неустановившегося движения, производную $\partial h / \partial t|_{\xi}$ называют полной производной по времени и пишут dh/dt , в отличие от частной производной в переменных Эйлера $\partial h / \partial t|_x$. (Если производная $\partial h / \partial x|_t$ также равна нулю, т. е. режим движения установившийся и равномерный, то $dh/dt = 0$, но это «не тот» нуль, который находится в правой части (2.7), а так сказать, его частный случай.) Эти ситуации иллюстрирует рис. 2.1.

Таким образом мы имеем систему уравнений

$$dx/dt = v(x, t); \quad (2.10)$$

$$dh/dt = 0. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) следует, что h не может зависеть от t , т. е.

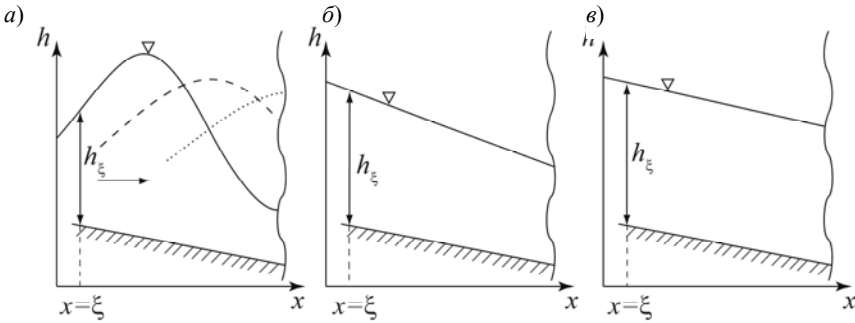


Рис. 2.1. К иллюстрации понятия полной производной: во всех трех случаях (соответствующих модели (2.7)) $dh/dt = 0$, но в случае (а) $\partial h/\partial x|_t \neq 0$, $\partial h/\partial t|_x \neq 0$; в случае (б) $\partial h/\partial t|_x = 0$, $(\partial h/\partial x|_t = 0)$; в случае (в) $\partial h/\partial t|_x = 0$ и $\partial h/\partial x|_t = 0$.

$$h = f(\xi), \tag{2.12}$$

где f – произвольная функция.

(В каком смысле надо понимать независимость h от t ? Ведь согласно, например, рис. 2.1, а, имеет место динамический процесс, т. е. происходят изменения во времени. Это верно (с точки зрения внешнего наблюдателя), но возникает вопрос: что именно меняется? Могут меняться $\partial h/\partial x|_t$ и $\partial h/\partial t|_x$, но в силу модели (2.7) эти изменения таковы, что **полная** производная (т. е. $\partial h/\partial t|_\xi = dh/dt \neq \partial h/\partial t|_x$ обязана равняться нулю (в данном конкретном рассматриваемом случае). Лыдина, «помещенная на гребне волны», так на нем и остается. В данном случае независимость h от t соответствует своеобразной автономности процесса, т. е. отсутствию на него внешних влияний, например, бокового притока. Хотя в модели (2.10), (2.11) скорость зависит от t , но эта зависимость задана уже в стартовой позиции при $t = t_0$.)

Поместим лыдину над какой-нибудь фиксированной (с помощью координаты) глубиной, т. е. зафиксируем ξ : $x|_{t=t_0} = \xi$.

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Тогда

$$f(\xi) = h \Big|_{t=t_0} = h_0(x) \Big|_{t=t_0} = h_0(\xi), \quad (2.13)$$

и эта глубина будет оставаться неизменной на траектории (x, t) , являющейся решением уравнения (2.10) при условии, что эту траекторию в момент времени t_0 привязали к координате $x = \xi$, т. е. задали начальное условие для (2.10): $x(t = t_0) = \xi$. Расположим льдины на волне (рис. 2.1, а), так, чтобы имелось много меток в момент t_0 : $\xi = \varphi(t_0; t, x)$. Тогда, в силу (2.13), решение примет вид:

$$h = h_0(\varphi(t_0; t, x)). \quad (2.14)$$

Интегральные линии уравнения (2.10) на плоскости (x, t) (графики движения льдин при заданной скорости $v(x, t)$) называются **характеристиками** уравнения в частных производных (2.7). Они представляют собой координатные линии $\xi = \text{const}$ системы лагранжевых координат ξ, t . Решения уравнения (2.7) вдоль характеристик остаются неизменными ($\partial h / \partial t \Big|_{\xi} = dh / dt = 0$).

Это можно проиллюстрировать с помощью конечно-разностного аналога уравнения (2.7):

$$h(x + \Delta x, t + \Delta t) = h(x + \Delta x, t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} v(x, t) [h(x + \Delta x, t) - h(x, t)].$$

Для того, чтобы с течением времени оставаться на характеристике $h(x + \Delta x, t + \Delta t) = h(x, t)$ надо согласовать шаги по времени и координате со скоростью $v(x, t)$ следующим образом: $(\Delta t / \Delta x) \cdot v(x, t) = 1$.

Рисунок 2.2 иллюстрирует изложенное. При постоянной скорости $v(x, t) = \text{const}$ (рис. 2.2, а) характеристики (см. штриховые линии на рисунках) имеют одинаковый наклон и «волна» $h(x)$ сносится вниз по течению без изменения формы. В случае же

2.1. Обзор существующих возможностей

$v(x, t) \neq \text{const}$ (рис. 2.2, б) «волна» также сносится, но с деформированием формы (ведь задаваемая тут скорость характеризует, по существу, пропускную способность канала, которая в варианте, представленном на рис. 2.2, б, меняется по x и по t . (В заштрихованных областях глубина принята нулевой).)

Ниже (разд. 2.3) рассмотренные модели будут усложняться, но уже сейчас понятна общая идея метода характеристик: решение уравнения в частных производных 1-го порядка сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (причем в данном примере последние решаются даже независимо друг от друга).

Несколько особняком от прямых численных методов стоит так называемый метод гиперплоскости [31], когда уравнение в частных производных путем дискретизации пространственных координат (в нашем случае их роль выполняют n фазовых переменных y_i в уравнении (1.5)) сводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. (С помощью этого метода Л. Г. Евланов в 1976 г. показал, сколько всего фазовых переменных можно реально учесть при численной реализации многомерного уравнения ФПК с точки зрения технических характеристик современной вычислительной техники – объема оперативной памяти и быстродействия.)

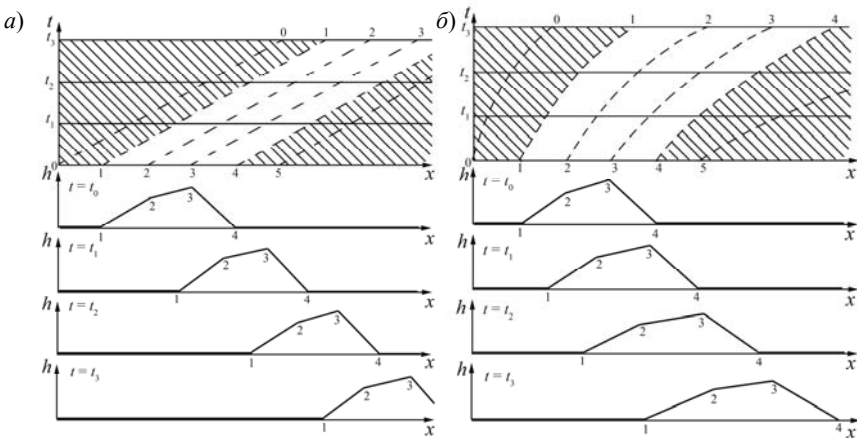


Рис. 2.2. Расположение характеристик (штриховые линии) и форма волны при $v(x, t) = \text{const}$ (а) и $v(x, t) \neq \text{const}$ (б).

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Уравнение ФПК аппроксимируется следующим образом:

$$\dot{p}_{\vec{k}} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta y_i} \left(A_{i, \vec{k}_i} p_{\vec{k}_i} - A_{i, \vec{k}_{i-1}} p_{\vec{k}_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\Delta y_i \Delta y_j} \times$$

$$\times \left(B_{ij, \vec{k}_{ij}} p_{\vec{k}_{ij}} - B_{ij, \vec{k}_{i-1, j}} p_{\vec{k}_{i-1, j}} - B_{ij, \vec{k}_{i, j-1}} p_{\vec{k}_{i, j-1}} + B_{ij, \vec{k}_{i-1, j-1}} p_{\vec{k}_{i-1, j-1}} \right), (2.15)$$

где

$\vec{k} = k_1 \dots k_n$, $\vec{k}_i = k_1 \dots k_i \dots k_n$, $\vec{k}_{i-1} = k_1 \dots k_{i-1} \dots k_n$, $\vec{k}_{ij} = k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n$,

$\vec{k}_{i-1, j} = k_1 \dots k_{i-1} \dots k_j \dots k_n$, $\vec{k}_{i, j-1} = k_1 \dots k_i \dots k_{j-1} \dots k_n$,

$\vec{k}_{i-1, j-1} = k_1 \dots k_{i-1} \dots k_{j-1} \dots k_n$; Δy_i – интервал дискретизации; $\dot{p} \equiv dp/dt$.

Будем считать, что областью значений фазовых переменных является параллелепипед $|y_i| \leq C_i (i = \overline{1, n})$, где $C_i = \text{const}$. Для каждой фазовой переменной введем целочисленные значения:

$$y_i \approx l_i \Delta y_i \quad l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm c,$$

где шаг дискретизации определяется формулой $\Delta y_i = C/c$.

Число узлов, в которых вычисляются значения плотности вероятности (а значит, и числа дифференциальных уравнений в системе (2.7)), будет $N = (2c + 1)^n$. Таким образом, в зависимости от n и от того, каким (одно- или двухмодальным) является решение уравнения ФПК, получаем оценки для N , представленные в табл. 2.1. Из нее видно, что уже при двухмодальной плотности вероятности для четырех фазовых переменных число уравнений достигает 160 000, что, видимо, является практическим пределом для существующих ПЭВМ (в 70-х годах XX в. предел для ЭВМ составлял 10^3).

При решении реально существующих практических гидрологических задач в рамках одномодального распределения $p(Q)$ можно ограничиться 11-ю уравнениями. Даже использование идей теории катастроф, т. е. привлечение двухмодальных двумерных

распределений, требует порядка 400 уравнений, что с позиций ресурсов вычислительной техники вполне приемлемо. Другое дело – «истерика» лиц, занимающихся статистическими расчетами. При существующей длине гидрологических рядов (несколько десятилетий) исследовать окружающую нас гидрологическую реальность можно только двумя-тремя моментами одномерного распределения. Можно пофантазировать о необходимой длине ряда наблюдений за речным стоком, чтобы статистически оценивать двухмодальное двумерное распределение с асимметрией.

Поэтому надо либо отказаться от более глубокого (чем в рамках, например, кривой Пирсона 3-го типа) изучения гидрологии (а значит, отказаться от изучения катастроф, эволюции гидрологических объектов, да и вообще от того, чтобы смотреть на гидрологию нелинейно и многомерно), либо придумывать не статистические метрики, оценивающие достоверность «картинок», помещенных в табл. 2.1. В конце концов к двухмодальности мы пришли из модели, описывающей физику процесса формирования стока, а не эмпирическим путем, «играя с рядами».

Систему (2.15) надо каким-то образом решать численно. Конечно, есть много одношаговых и многошаговых методов (различной степени точности) для этого. Однако наиболее распространенным является метод Рунге-Кутты, который повсеместно использовался и в данной книге тоже при решении дифференциальных уравнений и их систем. Он основан на разложении решений системы (2.15) в ряд Тейлора

$$p_k^-(t_{n+1}) = p_k^-(t_n) + \Delta t p_k'(t_n) + ((\Delta t)^2/2) p_k''(t_n) + \dots$$

и отбрасывании членов соответствующего порядка. Например, чтобы получить метод Рунге-Кутты первого порядка (он же метод Эйлера) надо отбросить в разложении члены второго порядка.

Наиболее востребован метод четвертого порядка ($\delta = 0(\Delta t^4)$), который для одного уравнения $p' = f(t, p)$ выглядит так:

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей



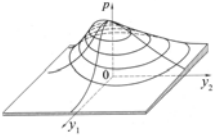
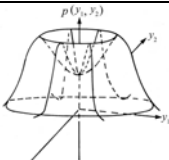
$$p_{j+1} = p_j + \frac{\Delta t}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \quad j = 0, 1, \dots$$

$$l_1 = f(t_j, p_j), \quad l_2 = f(t_j + \Delta t/2, p_j + l_1/2),$$

$$l_3 = f(t_j + \Delta t/2, p_j + l_2/2), \quad l_4 = f(t_j + \Delta t, p_j + l_3).$$

Таблица 2.1

Оценки числа дифференциальных уравнений в системе (2.15)

Число фазовых переменных	Число	Мод	Уравнений	Мод	Уравнений
		1	N	2	N
1			10^1		20^1
2			10^2		20^2
3	—		10^3	—	20^3
4	—		10^4	—	20^4

Сильные и слабые стороны именно этого варианта метода обсуждаются, например, в следующих работах [29, 30, 51].

Одним из способов замены уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений является аппроксимация плотности вероятности моментами, которая приводит, например, к системе (1.8).

Исчерпывающей характеристикой для статистического описания случайной функции является n -мерная плотность вероятности.

В частности, для описания эволюции двумерной условной плотности вероятности служит уравнение ФПК. Применение численных методов его решения довольно сложно для обычной практики инженерных расчетов в гидрологии. Существуют более простые характеристики, именуемые моментами распределения

$m_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q^k p(Q, t) dQ$. При $k = 1$ имеем математическое ожидание случайной величины $M[Q]$, при $k = 2$ – второй начальный момент или (для центрированной случайной величины) дисперсию $\sigma^2 = D[Q]$. Соотношение $\sqrt{D[Q]} / M[Q]$ называется коэффициентом вариации C_v . При $k = 3$ получаем величину, необходимую для определения коэффициента асимметрии, а при $k = 4$ – эксцесса.

Можно показать, что задание кривой плотности вероятности эквивалентно заданию бесконечного числа моментов, т. е. условно $p(Q, t) \sim m_k, k = 1, 2, \dots$. Однако во многих практически важных случаях можно ограничиться только несколькими моментами распределения. Например, при нормальном распределении достаточно знать математическое ожидание и дисперсию, так как

$$p(Q, t) = \left(1 / \sqrt{2\pi D[Q]}\right) \exp\left\{- (Q - m_1)^2 / (2D[Q])\right\}.$$

Использование на практике только этих характеристик объясняется во многом тем, что точность исходной информации не позволяет сделать надежные выводы о значениях моментов выше третьего порядка. Если даже рассчитали по уравнению ФПК эволюцию плотности вероятности во времени, то экспериментальные данные позволяют подсчитать, а следовательно, и сравнить с теоретическими расчетами только математическое ожидание и дисперсию, а иногда при достаточно длинных рядах наблюдений – коэффициент асимметрии. Следовательно, разумно упростить задачу и получить уравнения, позволяющие описывать эволюцию не самих распределений плотности вероятности, а только первых моментов.

Уравнения для моментов получают, умножая уравнение ФПК Q^n и интегрируя его в бесконечных пределах. Например, для первого момента имеем:

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p}{\partial t} dQ = - \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial}{\partial Q} (ap) dQ + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial^2}{\partial Q^2} (bp) dQ.$$

Учитывая, что в данном случае операции дифференцирования и интегрирования независимы, запишем левый интеграл в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p}{\partial t} dQ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} Qp dQ = \frac{\partial}{\partial t} m_1.$$

Первый интеграл справа вычисляем, используя формулу интегрирования по частям:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial^2 (ap)}{\partial Q} dQ = -Qap \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} ap dQ = \int_{-\infty}^{\infty} ap dQ = M[a(Q, t)].$$

Для второго интеграла справа имеем:

$$0,5 \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial^2 (ap)}{\partial Q} dQ = 0,5Q \frac{\partial (bp)}{\partial Q} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (bp)}{\partial Q} dQ = 0.$$

В обоих случаях использован тот факт, что плотность вероятности и ее производная равны нулю при $Q \rightarrow \infty$.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для математического ожидания расхода:

$$dm_1 / dt = M[a(Q, t)],$$

которое следует решать при следующем начальном условии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q p(Q, t = 0) dQ = m_1(0).$$

Аналогично получаются уравнения для старших начальных моментов порядка n . В общем виде систему этих уравнений можно записать так:

$$dm_n / dt = nM[aQ^{n-1}] + 0,5n(n-1)M[bQ^{n-2}]. \quad (2.16)$$

Для системы типа (1.12) с линейной функцией $\varphi(Q)$ уравнение (2.16) приводит к рекуррентному соотношению, т. е. моменты высшего порядка вычисляются, интегрируя (2.16) при известных предшествующих моментах. Для нелинейного случая ситуация усложняется: правая часть будет содержать моменты более высокого порядка, чем левая. Это приводит к бесконечной системе уравнений, причем значимость начальных моментов с возрастанием их порядка не убывает, т. е. нельзя обрывать эту бесконечную систему. Однако можно избежать этой ситуации, например, путем линеаризации $\varphi(Q)$ или использования вместо моментов других параметров распределения вероятности – кумулянтов (семиинвариантов). Их основное свойство состоит в уменьшении значимости с увеличением порядка, что позволяет обрывать бесконечную систему уравнений для кумулянтов и находить приближенное решение.

Кроме рассмотренных степенных моментов с использованием последовательности степенных функций Q^0, Q^1, Q^2, \dots , можно рассматривать моменты с последовательностями относительно произвольных функций $f_0(Q), f_1(Q), f_2(Q), \dots$, т. е. $\int f_i(Q) p(Q) dQ$ [30]. Однако примеры их применения в гидрологии автору неизвестны.

Резюмируя изложенное в этом разделе, отметим, что существует определенный спектр возможностей для численной реализации моделей, изменяющих свою размерность вслед за эволюцией моделируемого объекта (или наших представлений о нем). Некоторые из них уже нашли применение в частично инфинитной гидрологии. Прежде всего это относится к методу моментов, сводящего задачу моделирования эволюции формы вероятностных распределений к решению развязанной по моментам системе дифференциальных уравнений, в которой уравнения для младших начальных моментов не зависят от старших моментов. Это позволяет отбрасывать или добавлять уравнения для старших моментов в зависимости от степени их устойчивости и продолжительности рядов наблюдений, которая определяет их надежность.

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Ниже наше внимание будет сосредоточено на методе характеристик, но надо иметь в виду, что прямые численные методы, хотя и более грубы по сравнению с последним, но более универсальны.

2.2. Аддитивная схема многокомпонентного расщепления

Ниже будет рассмотрена возможность прямой численной реализации многомерного уравнения ФПК, изменяющего свою размерность. Уравнение ФПК относится к моделям, составляющим основу задач конвекции–диффузии, для которых разработаны разнообразные конечно-разностные схемы [45]. Как правило, предъявляемые к ним требования носят противоречивый характер, который смягчают путем оптимизации конкурирующих вариантов. Однако есть требования, выполнение которых носит безусловный характер. При любых обстоятельствах плотность вероятности не может быть отрицательной или иметь разрывы, что приводит к использованию положительных и монотонных разностных схем. Так как уравнение ФПК – это математическая запись закона сохранения вероятности, то выдвигается требование консервативности разностных схем (удовлетворению требованиям способствует дивергентный характер записи уравнения ФПК).

Еще одно требование связано с обеспечением устойчивого двунаправленного сноса, так как коэффициент сноса $A(Q, t)$ может быть и положительным, и отрицательным. Самый простой вариант обеспечения двунаправленного сноса путем использования центральных разностей

$$\frac{\partial [A(Q, t) p(Q, t)]}{\partial Q} \approx \frac{A_{j+1}^i p_{j+1}^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i}{2\Delta Q}$$

также приводит к неустойчивости [64], как и применение левых и правых «уголков» в однонаправленных схемах. Все эти проблемы не несут специфики, связанной с частично инфинитным подходом. Они хорошо известны в вычислительной математике и успешно преодолеваются [45].

2.2. Аддитивная схема многокомпонентного расщепления

Другое дело, реакция известных конечно-разностных схем на увеличение числа независимых переменных–координат (в нашем случае – фазовых переменных). А подобное увеличение, как и ситуация, возникающая в таком «переходном» (так и хочется добавить высокопарное слово «гносеологическом») режиме, и есть специфика частично инфинитного подхода. Генезис появления многомерного уравнения ФПК (1.5) можно представить следующим образом (см. рис. 2.3).

Параметры $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ являются бифуркационными: при достижении ими значений, равных двум, происходит потеря устойчивости моментов распределения, подавить которую могут новые фазовые переменные.

(Имеет смысл еще раз обратить внимание, что $G_{\bar{c}} \neq G_{\bar{c}_Q} \neq G_{\bar{c}_E}, \bar{c} \neq \bar{c}_Q \neq \bar{c}_E$. Расширение фазового пространства означает, что часть шумовой инфинитной среды рационализируется, хотя полностью этот процесс никогда не завершится. Всегда будут «остаточные шумы», но эта «остаточность» довольно условна, так как критерий устойчивости в ней относителен: это не просто интенсивность шума $G_{\bar{c}}$, а отношение $G_{\bar{c}}/\bar{c}$. Заметим также, что в переходном слое, см. разрыв на рис. 2.3, когда природа дестабилизирующего фактора еще не ясна, можно сам бифуркационный параметр β рассматривать как квазифазовую переменную: $p(Q, \beta)$ или $p(Q, G_{\bar{c}} - 0,5\bar{c})$.)

Потеря устойчивости моментов может произойти не по всем, а по некоторым «направлениям» (фазовым переменным). Тогда на поверхности многомерной плотности вероятности появится «флюс» в неустойчивом направлении. Весь процесс можно представить как расползающиеся метастазы, «осваивающие» инфинитную реальность, в которой формируется все большее и большее число взаимодействующих фазовых переменных (рис. 2.4).

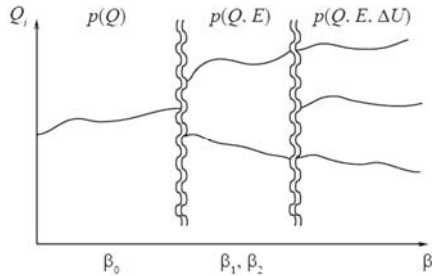


Рис. 2.3. К происхождению многомерного распределения плотности вероятности ($\beta_0 = G_{\bar{c}}/\bar{c}, \beta_1 = G_{\bar{c}_Q}/\bar{c}_Q, \beta_2 = G_{\bar{c}_E}/\bar{c}_E$).

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Можно представить «движущейся» навстречу гидрометеорологическому «объекту» A метастазирующий социально-экономический «объект» B . Встреча их в точке a приведет к появлению «экологии», включающей все новые и новые фазовые переменные для устойчивого осмысления всей этой паутины.

Спрашивается, где тот конечно-разностный метод, позволяющий численно моделировать разрастание этой многомерной опухоли? Такой метод существует (справедливый, по крайней мере, на этапе аддитивного роста, до пересечения двух разнородных метастаз). В численных методах существуют так называемые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления, заменяющие многомерную задачу цепочкой одномерных. А раз есть цепочка, то ее можно сравнительно легко дополнять новыми звеньями (фазовыми переменными). Рассмотрим подобную схему, сначала может быть несколько абстрактно.

Заменим правую часть уравнения типа (1.5) для двух фазовых переменных Q и E операторным представлением $\tilde{A} p(Q, E)$, где \tilde{A} – сумма операторов конвективного переноса и диффузии. Представим процесс численного решения в виде двух этапов:

$$(p(Q, E_0) - p(Q_0, E_0)) / \Delta t = \tilde{A}_Q p(Q, E_0); \quad (2.17)$$

$$(p(Q, E) - p(Q, E_0)) / \Delta t = \tilde{A}_E p(Q, E), \quad (2.18)$$

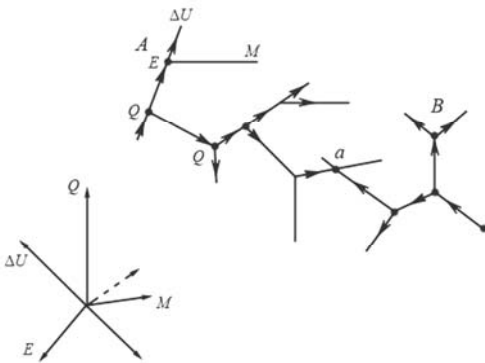


Рис. 2.4. К метафоре освоения инфинитной реальности.

где $p(Q, E_0)$ – промежуточная функция, получающаяся решением одномерного уравнения (2.17) при дискретизации правой части сеточным оператором \tilde{A}_Q по переменной Q ; $p(Q, E_0)$ – искомое значение плотности вероятности в конце интервала Δt , получаемое решением также одномерного уравне-

2.2. Аддитивная схема многокомпонентного расщепления

ния (2.18) при дискретизации правой части сеточным оператором \tilde{A}_E по переменной E . Эти два этапа изображены на рис. 2.5.

В случае использования уравнения для одномерного распределения $p(Q)$ все что находится на оси E есть для одномерной модели «инфинитная реальность». Интерфейс с ней осуществляется в модели с помощью параметров \bar{c} и $G_{\bar{c}}$ (не \bar{c}_Q и $G_{\bar{c}_Q}$ – их в одномерной модели нет вообще).

Подобная схема хороша тем, что при введении очередной фазовой переменной (например ΔU) логика вычислений не меняется:

$$(p(Q, E, \Delta U) - p(Q, E, \Delta U_0)) / \Delta t = \tilde{A}_{\Delta U} p(Q, \Delta U),$$

причем схемы могут быть явными, неявными, смешанными. Их логику можно сформулировать так: на первом этапе вычисляем промежуточное значение плотности вероятности, которое получилось бы, если ресурс (выпавшие осадки) «потреблялся» на интервале Δt только расходом; на втором этапе это значение $p(Q, E_0)$ используется в качестве нового начального условия и вычисляется значение плотности вероятности, которое сформируется за счет действия уже двух «конкурентов» за ресурс: расхода и испарения (и т. д.).

Изложим схему еще раз на модельном, но наглядном примере [31], который будет немного «огидрологичен». Примем, что в двумерном варианте модели (1.5) не действует оператор сноса, а коэффициент диффузии равен единице.

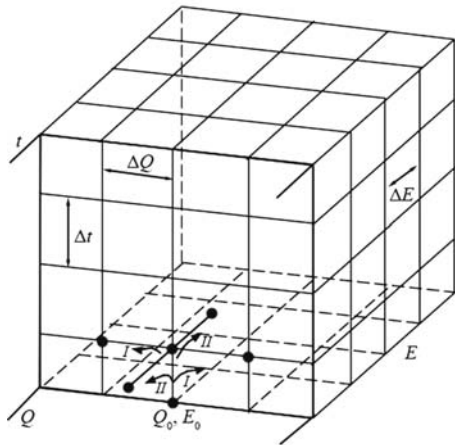


Рис. 2.5. К локально-одномерной схеме вычислений.

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Рассмотрим задачу Коши для оставшегося «огрызка»:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}, \quad 0 < t \leq T \quad (2.19)$$

$$p(Q, E; 0) = \varphi(Q, E), \quad -\infty < Q, E < \infty$$

($\varphi(Q, E)$ – задана).

Обозначим $\tilde{A} p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}$. Пусть шаги интегрирования по Q и E одинаковы и равны h , а по t – $\tau = \Delta t$. Пусть также известно решение задачи (2.19) в момент t_l : $p(Q, E; t_l)$. Определим значение p^{l+1} через p^l и значение оператора \tilde{A} .

Имеем:

$$\begin{aligned} p(Q, E; t_{l+1}) &= p(Q, E; t_l) + \frac{\tau}{1!} \frac{\partial p(Q, E; t_l)}{\partial t} + o(\tau^2) = \\ &= (E_0 + \tau \tilde{A}) p(Q, E; t_l) + o(\tau^2) \end{aligned}$$

(здесь E_0 – единичный оператор). Пусть $\tilde{A}_1 \equiv \partial^2 / \partial Q^2$, $\tilde{A}_2 \equiv \partial^2 / \partial E^2$, тогда $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$.

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial Q^2}, \quad t_l < t \leq t_{l+1}, \quad (2.20)$$

$$v(Q, E; t_l) = p(Q, E; t_l), \quad -\infty < Q, E < \infty$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial E^2}, \quad t_l < t \leq t_{l+1}, \quad (2.21)$$

$$w(Q, E; t_l) = p(Q, E; t_l), \quad -\infty < Q, E < \infty.$$

Найдем связь между $p(Q, E; t_{l+1})$ и $w(Q, E; t_{l+1})$:

$$\begin{aligned} v(Q, E; t_{l+1}) &= (E_0 + \tau \tilde{A}_1) p(Q, E; t_l) + 0(\tau^2), \\ w(Q, E; t_{l+1}) &= (E_0 + \tau \tilde{A}_2) w(Q, E; t_l) + 0(\tau^2) = \\ &= (E_0 + \tau \tilde{A}_2) v(Q, E; t_{l+1}) + 0(\tau^2) = (E_0 + \tau \tilde{A}_2) [(E_0 + \tau \tilde{A}_1) p(Q, E; t_l) + 0(\tau^2)] = \\ &= (E_0 + \tau \tilde{A}) p(Q, E; t_l) + 0(\tau^2) = p(Q, E; t_{l+1}) + 0(\tau^2). \end{aligned}$$

Таким образом, последовательно решая одномерные задачи (2.20) и (2.21), получаем значение $w(Q, E; t_{l+1})$, отличающееся от $p(Q, E; t_{l+1})$ на величину $0(\tau^2)$.

Существуют еще так называемые аддитивно-усредненные схемы покомпонентного расщепления, которые допускают параллельную организацию вычисления сеточных функций.

2.3. Метод характеристик

Усложним модель кинематической волны (2.7), введя в нее неоднородность: известную боковую приточность $q_3(x, t, h)$, зависящую от глубины (индекс 3 связан с использованием обозначений в системе (2.1) – (2.4)):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} = q_3(x, t, h). \quad (2.22)$$

В этом случае система (2.10), (2.11) примет вид:

$$dx/dt = v(x, t); \quad (2.23)$$

$$dh/dt = q_3(x, t, h). \quad (2.24)$$

Подставляя решение (2.23) $x = \varphi(t; t_0, x_0 = \xi)$ в уравнение (2.24), получим

$$dh/dt = q_3(\varphi(t; t_0, \xi), t, h). \quad (2.25)$$

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Хотя в дифференциальном уравнении (2.25) имеются две независимые переменные (t и ξ), но производная берется только по одной переменной t . Поэтому можно зафиксировать ξ как параметр и рассматривать (2.25) как обыкновенное дифференциальное уравнение с решением $h(t, \xi)$ при $h|_{t=t_0} = h(\xi)$.

Ничего кардинально не изменится, если еще несколько обобщим уравнение (2.22): заменим время t на произвольную координату y и введем переменный коэффициент перед производной искомой функции $z(x, y)$ по «времени»:

$$a_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y, z), \quad (2.26)$$

где $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, $q(x, y, z)$ – заданные функции.

В уравнении (2.26) роль «скорости» $v(x, t)$ (в модели (2.22)) играет отношение a_1/a_2 , а уравнение характеристик примет вид:

$$dx/dy = a_1(x, y)/a_2(x, y) \quad (2.27)$$

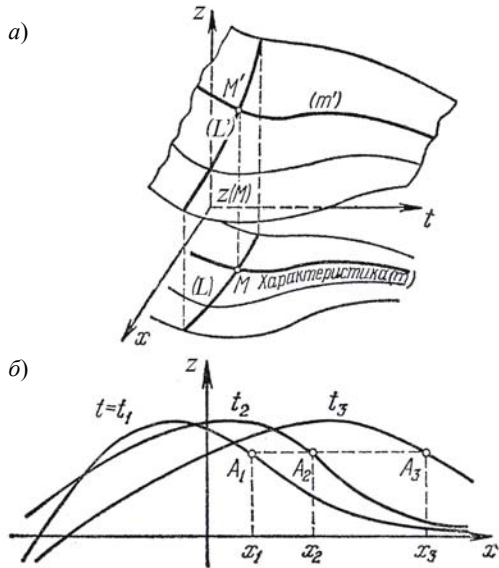
Вдоль его решения $x = \varphi(y)$ уравнение (2.26) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz/dy = q(\varphi(y), y, z)/a_2(\varphi(y), y). \quad (2.28)$$

Таким образом и в данном случае задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений ((2.27), (2.28)).

До сих пор не затрагивался вопрос о граничных и начальных условиях (для уравнений типа уравнения (2.26)), правильное задание которых обеспечивает существование и единственность решения. Пусть в уравнении (2.26) $q(x, y, z) = 0$, а y – «настоящее» время. Графиком решения этого уравнения является поверхность

(z, x, t) . Но для ее построения надо задать начальное значение z не в одной точке (x_1, t_0) , а во всех точках некоторой линии L плоскости (x, t) (рис. 2.6, а). Поднимая каждую характеристику на высоту z , равную значению этой величины на линии L в соответствующей точке, получаем проекции характеристик, заполняющие поверхность.



На рис. 2.6, б показаны проекции поверхности на плоскость (z, x) для трех моментов времени; точки A_1, A_2 и A_3 принадлежат одной и той же «льдине» (если пользоваться образами разд. 2.1). Если в уравнении (2.26) $q \neq 0$, то проекции характеристик будут располагаться на высотах, зависящих от t .

Рис. 2.6. График решения уравнения (2.26) и зависимость $z(x)$ в моменты времени t_1, t_2 и t_3 [12].

Приведем (пользуясь примером из книги [12], стр. 71–73) процедуру аналитического построения решения. Обозначим решение дифференциального уравнения (2.27) через $x = \varphi(t; t_1, x_1)$ при начальном условии $x(t_1) = x_1$. Через $z = \psi(t; t_1, x_1, z_1)$ обозначим решение уравнения (2.28) (при $z(t_1) = z_1$) при условии, что $\varphi(t)$ уже конкретизировано: $\varphi(t; t_1, x_1)$. Пусть, также уравнение линии (L) дано в параметрической форме, т. е. ее координаты в плоскости (x, t) определяется численными значениями параметра p :

$$(L): t = \alpha(p), x = \beta(p), \tag{2.29}$$

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

а в точках линии (L) значения z заданы также как функции этого параметра

$$z = \gamma(p). \quad (2.30)$$

(Обращаюсь к читателям-гидрологам. Ничего страшного не произошло. Просто каждой точке плоскости (x, t) сопоставлено число p , которое эту точку идентифицирует: мы «развернули» трехмерное пространство в числовую ось. О подобной процедуре см. [33].)

Тогда уравнение характеристики, соответствующее значению p , будет:

$$x = \varphi(t; \alpha(p), \beta(p)), \quad (2.31)$$

а значение решения вдоль характеристики будет меняться так:

$$z = \psi(t; \alpha(p), \beta(p), \gamma(p)). \quad (2.32)$$

Решение в виде (2.31) и (2.32) надо рассматривать как **параметрическую форму** его задания (но возможно, хотя и не всегда, и исключение p в окончательном представлении решения).

Пример.

Найти решение следующей задачи Коши:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2t \frac{\partial z}{\partial t} = 3x^2 z,$$

$$z = 5x^2 \quad \text{при} \quad t = t_1 = 1.$$

Уравнение характеристик имеет вид $dx/dt = x/2t$. При начальном условии $x(t_1) = x_1$ его решение будет

$$x = \varphi(t; t_1, x_1) = x_1 \sqrt{t/t_1} \quad (2.33)$$

уравнение для z имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t} \cdot 3 \left(x_1 \sqrt{\frac{t}{t_1}} \right)^2 z = \frac{3x_1^2}{2t_1} z.$$

При начальном условии $z(t_1) = z_1$ его решение будет

$$z = \psi(t; t_1, x_1, z_1) = z_1 \exp \left[\frac{3x_1^2}{2t_1} (t - t_1) \right]. \quad (2.34)$$

Рассмотренной выше линией L будет прямая $t=1$ (рис. 2.7), а параметром p служит сама переменная x (т. е. параметрические уравнения линии L (2.29) и заданного на ней решения (2.30) имеют вид: $t=1; x=p; z=5p^2$).

Закон изменения решения (2.34) вдоль характеристики (2.33) для фиксированного p будет

$$x = p\sqrt{t}, z = 5p^2, z = 5p^2 \exp \left[\frac{3}{2} p^2 (t - 1) \right].$$

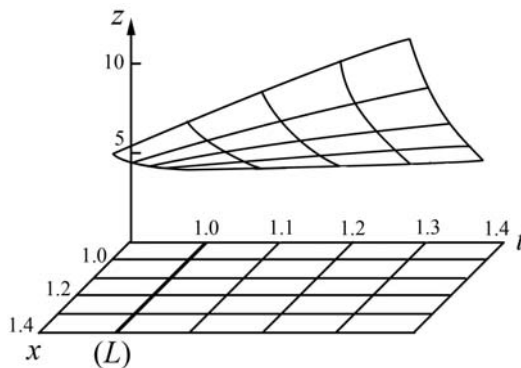


Рис. 2.7. График решения для отрезков $1,0 \leq t \leq 1,4$ и $1,0 \leq x \leq 1,4$.

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

Искомое решение (после исключения p) имеет вид

$$z = 5 \frac{x^2}{t} \exp \frac{3x^2(t-1)}{2t}$$

(на рис. 2.7 представлен график этого решения для отрезков $1,0 \leq t \leq 1,4$ и $1,0 \leq x \leq 1,4$).

Наряду с задачей Коши, можно рассматривать краевые (граничные) задачи (решение задается для какой-либо координаты (створа) $x = x_0$ и ищется его эволюция во времени) или смешанные. В любом случае решение однозначно определяется только в **области влияния** (рис. 2.8).

Если вдоль характеристики нельзя считать одну переменную (x) функцией другой (y), то дифференциальное уравнение характеристик следует записать в виде

$$\frac{dx}{a_1(x, y)} = \frac{dy}{a_2(x, y)} = ds \quad \text{или} \quad \frac{dx}{ds} = a_1(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = a_2(x, y), \quad (2.35)$$

где s – параметр, отсчитываемый вдоль характеристик.

Решения системы (2.35) при начальных данных $x|_{s=0} = x_1$, $y|_{s=0} = y_1$ будут иметь вид

$$x = \varphi_1(s; y_1, x_1), \quad y = \varphi_2(s; y_1, x_1).$$

Вдоль характеристик уравнение (2.26)

$$\frac{dz}{ds} = q(\varphi_1(s; y_1, x_1), \quad y = \varphi_2(s; y_1, x_1))$$

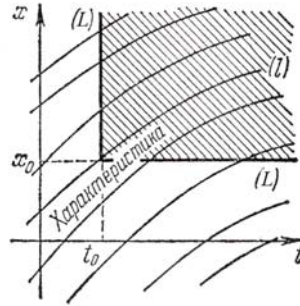


Рис. 2.8. Область определенности решения (область влияния) – заштрихованная часть. Если заданы только начальные условия, то область влияния находится выше характеристики, проходящей через точку (t_0, x_0) [12].

при начальном условии $z|_{s=0} = z_1$ имеет решение

$$z = \Psi(s; t_1, x_1, z_1).$$

Обобщим ситуацию на случай квазилинейных уравнений. Пусть в уравнении (2.22) закон изменения скорости, как и раньше, известен, но теперь пропускная способность зависит не только от x и t , но и от «текущего значения h »:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(x, t, h) \frac{\partial h}{\partial x} = q_3(x, t, h). \quad (2.36)$$

В этом случае уравнение (2.23) примет вид

$$dx/dt = v(x, t, h), \quad (2.37)$$

и уравнения (2.37), (2.24) становятся в полном смысле слова **системой** двух дифференциальных уравнений с двумя искомыми функциями $x(t)$ и $h(t)$. Термин характеристика приобретает теперь более широкий смысл: это линия, изображающая решение в пространстве (t, x, h) , а график решения уравнения (2.36), т. е. его интегральная поверхность полностью состоит из его характеристик. Все изложенное выше по поводу обобщения уравнения (2.22) (переход к уравнению (2.26)) остается в силе и для квазилинейных уравнений.

Заметим, что для уравнения (2.26) (его еще называют «почти линейным»), являющегося частным случаем квазилинейных уравнений, можно использовать понятие характеристики в двух (неэквивалентных) смыслах: как линий в плоскости аргументов (x, t) и как линий в пространстве аргументов-функций (x, t, z) (первые линии есть проекции вторых).

В случае квазилинейного варианта уравнения (2.26) дифференциальными уравнениями характеристик (во втором смысле) будут (в симметричной форме):

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

$$\frac{dx}{a_1(x, y, z)} = \frac{dy}{a_2(x, y, z)} = \frac{dz}{q(x, y, z)}, \quad (2.38)$$

т. е. для нахождения решения уравнения (2.26) надо интегрировать **одновременно** оба уравнения $dx/dy = a_1(x, y, z)/a_2(x, y, z)$ и $dz/dy = q(x, y, z)/a_2(x, y, z)$, в то время как в линейном варианте сначала интегрируется уравнение $dx/dy = (a_1(x, y)/a_2(x, y))$, а затем второе $dz/dy = q(x, y, z)/a_2(x, y)$. В терминах частично инфинитного моделирования это означает примерно (и метафорично) следующее. В линейном случае внешняя среда сначала ($y = y_0$) формирует «льдины-метки» x_1 и траектории их перемещения $x = f(y, x_1, y_0)$, и только затем получаем возможность следить за состоянием (z , например, глубиной) системы $z = f(x_1, y_0, z_1)$. В квазилинейном случае внешняя среда вынуждена действовать более «уважительно» к системе: траектория все время корректируется в зависимости от ее текущего состояния.

Под внешней средой имеем в виду частично инфинитную реальность, учитываемую в модели коэффициентами (мультипликативно) и неоднородным членом (аддитивно, правая часть уравнения (2.26)). Сюда же следовало бы отнести граничные и начальные условия, формируемые за пределами предметной области, фиксируемой моделью (например, за пределами отрезка времени, на котором ищется решение, начальные условия к моменту t_0 должны существовать). Коэффициент a_1 , характеризующий пропускную способность, может учитывать зарастание русла или ледовые явления, которые явным образом не присутствуют в модели, но косвенно могут учитываться этим коэффициентом. (Кстати, сама координата x и время t – или y – также «навязаны» потоку наблюдателем – внешней средой.) С точки зрения этих рассуждений квазилинейность создает некую эмерджентность (большую взаимозависимость среды и моделируемого объекта).

В этом контексте заслуживает внимания факт «равноправности» переменных x, y и z в уравнении (2.26) (чтобы почувствовать своеобразность ситуации будем считать y временем t). Можно показать, например (см. [12], стр. 130), что простыми пре-

образованиями уравнение (2.26) сводится к эквивалентному (с точки зрения одинаковости структуры уравнения и характеристик):

$$a_1(x, t, z) \frac{\partial t}{\partial x} + q(x, t, z) \frac{\partial t}{\partial z} = a_2(x, t, z). \quad (2.39)$$

Конечно, эта «одинаковость» носит формальный характер. В исходном уравнении (2.26) время t ($\equiv y$) – независимая переменная. Независимая от чего? От событий в самой системе (распространения волны на участке реки). Время t и координата x – это характеристики среды, в которую «помещена» река. Время – внешний ритмоводитель, связанный, например, с вращением Земли вокруг Солнца. Ясно, что **такому** времени «глубоко наплевать» на то, перемещается ли кинематическая волна глубиной z по руслу реки Ижоры (например) или нет (т. е. " $\partial t / \partial z = 0$ "). Но в рамках жестко зафиксированной моделью (2.26) предметной области (100%-й финитности, замкнутости на себя), формально, операции, входящие в (2.39), производить можно (также как можно, используя формулу Шези, вычислять гидравлический радиус по зависимости $R = U^2 / IC^2$; но разве фактически гидравлический радиус – чисто геометрическая характеристика живого сечения русла – зависит от скорости или уклона водной поверхности, или коэффициента Шези?).

(На более строгом математическом языке «равноправность» переменных x, y и z следует из понятия «характеристический» т. е. «связанный инвариантно» (в нашем случае инвариантно относительно выбора системы координат [2]). Характеристики уравнения (2.26) связаны с ним инвариантно относительно дифференцируемого гомеоморфизма, переводящего его в уравнение (2.39).)

До сих пор под «координатами» имелись в виду геометрические координаты и время, по крайней мере такова была их основная интерпретация. Но очевидно, что «независимыми» переменными могут быть величины любой физической природы (расход, испарение, изменение запасов воды в почво-грунтах и т. п.) и их может быть любое число n . В связи с этим вместо понятий линия, поверхность и т. п. появляется понятие многообразия. Поэтому

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

сформулируем изложенное выше с использованием более абстрактной терминологии, мотивируя этот шаг как обобщение [34] уравнения с частными производными первого порядка на n -мерный случай:

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \partial z / \partial x_1, \dots, \partial z / \partial x_n) = 0. \quad (2.40)$$

Пусть \bar{R}^n – n -мерное действительное пространство. Рассмотрим в нем подмножество \bar{M} точек $x \in \bar{R}^n$, удовлетворяющих системе уравнений

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 < m < n),$$

где $f_1(x), \dots, f_m(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, определенные в открытом множестве $D \subset \bar{R}^n$.

Точка $a \in \bar{M}$ называется **обыкновенной** точкой множества \bar{M} , если матрица Якоби этого множества

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

имеет при $x = a$ ранг (наивысший порядок минора отличного от нуля), равный m ; если это не так, то точка a называется **особой**. На рис. 2.9 приведены примеры множеств с обыкновенными (рис. 2.9, а) и особыми (рис. 2.9, б) точками.

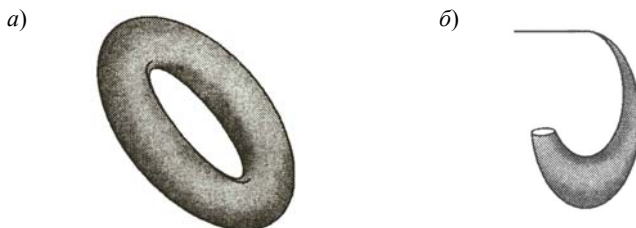


Рис. 2.9. Примеры множества со всеми обыкновенными точками (а) и множества с неправильным локальным устройством (с особыми точками (б)).

Если все точки множества \bar{M} обыкновенные, то оно называется **многообразием**. Для каждой его точки существует окрестность в D , в которой система (2.40) может быть однозначно разрешена относительно m координат. Остальные x_{m+1}, \dots, x_n координат изменяются независимо и характеризуют размерность многообразия $(n - m)$. Точка есть многообразие размерности 0. Почему? Чтобы задать точку надо использовать $m = n$ координат, т. е. $n - m = 0$. Открытое множество в \bar{R}^n имеет размерность n : задавать ничего не надо.

Прямая $y = ax + b$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$ являются многообразиями размерности 1 на плоскости \bar{R}^2 класса C^∞ (многообразие \bar{M} принадлежит классу C^p , если определяющие его функции f_1, \dots, f_m непрерывно дифференцируемы p раз). Те же самые уравнения в \bar{R}^3 есть многообразия размерности 2. В первом случае это плоскость, а во втором – круговой цилиндр с образующей параллельной оси z (рис. 2.10).

Обобщим: подмножество $\bar{M} \subset \bar{R}^n$ есть многообразие в \bar{R}^n , если в окрестности каждой точки \bar{M} уравнение соответствующей части \bar{M} может быть представлено в виде (2.40).

В терминах многообразий задача Коши для уравнения (2.40)

$$F(\bar{x}, z, \partial z / \partial \bar{x}) = 0$$

(здесь $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\partial z / \partial \bar{x} = (\partial z / \partial x_1, \dots, \partial z / \partial x_n)$) формулируется следующим образом. В некоторой области пространства \bar{R}^{n+1} задается $(n - 1)$ -мерное многообразие \bar{M} , через каждую точку (\bar{x}_0, z^0) которого проводится характеристическая

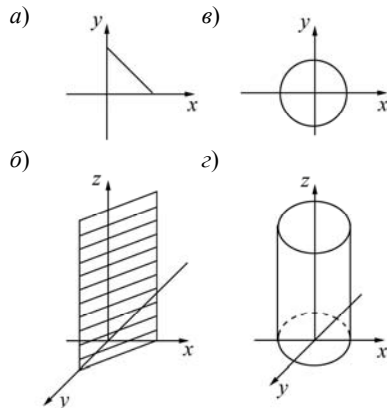


Рис. 2.10. Многообразия размерности:

1 – линии кривые – в плоскости (а, б) и 2 – поверхности – в пространстве (б, в).

2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей

кривая. Объединение этих кривых образует n -мерное многообразие (интегральная поверхность, проходящая через \bar{M}).

В нелинейном случае все дело также сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений характеристик). Не останавливаясь на специфических проблемах (см. по этому поводу [35, 7, 62]) отметим, что характеристики нелинейного уравнения, являющегося квазилинейным, проектируются в характеристики этого квазилинейного уравнения.

3. Руслевой сток

3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах

Рассмотрение использования метода характеристик в моделях руслевой стока начнем с самой простой ситуации потоков в недеформируемых руслах:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad (3.1)$$

$$v(x, t) = \text{const} = v_0; \quad (3.2)$$

$$h|_{t_0} = \varphi(x); \quad (3.3)$$

$$h|_{x_0} = \psi(t). \quad (3.4)$$

(обозначения см. раздел 2).

Уравнение в частных производных 1-го порядка (3.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dh/dt = 0; \quad (3.5)$$

$$dx/dt = v_0. \quad (3.6)$$

Считается, что скорость v_0 известна. Эту величину скорее надо интерпретировать как аналог пропускной способности русла, зависящей от шероховатости и морфометрии. В данном примере в соответствии с (3.2) $v_0 = \text{const}$, т. е. на гидравлическом языке рассматривается русло, шероховатость и поперечное сечение которого не меняются по длине, например, канал с постоянной облицовкой стенок и дна.

На рис. 3.1 показаны характеристики (3.1, *a*) и интегральная поверхность (рис. 3.1, *б*), соответствующие заданию граничного условия в виде волны, а начального в виде константы. Исходная информация переносится вниз по течению с постоянной скоростью,

3. Русловой сток

не зависящей ни от перепада глубин (уровней), ни от наполнения русла, что, конечно, является грубой идеализацией.

Оставаясь в рамках рассматриваемой элементарной модели руслового стока, проимитируем некоторые явления, наблюдающиеся в реках. В 60-е годы XX века в научной литературе появились сообщения об экспериментальном открытии явления низкочастотных колебаний скорости в безнапорных потоках с периодом от нескольких минут до 2–3 десятков минут. При этом речной поток (в котором наблюдалось подобное явление), рассматриваемый в одномерной гидравлической идеализации, имел стационарные граничные условия, которые заведомо не могли вызвать подобных колебаний.

Так в работе С. И. Коплан-Дикс [28] приводятся результаты непрерывных измерений скорости в течении 48 минут одновременно на семи вертикалях в точках $0,6h$ (h – глубина реки в створе измерений) при устойчивом русле р. Полометь. Выявлена низкочастотная, по сравнению с турбулентными пульсациями, периодичность с амплитудой колебаний примерно 10% от осредненной за период измерения скорости.

Подобные явления описаны также В. В. Дементьевым [11] по результатам среднеазиатской экспедиции ГГИ (Государственный гидрологический институт) в 1959 – 1961 гг. на реках Угам и Сырдарье, а также японцем Июкоси [65].

Анализ этих результатов представлен в монографиях

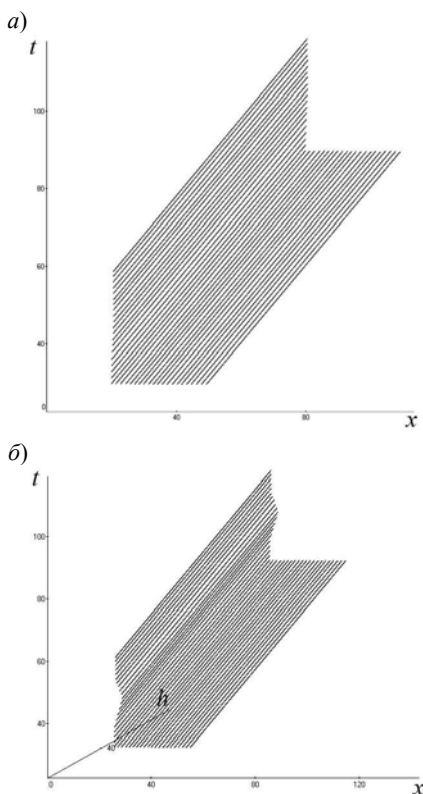


Рис. 3.1. Характеристики (а) и интегральная поверхность (б) для модели (3.1) – (3.4) при $\psi(t)$, заданной в виде волны и $\varphi(x)$ – в виде константы.

3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах

Д. И. Гринвальда [9], стр. 98, 99) и К. В. Гришанина ([10], стр. 151–153). Гринвальд относит низкочастотные пульсации «к типу “внешний масштаб турбулентности”». Они «охватывают всю вертикаль, в результате чего пульсирующим оказывается и расход воды». С турбулентностью он их не связывает: «Что касается колебаний порядка 10 мин и более, то их физическая природа связана скорее с формированием стока на данной реке, различными атмосферными явлениями, чем с турбулентностью».

Гришанин, проанализировав указанные выше источники, полностью соглашается с Гринвальдом в вопросе существования низкочастотных пульсаций: «Продолжительные непрерывные изменения скоростей в естественных потоках обнаруживают существование пульсаций с очень большими периодами – порядка минут и даже десятков минут. Пульсации столь низкой частоты охватывают всю вертикаль, а наиболее сильные из них – всё живое сечение реки, так что пульсирующим оказывается и сам расход воды». И также неопределенно высказывается об их физической природе: «... их физическая природа недостаточно ясна. Скорее всего, они связаны с неравномерностью мгновенного расположения вихрей масштаба l_0 вдоль потока (с вариациями шага вихревой цепочки)».

Так как сам факт явления низкочастотной пульсации расхода (или осредненной по сечению потока скорости) не опровергался (любой экспериментатор мог их обнаружить, анализируя результаты достаточно длительных измерений продолжительностью в несколько периодов), то естественно начались поиски периодических решений уравнений одномерной гидравлической идеализации – системы Сен-Венана. Наиболее глубоко и последовательно этим занимался известный гидролог Н. А. Картвелишвили [17]. Однако попытки получить замкнутые структурные образования (предельные циклы) на фазовой плоскости, соответствующей гиперболической системе Сен-Венана, закончились неудачей. (Наличие подобных циклов указывало бы на то, что низкочастотные пульсации скорости – автоволновое свойство решений системы Сен-Венана.)

Объяснение подобного явления будет дано ниже, а сейчас искусственно введем в модель (3.1) скорость, содержащую периодические составляющие и посмотрим, какую поверхность $h(x, t)$ следует при этом ожидать.

3. Русловой сток

Пусть

$$dx/dt = v = v_0 + a \cdot \sin(\omega_x \cdot t); \quad (3.5)$$

$$dh/dt = b + a \cdot \sin(\omega_h \cdot t), \quad (3.6)$$

причем $\omega_h \ll \omega_x$.

На рис. 3.2 представлены характеристики (рис. 3.2, а) и интегральная поверхность (рис. 3.2, б), соответствующие системе (3.5), (3.6).

Посмотрим, как может появиться периодическая составляющая скорости без подобного (искусственного) ее введения в модель. Более 30 лет назад была установлена неизвестная ранее закономерность появления низкочастотных колебаний в реках [1, 18, 25], объясняющая описанное выше явление. Кратко сущность открытия заключается в том, что периодические низкочастотные колебания скорости действительно являются решениями уравнений одномерной гидравлической идеализации, однако не просто системы Сен-Венана (она таких решений не имеет), а их модификации. Последняя сводится к тому, что коэффициент гидравлического сопротивления λ или связанный с ним коэффициент Шези C перестают рассматриваться как задаваемые параметры, а считаются

равноправными фазовыми переменными, наряду с расходом (средней по сечению скоростью) и уровнем (площадью живого сечения или глубиной в зависимости от формы записи уравнений гидравлики). Было установлено, что (например) коэффициент C зависит не только от наполнения русла (как это следует из классических формул гидравлики, допускающих автомодельность гидравлических сопротивлений по числам Рейнольдса и Фруда), но и от полного (по

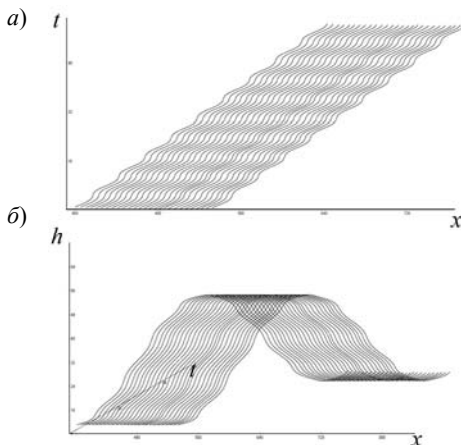


Рис. 3.2. Характеристики (а) и интегральная поверхность (б), соответствующие системе (3.5), (3.6).

3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах

продольной координате и времени) ускорения $dv/dt \equiv \dot{v}$, т. е. $dC/d\dot{v} \neq 0$, причем $\partial C/\partial \dot{v} > 0$, т. е. ускорение снижает сопротивление. (Этот факт был установлен теоретически и подтвержден на натуральных данных экспериментально по рекам Тверце и Свирь, на которых в шестидесятые годы проводились уникальные исследования неустановившегося движения [13, 14] по заказу Министерства обороны СССР. Результаты опубликованы в монографии [18].)

Учет этого (ключевого) обстоятельства ($\partial C/\partial \dot{v} \neq 0$) меняет на определенных частотах (низких по сравнению с турбулентностью) тип модели с гиперболического на эллиптический, что и приводит к возможности появления рассматриваемых колебаний скорости. Условия, при которых это происходит и формула, связывающая период колебаний с гидравлическими характеристиками потока, были установлены путем проецирования модернизированной модели одномерной гидравлической идеализации на одну фазовую переменную – расход (скорость) в предположении, что информация об уровне (и его производных по времени и координате x) известна. При этом приходим к так называемому обобщенному уравнению Риккати (искомая функция – расход или скорость), которое, путем ряда известных в математике преобразований, сводится к линейному однородному уравнению второго порядка. Последнее, в зависимости от знака коэффициента (зависящего от гидравлических характеристик) дает (или не дает) колебательные решения, период которых (оценка расстояний между последовательными нулями колеблющегося решения) определяется теоремой Штурма. Этот период T дается формулой:

$$T = \frac{\pi CR^{0,5}}{g\sqrt{I - i_0}}, \quad (3.7)$$

где R – гидравлический радиус; g – ускорение свободного падения; I – уклон водной поверхности; i_0 – уклон дна.

Эта формула определяет не только период рассматриваемых колебаний в зависимости от гидравлических характеристик, но и дает условия, при которых они существуют ($I > i_0$). При $I \rightarrow i_0$ режим движения становится равномерным (можно показать, что

он всегда неустойчив, т. е. в реальности его не существует – река «дрожит»), т. е. период колебаний формально стремится к бесконечности. Решение модернизированной модели приобретает своеобразное свойство «дальнодействия», присущее автоколебательным (а точнее автоволновым) процессам, интерпретируемым в экспериментах по измерению скорости как низкочастотные пульсации. В терминах фазовых пространств это означает появление в них замкнутых циклов. Последние и есть признак «дальнодействия». Опуская подробные преобразования (они присутствуют в ряде монографий автора, см. Список литературы), приведем лишь основные их этапы:

1. Система Сен-Венана модернизируется путем ввода в нее новых зависимостей для гидравлических сопротивлений $\lambda_{\text{нст}}/\lambda_{\text{уст}} = f(dv/dt, \omega)$, где $\lambda_{\text{нст}}/\lambda_{\text{уст}}$ – отношение неустановившегося $\lambda_{\text{нст}}$ и установившегося $\lambda_{\text{уст}}$ значений коэффициентов гидравлического сопротивления; ω , dv/dt – частота и полное ускорение.

2. Считая информацию о морфометрии фиксированного створа с координатой $x = x_0$, где производятся измерения, а также об уровне H и его производных по времени и координате ($\partial H/\partial x = -I$) известной, а также учитывая, что из уравнения неразрывности следует $\partial Q/\partial x = -\partial F/\partial t$, первое уравнение системы Сен-Венана можно записать в виде так называемого обобщенного уравнения Риккати

$$dQ/dt = f_1(x_0, t) Q^2 + f_2(x_0, t) Q + f_3(x_0, t), \quad (3.8)$$

где коэффициенты f_1, f_2, f_3 зависят от морфометрии, гидравлических сопротивлений, уровня и его производных по t и x (аналогичное по структуре уравнение получается и для осредненной по сечению скорости v).

3. Уравнение (3.8) путем ряда известных [39] в математике преобразований приводится сначала к уравнению

$$du/dt = -u^2 + R_1(t) \quad (3.9)$$

3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах

(здесь переменная u – связана преобразованиями с расходом Q или скоростью v , а $R_1(t) = f(f_1, f_2, f_3)$), затем – к линейному уравнению второго порядка

$$y'' - R_1(t)y = 0, \quad (3.10)$$

где $u = y'/y$.

Относительно свойств решений уравнения (3.10) можно сделать некоторые выводы общего характера, опираясь на теорию Штурма [39]. Колебательный характер решения этого уравнения определяется знаком $R_1(t)$. Так как основное слагаемое в $R_1(t)$ есть произведение $I g F(g/FC^2 R)$, то практически всегда $R_1(t) \geq 0$, т. е. решение не имеет общих точек с осью $0t$. (Было бы странным, если бы получился другой результат: расход воды при неизменных граничных условиях то положительный, то отрицательный.)

Однако, если рассматривать характер поведения отклонений q расхода (скорости) от некоторого квазиустановившегося значения Q_0 , то может иметь место колебание. Считая, что $i \approx Q^2/K^2$ (здесь K – пропускная способность русла), $\partial Q_0 / \partial t \ll \partial q / \partial t$, и делая аналогичные подстановки, приходим к идентичному однородному уравнению второго порядка, основное слагаемое коэффициента R_1^* которого $(I - i_0)g^2 / (C^2 R)$, однако, допускает колеблющиеся решения. Конкретные (численные) значения оценок расстояний между последовательными нулями решений $(\pi/\sqrt{R_1^*})$ и приводят к формуле (3.7). (Ключевую роль во всех этих рассуждениях, подробности которых опущены, играет факт зависимости гидравлических сопротивлений от ω и v , что приводит к следующей формуле для диссипативного члена j в динамическом уравнении системы Сен-Венана: $j = \lambda_{\text{уст}} Q^2 - \gamma(\omega) \lambda_{\text{уст}} Q^2$, где $\gamma(\omega)$ – коэффициент, зависящий от частоты. Приравнивая $\lambda_{\text{уст}} Q^2$ значению i_0 , приходим к модели для q с «отрицательным трением», что и приводит к автоколебаниям.)

3. Русловой сток

Разумеется, «просто так» логическим путем (без изменения выражений для гидравлических сопротивлений) к такому результату формальными преобразованиями системы Сен-Венана не прийти (новое нельзя строго логически «вывести» из старого, иначе вся наука превратилась бы в сплошную тавтологию). Как назвать выявленные таким способом низкочастотные колебания – вопрос. С одной стороны, формально, модель (3.10) это обыкновенное дифференциальное уравнение, т. е. описывает физические системы с сосредоточенными параметрами (в нашем случае – в фиксированном створе реки с координатой $x = x_0$). Поэтому логично, казалось бы, использовать термин «автоколебание». Но с другой стороны, уравнение (3.10) это «модель от модели»: речь то идет в конечном итоге о безнапорных потоках, т. е. распределенных системах. А в этом случае более уместен термин «автоволны». (Часто употребляют термин «низкочастотные колебания скорости».)

Сведем модель генератора низкочастотных колебаний скорости (низкочастотными колебания являются по отношению к турбулентности; по сравнению с темпом изменения граничных условий они обычно являются высокочастотными) к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Модель (3.10), записанная для q , может быть заменена системой из двух дифференциальных уравнений:

$$dx_1/dt = x_2; \quad (3.11)$$

$$dx_2/dt = -R_1^* x_1. \quad (3.12)$$

Безинерционную модель, по которой вводится новая переменная u , характеризующая отклонение пульсационного расхода (скорости) от квазиустановившегося значения, заменим инерционной моделью

$$dx_3/dt = (x_2/x_1) / \tau - x_3 / \tau. \quad (3.13)$$

По мере уменьшения численного значения параметра релаксации τ модель (3.13) становится все более и более безинерционной. На рис. 3.3 показаны колебания (рис. 3.3, *a* и 3.3, *б*), генерируемые моделью (3.11) – (3.13) аттрактора, изображенного на рис. 3.3, *в* (знак дивергенции фазового потока $\text{div } \vec{x} = \sum d\dot{x}_i/dx_i$ отрицательный).

3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах

Дополним систему (3.11) – (3.13) дифференциальным уравнением характеристик

$$dx_4/dt = x_3 + \text{const} \quad (3.14)$$

и уравнением для глубины (3.6):

$$dx_5/dt = a_5 \sin(\omega_{x_5} \cdot t) \quad (3.15)$$

(здесь $x_5 = h$; ω_{x_5} значительно меньше частоты колебаний, генерируемых системой уравнений (3.11) – (3.13)).

Характеристики и интегральные поверхности, соответствующие системе (3.11) – (3.15), показаны на рис. 3.4.

Как надо понимать физику происхождения интегральных поверхностей, представленных на рис. 3.2, б; 3.4, б и 3.4, в? Ведь вдоль характеристик искома функция (в нашем случае глубина h) должна оставаться постоянной или однозначно определяться боковой приточностью. В рассматриваемых примерах таковой является распределенный приток, меняющийся по синусоиде. Скорость $v = v_0 + \tilde{v}$ вне зависимости от того, как задается низкочастотная составляющая («навязывается» или генерируется системой (3.11) – (3.13)) не зависит (в данной идеализации процесса перемещения волны по руслу) от глубины потока (уравнение (3.1) линейное). Если вернуться к метафоре «льдина», то траектория ее перемещения в пространстве (x, t) «предопределена» скоростью v .

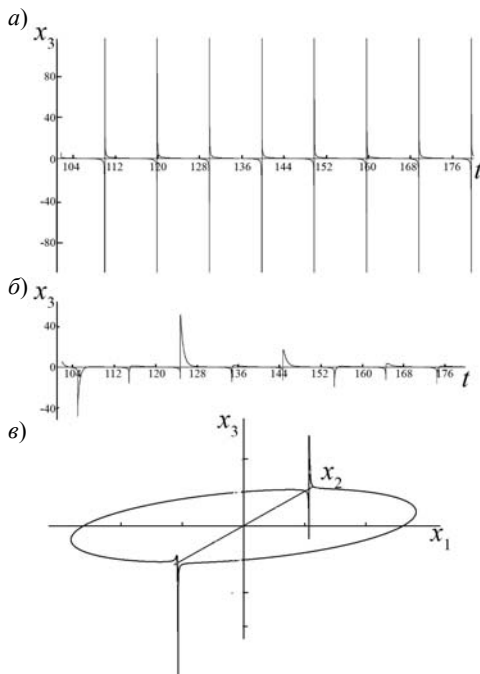


Рис. 3.3. Колебания, генерируемые моделью (3.11) – (3.13) (для рис. а параметр релаксации на два порядка меньше такового для рис. б), и ее аттрактор (в).

3. Русловой сток

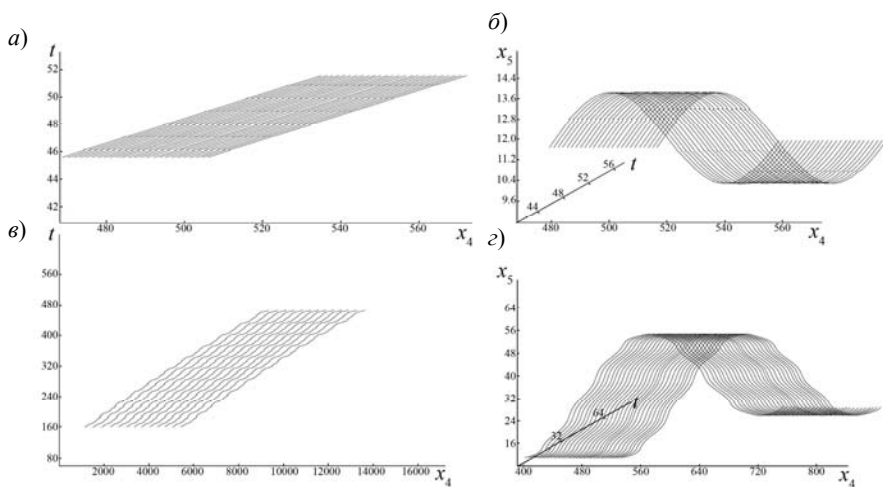


Рис. 3.4. Характеристики (а, в) и интегральные поверхности (б, г), соответствующие рис. 3.3, а (а, б) и 3.3, б (в, г) (обозначения на осях в условных единицах).

Последнюю можно интерпретировать как пропускную способность, не зависящую от глубины. На разных участках русла «льдина» за одинаковые промежутки времени проходит разные расстояния, ее движение то ускоряется, то замедляется. Нагляднее всего этот процесс можно

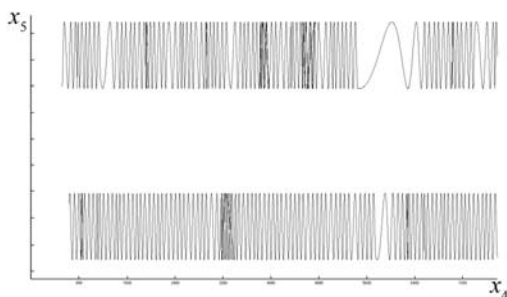


Рис. 3.5. К иллюстрации неравномерности «движения одинаковых глубин» (на верхнем графике R_1^* больше чем на нижнем).

изобразить, если задать частоту ω_{x_5} измеримой с частотой генерируемых колебаний, рис. 3.5. Из этого рисунка видно квазипериодическое образование «пробок», сменяющееся участками с увеличенной пропускной способностью.

3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

В рассмотренных выше линейных моделях фазовые переменные h и v «жили» в известном смысле независимо друг от друга. Каждая из них порождалась своим дифференциальным уравнением первого порядка, а в качестве общей «привязки» переменных служило время. Однако трудно ожидать, что в реальности глубина не оказывает влияние на скорость; возможно при разных глубинах это влияние различно, но оно существует. Параметр $R_1^* \sim (I - i_0)g^2/C^2R$ также определяется, при фиксированном коэффициенте шероховатости n , глубиной ($R \approx h$) и ее перепадом по длине потока. И, наконец, дно потока может быть деформируемым. Попробуем промоделировать влияние на решение этих трех обстоятельств.

Параметр R_1^* является бифуркационным: при смене его знака решения системы (3.11) – (3.13) меняется радикальным образом, становясь неколеблющимся. Но знак R_1^* определяется характером изменения перепада глубин (их нарастанием – $\partial h/\partial x > 0$ или спадом $\partial h/\partial x < 0$). Сначала этот процесс смены знака промоделируем искусственно: введем в систему (3.11) – (3.15) еще одно уравнение

$$dx_6/dt = a_6 \sin(\omega_6 \cdot t), \quad (3.16)$$

а уравнение (3.12) запишем в виде

$$dx_2/dt = -x_6^2 R_1^* x_1. \quad (3.17)$$

Тогда при изменении x_6^2 по косинусоиде «коэффициент» ($x_6^2 R_1^*$) всегда будет положительным, меняясь от какого-либо положительного значения до нуля (при котором колебательные решения для x_1 и x_2 отсутствуют). Это означает, что характеристики будут иметь участки как с колеблющимися, так и неколеблющимися решениями (рис. 3.6, *a*). Особенно нагляден рис. 3.6, *в*: при значениях x_6 , близких к нулю, колебательные решения исчезают и появляются снова с периодом, уменьшающимся по мере увеличения коэффициента $x_6^2 R_1^*$.

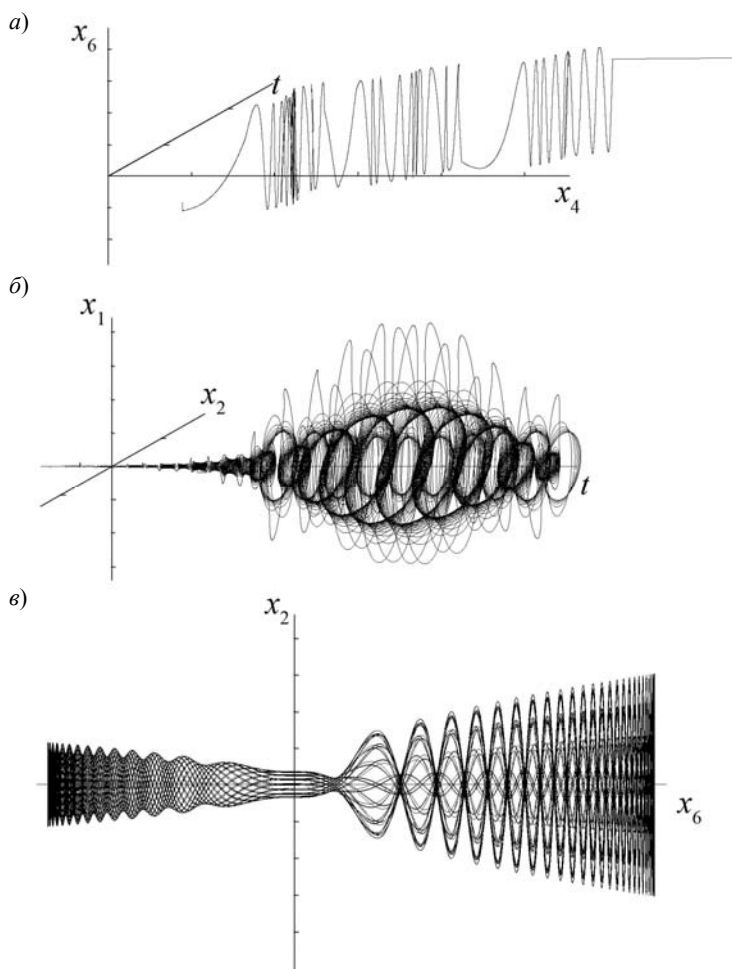


Рис. 3.6. Влияние параметра R_1^* на появление и исчезновение колебательных решений на примере различных вариантов проекций фазового портрета:
 а) (x_6, x_4, t) ; б) (x_1, x_2, t) ; в) (x_2, x_6) .

При положительных значениях коэффициента $(-x_6^2 R_1^*)$ фазовые траектории для системы (3.11), (3.12) (точнее, при $x_6 \neq 0$, для системы (3.11), (3.17)), не имеют замкнутых циклов в отличие от случая, когда он принимает положительные значения (рис. 3.7).

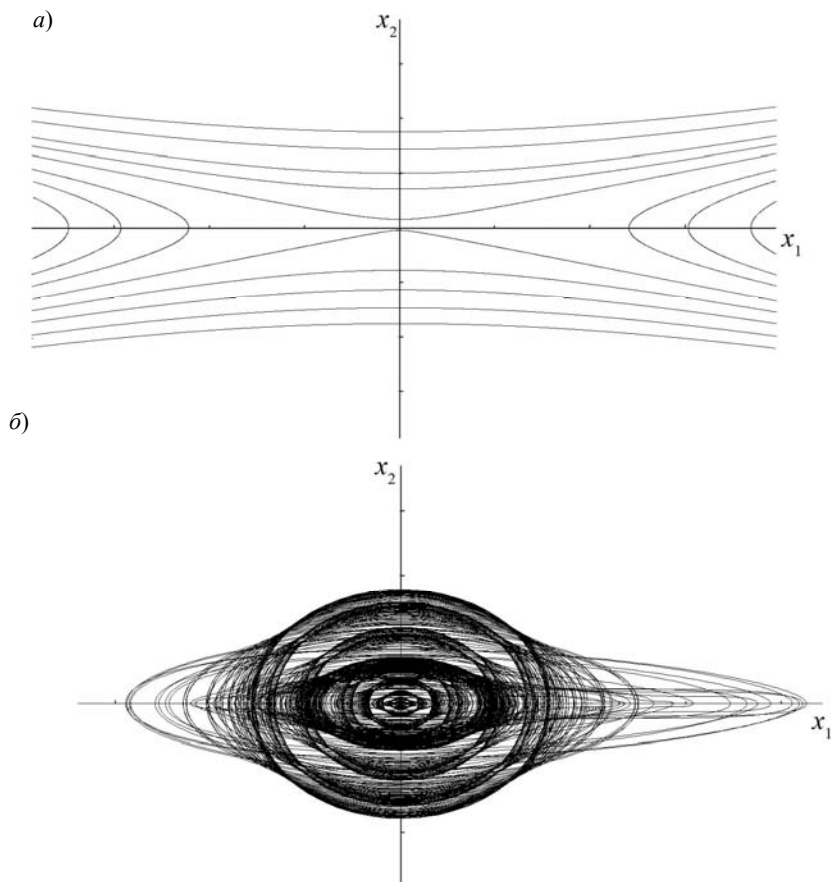


Рис. 3.7. Фазовые портреты с неколеблющимися $[(-x_6^2 R_1^*) > 0]$ (а) и колеблющимися $[(-x_6^2 R_1^*) < 0]$ (б) решениями.

Выполним расчеты, приблизив модель к реальности. Пусть знак коэффициента R_1^* и период колебаний регулирует сам перепад глубин:

$$R_1^* = (I - i_0) g^2 / C^2 R = (i_0 - \partial h / \partial x - i_0) g^2 / C^2 R \approx - (h_2 - h_1) g^2 / C^2 R \cdot \Delta x = f(h_2),$$

3. Русловой сток

где $h_1 = \text{const}$ – глубина, соответствующая равномерному режиму, а h_2 – текущая глубина при прохождении паводочной волны. В этом случае уравнение (3.17) примет вид

$$dx_2/dt = -(x_5 - \text{const}_1) \cdot x_1 \text{const}_2. \quad (3.18)$$

Когда $x_5 > \text{const}_1$, выполняется условие существования колеблющихся решений. Однако в отличие от предыдущего случая период колебаний и сама возможность их существования зависят от фактической глубины потока. Модель (3.1) – (3.4) стала квазилинейной, а соответствующая ей система обыкновенных дифференциальных уравнений должна решаться совместно. Если раньше обе фазовые переменные h и x в рамках метода характеристик были частично инфинитны друг друга (все-таки они были «завязаны» через время), то теперь имеем полностью финитную модель, в которой фазовые переменные «повязаны» прямым взаимодействием друг с другом. Конечно в модели остаются частично инфинитные параметры, дающие возможность изменения ее интерфейса с окружающей объект моделирования реальностью. Двумерная проекция фазового портрета представлена на рис. 3.8. Как и следовало ожидать в зависимости от знака перепада глубин наблюдаются колеблющиеся или неколеблющиеся решения.

В предыдущих вариантах модели считалось, что $\partial v_0 / \partial h = 0$, хотя из гидрометрических данных известно, что скорость обычно увеличивается с глубиной потока. Поэтому примем в уравнении

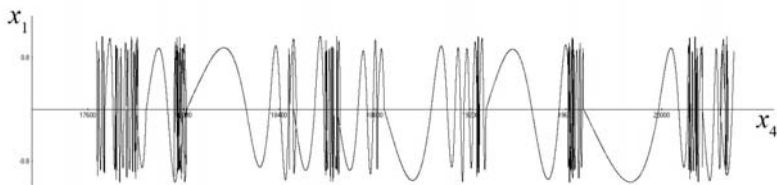


Рис. 3.8. Смена колебательных решений (при $\partial h / \partial x < 0$) неколебательными (при $\partial h / \partial x > 0$).

3.2. Поток в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

(3.14) вместо $\text{const} = a_0$ один из вариантов зависимости $v_0(h)$ и визуализируем влияние этой зависимости на интегральную поверхность. В качестве начального условия

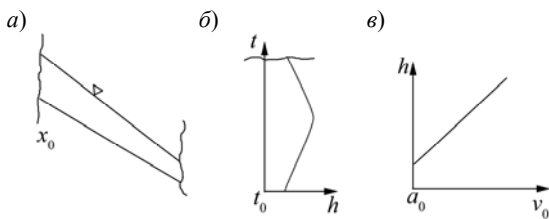


Рис. 3.9. Варианты задания начального (а) и граничного (б) условий, а также зависимости скорости от глубины (в).

возьмем монотонное распределение глубин по длине потока (рис. 3.9, а), а в качестве граничного – волну, формируемую в начальном (верхнем) створе с координатой x_0 (рис. 3.9, б). Используемый вариант зависимости $v_0(h)$ представлен на рис. 3.9, в.

Полученная интегральная поверхность показана на рис. 3.10, а. Естественно, пространство переменных x_4, t, x_5 ха-

рактеристики заполняют без взаимных пересечений. Однако их проекции на плоскость x_4, t (рис. 3.10, б) могут пересекаться, что указывает на образование так называемого перехлеста или складки (большие глубины в соответствии с принятой зависимостью $v_0(h)$, рис. 3.9, в, перемещаются быстрее и догоняют «медленные» глубины). Образование перехлестов ведет к многозначности h , но они могут и рассасываться. Линия (огibaющая семейства характеристик) на плоскости

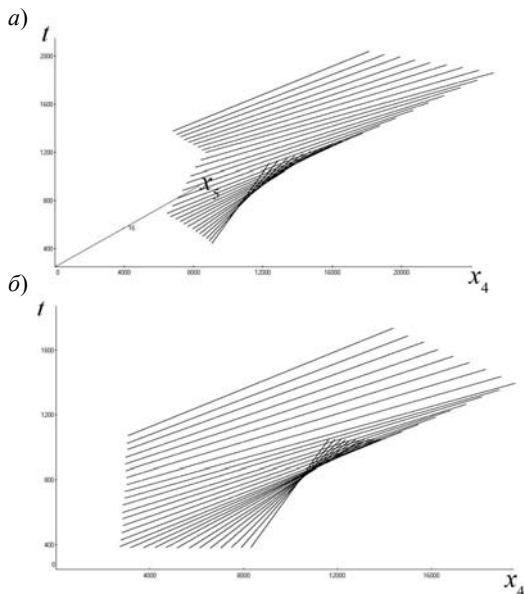


Рис. 3.10. Интегральная поверхность (а) и ее проекция (б) при учете влияния глубины на пропускную способность (обозначения на осях в условных единицах).

3. Русловой сток

(x_4, t), ограничивающая область складки, называется каустикой, см. рис. 3.10, б. (Каустика – «исчезающая»: такое название исторически связано с исследованием концентрации света.)

Аналогично изложенному, в этом разделе можно проанализировать «колебания» по продольной координате. Запишем уравнение неравномерного движения:

$$I = U^2 / (C^2 R) + [\alpha / (2g)] (dU^2 / dx), \quad (3.19)$$

где α – коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению (в первом приближении его можно считать равным единице).

Представим скорость в виде суммы

$$U = U_0 + u, \quad (3.20)$$

где U_0 – значение скорости, соответствующее квазиравномерному режиму; u – отклонение скорости от этого значения.

При подстановке (3.20) в (3.19) получим

$$I = \frac{U_0^2}{C^2 R} + \frac{2U_0 u}{C^2 R} + \frac{u^2}{C^2 R} + \frac{\alpha}{2g} \frac{dU_0^2}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \frac{2U_0 du}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \frac{du^2}{dx}. \quad (3.21)$$

Так как U_0 соответствует квазиравномерному режиму, то $dU_0^2 / dx \approx 0$. Поэтому четвертое слагаемое в (3.21) равно нулю. (Это допущение несущественно и его можно снять, так как этим членом можно учитывать влияние морфологических расширений и сужений русла на периодические образования.) Считая, что $U_0 \gg u$, можно пренебречь и шестым слагаемым, как величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими слагаемыми в (3.21). Первое слагаемое можно считать равным уклону дна (или уклону поверхности потока в квазиравномерном режиме), т. е. $U_0^2 / (C^2 R) \approx i_0$ (при этом, также как и в случае, когда независимой переменной является время, появляется член с «отрицательным трением»).

3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

С учетом изложенного уравнение (3.21) примет вид

$$du/dx = f_1 u^2 + f_2 u + f_3, \quad (3.22)$$

где

$$f_1 = \frac{g}{\alpha U_0 C^2 R}, f_2 = -\frac{2U_0}{C^2 R} + \frac{g}{\alpha U_0} + \frac{\alpha}{2g} \frac{dU_0^2}{dx}, f_3 = (I - i_0) \frac{g}{\alpha U_0}.$$

В уравнении (3.22) неизвестная функция – скорость u , независимый аргумент – продольная координата x , коэффициенты и свободный член предполагаются известными из измерений.

По аналогии с изложенным ранее, уравнение (3.22) путем подстановок приводится к уравнению

$$d^2 y/dx^2 - k(x)y = 0. \quad (3.23)$$

Колебательный характер решения (3.23) определяется знаком коэффициента $k(x)$.

Основное слагаемое, входящее в выражение для $k(x)$, имеет вид

$$k(x) \approx -(I - i_0) \frac{g}{\alpha U_0} \left(-\frac{g}{\alpha U_0} \frac{1}{C^2 R} \right) = (I - i_0) \left(\frac{g}{\alpha U_0} \right)^2 \frac{1}{C^2 R}.$$

Расстояние между нулями решений, т. е. полупериод $L/2$, определяется выражением

$$L/2 = \pi/\sqrt{k} = \pi CR^{0,5} \alpha U_0 / (g\sqrt{I - i_0}).$$

Это полупериод для переменной y . Переходя к u , получаем, что это фактически и есть период для переменной u .

Для любого конечного участка русла длиной $l = [x_0, x_k]$, на концах которого принимается отсутствие отклонений от квазистановившегося режима ($y(x_0) = y(x_k) = 0$), существуют нетривиальные решения (собственные функции):

$$y_n(x) = a_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

(здесь a_n – амплитуда волны; $n = 1, 2, \dots$) при собственных значениях

$$k = k_n = \frac{(I - i_0)g^2}{U_0^2 C^2 R} = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Если величина $g^2 / (U_0^2 C^2 R)$ постоянна на участке длиной l , то разность уклонов (а это некий аналог энергии) принимает дискретные значения

$$(I - i_0)_n = \frac{U_0^2 C^2 R \pi^2 n^2}{l^2 g^2}$$

(при $n = 0$ $I = i_0$, т. е. имеем «равномерный» режим; в квантовой механике это означает отсутствие частиц, а в данном случае – отсутствие низкочастотных пульсаций).

Как в реальных потоках может возникнуть ситуация, при которой надо заниматься подобной задачей Штурма–Лиувилля? Запишем уравнение (3.23) следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (I(x) - i_0(x)) \frac{g^2}{U_0^2 C^2 R} y = 0. \quad (3.24)$$

В зависимости от конкретного вида зависимостей $I(x)$ и $i_0(x)$ в потоках могут встретиться различные комбинации волновых процессов. Общее представление о продольных профилях рек дает рис. 3.11. Выделяются следующие их типы: 1) **плавновогнутый** (профиль равновесия) (А), 2) **прямолинейный** (Б), 3) **сбросовый** (выпуклый). Самым распространенным является первый тип. Второй тип наблюдается у малых рек, а третий – характерен для рек Карелии и Кольского полуострова. Существует еще **ступенчатый** тип, образующийся при наличии выраженных промежуточных базисов эрозии.

3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

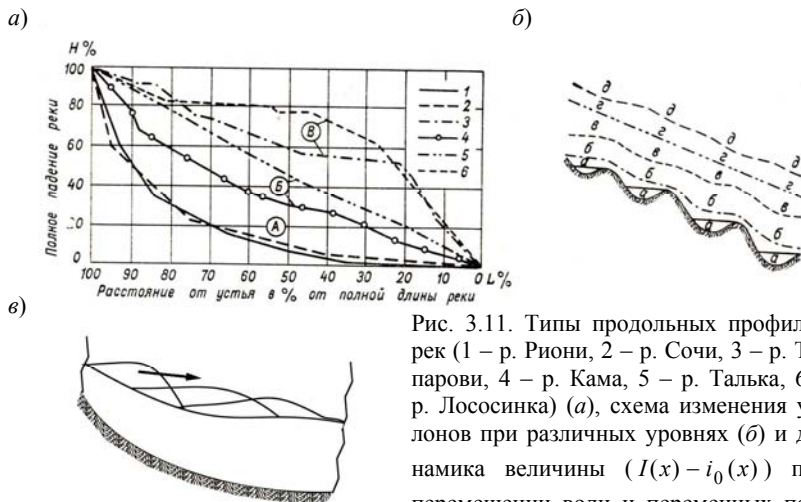


Рис. 3.11. Типы продольных профилей рек (1 – р. Риони, 2 – р. Сочи, 3 – р. Топарови, 4 – р. Кама, 5 – р. Талька, 6 – р. Лососинка) (а), схема изменения уклонов при различных уровнях (б) и динамика величины $(I(x) - i_0(x))$ при перемещении волн и переменных подпорах (в) (рис. а и б из учебника [58]).

Были предложены [58] аналитические аппроксимации продольного профиля реки в виде параболы

$$H = H_0 + z(1 - l/L)^\beta, \quad (3.25)$$

где H – отметка поверхности реки на расстоянии l от истока; H_0 – отметка в замыкающем створе; z – падение от истока до замыкающего створа; L – длина реки; β – параметр (для типа А $\beta > 1$, для типа В $\beta < 1$, причем в первом случае β увеличивается от 1 до 2 по мере укрупнения реки). Продольный профиль зависит от наполнения русла (рис. 3.11, б) и типа волн, создаваемых неустановившимся движением и переменным подпором (рис. 3.11, в).

Как видно из этих рисунков, на разных участках реки и для различных моментов времени условия для возникновения низкочастотных колебаний и волн могут меняться. Рассмотрим несколько типовых ситуаций.

Если уравнение (3.25) аппроксимирует некий осредненный профиль дна (соответствующий квазиравномерному режиму), то уклон i_0 , равный $-\partial H/\partial x$ (здесь $x \equiv l$), будет

3. Русловой сток

$$i_0 = -z\beta(1 - x/L)^{\beta-1}(-1/L). \quad (3.26)$$

Для $\beta = 1$ (тип Б) уклон будет постоянным ($i_0 = z/L$), для $\beta > 1$ (тип А) уклон зависит от x , уменьшаясь вниз по течению (при $\beta = 2$ эта зависимость линейна $i_0 = 2z/L - (2z/L^2)x$, а для $\beta < 1$ (тип В) – увеличивается вниз по течению (для $\beta = 0,5$ эта зависимость имеет вид $i_0 = z/(2L\sqrt{1 - x/L})$, т. е. уклон растет от $z/2L$ при $x \rightarrow 0$ до бесконечности при $x \rightarrow L$). «Приподнимем» уровень равномерно на H_0 и «заставим» мгновенный профиль водной поверхности меняться по синусоиде. Тогда уравнение (3.25) примет вид

$$H = 2H_0 + z(1 - x/L)^\beta + a \sin(\omega_x x) \quad (3.27)$$

(здесь ω_x – «волновая частота»), а уравнение (3.26), уже для уклона $I = -\partial H / \partial x$, будет:

$$I = -z\beta(1 - x/L)^{\beta-1}(-1/L) - a\omega_x \cos(\omega_x x). \quad (3.28)$$

Разность $I - i_0$, с учетом (3.26) и (3.28), составит $-a\omega_x \cos(\omega_x x)$, т. е. появление и исчезновение очагов «низковолновых» пульсаций скорости или расходов определяется независимо от профиля реки только вариациями мгновенного профиля свободной поверхности (разумеется, в рамках сделанных предположений). Ситуацию иллюстрирует рис. 3.12 из которого видно, что волны существуют только на отрицательной полуволне косинусоиды при $I > i_0$.

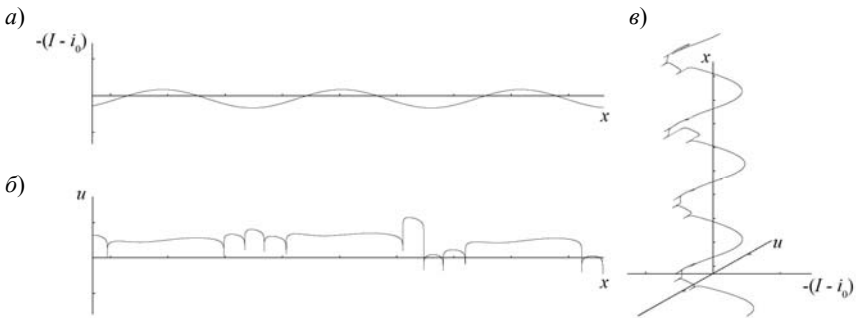


Рис. 3.12. Появление низкочастотных волн при $I > i_0$.

3.2. Поток в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

Исследуем более детально типичные случаи, рис. 3.13. Они могут быть проиллюстрированы как для плавного профиля дна, но при неравномерном распределении глубин за счет прохождения волн неустановившегося движения (рис. 3.13, а), так и при плавном профиле водной поверхности, но при неравномерном распределении глубин за счет деформируемого дна (рис. 3.13, б). (Разумеется, могут быть смешанные случаи, меняющиеся с течением времени). Прослеживается, по крайней мере, четыре конфигурации соотношения между I и i_0 :

1) $i_0 > I$ при $x < a'$, $i_0 = I$ при $x = a'$, $i_0 < I$ при $x > a'$ (рис. 3.13, в, слева); 2) $I > i_0$ при $x < b'$; $I = i_0$ при $x = b'$, $i_0 > I$ при $x > b'$ (рис. 3.13, в, справа); 3) $I > i_0$ (рис. 3.13, а и б, «потенциальная яма» – конфузур); 4) $i_0 > I$ (рис. 3.13, а и б, «потенциальный барьер» – диффузор). Ниже будут рассмотрены эти ситуации, в определенном смысле являющиеся аналогом квазиклассического приближения в квантовой механике [34].

В случае рис. 3.13, в, необходимо искать решение вблизи точек поворота a' (b'). Разложим i_0 в ряд

$$i_0(x) = i_0(a') + di_0/dx|_{x=a'}(x - a') + \dots \quad (3.29)$$

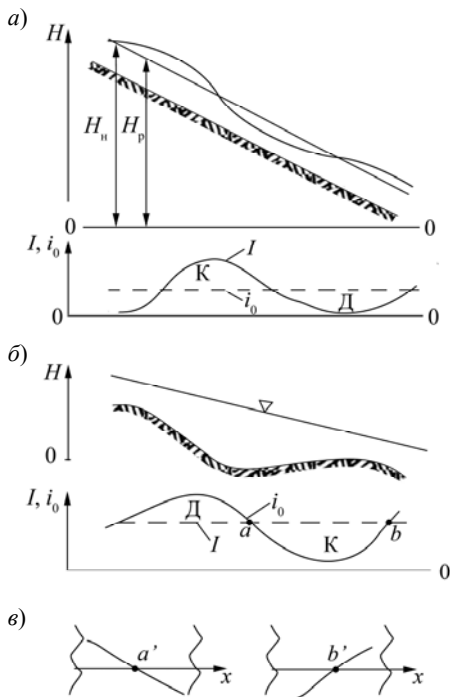


Рис. 3.13. Типовые ситуации, способствующие возникновению и исчезновению низкочастотных колебаний: К – конфузур; Д – диффузор.

3. Русловой сток

Учитывая, что в точке $x = a'$ $i_0(a') = I$, обозначая $f = -di_0(x)/dx|_{x=a'}$ и введя новую переменную $\xi = x - a' = (I - i)/f$, уравнение (3.24) можно записать так:

$$d^2 y / d\xi^2 + f\xi s y = 0, \quad (3.30)$$

где $s = g^2 / U_0^2 C^2 R$.

Модели подобного типа (для волновой функции) рассматривались в работе [34]. Решение уравнения (3.30) имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} C \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\int |p| dx} & (x < a'), \\ 2C \frac{1}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\int_{a'}^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) & (x > a'), \end{cases} \quad (3.31)$$

где $p = \sqrt{f \xi s}$.

Аналогично для случая, изображенного на рис. 3.13, в (справа):

$$y(x) = \begin{cases} C' \frac{1}{\sqrt{|p|}} e^{-\int |p| dx} & (x > b'), \\ 2C' \frac{1}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\int p dx - \frac{\pi}{4}\right) & (x < b'). \end{cases} \quad (3.32)$$

В квантовой механике нормировочные постоянные C и C' обеспечивают финитность движения. Аналогичный смысл они имеют и в данном случае: ведь при $x > a'$, $x \rightarrow \infty$ и при $x < b'$, $x \rightarrow -\infty$ энергетический спектр сплошной, что соответствует инфинитному движению (другое дело, что в реальных потоках этой инфинитности «негде развернуться» – начинают действовать

3.2. Поток в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

факторы, обеспечивающие конечность решений, например, чередование конфузурных и диффузурных участков реки).

Рассмотрим более детально участок русла на рис. 3.13, а (см. рис. 3.14). На выделенных «жиром» трех участках (a_1, b, a_2) свободной поверхности параллельных дну (точнее – наклону водной поверхности при квазиравномерном режиме) условия появления низкочастотных пульсаций не выполняются ($i_0 = I$). А что происходит в зонах Я (яма) и Б (барьер)?

В зоне Я ($a_1 < x < b$), согласно нижним формулам (3.31) и (3.32), происходит волновое движение, причем при этом должно соблюдаться равенство

$$2C \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\cos \left(\int_{a_1}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2C' \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\int_x^b p dx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) справедливо в случае, если сумма обеих фаз равна целому π

$$\int_{a_1}^b p dx - \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad (3.34)$$

n – целое число.

Таким образом перед нами осциллятор, с двух сторон окруженный потенциальными барьерами, в которых эти осцилляции, если и проникают, то затухают в соответствии с верхними формулами (3.31) и (3.32).

Разумеется все это относится к отклонениям скорости от квазиравномерного режима U_0 (точнее даже к преобразованным ее отклонениям). Из предыдущего видно, что для двух видов (по переменной x и t) квазимodelей (modelей от modelей) получились практи-

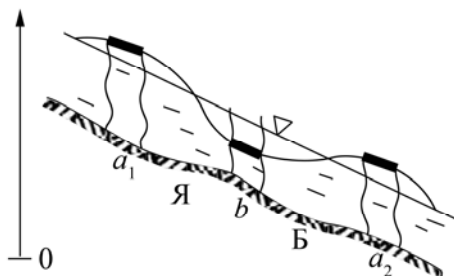


Рис. 3.14. К понятию потенциальной ямы (Я) и потенциального барьера (Б).

3. Русловой сток

чески одинаковые условия появления периодических решений и формула для периодов. Это указывает на то, что реально мы имеем дело с бегущей волной. Если ввести бегущую координату $\xi = x - U_0 t$ (здесь U_0 – скорость распространения волны, равная скорости квазиравномерного режима), то придем к уравнению второго порядка

$$d^2 y / d\xi^2 - k'(\xi)y = 0, \quad (3.35)$$

решением которого будет (при $k' = \text{const}$) монохроматическая волна (строго периодический процесс по координате x и времени t), имеющая бесконечно большую протяженность в пространстве и бесконечную длительность во времени. Учитывая даже идеализированный профиль дна и свободной поверхности, изображенный на рис. 3.13, реальные волновые процессы в реках есть результат наложения и интерференции различных монохроматических волн $y \sim e^{i(\omega t - kx)}$ (конечно, слово «монохроматических» уместно, если смотреть на уравнение (3.35) формально, забыв о том, что сама величина y есть результат нескольких преобразований). Это приводит к появлению волновых пакетов, движущихся вдоль реки с групповой скоростью $d\omega_0/dk$ (здесь ω_0 – несущая частота; k – волновое число). Конечно, в реальности это непрерывно деформирующиеся и расплывающиеся образования, которые можно зафиксировать экспериментально. (Для организации подобного эксперимента нужен участок канала в несколько километров – может быть сот метров – с установленными вдоль течения непрерывно работающими вертушками и возможность создания в канале медленного неустановившегося режима с длиной волны, превышающей в несколько раз пространственные размеры ожидаемых волн низкочастотных пульсаций.)

Расширим фазовое пространство рассматриваемой модели, приняв дно русла потока деформируемым. В этом случае вместо переменной h надо рассматривать две искомые величины: отметку свободной поверхности z' и отметку дна z_0 ($h = z' - z_0$). Уравнение (3.1) примет вид

3.2. Поток в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

$$\frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z_0}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x} = 0. \quad (3.36)$$

В этом случае модель необходимо дополнить балансовым соотношением для наносов (см., например, [10]):

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial (hS)}{\partial t} = 0, \quad (3.37)$$

где ε – коэффициент пористости донных отложений; S – средняя по вертикали объемная концентрация наносов; q_s – элементарный расход наносов.

Учитывая, что $h = z' - z_0$, запишем (3.37) так:

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + [(1 - \varepsilon) - S] \frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial z'}{\partial t} S + (z' - z_0) \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.38)$$

Для замыкания системы (3.37), (3.38) надо дополнительно вводить эмпирические зависимости для q_s и S . Ограничимся установившимся (по расходу воды) движением (тогда $\partial z'/\partial t \approx 0$) и учтем, что в обычных речных потоках $S \ll (1 - \varepsilon)$. Кроме этого, ограничимся рассмотрением движения только влекомых наносов (тогда $\partial S/\partial t \approx 0$). В этом приближении уравнение (3.38) примет вид [10]:

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial z_0}{\partial t} = 0 \quad (3.39)$$

и становится полностью замкнутым при задании эмпирической связи

$$q_s = f(z_0, U, \dots). \quad (3.40)$$

Уравнения (3.39), (3.40) представляют собой **модель деформации**, предложенную в общем виде М. А. Великановым (см. [58]), который опирался на прототип в виде уравнения эрозии Ф. М. Экснера [63].

Конечно, наибольший интерес представляет грядовый режим движения наносов, тем более, что это явление повсеместно распространено в природе [59] (донные гряды в реках и прибрежной полосе озер и морей, барханы и дюны пустынь, формирование снеговых сугробов). При моделировании образования и развитии гряд возникает много вопросов, но основной – причина периодичности. Обычно (см. [10]) ее природу видят в локальном возмущении (случайное возвышение или впадина на поверхности сыпучей среды), которое разрастаясь вниз по течению формирует гряды. Последнее связывают с некой «вихревой нитью, замкнутой своими концами на стенках лотка» [10]. Говоря о развитии возмущений, рассуждают так: «... **пусть** в начальный момент времени в точке с координатами... **помещен** точечный вихрь...» (см. [10], стр. 314). Далее, ссылаясь на учебник [30], вводят в рассмотрение подвижную систему координат и комплексный потенциал. После ряда преобразований получают формулу для скорости течения на «линии дна». Под воздействием этого течения и происходит деформация дна, которую описывают с помощью модели (3.39), (3.40). Распространенным вариантом получения уравнения связи (3.40) является предположение о том, что отметка z_0 , характеризующая при грядовом движении «приведенную толщину слоя движущихся частиц», пропорциональна их диаметру d :

$$q_s \approx k(1 - \varepsilon) d(U - U_{кр}), \quad (3.41)$$

где k – коэффициент пропорциональности (подробнее см. [10]); $U_{кр}$ – размывающая скорость, соответствующая началу движения частиц.

Используя для замыкания уравнения (3.39) выражение для расхода влекомых наносов (3.41), можно промоделировать зарождение песчаной гряды под действием придонного вихря (см. рис. 3.15, *a*). Возникает вопрос: а что дальше? А дальше такие же «нити», наличие которых связывается с их априорным присутствием в турбулентном потоке в качестве «повторяющегося структурного элемента», формируют гряды.

«Особенностью кинематики придонных вихрей» объясняется и асимметричность формы гряды. Используя модифицированный

3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

вариант модели (3.39), (3.40), Экснер [63], применяя метод характеристик, получил решение в виде формулы

$$z_0 = f \left[\frac{kqt}{(z' - z_0)^2} - x \right], \quad (3.42)$$

где f – «произвольная функция, определяемая начальными условиями».

Далее (см. [10]) «чтобы иметь наглядную картину перекашивания, Экснер **принимает**, что в момент времени $t = 0$ профиль дна представляет косинусоиду

$$z_0(x, 0) = A_0 \cos \left(\frac{2\pi x}{l_r} \right), \quad (3.43)$$

где l_r – длина волны. В соответствии с этим начальным условием получаем функцию $z_0(x, t)$ в виде

$$z_0 = A_0 \cos \frac{2\pi}{l_r} \left[x - \frac{kqt}{(z' - z_0)^2} \right]'' \quad (3.44)$$

(см. рис. 3.15, б).

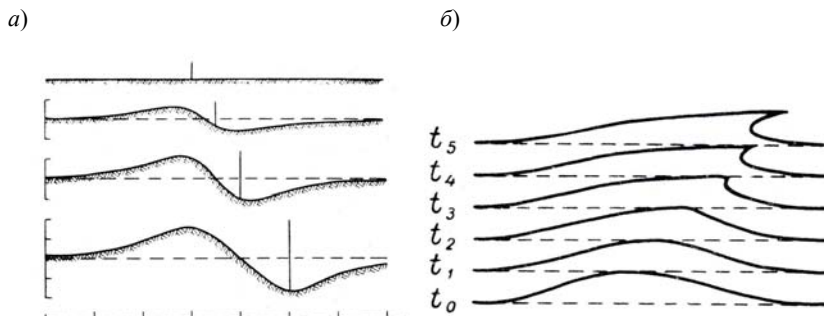


Рис. 3.15. Зарождение (а) и перекашивание (б) песчаных волн [10].

Какова характерная особенность воспроизведенных выше рассуждений? Вопрос о механизме периодичности «повис в воздухе». В турбулентном потоке уже должна присутствовать повторяющаяся вихревая нить «...в точке... помещен точечный вихрь...» или «Экспер принимает, что профиль дна представляет косинусоиду...»).

Важно наличие локальных возмущений на поверхности дна, а дальше к их услугам точечные вихри и косинусоиды. (В таком подходе нет ничего необычного. Например в теории турбулентности ее возникновение трактуется как потеря устойчивости ламинарным движением. Для этого линеаризованным уравнениям гидромеханики «навязываются» возмущения разной частоты и смотрят, как поведет себя решение. Затем в координатах частота – число Рейнольдса строят кривые, разделяющие устойчивые и неустойчивые области.)

В предлагаемом же нами механизме «сыпучей среде» просто некуда деваться, если она находится на участке русла, где выполняются условия возникновения автоколебательных процессов для жидкости. При этом имеет смысл обратить внимание на следующее обстоятельство. Если речь идет о микрогрядах, то условия возникновения низкочастотных колебаний скорости надо находить из уравнений для придонного слоя, которые практически идентичны системе Сен-Венана. Однако вместо уклона свободной поверхности в них фигурирует градиент давления на внешней границе, который либо задается, либо находится из решения соответствующей задачи для течения над слоем [18]. Естественно, что в этом случае период волн будет на порядки меньше периода макрогряд и, видимо, более универсальный для всех природных объектов, в которых наблюдаются микрогряды.

Примем формулу для удельного расхода донных наносов, перемещаемых в грядовом режиме, в следующем виде:

$$q_s = k(1 - \varepsilon) z_0 (U - U_{кр}), \quad (3.45)$$

где k – коэффициент; $U_{кр}$ – критическая (размывающая) скорость; $U = U_0 + v$ (здесь U_0 – скорость квазиустановившегося течения; v – низкочастотная периодическая составляющая, генери-

3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)

руемая автоколебательным режимом при соблюдении условий его возникновения); считаем, что начало координат расположено на уровне подошв гряд.

Подставляя (3.45) в уравнение (3.39), получим:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + (U - U_{кр}) \frac{\partial z_0}{\partial x} = -z_0 \frac{\partial(U - U_{кр})}{\partial x}. \quad (3.46)$$

Введем бегущую координату $\xi = x - \bar{V}t$. Тогда уравнение (3.46) примет следующий вид:

$$\frac{dz_0}{d\xi} + \frac{dv/d\xi}{v + \bar{V}_0} z_0 = 0, \quad (3.47)$$

где $\bar{V}_0 = U_0 - \bar{V} - U_{кр} = \text{const}$.

Введем в правую часть уравнения (3.47) член, имитирующий медленное (по сравнению с изменением v) периодическое поступление и изъятие наносов, влияющих на скорость изменения отметки деформируемого дня $\alpha \sin(\omega_\xi \xi)$, а периодическую составляющую v будем генерировать моделью

$$dv_1 / d\xi = v_2; \quad (3.48)$$

$$dv_2 / d\xi = -\beta \cdot v_1 \quad (3.49)$$

(здесь β – коэффициент).

Таким образом, с учетом (3.48) и (3.49), имеем следующую модель:

$$\frac{dz_0}{d\xi} = -\frac{v_2}{v_1 + \bar{V}_0} z_0 + \alpha \sin(\omega_\xi \xi); \quad (3.50)$$

$$dv_1 / d\xi = v_2; \quad (3.51)$$

$$dv_2 / d\xi = -\beta \cdot v_1. \quad (3.52)$$

3. Русловой сток

На рис. 3.16 представлены развертки проекции аттрактора для системы (3.50) – (3.52). Хотя мы имеем дело с довольно приближенной моделью, но и она воспроизводит важные черты процесса русловых деформаций. Чтобы приблизить форму гряд к реально наблюдаемым в реках, необходимо в модели (3.46) связать скорость $U - U_k$ с отметкой z_0 (или в более общем случае – с глубиной $z' - z_0$). Тогда придем к квазилинейной модели и к возможности появления перехлестов.

Следует обратить внимание, что при переходе к бегущей координате переменная x оказывается жестко связанной с временем t и понятие траектории теряет прежний смысл. Метод характеристик использовался нами для перехода от уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Но в данном случае мы и так получили обыкновенное дифференциальное уравнение «свернув» квазифазовую переменную x с «независимым» аргументом в бегущей координате ξ .

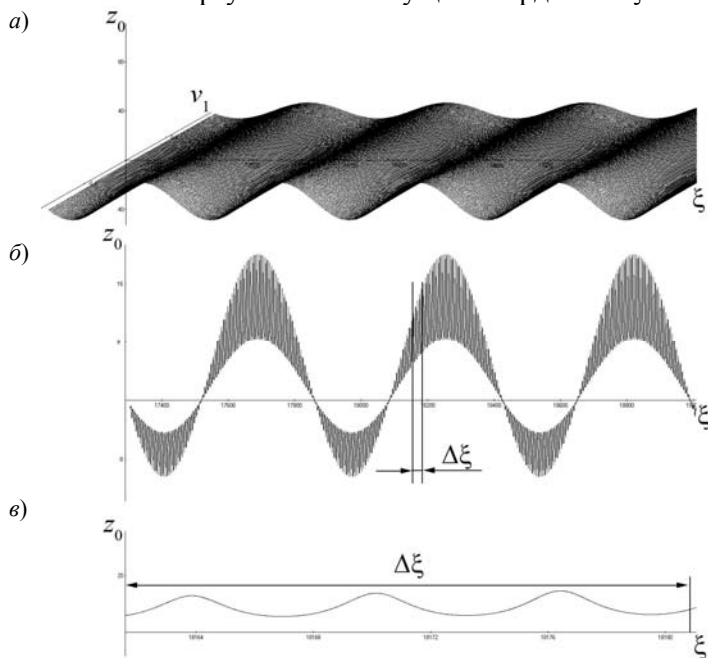


Рис. 3.16. Развертки проекций аттрактора для системы (3.50) – (3.52). Рисунок 3.16, в – «вырезанный кусок» $\Delta\xi$ из рис. 3.16, б (обозначения на осях в условных единицах).

3.3 Система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Примером модели, являющейся системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, служит система Сен-Венана. Применительно к ней метод характеристик изложен в работах [3, 56, 57, 61 и др.]. В соответствии с работой [3] эта система имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial x} = N, \quad (3.54)$$

где $N = -g \left(\frac{U^2}{C^2 R} - i_0 \right)$.

С геометрической точки зрения решение этой системы представляет собой поверхность в пространстве F, U, x, t . Используя выражение для полных производных

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}; \quad (3.55)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (3.56)$$

и решая (3.53), (3.54) (с учетом (3.55), (3.56)) относительно $\partial F / \partial x$ и $\partial U / \partial x$, можно получить [3]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-\frac{dF}{dt} \left(U - \frac{dx}{dt} \right) - \left(N - \frac{dU}{dt} \right) F}{\left(U - \frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{gF}{B}}; \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-(N - \frac{dU}{dt})(U - \frac{dx}{dt}) - \frac{dF}{dt} \frac{g}{B}}{(U - \frac{dx}{dt})^2 - \frac{gF}{B}}. \quad (3.58)$$

Далее (воспроизводим логику и последовательность действий работы [3]), производные dx/dt определяют направления кривой $x(t)$. Если рассмотреть направление, обращающее знаменатели выражений (3.57) и (3.58) в нуль, то получим

$$dx/dt = U \pm \sqrt{gF/B}. \quad (3.59)$$

Для того чтобы производные $\partial F/\partial x$ и $\partial U/\partial x$ в (3.57) и (3.58) не обращались в бесконечность, числители этих выражений также должны быть равными нулю. Отсюда, если подставить (3.59) в числители указанных выражений, получим

$$\pm \sqrt{g/BF} dF + dU - Ndt = 0. \quad (3.60)$$

К аналогичному результату можно прийти и более формализованным путем, используя элементы общей теории систем квазилинейных уравнений [44]. В векторном виде ($\vec{u} = (U, F)$) система (3.53), (3.54) будет

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{b}, \quad (3.61)$$

где $A = \begin{vmatrix} U & F \\ g/B & U \end{vmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g(U^2/C^2 R - i_0) \end{vmatrix}.$

Тип подобных систем определяется собственными значениями матрицы A [44, 52, 61], которые находятся из уравнения

$$U^2 - 2U\xi + (U^2 - \frac{gF}{B}) = 0$$

и имеют следующий вид:

$$\xi_{1,2} = U \pm \sqrt{gF/B}.$$

Собственные значения ξ_1 и ξ_2 вещественны и различны. Формально это означает, что (3.53), (3.54) имеет гиперболический тип, а физически – возможность пошаговых вычислений, когда решение зависит не от ситуации в целом, а определяется ближайшими точками. Приведем систему уравнений к характеристической форме. Для этого умножим второе уравнение на $\pm \sqrt{BF/g}$ и сложим с первым:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial F}{\partial x} \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial x} - N \right) = 0. \quad (3.62)$$

Группируя члены уравнения (3.62), его можно привести к виду

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} + (U \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} \frac{g}{B}) \frac{\partial F}{\partial x} \right] \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \pm F \sqrt{\frac{g}{BF}}) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} (-N) = 0$$

или

$$\frac{dF}{dt} \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} \frac{dU}{dt} \pm \sqrt{\frac{BF}{g}} (-N) = 0$$

или

$$\pm \sqrt{\frac{g}{BF}} dF + dU - N dt = 0,$$

т. е. к уравнению (3.60).

Если расширить вектор состояния системы за счет коэффициента гидравлического трения (или коэффициента Шези C), сделав его полноценной фазовой переменной $\vec{u} = (U, F, \lambda)$ (см. разд. 3.1, а также [61]), то система уравнений при достаточно больших частотах процесса и градиентах скорости становится эллиптической (характеристики мнимы). С учетом того, что при подобном расши-

рении фазового пространства матрица A включает U, F и λ , то тип уравнения в разных точках фазового пространства может меняться. (Проиллюстрировать низкочастотные колебания скорости можно, по аналогии с разделом 3.1, «навязав» модели, представленной в характеристической форме, дополнительные уравнения, генерирующие пульсации, периодом которых управляет гиперболическая часть общей модели.)

Соотношения (3.59), (3.60) представляют собой две пары систем обыкновенных дифференциальных уравнений, дающих связь между U и F по двум возможным направлениям (3.59).

Систему (3.60) можно записать и в более удобной для численных расчетов форме:

$$\frac{dF}{dt} = \pm \frac{N}{\sqrt{g/BF}}; \quad (3.61)$$

$$dU/dt = N. \quad (3.62)$$

На рис. 3.17 представлены различные варианты проекций пространства (F, U, x, t) при иллюстративном расчете прямой волны с граничным условием на левой границе, представленным графиками на рис. 3.17, *a* (пример вымышленный под реальную ситуацию: при этом принималось, что $R = h, C = \text{const}, B = \text{const}$, а уклон дна, задаваемый в общем случае формулой (3.26), также принимался постоянным по длине русла, что соответствует случаю Б на рис. 3.11).

Конечно, при нормальном подборе параметров и их согласовании друг с другом, после стабилизации граничного условия режим становится равновесным (равномерным) и переходные процессы должны затухать около точек равновесия (U_0, h_0) , рис. 3.18. На этом рисунке видно, что кривые $U = f(h)$ имеют вогнутый характер (для прямых волн), что полностью соответствует гидрометрическим данным и уравнениям (3.61), (3.62)

$$\frac{dU}{dF} = \pm \sqrt{\frac{g}{BF}}. \quad (3.63)$$

Эта производная положительна для прямых волн и отрицательна для обратных (при нагоне, например, глубина или площадь живого сечения в створе растет, а скорость уменьшается).

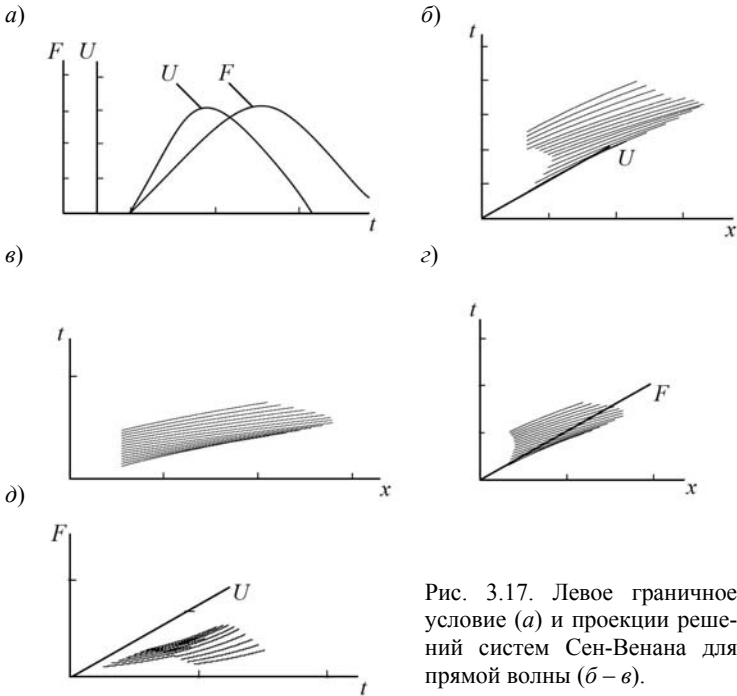


Рис. 3.17. Левое граничное условие (а) и проекции решений систем Сен-Венана для прямой волны (б – в).

Обратим внимание, что на рис. 3.18, а кривая положений равновесия $U_0 = f(h_0)$ неустойчива, а на рис. 3.18, б – устойчива. Это указывает на то, что в первом случае должен существовать механизм, обеспечивающий устойчивость, если и не самой кривой $U_0 = f(h_0)$, то хотя бы некоей полосы вокруг этой кривой. Это обеспечивается автоколебаниями, которые рассматривались в разделе 3.1.

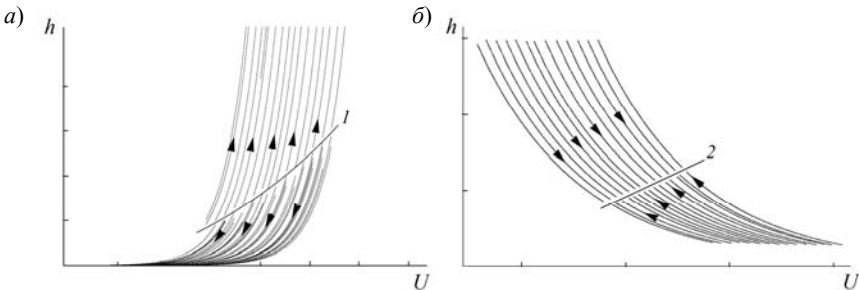


Рис. 3.18. Фазовые портреты для прямой (а) и обратной (б) волн (1 и 2 зависимости $U_0 = f(h_0)$.)

4. Многолетний речной сток

4.1. Преобразование модели формирования стока к уравнениям в частных производных первого порядка. Модель «кинематической волны» для эволюции многомерных вероятностных распределений

Модель формирования многолетнего речного стока, представляющая собой многомерное уравнение ФПК (1.5), может быть записана следующим образом:

$$\partial p(\vec{Y}, t) / \partial t = -\vec{\nabla}[\vec{A}(\vec{Y}, t) p(\vec{Y}, t)] + 0,5 Sp[\vec{\nabla}\vec{\nabla}'\vec{B}(\vec{Y}, t) p(\vec{Y}, t)], \quad (4.1)$$

где \vec{Y} – вектор ($(\vec{Y} = Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n)$), характеризующий фазовые переменные исходной системы динамических моделей; $\vec{\nabla} = \|\partial/\partial\vec{Y}\|$; штрих и Sp означают операции транспонирования и взятия следа.

В соответствии с разделом 2 (см. (2.5) и (2.6)) уравнение (1.5), а значит и (4.1) может быть сведено к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (проблемы, возникающие при этом, будут обсуждаться в разд. 4.3).

Однако существуют две возможности приведения упрощенных вариантов модели (4.1) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка.

1. Если считать коэффициент диффузии нулевым ($B_{ij} = 0$), то уравнение (4.1) примет вид

$$\partial p(\vec{Y}, t) / \partial t + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \partial p(\vec{Y}, t) / \partial Y_i + a'_y p(\vec{Y}, t) = 0, \quad (4.2)$$

где $a_i = A_i$; $a'_y = \sum_{i=1}^n \partial A_i / \partial Y_i$.

Уравнение (4.2) – многомерная линейная модель «кинематической волны» (в роли «волны» выступает распределение $p(\vec{Y}, t)$).

2. Если интересоваться только стационарным распределением плотности вероятности $p(\bar{Y})$, то (учитывая, что (4.1) есть уравнение неразрывности потока вероятности $\bar{\Pi}(\bar{Y}, t) = \bar{A}(\bar{Y}, t) \bar{p}(\bar{Y}, t) - 0,5 \text{div} \bar{B}(\bar{Y}, t) \bar{p}(\bar{Y}, t)$, который постоянен для стационарного распределения, причем $p(\pm\infty, t) = 0$) приходим к соотношению, аналогичному по форме уравнению (4.2). (Подробности см. например, в работе [22].)

Таким образом в этих двух случаях мы приходим к линейному уравнению со многими переменными Y_i , которые не имеют никакого отношения к геометрическим координатам и поэтому задачу Коши для этого уравнения надо интерпретировать в терминах многообразий (см. разд. 1.3). Запишем это уравнение для двух независимых переменных

$$a(Q, E) \frac{\partial p}{\partial E} + b(Q, E) \frac{\partial p}{\partial Q} + c(Q, E) p = 0. \quad (4.3)$$

Задача Коши для уравнений, подобных (4.3), формулируется так (см., например, [55]): найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую Γ в «пространстве» (Q, E, p) . На «плоскости» (Q, E) задана кривая $\gamma: Q = \varphi(s), E = \psi(s), s \in I$ (числовой интервал (s_1, s_2)).

Кривая γ – гладкая $(\varphi'(s), \psi'(s)) \neq (0, 0)$. Пусть задано

$$p|_{\gamma} = h(s), \quad (4.4)$$

$$(h(s) = p(\varphi(s), \psi(s))).$$

Требуется найти решение уравнения (4.3), удовлетворяющее условию (4.4) (рис. 4.1). В качестве характеристической системы для (4.3) выступают уравнения

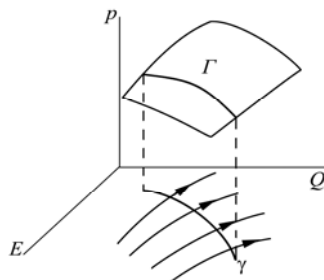


Рис. 4.1. Интегральная поверхность и характеристики.

4. Многолетний речной сток

$$dQ/dl = a(Q, E); \quad dE/dl = b(Q, E), \quad (4.5)$$

фазовые траектории которых являются характеристиками ($l \in I$). Связь между уравнением (4.3) и характеристиками системы (4.5) следует из равенства, справедливого вдоль характеристик:

$$\frac{d}{dl} p(Q(l), E(l)) = \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{dQ}{dl} + \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dl} = a \frac{\partial p}{\partial Q} + b \frac{\partial p}{\partial E}. \quad (4.6)$$

Задача Коши (4.3), (4.4) однозначно разрешима, если γ не является касательной к характеристикам. Алгоритм ее решения состоит из двух этапов. Сначала решается семейство задач Коши для системы (4.5) при

$$Q|_{l=0} = \varphi(s); \quad E|_{l=0} = \psi(s), \quad (4.7)$$

т. е. находятся функции $Q = Q(l, s)$, $E = E(l, s)$ вдоль соответствующих характеристик l_s . В силу (4.6) вдоль l_s уравнение (4.3) будет

$$dp/dt + cp = 0, \quad p|_{l=0} = h(s). \quad (4.8)$$

Поэтому на втором этапе решается семейство задач Коши для (4.8).

Этот алгоритм практически без изменений обобщается на случай n переменных (при этом данные Коши ставятся на гиперповерхности γ – поверхности размерности $n - 1$).

Конкретизируем ситуацию для одномерного случая

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} + A \frac{\partial p(Q, t)}{\partial Q} + \frac{\partial A}{\partial Q} p(Q, t) = 0, \quad (4.9)$$

где $A = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})Q - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}} + \bar{N}$;

$$\partial A / \partial Q = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}).$$

4.1. Преобразование модели формирования стока ...

Уравнение (4.9) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dp/dt = (\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})p; \quad (4.10)$$

$$dQ/dt = (-\bar{c} + 0,5G_{\bar{c}})Q - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}} + \bar{N}. \quad (4.11)$$

На рис. 4.2 представлены характеристики и интегральные поверхности, соответствующие системе (4.10), (4.11) при задании начального условия в виде симметричного распределения $p(Q, t_0)$, рис. 4.2, z, z_1 . При $0,5G_{\bar{c}} < \bar{c}$ распределение $p(Q)$ вырождается в дельта-функцию $p(Q - \bar{Q})$, при $0,5G_{\bar{c}} > \bar{c}$ оно «размазывается» по оси расходов (в последнем случае принято $\bar{N} = 0, G_{\bar{c}\bar{N}} > 0$ из-за чего распределение смещается в отрицательную область; следует заметить, что случай $0,5G_{\bar{c}} > \bar{c}$ не соответствует распределениям Пирсона).

Строить характеристики и интегральные поверхности, перебирая семейства данных Коши, довольно трудоемкая процедура. С технической точки зрения (имея в виду получение наглядных картинок распределений $p(Q, t)$) можно имитировать набор характеристик (имея фактически только одну траекторию (Q, t)), задавая в качестве внешнего воздействия высокочастотную синусоиду относительно нормы \bar{N} . Посмотрим, например, как будет выглядеть решение системы (4.10), (4.11), если на рассматриваемом интервале времени будет меняться соотношение между \bar{c} и $0,5G_{\bar{c}}$. Для этого дополним систему уравнением

$$d\bar{c}/dt = \bar{c}_0 \sin(\omega t), \quad (4.12)$$

где \bar{c}_0 – константа.

4. Многолетний речной сток

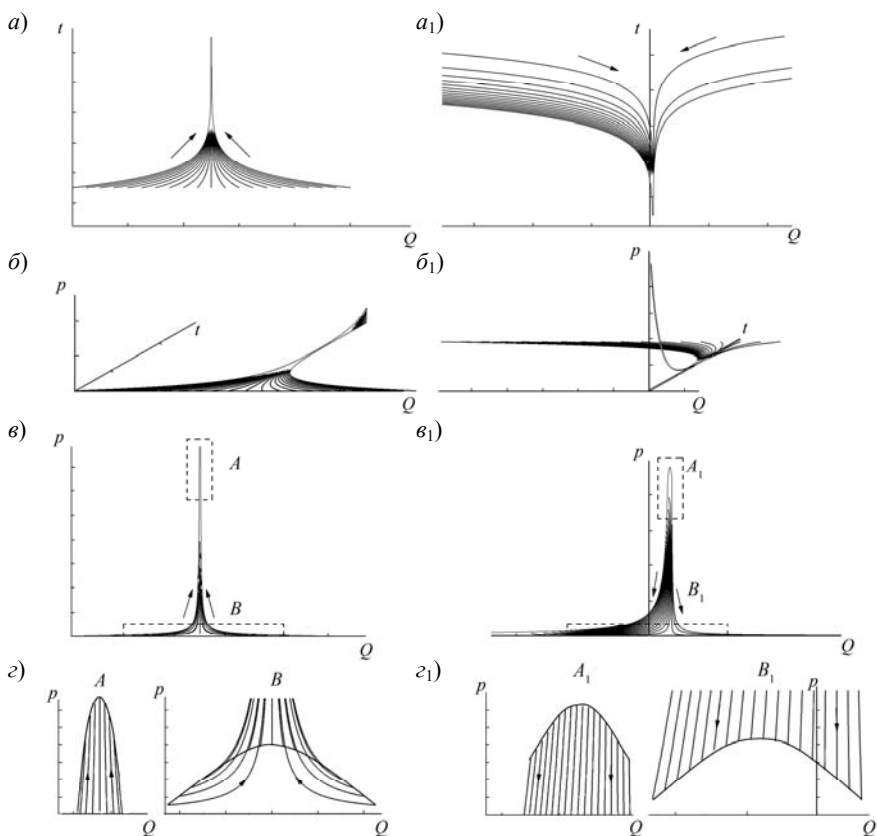


Рис. 4.2. Характеристики (a, a_1), интегральные поверхности ($б, б_1$; $в, в_1$) и их проекции на плоскость (p, Q) ($з, з_1$) при $0,5G_{\bar{z}} < \bar{c}$ (слева) и $0,5G_{\bar{z}} > \bar{c}$ (справа).

На рис. 4.3 показана характеристика (имитирующая целое их семейство), а также «симулятор» интегральной поверхности и различные варианты ее проекций. При этом внешним воздействием служила высокочастотная синусоида, а коэффициент \bar{c} задавался в виде синусоиды таким образом, чтобы на расчетном интервале времени значения величин, стоящих в скобках в уравнениях (4.10) и (4.11) меняли знак (моменты этой смены соответствуют горизонтальным участкам графика на рис. 4.13, д). В этом случае также имеет место стремление распределения $p(Q)$ к «дельта-функции»

(но в качестве \bar{Q} выступает a) величина $Q_0 \sin(\omega t)$ (см. рис. 4.3 $a, б, в$), либо к его расплыванию по оси Q . Однако из-за смены знака разности ($c - 0,5G_{\bar{c}}$) это стремление p к бесконечности (или к нулю) может сопровождаться сменой знака у производной $\partial p / \partial t$ (см. рис. 4.3, $з$).

Рассмотрим теперь двумерный случай $p(Q, E, t)$. (Мы опускаем обсуждение вопроса о том, почему именно испарение, а не, например, изменение запаса воды в почвогрунтах $\pm \Delta U$ является «напарником» расходу. Можно обосновывать и рассматривать различные варианты взаимодействия потенциальных фазовых переменных. Мы ограничимся самым простым, конкурентным типом их взаимодействия, см. [22].)

Выражения для коэффициентов сноса будут:

$$A_Q = -(\bar{c}_Q - 0,5G_{\bar{c}_Q})(Q + E) - G_{\bar{c}_Q} \bar{N}_Q + \bar{N}_Q; \quad (4.13)$$

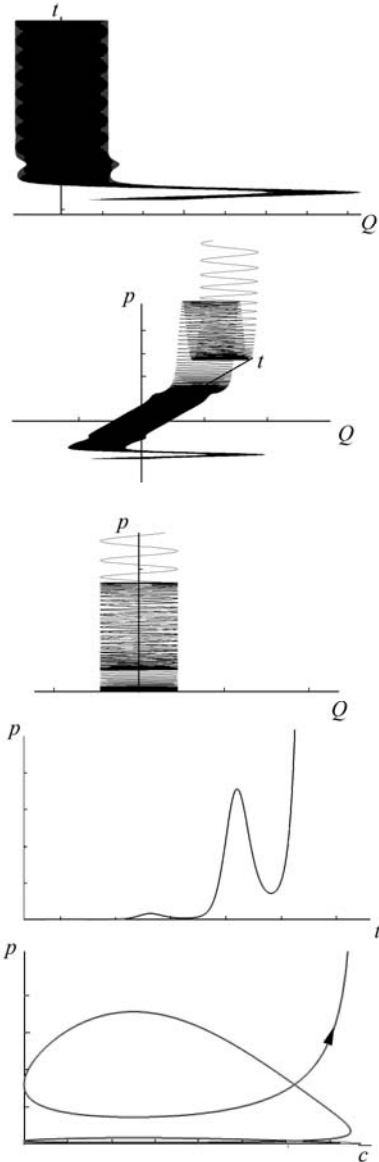


Рис. 4.3. Характеристика (a), интегральная поверхность ($б$), ее проекции ($в, з$) и зависимость плотности вероятности от параметра \bar{c} ($д$).

4. Многолетний речной сток

$$A_E = -(\bar{c}_E - 0,5G_{\tilde{c}_N})(Q + E) - G_{\tilde{c}_E\tilde{N}_E} + \bar{N}_E, \quad (4.14)$$

где коэффициенты \bar{c}_Q , $G_{\tilde{c}_Q}$, \bar{c}_E , $G_{\tilde{c}_E}$ и др. отличаются от использованных в одномерном случае: \bar{c}_E и \bar{c}_Q стремятся к единице, а $G_{\tilde{c}_Q}$ и $G_{\tilde{c}_E}$ стремятся к нулю («шуметь» практически некому, так как для многолетнего стока считается, что $\pm \Delta \bar{U} \rightarrow 0$, хотя это и не совсем так [22]; в отношении норм внешних воздействий можно допустить, что $\bar{N}_Q \approx \bar{N}_E$, т. е. считать осадки общим «ресурсом» для стока и испарения (в отношении $G_{\tilde{c}_Q\tilde{N}_Q}$ и $G_{\tilde{c}_E\tilde{N}_E}$ трудно сказать что-либо определенное – вопрос практически не изучен).

В двумерном случае система (4.10), (4.11) «расширяется» и приобретает следующий вид:

$$dp(Q, E; t) / dt = (\bar{c}_Q - 0,5G_{\tilde{c}_Q} + \bar{c}_E - 0,5G_{\tilde{c}_E})p(Q, E; t); \quad (4.15)$$

$$dQ / dt = (-\bar{c}_Q + 0,5G_{\tilde{c}_Q})(Q + E) - 0,5G_{\tilde{c}_Q\tilde{N}_Q} + \bar{N}_Q; \quad (4.16)$$

$$dE / dt = (-\bar{c}_E + 0,5G_{\tilde{c}_E})(Q + E) - 0,5G_{\tilde{c}_E\tilde{N}_E} + \bar{N}_E. \quad (4.17)$$

На рис. 4.4 представлены иллюстративные варианты графиков решения системы (4.15) – (4.17). Как и в одномерном случае имеет место стремление распределение $p(Q, E)$ либо к двумерной дельта-функции $\delta(Q - \bar{Q}, E - \bar{E})$ (см. проекцию на рис. 4.4, в), либо к «растеканию по плоскости (Q, E) . Так же как и в одномерном случае устойчивые и неустойчивые тенденции могут менять друг друга. Кроме этого по одним переменным процесс может быть устойчивым, а по другим – нет.

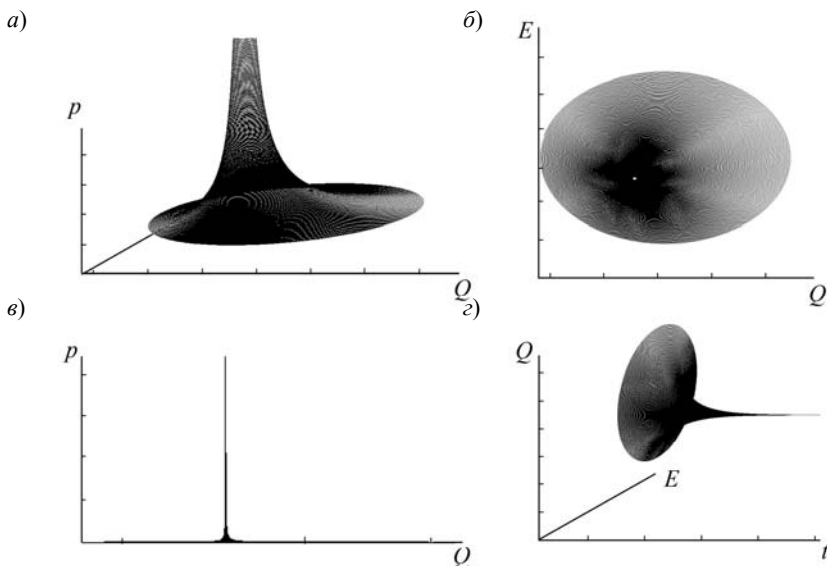


Рис. 4.4 Двумерное распределение $p(Q, E)$ (а) и его проекции (б, в, г) (спиралевидная линия – «наполнение» для лучшей визуализации).

Интересно обратить внимание на влияние переменных Q и E друга на друга. В зависимости от знака производной $\partial(\dot{E})/\partial Q$ (или $\partial(\dot{Q})/\partial E$) (здесь $\dot{Q} = dQ/dt$, $\dot{E} = dE/dt$) переменные могут способствовать увеличению друг друга или тормозить. В устойчивом случае ($\bar{c} > 0,5G_{\bar{c}}$) имеет место конкурентный тип взаимодействия, в случае неустойчивости ($\bar{c} < 0,5G_{\bar{c}}$) имеем мутации (по крайней мере формально это может быть, если критерий устойчивости β больше двух; при использовании для вычисления β формулы (1.11), являющейся следствием экспоненциальной зависимости для автокорреляционной функции, всегда $\beta < 2$). В случае конкуренции обе переменные «работают» на устойчивость друг друга.

4.2. Установившиеся многомерные распределения

Теперь вернемся ко второй возможности (см. раздел 4.1) приведения модели (4.1) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, которая реализуется при рассмотрении установившихся распределений плотности вероятности.

Стохастическая модель формирования стока (4.1) является уравнением неразрывности потока вероятности $\vec{\Pi}(\vec{Y}, t)$:

$$\partial p(\vec{Y}, t) / \partial t = -\mathbf{div} \vec{\Pi}(\vec{Y}, t). \quad (4.18)$$

Для стационарных распределений ($\partial p / \partial t = 0$) он является величиной постоянной. Исходя из этого получаем

$$\vec{\nabla} [\vec{B}(\vec{Y}, t) p(\vec{Y}, t)] - 2\vec{A}(\vec{Y}, t) p(\vec{Y}, t) = 0. \quad (4.19)$$

Подобными уравнениями в частных производных первого порядка описываются всевозможные поверхности, они применяются в классической механике и оптике. Их специфика в контексте описания вероятностных распределений в том, что они являются линейными

$$\sum_{i=1}^n a_i(\vec{Y}) \partial p / \partial Y_i + b(\vec{Y}) p(\vec{Y}) = 0. \quad (4.20)$$

Повторимся: данные Коши ставятся на гиперповерхности γ размерности $n - 1$, а основной математический факт (подробности излагались выше) заключается в однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (4.20). Алгоритм решения сводится к построению характеристик, проходящих через γ . Характеристические уравнения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\vec{Y} / dl = a_i(\vec{Y}), \quad dp / dl = -b(\vec{Y}) p(\vec{Y}), \quad (4.21)$$

где l – параметр, равный длине интегральной линии.

4.2. Установившиеся многомерные распределения

(В монографии во всех случаях системы, подобные (4.21), решаются численно методом Рунге–Кутты.)

В одномерной случае ($\vec{Y} = Q$) система уравнений (4.21) с учетом выражений для коэффициентов сноса и диффузии (1.6) и (1.7) (входящих в уравнение (4.19)) будет

$$dQ/dl = G_{\bar{c}}Q^2 - 2G_{\bar{c}\bar{N}}Q + G_{\bar{N}}; \quad (4.22)$$

$$dp/dl = (-Q(2\bar{c} + G_{\bar{c}}) + (G_{\bar{c}\bar{N}} + 2\bar{N}))p. \quad (4.23)$$

Разделив (4.23) на (4.22), мы «уйдем» от параметра l и «придем» к уравнению Пирсона (1.9). Проиллюстрируем его решение с помощью (4.22), (4.23) (рис. 4.5). На рис. 4.5, б представлены обычные кривые распределения из семейства К.Пирсона при различных знаках коэффициента асимметрии C_s . С точки зрения метода характеристик – это интегральные кривые, характеристики которых представлены на рис. 4.5, а. На рис. 4.5, в и г представлены графики решения системы (4.22), (4.23), если в уравнении (4.22) интенсивность внешнего (аддитивного) шума «размыть» с помощью высокочастотной синусоиды, зависящей от l . Изображение на рис. 4.5, в можно интерпретировать как семейство характеристик, «стартующих» (при расчетах по системе (4.22), (4.23)) практически с одного и того же значения параметра l (чем больше частота, тем меньше отличаются друг от друга значения p на каждом полупериоде, т. е. на ширине представленных полос). Для одномерного случая этот прием не имеет значения, но в многомерном случае подобные искусственные действия позволят визуализировать распределения плотности вероятности.

Перейдем к двумерным распределениям ($\vec{Y} = (Q, E)$). Система уравнений (4.21) примет вид:

$$dQ/dl = G_{\bar{c}_Q}Q^2 - 2G_{\bar{c}_Q\bar{N}_Q}Q + G_{\bar{N}_Q}; \quad (4.24)$$

$$dE/dl = G_{\bar{c}_E}E^2 - 2G_{\bar{c}_E\bar{N}_E}E + G_{\bar{N}_E}; \quad (4.25)$$

4. Многолетний речной сток

$$\begin{aligned}
 dp / dl = & (-2G_{\bar{c}_Q} Q + 2G_{\bar{c}_Q \tilde{N}_Q} + 2G_{\bar{c}_E} E + 2G_{\bar{c}_E \tilde{N}_E} - \\
 & - 2(\bar{c}_Q - 0,5G_{\bar{c}_Q})(Q + E) - G_{\bar{c}_Q \tilde{N}_Q} + 2\bar{N}_Q - \\
 & - 2(\bar{c}_E - 0,5G_{\bar{c}_E})(E + Q) - G_{\bar{c}_E \tilde{N}_E} + 2\bar{N}_E) \cdot p. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Уравнение (4.20) – многомерный аналог уравнения Пирсона (причем с раскрытым физическим содержанием параметров, а система (4.24) – (4.26) – эквивалентная ему двумерная конкретизация. Ее решение – двумерное распределение $p(Q, E)$. На рис. 4.6 приведен пример характеристик и соответствующая им интегральная поверхность.

«Гиперповерхностью» γ в данном случае является кривая на плоскости (Q, E) , в нескольких точках (i) которой заданы значения плотности вероятности $p(Q_i, E_i)$.

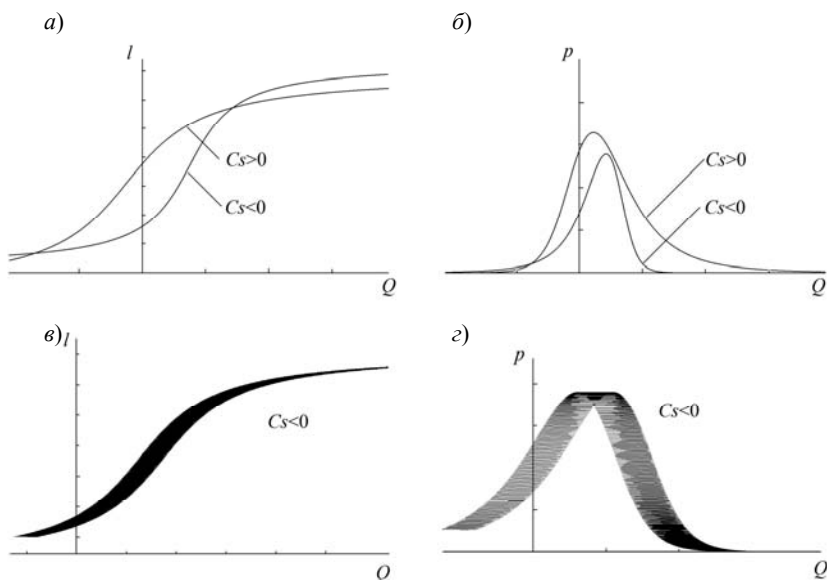


Рис. 4.5. Характеристики (а) и интегральные кривые (б), соответствующие системе (4.22), (4.23) (на рис. в и з представлены квазисемейство характеристик и интегральных кривых).

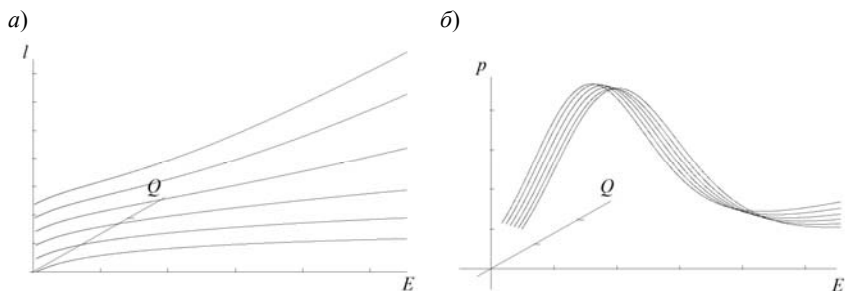


Рис. 4.6. Характеристики (а) и интегральная поверхность (б) для системы (4.24) – (4.26).

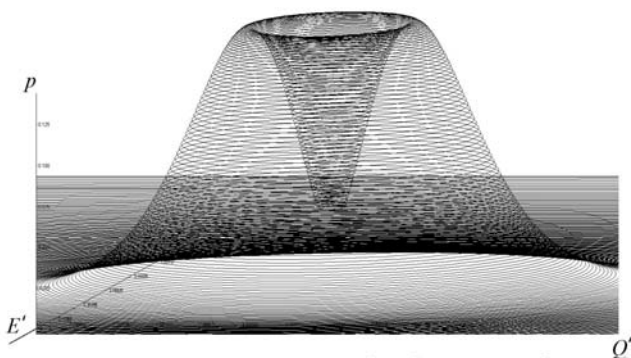
Для того, чтобы сформировать все тело двумерного распределения $p(Q, E)$ надо «выпускать» характеристики из множества точек плоскости (Q, E) . Однако можно проимитировать подобный процесс, используя лишь одну интегральную кривую, расход и испарение которой модулируют высокочастотные синусоиду и косинусоиду (рис. 4.7, а).

Двумерный случай обобщается на большую размерность. При этом система (4.24), (4.25) дополняется новыми уравнениями чисто аддитивно, т. е. оставаясь в прежнем виде, а уравнение (4.26) дополняется новыми слагаемыми, оставаясь неизменной по структуре. Особенно простой вид эта структура имеет при одинаковых численных значениях параметров для всех задействованных переменных ($\vec{Y} = (Y_i), i = 1, 2, \dots$):

$$dp / dl = (\text{const}_1 \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) + \text{const}_2) p. \quad (4.27)$$

На рис. 4.7, б представлен пример трехмерной проекции (p, Y'_1, Y'_2) многомерностью распределения (\vec{Y}) . Для визуализации использовался тот же прием, что и в двумерном случае – модуляции синусоид и косинусоид визуализируемыми переменными. Разумеется, если между фазовыми переменными происходят нелинейные взаимодействия, то картина существенно усложняется и подлежит изучению.

а)



б)

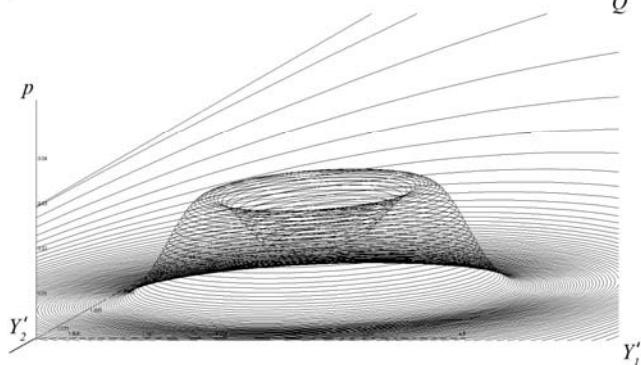


Рис. 4.7. Визуализация двумерного (а) и проекции трехмерного (б) распределений (Q' и E' пропорционально Q и E , но не равны им; аналогично для Y'_1 и Y'_2).

4.3. Моделирование эволюции многомерных распределений системой уравнений в частных производных первого порядка

До сих пор метод характеристик применялся к упрощенным вариантам уравнения ФПК. Можно ли это уравнение в частных производных второго порядка свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и попытаться сделать что-то похожее на случай уравнений Сен-Венана? Посмотрим, какие проблемы нас ожидают на этом пути.

Многомерное уравнение ФПК можно свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

(см. (2.5), (2.6)). Однако, получаемая при этом система уравнений не является гиперболической и привести ее к удобной характеристической форме, как это было сделано в случае системы Сен-Венана, не удастся. Наверное, имеет смысл дать общую картину в отношении систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [50]. Для последних не имеет места принцип равносильности отдельных уравнений высшего порядка системе уравнений первого порядка. По этой причине теория систем уравнений в частных производных первого порядка с несколькими неизвестными развита значительно слабее теории уравнений в частных производных второго (и более) порядка. Существуют и объективные причины такой ситуации [50]: «...случаи, приводящие к системе уравнений в частных производных с несколькими неизвестными функциями, не часты, тогда как значительно чаще встречаются системы нескольких уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией». Подобные системы являются переопределенными. Несмотря на их противоречивость, существует теория совместимости ([40], стр. 328) дифференциальных уравнений с частными производными, которая занимается выделением классов непротиворечивых (совместных) систем. Если имеется переопределенная система

$$F_i(\bar{x}, \bar{p}) \equiv \sum_{j=1}^n f_{ij}(\bar{x}) p_j = 0 \quad i=1, \dots, m \quad (4.28)$$

для искомой функции $z(\bar{x})$ ($\bar{p} = \partial z / \partial \bar{x}$) и все ее уравнения независимы, то она называется замкнутой (полной), при условии, что все уравнения

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad (4.29)$$

($\{, \}$ – скобки Пуассона) являются следствием (4.28). Неполную систему можно пополнить присоединением независимых уравнений вида (4.29).

Возможно, что подобными (переопределенными) системами можно считать рассматриваемые совместно уравнения в частных

4. Многолетний речной сток

производных, которые получаются двумя путями, упомянутыми в разд. 4.1:

$$\partial p(\bar{Y}, t) / \partial t = \bar{\nabla}[\bar{A}(\bar{Y}, t)p(\bar{Y}, t)]; \quad (4.30)$$

$$\bar{\nabla}[\bar{B}(\bar{Y}, t)p(\bar{Y}, t)] - 2\bar{A}(\bar{Y}, t)p(\bar{Y}, t) = 0. \quad (4.31)$$

Если число уравнений (m) меньше числа независимых переменных (n), то замкнутые системы имеют $n - m$ независимых решений. Известна (см. [50]) процедура пополнения и для систем нелинейных уравнений. Возможно изложенное найдет применение в гидрологии, но сейчас мы остановимся на вопросе: можно ли имитировать динамику плотности вероятности распределений Пирсона, опираясь на два «огрызка» (4.30) и (4.31) уравнения ФПК. Теория переопределенных систем «говорит», что при $n = m$ единственным решением может быть только «тривиальное»: $p = \text{const}$ – равномерное расползание плотности вероятности по аргументам. При конкретизации уравнений (4.30), (4.31) системой, записанной в характеристической форме (4.10), (4.11), (4.22), (4.23) видно, что это возможно при выходе распределений за класс К. Пирсона при $G_{\bar{c}} = 2\bar{c}$ и при больших расходах воды, когда (см.

уравнение (1.9))
$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{F(Q)} p \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0.$$

Конечно, и просто замкнутые системы с несколькими независимыми переменными (аргументами) могут оказаться полезными. Рассмотрим, например, моделирование динамики модального значения расхода в одномерном случае, если имеются климатические (а значит – существует возможность «оживить» внешнее воздействие $\bar{N}(t)$) и социально-экономические (для «оживления» коэффициента стока, а значит и задаваемого параметра $\bar{c}(t)$) сценарии. На рис. 4.8 представлены зависимости $p(Q)$ (рис. 4.8, а), полученные при различных начальных условиях: меньше моды (левая кривая) и больше моды (правая кривая). Внешнее воздействие в обоих случаях менялась по синусоиде.

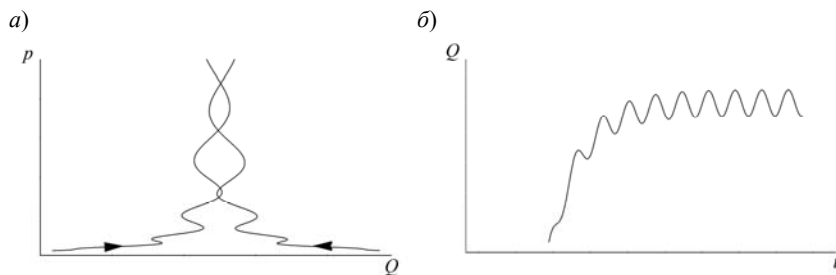


Рис. 4.8. Зависимости $p(Q)$ и $Q(t)$, полученные по модели (4.10), (4.11).

На синусоиду с такой же частотой выходит и зависимость $Q(t)$. Рис. 4.8, б) (его не следует рассматривать как «кривую плотности вероятности» для стационарных случайных процессов, где требуется однозначность p) соответствует левой кривой на рис. 4.8, а). Конечно, модальные значения не характеризуют малообеспеченные и высокообеспеченные расходы (которые, в основном, интересуют проектировщиков), но это тоже важная и нужная информация, которая указывает на наиболее часто встречаемые расходы, реализуемые в результате действия различных сценариев климата и экономики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

У прочитавшего эту книгу может возникнуть вопрос: что же такого особенного в дифференциальных уравнениях в частных производных первого порядка, описывающих поверхности и их эволюцию, и вообще – в методе характеристик? Чтобы ответить на него вспомним, что нас интересуют эволюционные процессы и их моделирование. Слово эволюция лучше всего коррелирует с самой жизнью. При достаточно широком взгляде на этот феномен следует обратить самое пристальное внимание на ее информационную природу, из которой следует понимание жизни «как способность некоего фрагмента информации («репликатора») к самокопированию с использованием ресурсов внешней среды» [38]. При таком определении, жизнью можно считать компьютерные вирусы, слухи, верования, саму науку в целом, наконец.

В последнем случае развитие знания рассматривается как продолжение биологической эволюции с книгами вместо генов. Концепции эволюционной эпистемологии базируются на «постнеодарвинизме» и сводятся примерно к следующему [48].

Возникающий на основе определенного генотипа организм (фенотип) не полностью определяется действием генов. Устойчивость траектории развития организма определяется и воздействием среды. Естественный отбор, связанный с требованием окружающей среды, через фенотип действует на генофонд. Приобретенные свойства имеют отношение к эволюционному изменению, идущему в пользу генотипа, снабжающего наследников способностью адаптивно реагировать на окружение (обладающих большей приспособленностью). Таким путем возникает обратная связь окружающей среды с генотипом в формировании фенотипа.

Генотип сопоставляется с теоретическим знанием, фенотип с научной практикой. Система научных знаний обладает особой устойчивостью наподобие гиперциклов (кооперация молекул РНК на основе взаимной каталитической активности; гиперциклы обеспечивают устойчивое и контролируемое сосуществование участников), но как и они способна эволюционировать. Новые понятия (мутации) должны вписаться в «научный гиперцикл» (модернизировать его), а новый гиперцикл (геном) проверен на практике (эф-

фективность научного фенотипа в новой предметной области). Существующий гиперцикл для своей устойчивости в новых предметных областях должен постоянно совершенствоваться, выбирая из популяции идей наиболее эффективную для доступа к новым сферам реальности (предметным областям). Наука (как сознание социума) развивается в конечном итоге только через действие. В научном языке (генофонде) генерирование мутаций (концептуальные нововведения) происходит через образование метафор, т. е. через нелинейность.

Важным шагом в понимании эволюции (биологической) было осознание (канадскими учеными в 2009 г.) возможности последовательной «разборки» главной части рибосомы («сложных молекулярных “машинки”, при помощи которых синтезируют белки все современные живые существа» [62] – молекула РНК – 23S – рРНК (кольцевых структур в этих молекулах не обнаружено).

Эволюция проторибосомы происходила так, чтобы к ней «добавлялись новые блоки, причем добавлялись без нарушения структуры активного центра молекулы, а также всех тех блоков, которые присоединились ранее. Если очередная мутация приводила к нарушению уже сложившихся структур, она отсеивалась отбором» [38].

Нечто подобное (конечно в метафорическом смысле) происходит, например, в моделях типа (4.2) (4.3). Их блочная структура

$$\sum_{j=1}^n a_j(\vec{x}) \partial p / \partial x_j + b(\vec{x}) = 0$$

остаётся неизменной при «мутировании» плотности вероятности $p(\vec{x})$. Меняется только размерность вектора \vec{x} . При её уменьшении «след» исчезнувшей фазовой переменной в параметрах a_j , b представлен задаваемыми коэффициентами (также коэффициентами должны быть представлены в параметрах вновь зарождающиеся фазовые переменные, ведущие к увеличению размерности \vec{x}).

Список литературы

1. *А. с. 1067361* (СССР) Способ определения расхода воды в открытых потоках / Ленинград. Гидрометеор. ин-т. Авт. изобрет. В. В. Коваленко. – Заявл. 17.03.82, № 3411392/18-10; опубл. в Б. И., 1984, № 2, МКИ 601F 1/20 УДК 681.121(088.8).
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
3. *Архангельский В. А.* Расчеты неустановившегося движения в открытых руслах. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 134 с.
4. *Божокин С. В., Паришин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 134 с.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
6. *Кузанский Н.* Сочинения в 2-х т. Т. 1 – М.: Мысль, 1979. – 488 с.
7. *Великанов М. А.* Общее уравнение деформации размываемого русла потока. Изв. НИИГ, Т. 1932.
8. *Винников К. Я.* Чувствительность климата. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 224 с.
9. *Гринвальд Д. И.* Турбулентность русловых потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 143 с.
10. *Гришанин К. В.* Динамика русловых потоков. – Л. Гидрометеиздат, 1979. – 312 с.
11. *Дементьев В. В.* Исследование пульсации скорости течения на горных реках и ее влияние на точность измерения расхода воды. – Труды ГГИ, 1962, вып. 98, с. 56–98.
12. *Зельдович А. Б., Мышкис А. Д.* Элементы математической физики. – М.: Наука, 1973. – 352 с.
13. *Исследование неустановившегося движения* воды на реках Тверце и Ордеж / Под ред. Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева. – Л.: Гидрометеиздат, 1961. – 288 с.
14. *Исследование неустановившегося движения* на реке Свири в зимних и летних условиях / Под ред. Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева. – Л.: Гидрометеиздат, 1963. – 252 с.
15. *Калинин Г. П.* Проблемы глобальной гидрологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 378 с.
16. *Картвелишвили Н. А.* Регулирование речного стока. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 220 с..
17. *Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И.* Идеализация сложных динамических систем. М.: Наука, 1976. – 272 с.
18. *Коваленко В. В.* Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 160 с.
19. *Коваленко В. В.* Нелинейные аспекты частично инфинитного моделирования в эволюционной гидрометеозологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2002. – 158 с.
20. *Коваленко В. В.* Частично инфинитное моделирование: Основание, примеры, парадоксы. – СПб.: Политехника, 2005. – 408 с.

21. Коваленко В. В. Частично инфинитная гидрология. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 230 с.
22. Коваленко В. В. Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2008. – 178 с.
23. Коваленко В. В. Гидрологическое обеспечение надежности строительных проектов при изменении климата. – СПб.: изд. РГГМУ, 2009. – 100 с.
24. Коваленко В. В. Нелокальная гидрология. – СПб.: изд. РГГМУ, 2010. – 97 с.
25. Коваленко В. В., Илларионов А. В., Сало Ю. А. Экспериментальное исследование автоколебаний безнапорных потоков // Динамика русловых потоков. – Л.: Изд. ЛПИ. – 1987. – с. 16–19.
26. Коваленко В. В., Хаустов В. А. Критерии устойчивого развития гидрологических процессов и картирование зон ожидаемых аномалий параметров годового стока рек СНГ при антропогенном изменении климата // Метеорология и гидрология, 1998, № 12. – С. 96–102.
27. Коваленко В. В., Викторова Н. В., Гайдукова Е. В. Моделирование гидрологических процессов. Изд. 2-е исправ. и доп. Учебник. – СПб.: изд. РГГМУ, 2006. – 559 с. (первое издание: Коваленко В.В. Моделирование гидрологических процессов. – СПб.: Гидрометеоздат, 1993. – 256 с.).
28. Коплан-Дикс С. И. К вопросу о точности определения расхода воды. – Труды ГГИ, 1960, вып. 84, с. 23 – 36.
29. Косарев В. И. 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс). Учеб. пособие; Для вузов. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 224 с.
30. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. – М.: Физматиз, 1963. – 728 с.
31. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. Н. Вычислительные методы. Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
32. Кузанский Н. Сочинения в 2-х т. Т. 1. – М.: Мысль, 1979. – 488 с.
33. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 592 с.
34. Левин В. Г., Вдовина Ю. А., Малинин В. А. Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971. – 936 с.
35. Лопажинский Я. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Л.: Вища школа, 1984. – 200 с.
36. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
37. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Высш. шк., 1974. – 768 с.
38. Марков А. Рождение сложности. Эволюционная биология сегодня: неожиданные открытия и новые вопросы. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – 527 с.
39. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Высш. шк., 1974. – 768 с.
40. Математическая энциклопедия. Т. 2 Д–Кoo. – М.: «Советская энциклопедия», 1979. – 1104 с.
41. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 304 с.

Список литературы

42. Пугачев В. С., Казаков И. В., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.
43. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
44. Рождественский Б. Л., Яненко Н. М. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
45. Самарский А. А., Вабищев П. Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. Изд. 3-е. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
46. СНиП 2.01.14-83. Определение расчетных гидрологических характеристик / Госстрой СССР. – М.: Стройиздат, 1985. – 36 с.
47. СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик / Госстрой России. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 73 с.
48. Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада. – М.: «Логос», 1996. – 400 с.
49. Спенглер О. А. Слово о воде. – Л.: Гидрометеоздат, 1980. – 132 с.
50. Трикоми Ф. Дж. Лекции по уравнениям в частных производных: Пер. с итал. Изд. 2-е. – М.: КомКнига, 2007. – 440 с.
51. Турчак Л. И. Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
52. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 623 с.
53. Успенский В. А. Апология математики: [сборник статей] / Владимир Андреевич Успенский. – СПб.: Амфора, ТИД Амфора, 2009. – 554 с. – (Серия «Новая Эврика»).
54. Устюжанин Б. С. Реакция речного стока на урбанизацию водосбора// Расчеты и прогнозы гидрологических характеристик. – Л.: Изд. ЛПИ, 1989.- С. 73—81/(Труды ЛГМИ, вып. 103).
55. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
56. Фокс Д. А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. – М.: Энергоиздат, 1981. – 248 с.
57. Христанович С. А. Неустановившееся движение в каналах и реках (в сборнике «Некоторые новые вопросы механики сплошной среды»). М.–Л.: 1938.
58. Чеботарев А. И. Общая гидрология. – Л.: Гидрометеоздат, 1974. – 544 с.
59. Шуляк Б. Я. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. – М.: Наука, 1971. – 400 с.
60. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
61. Эббот М. Б. Гидравлика открытого потока. – Вычислительная гидравлика. – М.: Энегроатомиздат, 1983. – 272 с.
62. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969. – 279 с.
63. Exner F. M. Uber die Wechselwirkung swischen Wasser und Geschiede in Flussen. Sitzenberichte der Academie der Wissenschaften. Wien, H. 3–4, 1925.
64. Pankratov A. L. [Электронный ресурс]/Stochastic processes and application. – Denmark. – Режим доступа: <http://www.imm.dtu.dk>.
65. Yokosi Sh. The structure of river turbulence. – Bull. Dis. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., 1967, vol. 17, № 2, p. 1–29.

Предметный указатель

Автоволны	4, 80
Автоколебания	78
Аксиома	10
Аттрактор	33, 38, 42, 80
– проекция	103
– Реслера	36, 39
Бегущая волна	97
Безнапорные потоки	73
Бесконечномерные модели	29
Бифуркационные параметры	57, 84
Вихрь	99
Водные балансы	6
Волновые пакеты	97
Время релаксации	14, 31
Выброс размерности	33
Генотип	125
Гидравлическая идеализация	4, 75
Гиперболическая система	42
Гиперцикл	125, 128
Гипотеза Пуанкаре	9, 38
Гомеоморфизм	10, 69
Грядовой режим	99
Действия	6, 11
Деформируемые русла	84
Диалектическое противоречие	6
Дивергенция	25, 33, 80
Динамика нелинейная	27, 29
Диффузор	94
Естественный отбор	125
Задача Коши	16, 22, 59, 64, 111
– Штурма–Лиувилля	91
Закономерность низкочастотных колебаний	76
Замыкание	6
Интегральная поверхность	74, 82, 88, 110, 113, 114, 120, 121
Интерфейс	59, 87
Инфинитная реальность	9, 24, 57, 58

Предметный указатель

– область	20
– среда	57
Каустика	89
Квазилинейные модели	84, 87
– уравнения	104
Квазисемейство характеристик	120
Колебания климата	13
Колебательные решения	85, 87
Конфузор	94
Кривые Пирсона	16, 35, 51
Критерий устойчивости	22
Лагранживы координаты	45
Ляпуновские показатели	34
Метод характеристик	40, 43, 49, 61, 87, 100, 103
– Рунге–Кутты	43, 51, 119
Многомерные распределения	118
Многообразие	9, 71, 72
– фазовое	28
Модель деформации	98
– кинематической волны	44, 61, 109
Моменты	25, 27, 53, 55
Мутации	116
Начальные моменты	20
Недеформируемые русла	73
Неустановившееся движение	41
Неустойчивость	28, 32
Низкочастотные колебания	4, 74, 80, 106
Область влияния	66
Обыкновенная точка	70
Односвязность	10
Оператор конвективного переноса и диффузии	58
– единичный	60
– сноса	59
Осциллятор	96
Параметрическая форма	64
Параметры	
– финитные	8
– частично инфинитные	8, 38
Плотность вероятности	57, 58
Показатель Ляпунова	34, 35
Полная производная	47

Пополнение	123
Пространство вложения	5, 28
Ранг	70
Распределение зон неустойчивости	18
– Пирсона	23
– плотности вероятности	26
Ретроспективный прогноз	19
Система	67
– переопределенная	122
Складка	88
Схема	
– аддитивная	56, 58
– многокомпонентного расщепления	56
Сценарии	13
– климатические	17, 124
– экономики	124
Теорема Пуанкаре–Перельмана	9
– Геделя	10, 20
– Пуанкаре–Бендексона	34
– Штурма	77
Траектория	33
Тупик гносеологический	5, 12, 39
– онтологический	5
Уравнения	
– для начальных моментов	16
– Пирсона	19, 27
– Риккати	77, 78
– Сен-Венана	4, 103, 107
– Фоккера–ланка–Колмогорова (ФПК)	5, 14, 16, 19, 29, 35, 49, 53, 123
– Экснера	98
Устойчивость	24, 57, 107
Ученое незнание	29
Фрактальная диагностика	5, 29, 31
– размерность	5
– геометрия	5
Фазовые переменные	5, 6, 28, 42, 57, 84, 109, 121
– портреты	86, 107
– пространства	6, 28, 42, 100
– расширение	26, 28
Фенотип	125
Финитная реальность	9
– предметная область	24

Предметный указатель

Фрактал	28
Фрактальная диагностика	5, 29, 31
Характеристика	49, 69, 72, 81, 112, 1113, 114, 120, 121
– надежности	27
– уравнения	48, 62, 66
Хаусдорфова размерность	34
Циклы	78
– замкнутые	85
Частично инфинитная гидрология	4, 5
– – моделирование	25
Шумы мультипликативные	5, 31, 32, 33
– белые	14
– внешние	26
– внутренние	26
– остаточные	57
Эволюционная модель	41
Эволюционные изменения	125
Эволюция многомерных распределений	122
Эмерджентность	42, 68
Явление низкочастотных колебаний	74

Содержание

	Стр.
Введение	3
1. Элементы частично инфинитной гидрологии	4
1.1. Гносеологические основания	4
1.2. Пример возникновения гносеологического тупика	12
1.3. Преодоление тупика и мотивация исследований	22
2. Возможные пути численной реализации эволюционных моделей	41
2.1. Обзор существующих возможностей	41
2.2. Аддитивная схема многокомпонентного расщепления	56
2.3. Метод характеристик	61
3. Руслевой сток	73
3.1. Безнапорные потоки в недеформируемых руслах	73
3.2. Потоки в деформируемых руслах (квазилинейные модели)	83
3.3 Система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка	103
4. Многолетний речной сток	108
4.1. Преобразование модели формирования стока к уравнениям в частных производных первого порядка. Модель «кинематической волны» для эволюции многомерных вероятностных распределений	108
4.2. Установившиеся многомерные распределения	116
4.3. Моделирование эволюционных многомерных распределений системой уравнений в частных производных первого порядка	120
Заключение	124
Список литературы	126
Предметный указатель	129

The contents

	P.
Introduction	3
1. Elements of a partially infinity hydrology	4
1.1. Epistemological basis	4
1.2. Example of occurrence of epistemological impasse	12
1.3. Overcoming impasse and motivation of researches	22
2. Possible ways of numerical realization of evolutionary models	41
2.1. Review of existing opportunities	41
2.2. Additive circuit of multicomponent splitting	56
2.3. Method of the characteristics	61
3. Channel flow	73
3.1. Unhead flows in undeformable channels	73
3.2. Flows in deformable channels (about linear models)	83
3.3 System of the differential equations in partial derivative of the first order	103
4. Long-term river flow	108
4.1. Transformation of model of formation of a flow to the equations in partial derivative of the first order. Model «of a kinematics wave» for evolution of multivariate probabilistic distributions	108
4.2. Established of multivariate distribution	116
4.3. Modeling evolutionary of multivariate distributions by system of the equations in partial derivative of the first order	120
The conclusion	124
The list of the literature	126
The index	129

Научное издание

Коваленко Виктор Васильевич

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЧАСТИЧНО
ИНФИНИТНОЙ ГИДРОЛОГИИ

Монография издается в авторской редакции

Компьютерный набор: О. В. Игнатьева

Верстка: Е. В. Гайдукова

ЛР № 020309 от 30.12.96.

Подписано в печать 17.04.2012 Формат 60×90 1/16. Гарнитура Times New Roman.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 200 экз. Заказ № 81.

РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.

Отпечатано в ЦОП РГГМУ.
