Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК [514.12+514.742.2+517.2](072.5+078.5)
ББК 22.1я73
М34

Печатается по решению Учебно-методического совета РГГМУ

Рецензенты:

Гурнович Татьяна Генриховна, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры финансового менеджмента и банковского дела ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»;

Тарасенко Елена Олеговна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Авторы: И.В. Зайцева, Г.И. Беликова, Е.А. Бровкина, Н.И. Герасименко, В.В. Петрова, Ю.Б. Ржонсницкая, С.Н. Фадеев

Математика : учебное пособие / И.В. Зайцева,
М34 Г.И. Беликова, Е.А. Бровкина, Н.И. Герасименко, В.В. Петрова, Ю.Б. Ржонсницкая, С.Н. Фадеев. – Санкт-Петербург: РГГМУ, 2022. – 112 с.

ISBN 978-5-86813-548-4

Учебное пособие содержит методические рекомендации для студентов в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» (для студентов направлений 05.03.06 Экология и природопользование, 35.03.08 Водные биоресурсы и аквакультура, 05.03.05. Прикладная гидрометеорология). Представлены основные теоретические сведения и примеры решения типичных задач, рекомендации по изучению дисциплины. Приводятся вопросы для самопроверки, рекомендуемая литература, контрольные работы. Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Также может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы высшей математики.

УДК [514.12+514.742.2+517.2](072.5+078.5)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86813-548-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

В результате изучения дисциплины «Математика» студент развивает логическое и алгоритмическое мышление; овладевает основными методами исследования и решения математических задач; вырабатывает умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных гидрометеорологических задач, что позволяет создать необходимую основу для изучения последующих дисциплин. Целью математического образования бакалавра является: воспитание достаточно высокой математической культуры, привитие навыков современных видов математического мышления, привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования при построении и исследовании моделей сложных гидрометеорологических явлений в практической деятельности.

По дисциплине «Математика» на первом-втором курсах предусматривается изучение разделов «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии», «Элементы линейная алгебра», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Студенты I курса должен выполнить три контрольные работы:

1. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии.
2. Элементы линейной алгебры.
3. Дифференциальное исчисление.

Студенты II курса должен выполнить четыре контрольные работы:

4. Приложения дифференциального исчисления.
5. Интегральное исчисление.
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
7. Теория рядов.

Студенты I курса по итогам изучения дисциплины «Математика» сдают экзамен. Для сдачи экзамена необходимо получить зачет по трем контрольным работам (1-3). Студенты II курса по итогам изучения дисциплины «Математика» сдают экзамен. Для сдачи экзамена необходимо получить зачет по четырем контрольным работам (4-7).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа 1 по теме «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»

Литература

[1], гл. I-IV; [3], гл. I, VII-IX; [4], гл. 3, 9, 10; [5], гл. I-III; [6], 1-4; [8]; [9]; [10].

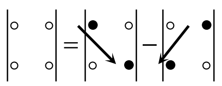
Основные теоретические сведения

1. ***Матрицей*** (квадратной) 2-го порядка называют таблицу чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

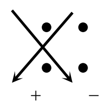
Определителем (***детерминантом***) квадратной матрицы 2-го порядка называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель матрицы **обозначается**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка, схематически можно изобразить следующим образом:



или



Определителем квадратной матрицы 3-го порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Определитель матрицы 3-го порядка **обозначается**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части последней формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком «плюс», какие – со знаком «минус», можно пользоваться правилом, схематически изображенным следующим образом:

$$\begin{vmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}.$$

Определителем матрицы n-го порядка называется сумма всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком «плюс» или «минус» по некоторому правилу.

Вычисление определителей выше третьего порядка производится путем использования различных свойств, которыми обладают определители.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка Δ_{n-1}, полученный из определителя n-го порядка Δ_n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. ***Алгебраическое дополнение*** A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Реккурентная формула для вычисления определителя n-го порядка имеет вид $\Delta_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}$ (разложение определителя по элементам 1-й строки).

Для $n=3$ $\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$,

где

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix};\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix};$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором и модулем вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?
3. Могут ли два вектора, имеющих равные модули, быть не равными? Если да, то чем они могут различаться?
4. Все векторы, имеющие один и тот же модуль, отложены из одной точки A пространства. Где находятся концы этих векторов?
5. Какие операции над векторами называются линейными, и каковы свойства этих операций?
6. Что называется базисом на прямой линии, на плоскости и в пространстве?
7. В каком случае векторы называются линейно зависимыми, и в каком – линейно независимыми?

8. Докажите, что линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их компонентами (координатами) в некотором базисе.

9. Какой базис называется ортонормированным?

10. Как определяется, декартова система координат?

11. Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?

2. ***Скалярным произведением*** двух векторов **a** и **b** называется ***число***, которое обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ и равно произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|\cos(\mathrm{a}\,\hat{,}\,\mathrm{b})\,. \tag{1.1}$$

Если $\mathrm{a}=a_x\,\mathrm{i}+a_y\,\mathrm{j}+a_z\,\mathrm{k}$, $\mathrm{b}=b_x\,\mathrm{i}+b_y\,\mathrm{j}+b_z\,\mathrm{k}$, то

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,, \tag{1.2}$$

$$|\mathrm{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,, \tag{1.3}$$

$$\cos(\mathrm{a}\,\hat{,}\,\mathrm{b})=\frac{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}}{|\mathrm{a}||\mathrm{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,. \tag{1.4}$$

Тройка векторов называется ***упорядоченной***, если указано, какой из векторов считается первым, какой – вторым и какой – третьим.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов (**a**, **b**, **c**) называется ***правой***, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора **c** кратчайший поворот от первого вектора **a** ко второму **b** виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется ***левой***.

3. ***Векторным произведением*** вектора **a** на вектор **b** называется ***вектор***, обозначаемый $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:
длина вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равна

1) $|\mathrm{a}\times\mathrm{b}|=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|\cdot\sin(\mathrm{a}\,\hat{,}\,\mathrm{b})$; (1.5)

2) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен каждому из векторов **a** и **b**, $\mathrm{a}\times\mathrm{b}\perp\mathrm{a}$, $\mathrm{a}\times\mathrm{b}\perp\mathrm{b}$;

3) векторы **a**, **b**, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку векторов.

Если $\mathrm{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\mathrm{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то векторное произведение $\mathrm{a}\times\mathrm{b}$ выражается через координаты данных векторов **a** и **b** следующим образом:

$$\mathrm{a}\times\mathrm{b}=\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathrm{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathrm{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathrm{k} \tag{1.6}$$

или с помощью определителей 2-го порядка

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathrm{k} . \qquad (1.7)$$

Геометрически $|\mathrm{a} \times \mathrm{b}| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

4. ***Смешанным произведением*** трех векторов **a**, **b**, **c** называется ***число***, равное скалярному произведению вектора **a** на векторное произведение векторов **b** и **c**, т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Если $\mathrm{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$, $\mathrm{b} = \{b_x ; b_y ; b_z\}$, $\mathrm{c} = \{c_x ; c_y ; c_z\}$, то

$$\mathrm{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} , \qquad (1.8)$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**.

$$V = |\mathrm{abc}| . \qquad (1.9)$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется скалярным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
2. Какие свойства скалярного произведения совпадают, а какие отличаются от произведения чисел?
3. Каков геометрический смысл скалярного произведения?
4. Каков физический смысл скалярного произведения?
5. Выведите формулы для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.
6. Что называется векторным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
7. Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?

9. Какому условию должны удовлетворять координаты трех векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?

5. ***Общее уравнение плоскости*** *П* имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (1.10)$$

Коэффициенты *A*, *B*, *C* являются координатами вектора $\mathbf{n}(A;B;C)$, перпендикулярного к плоскости. Он называется нормальным вектором этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость *П* проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\mathbf{n}(A;B;C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1.11)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.12)$$

Угол между двумя плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

имеющими нормальные векторы $\mathrm{n}_1\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\mathrm{n}_2\{A_2;B_2;C_2\}$, определяется как угол между векторами, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, косинус этого угла находится по формуле (4).

6. ***Параметрические уравнения прямой линии***. Прямая линия определяется однозначно заданием некоторой фиксированной точки и вектора, коллинеарного данной прямой и называемого направляющим. Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(a_x;a_y;a_z)$, а $M(x;y;z)$ – любая точка этой прямой, тогда параметрические уравнения прямой в пространстве имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x=x_0+ta_x, \\ y=y_0+ta_y, \\ z=z_0+ta_z. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Канонические уравнения прямой линии. Разрешая уравнения (1.13) относительно параметра *t* и приравнивая отношения, приходим к каноническим уравнениям прямой

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}. \qquad (1.14)$$

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{1.15}$$

7. ***Угол между прямой и плоскостью***. Углом между прямой и плоскостью называется угол, образованный данной прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\cos(\mathrm{n}\,\hat{,}\,\mathrm{a}) = \sin\varphi = \frac{\mathrm{n}\cdot\mathrm{a}}{|\mathrm{n}||\mathrm{a}|} = \frac{Aa_x + Ba_y + Ca_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{1.16}$$

8. ***Полярная система координат.***

1) Построение точек в полярной системе координат. Положение точек в полярной системе координат определяется углом $\varphi\ (0 \le \varphi \le 2\pi)$ и полярным радиусом $r\ (0 \le r \le \infty)$. При построении точек в полярной системе координат надо сначала построить луч под углом φ к полярной оси, затем на луче отложить полярный радиус r.

2) Построение линий в полярной системе координат. Линия $r = f(\varphi)$ в полярной системе координат строится по точкам с учетом свойств функции $f(\varphi)$ и условия $r \ge 0$.

3) Переход от одной системы координат к другой. Если совместить прямоугольную и полярную систему координат таким образом, что полюс O совпадает с началом прямоугольных координат, а полярная ось – с осью Ox, то формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.17}$$

Формулы перехода от прямоугольной системы координат к полярной системе

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Вопросы для самопроверки

1. Выведите формулы деления отрезка в данном отношении.

2. Центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан. Выведите формулы, выражающие координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.

3. Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.

4. Как определяются в аналитической геометрии линии, поверхности, и другие множества точек?

5. Как можно найти точку пересечения двух линий, трех поверхностей, линии и поверхности?

6. Какова характерная особенность уравнения цилиндрической поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей?

7. Опишите параметрический способ задания линий и поверхностей.

8. Какие поверхности и линии называются алгебраическими?

9. Что называется порядком алгебраической линии и алгебраической поверхности?

10. Что называется направляющим вектором прямой и направляющими векторами плоскости?

11. Как записываются параметрические уравнения прямой и плоскости?

12. Какие уравнения соответствуют плоскости в пространстве в координатной и векторной форме?

13. Какое уравнение плоскости называется уравнением в отрезках?

14. Что называется угловым коэффициентом прямой линии на плоскости, и каков его геометрический смысл в декартовой прямоугольной системе координат?

15. Как записываются уравнения прямой, проходящей через две точки, в пространстве и на плоскости?

16. Какое уравнение плоскости называется нормальным?

17. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки?

18. Как построить плоскость по ее уравнению?

19. Как вычисляются углы между двумя прямыми (на плоскости и в пространстве), между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой?

20. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (на плоскости и в пространстве), двух плоскостей, прямой и плоскости?

21. Как найти расстояние от точки до плоскости?

Пример 1. По координатам вершин пирамиды $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$ найти:

1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

▲ 1) Находим векторы $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_3}$:

$$\mathrm{A_1A_2} = (-1-3)\,\mathrm{i} + (6-1)\,\mathrm{j} + (1-4)\,\mathrm{k} = -4\,\mathrm{i} + 5\,\mathrm{j} - 3\,\mathrm{k}\,;$$

$$\mathrm{A_1A_3} = (-1-3)\mathrm{i} + (-1-1)\,\mathrm{j} + (6-4)\,\mathrm{k} = -4\mathrm{i} + 2\mathrm{k}\,.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_3}$, таковы:

$$\left|\mathrm{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2} = 5\sqrt{2}\,;\ \left|\mathrm{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2+0^2+2^2} = 2\sqrt{5}\,.$$

2) Скалярное произведение векторов $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_3}$ находим по формуле (1.2)

$$\mathrm{A_1A_2}\cdot\mathrm{A_1A_3} = (-4)\cdot(-4) + 5\cdot 0 + (-3)\cdot 2 = 10\,,$$

а косинус угла между ними – по формуле (1.4):

$$\cos(\mathrm{A_1A_2}\,\hat{,}\,\mathrm{A_1A_3}) = \frac{\mathrm{A_1A_2}\cdot\mathrm{A_1A_3}}{\left|\mathrm{A_1A_2}\right|\left|\mathrm{A_1A_3}\right|} = \frac{10}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.32\,.$$

Отсюда следует, что $(\mathbf{A_1A_2}\,\hat{,}\,\mathbf{A_1A_3})$ – острый угол, равный $\arccos(0.32) = 1.25$ рад с точностью до 0.01.

Это и есть искомый угол между ребрами $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_3}$.

3) Площадь S грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_3}$, т.е. половине модуля векторного произведения этих векторов (см. формулу (1.6) или (1.7)):

$$\mathrm{A_1A_2}\times\mathrm{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\mathrm{i} + 20\,\mathrm{j} + 20\mathrm{k}\,.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке.

Следовательно, $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{A_1A_2}\times\mathbf{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+20^2+20^2} = 15\,.$

4) Объем V пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}, \mathbf{A_1A_4}$. Вектор $\mathbf{A_1A_4} = \{-3; 3; -5\}$.

Используя формулу (1.9), получаем

$$V = \frac{1}{6}\left|\mathrm{A_1A_2A_1A_3A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-70\right| = \frac{35}{3}.\ ▼$$

Пример 2. Найти угол между плоскостью Π_1, проходящей через точки $A_1(2;-4;1), A_2(-1;2;0), A_3(0;-2;3)$, и плоскостью Π_2, заданной уравнением $5x+2y-3z+12=0$.

▲ Уравнение плоскости Π_1 находим по формуле (1.12):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -1-2 & 2+4 & 0-1 \\ 0-2 & -2+4 & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$, т.е. $7(x-2)+4(y+4)+3(z-1)=0,\ 7x+4y+3z=1$.

По уравнениям плоскостей определяем их нормальные векторы: $\mathbf{n}_1 = 7\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = 5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Угол φ между плоскостями Π_1 и Π_2 находим по формуле (1.4)

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{n}_1 \cdot \mathrm{n}_2}{|\mathrm{n}_1||\mathrm{n}_2|} = \frac{7\cdot 5+4\cdot 2+3(-3)}{\sqrt{7^2+4^2+3^2}\sqrt{5^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{34}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{38}} \approx 0.64,$$

откуда $\varphi = \arccos(0.64) \approx 0.87$ рад. ▼

Пример 3. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $A_1(4;-3;1)$ и $A_2(5;-3;0)$.

▲ Используя формулу (1.15), получаем

$$\frac{x-4}{5-4} = \frac{y-(-3)}{-3-(-3)} = \frac{z-1}{0-1}, \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{-1}.$$

Равенство нулю знаменателя второй дроби означает, что прямая линия принадлежит плоскости $y=-3$. ▼

Пример 4. Найти угол φ между прямой линией, проходящей через точки $A(5;1;-4)$, $B(6;1;-3)$ и плоскостью $2x-2y+z-3=0$.

▲ В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\mathrm{a} = \mathrm{AB} = \{1;0;1\}$.

Так как нормальный вектор данной плоскости $\mathbf{n} = \{2;-2;1\}$, то по формуле (1.16) $\sin\varphi = \frac{2\cdot 1+(-2)\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. ▼

Пример 5. Построить линию $r = 2(1+\cos\varphi)$.

▲ 1) Найдем область расположения линии из условия $r \ge 0$:

$$r \ge 0 \Rightarrow 1+\cos\varphi \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi < 2\pi.$$

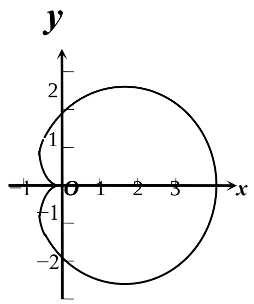


Рис. 1. График линии $r = 2(1+\cos\varphi)$.

2) Составим таблицу

φ	0	$\pm\frac{\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{3\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{8}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{7\pi}{8}$	$\pm\pi$
r	4.	3.8	3.4	2.8	2.0	1.2	0.6	0.2	0

	0								

3) Из таблицы $r_{max}=4$ при значении $\varphi=0$; $r_{min}=0$ при значении $\varphi=\pm\pi$.

4) Делаем чертеж, опираясь на таблицу (см. рис. 1). ▼

Пример 6. Дано уравнение линии $r^2=a^2\sin 2\varphi$. Найти ее уравнение в декартовой системе координат.

▲ Воспользуемся формулой $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и подставим ее в уравнение линии $r^2=2a^2\sin\varphi\cos\varphi$. Теперь применив формулу (1.18), получим

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2a^2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ x^2+y^2=\frac{2a^2xy}{x^2+y^2}.$$

Окончательно имеем $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$. ▼

Контрольная работа 2 по теме «Элементы линейной алгебры»

Литература

[1], гл. IV; [3], гл. IIV; [4], гл. 10; [5], гл. IV; [6], 1; [9], [10].

Основные теоретические сведения

1. ***Матрицей*** $A=(a_{ij})$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов a_{ij} $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ некоторого множества. Записывается матрица в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца. На пересечении i-ой строки и j-го находится этот элемент в матрице. Если у матрицы m строк и n столбцов, то, по определению, она имеет размерность $m\times n$. Матрицы A и B называются ***равными***, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Матрица размера $n\times n$ называется ***квадратной матрицей*** n-го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ*** матрицы. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется ***определителем матрицы*** и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Матрица E с элементами $a_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\ne j \end{cases}$ называется ***единичной матрицей*** n-го порядка.

Основные операции над матрицами: сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Произведением матрицы $A=(a_{ik})$ ***размера*** $m\times l$ ***на матрицу*** $B=(b_{kj})$ ***размера*** $l\times n$ называется матрица $C=A\cdot B=(c_{ij})$ размера $m\times n$ с элементами

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} \qquad (2.1)$$

(поэлементное умножение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B).

Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. Схематически правило для вычисления элементов в произведении двух матриц можно изобразить так:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \otimes & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами, и каковы их свойства?
2. Как сложить две матрицы и всегда ли это можно сделать?
3. Как умножить матрицу на число?
4. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
6. Что называется определителем (детерминантом) второго и третьего порядков, каковы их свойства?
7. Каковы способы вычисления определителей?
8. Что называется произведением двух матриц? Каковы свойства произведения матриц?
9. Как умножить матрицу на матрицу? Всегда ли это выполнимо?
10. Какая матрица называется единичной, квадратной и транспонированной?

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной матрицы A $(|A| \neq 0)$, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (2.2)$$

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, нужно выполнить следующие операции:

1) найти определитель матрицы A ($|A|$);

2) составить матрицу из алгебраических дополнений к элементам данной матрицы;

3) транспонировать матрицу из алгебраических дополнений и получить ***присоединенную*** (***союзную***) матрицу A^*;

4) записать

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*. \qquad (2.3)$$

Транспонированной матрицей (A^T) называется матрица, полученная из данной матрицы A заменой ее строк столбцами с теми же номерами.

Под ***элементарными преобразованиями матрицы*** понимаются следующие операции:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате элементарных преобразований, называются ***эквивалентными***: $A \sim A_1$.

Рангом матрицы *A* называется такое число *r*, что среди миноров *r*-го порядка матрицы *A* имеется хоть один, не равный нулю, а все миноры (*r* + 1)-го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

2. *Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными* x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{2.4}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется ***определителем системы***. Если Δ≠0, то единственное решение системы (2.4) выражается формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{2.5}$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 или 3-го столбца соответственно свободными членами b_1, b_2, b_3.

Систему можно записать в матричной форме: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид

$$\mathrm{X} = A^{-1} \cdot \mathrm{B}, \tag{2.6}$$

если определитель системы отличен от нуля.

Исследование и решение линейных систем

можно проводить по следующей схеме.

1. Составить матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ из коэффициентов данной линейной системы m уравнений с n неизвестными.

2. Найти ранг r матрицы A данной системы и ранг $\tilde{r}$ расширенной матрицы $\tilde{A}$.

3. Сравнить ранги указанных матриц и сделать выводы;

а) если $r \neq \tilde{r}$, то система несовместна (не имеет решений);

б) если $r = \tilde{r}$, то система совместна (имеет решения).

4. В случае $r = \tilde{r}$ выделить базисный минор и базисные неизвестные, данную систему заменить равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые входят элементы базисного минора.

5. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных данной системы, то система имеет единственное решение; это решение можно найти по формулам Крамера.

6. В случае $r < n$ из полученной системы, равносильной исходной системе, находим выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, находим бесконечное множество решений полученной и исходной линейных систем.

3. Число λ называется ***собственным числом*** (***значением***) квадратной матрицы A, если существует ненулевой столбец **X** такой, что $A\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$.

Если λ – собственное число матрицы A, то всякий столбец **X**, удовлетворяющий условиям $A\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$, называется ***собственным столбцом*** (***вектором***) матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

При условии, что вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, получаем ***характеристическое уравнение*** для определения собственных значений λ

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{2.7}$$

Координаты собственного вектора $\mathbf{x}_i$, соответствующие собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?

2. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными, а какие несовместными?

3. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

4. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

5. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

6. Что можно сказать о системе линейных уравнений, если ее определитель равен нулю?

7. При каком условии однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

8. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.

9. Какие разновидности метода Гаусса вы знаете?

10. Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, используя метод Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?

11. Какие неизвестные в системе линейных уравнений, и в каком случае называют свободными, а какие базисными?

12. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?

13. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

14. Запишите систему линейных уравнений с помощью матриц.

15. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

4. Выражение вида $x+iy$ называется ***комплексным числом*** (***в алгебраической форме***). Здесь $i^2=-1,\ x=\operatorname{Re} z$ – действительная (вещественная) часть, а $y=\operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа. Комплексные числа изображаются точками на комплексной плоскости. Точки, соответствующие действительным числам $z=x$, расположены на оси Ox, которая называется ***действительной осью комплексной плоскости***, а точки, соответствующие мнимым числам $z=iy$, – на оси Oy, которую называют ***мнимой осью комплексной плоскости***.

Число $r=|\mathbf{OM}|=|z|$ называется ***модулем комплексного числа*** $z=x+iy$. Угол φ, образованный вектором $\mathbf{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется ***аргументом комплексного числа*** и обозначается
$\varphi=\operatorname{Arg} z$.

Очевидно, что для всякого комплексного числа $z=x+iy$ справедливы формулы

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где ***главное значение аргумента*** $\arg z$ $(\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k\in \mathrm{Z})$ удовлетворяет следующим условиям: $-\pi<\arg z\le\pi$ или $0\le\arg z<2\pi$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в ***тригонометрической форме***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.10}$$

или в ***показательной форме***

$$z = re^{i\varphi} \tag{2.11}$$

(так как по формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$). Формулы (2.10) и (2.11) целесообразно применять при умножении комплексных чисел, а также при возведении их в степень.

Для извлечения корня n-й степени ($n \in \mathbf{N}$) из комплексного числа в тригонометрической форме (2.10) используется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.12}$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень из модуля z, а $0 \le k \le n-1$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие интерпретации комплексных чисел вы знаете? Опишите их.
3. Что называется действительной и мнимой частями комплексного числа?
4. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
5. Что называется алгебраической и тригонометрической формами записи комплексного числа?
6. В каком случае два комплексных числа называются сопряженными?
7. По каким правилам производятся арифметические действия над комплексными числами?
8. Запишите формулу Муавра.

Пример 1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

▲ Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому определено произведение $A \cdot B$.

Умножая матрицы, целесообразно расположить их удобным способом. Для этого может употребляться, например, схема Фалька. Расположим умножаемые матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и произведение матриц $A \cdot B = C = (c_{ij})$ таким образом, чтобы элемент c_{ij} матрицы-произведения C лежал на пересечении i-й строки A и j-го столбца B (схема 1).

Решение представлено на схеме 2. В схеме 2 угловыми скобками выделено вычисление элемента c_{22} (сам элемент выделен фигурными скобками):

$$
\begin{array}{rc}
 & B\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \bullet & \circ \\ \bullet & \circ \\ \bullet & \circ \end{vmatrix} \\
A\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \bullet & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} C = A\cdot B;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{vmatrix} 2 & \langle -1 \rangle & -1 \\ 3 & \langle -5 \rangle & 4 \\ 1 & \langle 2 \rangle & 1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \langle 8 \rangle & \langle -7 \rangle & \langle -6 \rangle \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 & -11 \\ -11 & \{15\} & -48 \\ 8 & -13 & 24 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

Схема 1 *Схема 2*

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 8\cdot(-1) + (-7)\cdot(-5) + (-6)\cdot 2 = 15\,. \ \blacktriangledown$$

Пример 2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + \ x_2 + 3x_3 = \ 4. \end{cases}$$

▲ Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -26$$

(-3) (-1)

Так как $\Delta \neq 0$, решение системы может быть найдено по формулам Крамера (2.5). Для этого найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}^{(2)} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}^{(-1)} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}_{(-2)} = \begin{vmatrix} 0 & -13 & -9 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}_{(-1)} = \begin{vmatrix} 0 & -13 & -9 \\ 0 & 13 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -13 & -9 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = 130,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 17\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}_{(-2)}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -13\\ 1 & -2 & 17\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}_{(-1)}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -13\\ 0 & -3 & 13\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -13\\ -3 & 13\end{vmatrix}=-52.$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы (2.5), получаем искомое решение: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=3,\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-5,\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=2$. ▲

Пример 3. Найти решение системы примера 3 средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

▲ Здесь $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}$. Так как определитель матрицы системы $\Delta=|A|=-26$ отличен от нуля (см. пример 2), то матрица A имеет обратную матрицу. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений A_{ij} и присоединенную матрицу A^*

$$\begin{pmatrix}-8 & -1 & 3\\ -6 & 9 & -1\\ -4 & -7 & -5\end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (2.3), матрица A^{-1}, обратная к A, имеет вид

$$A^{-1}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1}, исходя из определения обратной матрицы (2.2) и используя схему Фалька:

$$
\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
 & & & & 2 & 1 & -3 & \\
 & & & A & 1 & -2 & 2 & \\
 & & & & 1 & 1 & 3 & \\
\hline
 & -8 & -6 & -4 & -26 & 0 & 0 & \\
A^* & -1 & 9 & -7 & 0 & -26 & 0 & A^*A \\
 & 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & -26 &
\end{array}
$$

Схема 3

$$A^{-1}A = -\frac{1}{26}A^*A = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

Матричное решение данной системы в силу формулы (2.6) и равенства $A^{-1}B = -\dfrac{1}{26}A^*B$ имеет вид $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$$
\begin{array}{r|rrr|r|l}
 & & & \text{B} & -5 & \\
 & & & & 17 & \\
 & & & & 4 & \\
\hline
 & -8 & -6 & -4 & -78 & \\
A^* & -1 & 9 & -7 & 130 & A^*\,\text{B}; \\
 & 3 & -1 & -5 & -52 &
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Схема 4

Откуда следует (из условия равенства двух матриц), что

$$x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = 2\,.\ ▼$$

Пример 4. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Характеристическое уравнение (2.7) для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\text{, или } \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Его корнем, как легко проверить, будет $\lambda_1 = -2$. Разделим левую часть этого уравнения на двучлен $\lambda + 2$. Квадратное уравнение для определения остальных двух корней будет $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$. Таким образом, матрица A имеет три собственных значения $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$.

Собственный вектор $\mathbf{x}_1$, соответствующий $\lambda_1 = -2$, определяется из системы уравнений вида (2.8)

$$\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5+2)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1+2)x_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ меньше числа неизвестных. Найдем ранг матрицы A, для чего преобразуем ее к более простому виду:

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(-3)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A| = 0$ (две одинаковые строки в определителе матрицы A) и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, ранг этой матрицы равен двум $(r = 2)$ и данная система имеет нетривиальное решение. В матрице A минор $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Этому базисному минору соответствует система первых двух уравнений, которую можно написать так: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -3x_3, \\ x_1 + 7x_2 = -x_3, \end{cases}$ где x_1, x_2 – базисные неизвестные; x_3 – свободная неизвестная. Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3x_3 & 1 \\ -x_3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = -x_3,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = 0.$$

Итак, система имеет решение $x_1 = -x_3,\ x_2 = 0$. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольные значения $x_3 = t$, получаем решения исходной системы в виде $x_1 = t,\ x_2 = 0,\ x_3 = t$. Следовательно, первый собственный вектор

$$X_1 = (-t; 0; t) = t(-1; 0; 1)^T .$$

Второй собственный вектор $\mathbf{X}_2$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$, определяется из системы уравнений вида (2.8):

$$\begin{cases} (1-3)x_1 + & x_2 + & 3x_3 = 0, \\ x_1 + & (5-3)x_2 + & x_3 = 0, \\ 3x_1 + & x_2 + & (1-3)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система сводится к системе $\begin{cases} -2x_1 + \ x_2 = -3x_3, \\ x_1 + 2x_2 = \ -x_3 \end{cases}$, решение которой $x_1 = x_3,\ x_2 = -x_3$. Полагая $x_3 = t$, запишем ее решение в виде $x_1 = t,\ x_2 = -t$. Следовательно, второй собственный вектор есть $\mathbf{X}_2 = (t; -t; t) = t(1; -1; 1)^T$.

Третий собственный вектор $\mathbf{X}_3$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 6$, определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + & x_2 + & 3x_3 = 0, \\ x_1 + & (5-8)x_2 + & x_3 = 0, \\ 3x_1 + & x_2 + & (1-6)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений сводится к системе $\begin{cases} -5x_1 + \ \ x_2 = -3x_3, \\ x_1 - \ \ x_2 = \ -x_3 \end{cases}$, решение которой $x_1 = x_3,\ x_2 = 2x_3$. Полагая $x_3 = t$, запишем ее решение в виде $x_1 = t,\ x_2 = 2t$. Следовательно, третий собственный вектор есть

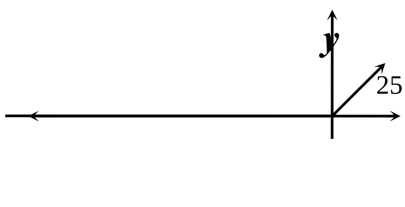
$$X_3 = (t; 2t; t)^T = t(1; 2; 1)^T . \ \blacktriangledown$$

Пример 5. Изобразить на комплексной плоскости числа: 1) $z_1 = -8$, 2) $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Записать число z_1 в тригонометрической форме, а число z_2 – в алгебраической форме.

▲ 1) Для числа z_1 имеем $x_1 = \operatorname{Re} z_1 = -8,\ y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 0$. Откладывая по оси Ox $x_1 = -8$, а по оси Oy $y = 0$, получаем точку комплексной плоскости, соответствующую числу z_1.

Модуль этого числа находим по формуле (2.9): $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$.

Аргумент определяем из равенства $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{0}{-8} = 0$. Так как число z_1 находится в левой полуплоскости $(x_1 < 0,\ y_1 = 0)$, его аргумент $\varphi_1 = \pi$. Тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид $z_1 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.



z_2

z_1

O ***x***

Рис. 2

2) Модуль числа z_2 равен $r_2 = 2$, а аргумент $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. Для его изображения на комплексной плоскости проводим из полюса луч под углом $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ к полярной оси и откладываем на нем отрезок длиной $r_2 = 2$. Полученная точка соответствует числу z_2. Его действительная часть $\operatorname{Re} z_2 = x_2 = r_2 \cos\varphi_2 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, а мнимая часть $\operatorname{Im} z_2 = y_2 = r_2 \sin\varphi_2 = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Таким образом, алгебраическая форма числа z_2 имеет вид $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. ▼

Пример 6. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2i}$.

▲ Найдем модуль и аргумент данного числа (формулы (2.9)):

$$r = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}\,;\ x = \operatorname{Re}(-2+2i) = -2\,;\ y = \operatorname{Im}(-2+2i) = 2\,;$$

(так как $x < 0,\ y > 0$, число $-2+2i$ находится во второй четверти комплексной плоскости)

$$\cos\varphi = \tfrac{-2}{\sqrt{8}} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\varphi = \tfrac{2}{\sqrt{8}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2};\ \varphi = \arg(-2+2i) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

По формуле (2.12)

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),\ 0 \le k \le 2,$$

откуда

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 1 + i\,;$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{11\pi}{12} + i\sin\tfrac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos + i\sin\tfrac{\pi}{12} + i\sin + i\sin\tfrac{\pi}{12}\right) \approx -1.366 + 0.116i\,.$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos + i\sin\tfrac{19\pi}{12} + i\sin\tfrac{19\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(-\sin\tfrac{\pi}{12} - i\cos\tfrac{\pi}{12}\right) \approx -0.116 - 1.366i\,.$$

Контрольная работа 3 по теме «Дифференциальное исчисление»

Литература

[1], гл. VII–X; [2], т. 1, гл. 1, 2, 7, п. 1–5; [3], гл. II, гл. III, п. 1–4; [4], гл. 1–5; [5], ч. 1 гл. 5, 6; [6], 5, 6; [8]; [11].

Основные теоретические сведения

1. Если даны числовые множества $\mathrm{X} = \{x\}, \mathrm{Y} = \{y\}$, и по некоторому закону f каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in \mathbf{Y}$, то говорят, что на множестве **X** задана ***функция*** $y = f(x)$, x называют ***аргументом*** функции, y – ее ***значением***.

Через $f(a)$ или $y(a)$ обозначается то значение y, которое соответствует значению $x = a$.

Множество **X** называется ***областью определения функции***, множество **Y** – ***областью изменения функции***.

К ***основным элементарным функциям*** относятся: степенная функция $y = x^n$; показательная функция $y = a^x$; логарифмическая функция $y = \log_a x$; тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \mathrm{tg}\, x, y = \mathrm{ctg}\, x$; обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \mathrm{arctg} x, y = \mathrm{acrctg} x$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости, координаты x и y которых связаны соотношением $y = f(x)$, x принадлежит области определения данной функции.

2. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in \mathbf{X}$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$, который обозначается также $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, или $f(a-0)$, то он называется ***пределом слева функции*** $f(x)$ в точке a.

Аналогично, если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, в другой записи $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, или $f(a+0)$, то он называется ***пределом справа функции*** $f(x)$ в точке a. Пределы слева и справа называются ***односторонними.***

Функция $f(x)$ $(F(x))$ называется ***бесконечно малой*** (***бесконечно большой***) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to a} F(x) = \infty\right)$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ находят предел их отношения.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются ***эквивалентными*** (***равносильными***).

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Например, при $x \to a$ $\sin ax \sim ax$, $\operatorname{tg} ax \sim ax$, $\ln(1+ax) \sim ax$, $e^{ax} - 1 \sim ax$.

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций при $x \to a$ не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}, \tag{3.1}$$

где $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения: а) последовательности; б) ограниченной и неограниченной последовательности; в) предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.

2. Какая последовательность называется: а) сходящейся; б) расходящейся?

3. Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной последовательности, если:

а) из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования?

б) к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования?

в) в ней изменить произвольным образом конечное число членов?

4. Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.

5. Что называется числовой осью? Как изображаются на числовой оси области изменения переменной величины?

6. Дайте определение функции. Что называется областью определения функции?

7. Каковы основные способы задания функции?

8. Какая функция называется периодической?

9. Какая функция называется сложной?

10. Какие функции называются элементарными?

11. Как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций $y = f(ax),\ y = f(ax+b),\ y = k f(ax+b) + c$?

12. Сформулируйте определение предела функции в точке.

13. Дана функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Определена ли функция $f(x)$ в точке $x = 0$? Существует ли $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

14. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?

15. Существует ли $f(3+0)$ и $f(3-0)$, если $f(x)=\frac{|3-x|}{3-x}$? Существует ли $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

16. При каких условиях из существования односторонних пределов следует существование предела функции.

17. Какая функция называется бесконечно малой, и каковы ее основные свойства?

18. Сформулируйте определение и приведите примеры бесконечно малой функции $\alpha(x)$:

а) одного порядка с функцией $\beta(x)$ в точке a;

б) эквивалентной функции $\beta(x)$ в точке a;

в) более высокого порядка при $x\to a$, чем $\beta(x)$.

Что означает символическая запись $\alpha=o(\beta), \alpha=O(\beta)$ при $x\to a$?

19. Какая функция называется бесконечно большой и какова её связь с бесконечно малой?

20. Докажите основные теоремы о пределах функций.

21. Что означает такая краткая запись

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0, \left|x-x_0\right|<\delta, \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon\,?$$

22. В чем состоит геометрический смысл предела функции?

23. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительно другой бесконечно малой.

24. Покажите, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin x, \arcsin x, \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ попарно эквивалентны.

25. Пусть $x\to 0$. При каком значении a бесконечно малые величины $a\sin^2 x$ и $1-\cos x$ эквивалентны?

26. Перечислите известные вам эквивалентные бм величины.

27. Какие свойства эквивалентных бм величин используются при отыскании пределов?

3. Предел элементарной функции в точке ее определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\infty-\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших функций;

4) использование двух замечательных пределов

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}. \qquad (3.2)$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=0,\ \text{ если }\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty;\ \lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=\infty,\ \text{ если }\ \lim_{x\to a}f(x)=0;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ \text{ если }\ \lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,\ \text{ если }\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=0.$$

4. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x=x_0$, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{3.3}$$

Если положить $x=x_0+\Delta x$, то условие непрерывности (3.3) будет равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0$, т.е. функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Приращением функции $y=f(x)$ ***называется разность***

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$

где Δx – ***приращение аргумента***.

Для того чтобы функция $y=f(x)$ была непрерывна в точке $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:

1) существовал предел слева $f(x_0-0)$ и предел справа $f(x_0+0)$;
2) пределы слева и справа были равны друг другу

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=C;$$

3) выполнялось условие $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то функция называется разрывной в точке.

1) Точка $x=x_0$, называется ***точкой разрыва первого рода***, если оба односторонних предела конечны, но $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ (нарушено условие 2).

2) Точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва второго рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности (нарушено условие 1).

3) Точка $x = x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва***, если $f(x_0) \neq C$ (нарушено условие 3).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения:
   а) непрерывности функции в точке;
   б) непрерывности функции справа (слева) в точке.
2. Сформулируйте определение непрерывности: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
3. Аналогично другое определение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.
5. Какие точки называются точками разрыва функции?
6. Какого типа разрывы существуют и с чем они связаны?
7. Какие операции надо вспомнить, чтобы исследовать точку разрыва?
8. Какие операции, и в какой последовательности надо вспомнить, чтобы, исследуя точку разрыва, построить график функции?
9. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
10. Сформулируйте основные свойства функций, непрерывных на отрезке, и дайте геометрическое истолкование этим свойствам.
11. Для каких функций область непрерывности совпадает с областью определения функции?

5. Предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется ***производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x и обозначается одним из следующих символов: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.4}$$

Если указанный в формуле (3.4) предел существует, то функцию $f(x)$ называют ***дифференцируемой в точке*** x, а операцию нахождения производной y' − ***дифференцированием.***

Геометрически величина производной $f'(x_0)$ представляет ***тангенс угла*** α ***наклона касательной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$ ***, к графику функции*** $y = f(x)$**.**

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{3.5}$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ \left(f'(x_0)\neq 0\right). \qquad (3.6)$$

Производная обратной функции.

Теорема 1. *Если функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$ и имеет производную в точке y_0, причем*

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (3.7)$$

Физическая интерпретация формулы (3.7): производная $\left(f^{-1}(y_0)\right)'$ есть скорость изменения переменной *x* по отношению к изменению переменной *y*, а $f'(x_0)$ − скорость изменения переменной *y* по отношению к изменению переменной *x*. Ясно, что эти величины являются взаимно обратными.

Производная сложной функции.

Теорема 2. *Если функция $u=u(x)$ имеет в точке x_0 производную $u'(x_0)$, а функция $y=f(u)$ имеет в точке $u_0=u(x_0)$ производную $f'(u_0)$, то сложная функция $y=f(u(x))\equiv f(x)$ имеет производную в точке x_0, причем*

$$f'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0). \qquad (3.8)$$

Физическая интерпретация формулы (3.8): производная $u'(x_0)$ есть скорость изменения переменной *u* по отношению к изменению переменной *x*, а производная $f'(u_0)$ − скорость изменения переменной *y* по отношению к изменению переменной *u*. Ясно, что скорость $f'(x_0)$ изменения переменной *y* по отношению к переменной *x* равна произведению скоростей $f'(u_0)$ и $u'(x_0)$. (Если *u* движется быстрее *x* в *k* раз, а *y* − быстрее *u* в *l* раз, то *y* движется быстрее *x* в *kl* раз.)

Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции

$$x=x(t),\ y=y(t) \qquad (3.9)$$

определены на некотором промежутке изменения переменной *t*, которую назовем ***параметром***. Пусть функция $x=x(t)$ является строго монотонной на этом промежутке. Тогда существует обратная функция $t=x^{-1}(x)$, подставляя которую в уравнение $y-y(t)$ получим $y=y(x^{-1}(x))=f(x)$.

Таким образом, переменная *y* является сложной функцией переменной *x*. Задание функции $y=f(x)$ с помощью уравнений (3.9) называется ***параметрическим***.

Уравнения (3.9) можно интерпретировать как зависимость координат точки, движущейся на плоскости (x; y), от времени t. При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию точки.

Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные $x'(t) \neq 0$ и $y'(t)$, то функция $y = f(x)$ также имеет производную, причем

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{3.10}$$

Заметим, что существование производной $x'(t)$ определенного знака является достаточным условием строгой монотонности функции $x = x(t)$ и, следовательно, существования функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

6. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{3.11}$$

где A − некоторое число, а α − функция аргумента Δx, бесконечно малая и непрерывная в точке $\Delta x = 0$ (т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) = 0$).

Теорема 3. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$.*

Отметим, что при этом $A = f(x_0)$.

Дифференциалом (или ***первым дифференциалом***) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента Δx: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то дифференциал является ***главной*** (***линейной*** относительно Δx) частью приращения функции в точке x_0.

Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$dy = f'(x_0)dx, \tag{3.12}$$

откуда

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

т.е. *производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной*.

Геометрический и физический смысл дифференциала. Геометрический смысл дифференциала нетрудно уяснить из рисунка 3, на котором изображены график функции $y = f(x)$ (жирная линия) и касательная MP к графику в точке $M(x_0; f(x_0))$.

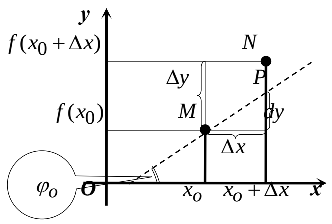


Рис. 3

Дифференциал dy равен приращению линейной функции, графиком которой является касательная *MP*.

Если x – время, а $y = f(x)$ – координата точки на прямой линии в момент x, то дифференциал $dy = f'(x_0)\Delta x$ равен тому изменению координаты, которое получила бы точка за время Δx, если бы скорость точки на отрезке времени $[x_0; x_0 + \Delta x]$ была постоянной и равной $f'(x_0)$.

Использование дифференциала для приближенных вычислений. Так как $\Delta y \cong dy$ при малых значениях Δx, т.е. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\Delta x$, то

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3.13)$$

Эта формула позволяет находить приближенные значения $f(x_0 + \Delta x)$ при малых значениях Δx, если известны $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. При этом погрешность при замене $f(x_0 + \Delta x)$ правой частью формулы (3.13) тем меньше, чем меньше Δx, и, более того, эта погрешность при значении $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

▲ Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль при значении $x = -2$. Если $x = -2$ – корень многочлена, то этот многочлен делится на двучлен $x + 2$ без остатка. По теореме Безу в этом случае каждый многочлен (в числителе и знаменателе) может быть представлен в виде произведения двучлена $(x + 2)$ на некоторый многочлен. Таким образом, нахождение предела сводится, прежде всего, к выделению в числителе и знаменателе множителя $(x + 2)$, незримое присутствие которого и создает неопределенность $\frac{0}{0}$. Практически это достигается каким-либо способом разложения числителя и знаменателя на множители, например, делением «уголком».

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 2x & \underline{x+2} \\ -\;\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 + x \\ x^2 + 2x & \\ -\;\underline{x^2 + 2x} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 - \;\; x - 6 & \underline{x+2} \\ -\;\underline{x^2 + \;2x} & x - 3 \\ -3x - 6 & \\ -\;\underline{-3x - 6} & \end{array}$$

Теперь искомый предел можно представить в виде

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+x)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x-3}.$$

Неопределенность исчезла. По теореме о пределе частного находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x-3}=\frac{4-2}{-2-3}=-\frac{2}{5}.\ \blacktriangledown$$

Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при отыскании предела отношения многочленов $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, нужно

1) определить тип неопределенности,

2) если неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то поделить числитель и знаменатель на двучлен $(x-a)$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1-2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

▲ При отыскании пределов от иррациональных функций с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$ используется рассмотренный выше прием, но только после предварительных алгебраических преобразований. Умножим числитель и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)\,(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{4}{3}.\ \blacktriangledown$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{3x^3+x-1}$.

▲ В данном примере теорема о пределе частного (дроби) неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x\to\infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие. Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на величину x^3, т.е. на старшую степень переменной x. Пользуясь свойствами пределов, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3+x^2+5}{x^3}}{\frac{3x^3+x-1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}$.

Слагаемое $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ – величина бесконечно малая. А потому $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ – величины бесконечно малые и пределы этих величин равны нулю, когда переменная $x \to \infty$. После деления числителя и знаменателя на величину x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе частного, так как теперь и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю. ▼

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Если предел отношения двух алгебраических функций при $x \to \infty$ дает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то нужно числитель и знаменатель поделить на старшую степень x встречающуюся в этой функции.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\infty - \infty$, необходимо с помощью алгебраических действий (приведение к общему знаменателю, освобождение от иррациональности) свести ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\left(0 \cdot \infty \Rightarrow 0 \cdot \tfrac{1}{0} = \tfrac{0}{0},\ 0 \cdot \infty \Rightarrow \tfrac{1}{\infty} \cdot \infty = \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

▲ На основании первой из формул (3.2) получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} =$$

$$= \left\{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1\right\} = \frac{5}{7}. \ ▼$$

Пределы тригонометрических функций

Пределы тригонометрических функций находятся с помощью первого замечательного предела $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, алгебраических и тригонометрических преобразований.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$.

$$▲ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin 2x} = \left\{1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}\right\} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin 2x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=3\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}.\ \blacktriangledown$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\left\{\frac{0}{0}\right.$, обозначим $\arcsin 3x=y$, тогда $3x=\sin y$ и $y\to 0$

при $\left.x\to 0\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{3y}{2\sin y}=\frac{3}{2}$. ▼

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную, а из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

▲ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\{0\cdot\infty;$ обозначим $1-x=y$, тогда $y\to 0$ при $x\to 1\}=$

$$=\lim_{y\to 0}y\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}y\right)=\left\{\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}y\right)=\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2}y\right\}=\lim_{y\to 0}\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to 0}y\frac{\frac{\pi}{2}y\cdot\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y\cdot\frac{\pi}{2}y}=\frac{2}{\pi}.\ \blacktriangledown$$

Пределы, **связанные с числом е**. Второй замечательный предел принято писать в одном из ниже указанных видов:

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

Если во втором замечательном пределе непосредственно подставить предел аргумента, то получится неопределенность вида 1^∞; поэтому, если при x

$\to 0$ или $x \to \pm\infty$ функция $f(x)$ дает неопределенность вида 1^{∞}, то предел этой функции связан с числом e.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

$$\blacktriangle\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \left\{1^{\infty};\ \frac{x+1}{x-2} = 1+\frac{x+1}{x-2}-1 = 1+\frac{x+1-x+2}{x-2} = 1+\frac{3}{x-2};\right.$$

таким путем из дроби $\dfrac{x+1}{x-2}$ выделяется бесконечно малая функция

$$\left.\alpha = \frac{3}{x-2} \text{ при } x\to\infty\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}(2x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}(2x-1)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}} = \mathrm{e}^{6}.\ \blacktriangledown$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ для $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены.

2. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, если нужно найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x)$ – любые алгебраические функции.

3. Как раскрыть неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$?

4. Что устанавливает первый замечательный предел?

5. Какими пределами можно заменить число e?

6. Как и когда применяется замена переменных при отыскании пределов от тригонометрических функций и пределов, связанных с числом e?

7. Усвоили ли вы, как быстро, в уме найти $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}$?

Пример 9. Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1 = 3, x_2 = 5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках.

▲ Исследуем точку $x = 3$.

$f(3-0) = \lim\limits_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \{$ вместо переменной x подставляем его предельное значение в символах; $\left.2^{\frac{1}{3-0-3}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}}\right\} = 0$,

$$f(3+0) = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left\{2^{\frac{1}{3+0-3}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{\infty}\right\} = \infty.$$

В точке $x = 3$ предел справа не существует, и функция терпит бесконечный разрыв.

Исследуем точку $x = 5$.

$$f(5-0)=\lim_{x\to 5-0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5-0-3}}\right\}=2^{\frac{1}{2}},$$

$$f(5+0)=\lim_{x\to 5+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5+0-3}}\right\}=2^{\frac{1}{2}},\ \ f(5)=2^{\frac{1}{5-3}}=2^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, $f(5-0)=f(5+0)=f(5)$ – предел слева равен пределу справа и равен значению функции в точке. Следовательно, $f(x)$ непрерывна при $x=5$. ▼

Пример 10. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x^2+1, & \text{если} \ \ 0<x<2, \\ 2x+1, & \text{если} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

▲ Так как функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0),(0;2)$ и $(2;\infty)$ (рис. 4), где она задана непрерывными элементарными функциями, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x=0$ и $x=2$.

Исследуем точку $x=0$.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\{$символ $x\to 0-0$ позволяет выбрать нужное аналитическое выражение $f(x)$ из уравнений, ее определяющих$\}=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-2)=-2$.

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x^2+1)=1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой (нарушено условие 2). Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок $|f(0-0)-f(0+0)|=3$.

Исследуем точку $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^2+1)=4+1=5,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(2x+1)=5, \quad f(2)=(2x+1)\big|_{x=2}=5.$$

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности.

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности. ▼

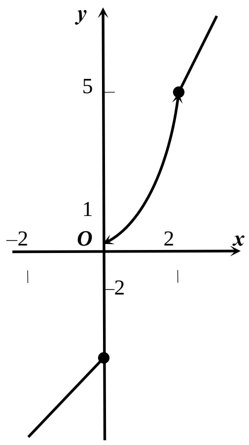


Рис. 4

Пример 11. Найти производную функции $y = \sin(3\operatorname{tg}\ln^3 x)$.

▲ $y' = \cos\left(3\operatorname{tg}\ln^3 x\right)\cdot 3\dfrac{1}{\cos^2 \ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$. ▼

Порядок дифференцирования обратный порядку вычисления значения функции в точке. Вычисление значения функции начинается справа налево, а дифференцирование наоборот – слева направо.

Первой дифференцируется та функция, которая вычислялась бы последней – это самое главное!

Вопросы для самопроверки

1. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0?

2. От какого аргумента зависит разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Какова область определения функции е $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

3. Дайте определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4. Каков физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

5. Каков геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0? Дайте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.

6. Когда говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечную производную? Приведите пример функции, график которой имеет в некоторой точке вертикальную касательную.

7. Что такое односторонние производные функции в точке? Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите пример функции, у которой существуют односторонние производные в некоторой точке, но не существует производная в этой точке.

8. Выведите формулы для производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.

9. Сформулируйте теорему о производной обратной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной обратной функции?

10. Что называется сложной функцией?

11. Как сложную функцию записать в виде цепочки простых функций?

12. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной сложной функции?

13. Запишите правило дифференцирования сложной функции.

14. Каков порядок дифференцирования сложной функции?

15. В чем состоит метод логарифмического дифференцирования?

16. Что такое параметрическое задание функций?

17. Дайте определение дифференцируемости функции в точке.

18. Сформулируйте теорему о связи между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной.

19. Что такое дифференциал функции в данной точке? От какого аргумента он зависит?

20. Для каких точек графика функции ее дифференциал больше приращения? Для каких точек он меньше приращения?

21. Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?

22. Каков геометрический смысл дифференциала?

23. Каков физический смысл дифференциала?

24. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала функции?

25. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

После изучения темы ”Дифференциальное исчисление“ выполните *контрольную работу 3*.

Контрольная работа 4 по теме «Приложения дифференциального исчисления»

Литература

[1], гл. X; [2], т. 1, гл. 4, 5; [3], гл. III, § 5; [4], гл. 6; [5], гл. VI, § 2; [6], 6; [8]; [11].

Основные теоретические сведения

1. Правило Лопиталя. ***Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$) равен пределу отношения их производных***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad (4.1)$$

если предел справа существует.

2. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется ***точкой экстремума*** функции $f(x)$ (соответственно ***точкой максимума*** или ***минимума***).

Необходимое условие экстремума: если x_0 – экстремальная точка функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие экстремума: x_0 является экстремальной точкой функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус – при максимуме, с минуса на плюс – при минимуме.

3. Точка x_0 называется точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 – точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

4. Прямая линия $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;\, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big), \qquad (4.2)$$

При значении $k=0$ имеем ***горизонтальную асимптоту***: $y=b$. Если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty, \tag{4.3}$$

то прямая линия $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой.***

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. ***Элементарное исследование:***

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность;

3) вычислить предельные значения функции в ее граничных точках;

4) выяснить существование асимптот;

5) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика функции с координатными осями, найти интервалы знакопостоянства;

6) сделать эскиз графика функции, используя полученные результаты.

II. ***Исследование графика функции по первой производной:***

1) найти решение уравнений $f'(x)=0$ и $f'(x)=\infty$;

2) точки, «подозрительные» на экстремум, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума;

3) вычислить значения функции в точках экстремума;

4) найти интервалы монотонности функции;

5) нанести на эскиз графика экстремальные точки;

6) уточнить вид графика согласно полученным результатам.

III. ***Исследование графика функции по второй производной:***

1) найти решения уравнений $f''(x)=0$ и $f''(x)=\infty$;

2) точки, «подозрительные» на перегиб, исследовать с помощью достаточного условия;

3) вычислить значения функции в точках перегиба;

4) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

5) нанести на эскиз графика функции точки перегиба;

6) окончательно построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить найденные ошибки.

График функции лучше всего строить в таком порядке:

1) построить все асимптоты, если они есть;

2) нанести на график характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки, в которых есть экстремумы, точки перегиба;

3) построение проводить по интервалам непрерывности с учетом проведенных исследований.

6. При определении наибольших и наименьших значений функции на отрезке необходимо:

1) найти значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;

2) определить критические точки первого рода (к.т.I);

3) вычислить значения функции к.т.I $\left(f(x_i), \text{где } i=1,2,\ldots\right)$;

4) выбрать из величин $f(a), f(b), f(x_i)\,(i=1,2,\ldots)$ наименьшее значение (m) и наибольшее значение (M) функции.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

При исследовании функции на монотонность и экстремумы (по первой производной y') необходимо: 1) найти область определения функции; 2) найти y'; 3) определить к.т.I и пронумеровать их в порядке возрастания; 4) построить таблицу 1.

Таблица 1

x	Интервалы монотонности и к.т.I
y'	Поведение y' на интервалах монотонности и к.т.I
y	Поведение функции на интервалах монотонности и ее значения к.т.I

▲ 1) $-\infty<x<-1; -1<x<\infty$; 2) $y'=-\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$;

3) $y'=0$ при $x_1=-3, x_2=0$; y' не существует при $x=-1$. Критические точки x_1-3 и $x_2=0$, точка $x=-1$ не является критической, так как она является границей области определения функции.

Таблица 1

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\infty)$
y'	–	0	+	∞	–	0	–
y	↘	$y_{\min}=\frac{27}{4}$	↗	∞	↘	не т	↘

Знак y' на интервале монотонности определяем по ее знаку в произвольной точке этого интервала. Условимся в дальнейшем возрастание (убывание) функции на интервале обозначать символами ↗ или ↘.

Исследуемая функция, как следует из таблицы 1, имеет минимум в точке $x=-3;\ y(-3)=\frac{27}{4}$. Точки $x=-1$ и $x=0$ не являются точками экстремума, так как в первой точке функция не определена, а в окрестности второй точки первая производная сохраняет знак. ▼

Пример 2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

При исследовании функции на интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба, необходимо:
1) найти область определения функции;   2) найти y', y'';   3) определить критические точки 2-го рода (к.т. II) и пронумеровать их в порядке возрастания;   4) составить таблицу 2.

Таблица 2

x	Интервалы выпуклости, вогнутости и к.т.II
y''	Поведение y'' на интервалах выпуклости, вогнутости и к.т.II
y	Поведение функции на интервалах выпуклости (вогнутости), значения к.т.II

▲ 1) $-\infty < x < -1; -1 < x < \infty;$ 2) $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, $y'' = -\dfrac{6x}{(x+1)^4}$;

3) $y'' = 0$ при $x = 0$, y'' не существует при $x = -1$; $x = 0$ – единственная критическая точка (к.т.II), $x = -1$ области определения функции не принадлежит.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$+$	∞	$+$	0	$-$
y	$\cup$	не опр.	$\cup$	$y_{\text{т.п.}} = 0$	$\cap$

Знак y'' на интервалах выпуклости и вогнутости определяем по ее знаку в произвольной точке. Точка $(0; 0)$ – точка перегиба. Условимся в дальнейшем выпуклость (вогнутость) графика в таблице обозначать символом $\cup$ или $\cap$. ▼

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

▲ Точка $x = -1$ является точкой разрыва функции. Так как

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = +\infty,$$

то прямая $x = -1$ служит вертикальной асимптотой графика функции (см. формулы (4.3)).

Ищем наклонные асимптоты $y_{\text{ас}} = kx + b$, используя формулы (4.2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{x(x+1)^2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}-(-1)x\right)=2\,.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет следующий вид $y_{\text{ас}}=-x+2$.

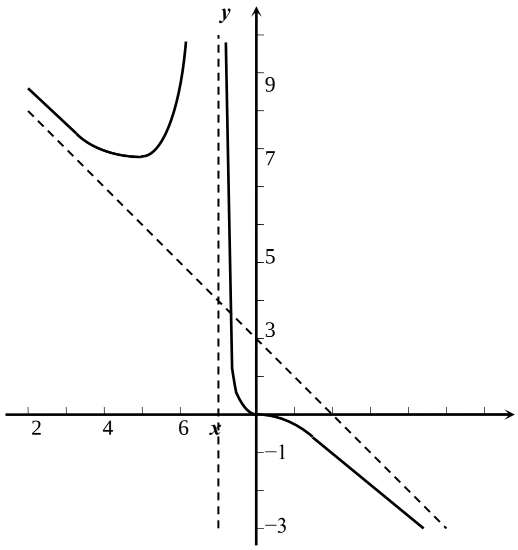


Рис. 5. График функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$ (примеры 1-3).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Ролля. Каков ее геометрический смысл?
2. Сформулируйте теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?
3. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Перечислите различные типы неопределенностей, для раскрытия которых может быть использовано правило Лопиталя.
4. Дайте определение второй производной функции $y=f(x)$ в точке x_0
5. Дайте определение n-й производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.
6. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Когда эту формулу называют формулой Маклорена, и какой вид принимает она в этом случае?
7. Как используется формула Тейлора для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью?
8. Дайте определение возрастания (убывания) функции в точке. Каков достаточный признак возрастающей функции?
9. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке.
10. Дайте определение локального экстремума функции.
11. Сформулируйте правила для отыскания экстремумов функции.

12. Сформулируйте теоремы, выражающие достаточные условия экстремума функции.

11. Приведите пример, показывающей, что обращение в некоторой точке производной в нуль не является достаточным условием наличия в этой точке экстремума функции.

12. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке?

13. Сформулируйте определения направления выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба. Как находятся интервалы направления выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции?

14. Сформулируйте определения вертикальной и наклонной асимптоты графика функции. Как находятся вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

После изучения темы “Приложения дифференциального исчтсления” выполните *контрольную работу 4*.

Контрольная работа 5 по теме «Интегральное исчисление»

Литература

[1], гл. XII-XIV; [2], т. 1, гл. 10-12; [3], гл. 5, 6; [4], гл. 7, 8; [5], гл. 8, 9; [6], 8, 9; [8].

Основные теоретические сведения

1. Определение первообразной функции (первообразной) и неопределенного интеграла. Пусть на интервале $(a;\, b)$ задана функция $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке $(a;\, b)$, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;\, b)$.

Теорема 1. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *– две любые первообразные для функции* $f(x)$ *на* $(a;\, b)$*, то* $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на $(a;\, b)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке $(a;\, b)$ имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ и **обозначается** $\int f(x)dx$.

В силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, C – некоторая постоянная.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3) Линейность интеграла. Если существуют первообразные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а c_1 и c_2 – любые вещественные числа, то существует первообразная функция для функции $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, причем

$$\int \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx.$$

3. При интегрировании наиболее часто используется следующие методы.

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \tfrac{1}{a}F(ax) + C, \ \int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$
$$\int f(ax+b)dx = \tfrac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (5.1)$$

где a и b – некоторые постоянные.

2. Простейшие приемы интегрирования, основанные на алгебраических преобразованиях подынтегральных функций.

3. ***Подведение под знак дифференциала***

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))d(u(x)), \quad (5.2)$$

так как $u'(x)dx = d(u(x))$.

4. Формула ***интегрирования по частям***:

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \quad (5.3)$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых трудностей. За u, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P_n(x)\cdot f(x)$:

$$P_n(x)\cdot \mathrm{e}^{ax}, \ P_n(x)\cdot \sin ax, \ P_n(x)\cdot \cos ax, \ P_n(x)\cdot \ln x, \ P_n(x)\cdot \arcsin x, \ P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, x,$$

где $P_n(x)$ – многочлен от x

Указания

1. Правило выбора частей:

Если $f(x)$ – тригонометрическая или показательная функция, то следует положить $u = P_n(x), \ dv = f(x)dx$.

Если $f(x)$ – логарифмическая или обратная тригонометрическая функция, то $u = f(x), \ dv = P_n(x)dx$.

2. Интегрирование по частям можно применять несколько раз подряд.

3. Интегрирование по частям $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx dx$ и некоторых других интегралов можно привести к линейному уравнению относительно этих интегралов после двукратного применения формулы (5.3).

5. ***Интегрирование рациональных дробей***, т. е. отношений двух многочленов $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ (соответственно m-й и n-й степени): $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, сводится к интегрированию правильных дробей. Если $m < n$, то $R(x)$ называется ***правильной дробью***, если $m \ge n$ – ***неправильной дробью***.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)},$$

где $S_{n-m}(x), Q_k(x)$ – многочлены; $\frac{Q_k(x)}{P_{(x)}}$ – правильная дробь $(k < n)$.

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ – неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов «уголком», см. пример 1 ”Дифференциальное исчисление“), получим $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1} = x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}$.

Интегрирование правильных дробей сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на простейшие, всегда интегрируемые дроби, вида

$$1.\ \frac{A}{x-a};\ 2.\ \frac{A}{(x-a)^k};\ 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \tag{5.4}$$

где A, a, M, N, p, q – постоянные числа; k – целое положительное число, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

6. ***Интегрирование методом замены переменной*** (***способ подстановки***) является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменной $t: x = \varphi(t)$.

При выборе подстановки оправдан был бы выбор по принципу “***что хуже, сложнее − принять за новую переменную*** t ”.

Два способа замены переменной

Переменную интегрирования в неопределенном интеграле можно заменить любой непрерывной функцией:

$$\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f(\varphi)\varphi'(t)dt. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) определяет собой два способа замены переменной. При чтении формулы слева направо получается способ I: $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$. Если $\int f(\varphi)\varphi'(t)dt$ будет проще, чем интеграл $\int f(x)dx$, то эта замена переменной целесообразна. При чтении справа налево получается способ II:

$$\int f(\varphi)\varphi'(t)dt = \begin{Bmatrix} \varphi(t) = x, \\ \varphi'(t)dt = dx \end{Bmatrix} = \int f(x)dx.$$

Если последний интеграл проще первого, то замена переменной целесообразна

Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки, как

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ x=a\sin t;$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ x=a\,\mathrm{tg}\,t;\ \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ x=\frac{a}{\sin t},$$

где R – символ рациональной функции.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной функции для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$.

2. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.

3. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

4. Что называется неопределенным интегралом?

5. Напишите таблицу основных интегралов.

6. Допишите формулы: $\int kf(x)dx = ...,\ \int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = ...$

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = ...$. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = ...$

7. Каковы простейшие свойства неопределенного интеграла?

8. Найдите $\int (2x-1)^2 dx$ двумя способами: а) непосредственно как интеграл от степенной функции со сложным аргументом; б) раскрыв скобки и проинтегрировав полученную сумму. Покажите, что полученные результаты не противоречат друг другу.

9. В чем состоит прием «прибавить-отнять»?

10. В чем состоит прием «умножить-разделить»?

11. Как выделить целую часть рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n \geq m$?

12. Как интегрировать четные положительные степени синуса или косинуса?

13. Как интегрировать положительные степени тангенса?

14. Какие можно два способа замены переменной?

15. Что значит подвести функцию под знак дифференциала?

16. Какие функции удобно интегрировать по частям?

17. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям.

18. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II, III и IV типов.

19. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых вещественных корней знаменателя.

20. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых вещественных кратных корней знаменателя.

21. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби для случая, когда среди корней знаменателя имеются пары простых комплексно-сопряженных корней.

22. Что такое метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?

23. Что такое метод частных значений при вычислении неопределенных коэффициентов?

24. На какие простейшие дроби разлагается дробь $\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$?

25. Найдите методом частных значений неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$

26. Найдите методом частных значений неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$. У к а з а н и е. Положите $y=x^2$ и затем примените метод частных значений.

27. Какие подстановки рационализируют интеграл от дробно-линейной иррациональности?

28. С помощью, каких тригонометрических подстановок вычисляются интегралы $\int\sqrt{1-x^2}\,dx,\ \int\sqrt{x^2-3}\,dx,\ \int\sqrt{x^2+3}\,dx$?

29. Изложите методы нахождения интегралов вида

$$\int R\left(x;\,(ax+b)^p;\,(ax+b)^q;\,\ldots;\,(ax+b)^r\right)dx,$$

где $p, q, \ldots, r$ − рациональные числа; R − рациональная функция.

30. Изложите метод нахождения интегралов вида $\int R(\sin x:\cos x)dx$, где R − рациональная функция.

4. Вычисление определенного интеграла. Определенный интеграл вычисляется по ***формуле Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a), \tag{5.6}$$

если $F'(x)=f(x)$ и первообразная функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми линиями $x=a,\ x=b$ и частью графика функции $y=f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x)\ge 0$, и со знаком минус, если $f(x)\le 0$.

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в неопределенном интеграле, только **нет обратного перехода** к исходной переменной, и **есть новая операция** − замена пределов интегрирования (новые пределы интегрирования вычисляются по старым пределам через замену).

Самое главное при замене переменной не забывать заменять пределы интегрирования.

Интегрирование по частям определенного интеграла. Для интегралов вида $\int_a^b P_n(x)\cdot f(x)dx$, где $P_n(x)$ − многочлен, а $f(x)$ − основная элементарная функция, применяется формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (5.7)$$

Отличие от аналогичной формулы для неопределенного интеграла только в расстановке пределов.

Вычисление определенных интегралов с симметричными пределами. Если, пределы интегрирования симметричны относительно нуля, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(-x) = -f(x), \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(-x) = f(x). \end{cases} \qquad (5.8)$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл.

2. Пусть $\int_a^b f(x)dx = 0,\ f(x)\neq 0$. Как это истолковать геометрически?

3. Докажите, что $\int_{-a}^{a}\Phi(x^2)dx = 2\int_0^a \Phi(x^2)dx$.

4. Перечислите свойства определенного интеграла.

5. Каков геометрический смысл теоремы о среднем для определенного интеграла?

6. Следует ли из интегрируемости суммы интегрируемость слагаемых?

7. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

8. Интегрируема ли сумма двух функций, если одно слагаемое интегрируемо, а другое нет?

9. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

10. Интегрируема ли сумма двух интегрируемых функций?

11. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух неинтегрируемых функций.

12. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и неинтегрируема на $[c;b]$. Что можно сказать о ее интегрируемости на $[a;b]$?

13. При каких условиях справедлива формула Ньютона-Лейбница?

14. Перечислите условия, при выполнении которых справедливы:

а) формула замены переменной;

б) формула интегрирования по частям.

15. С помощью, каких подстановок вычисляются интегралы, содержащие дробно-линейные иррациональности?

16. Для вычисления, каких типов интегралов удобны тригонометрические подстановки?

17. Для вычисления, каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям?

5. Если интервал интегрирования $[a;\, b]$ не ограничен $(b\to\infty$ или $a\to-\infty)$ или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (ппр $x=a,\ x=b,\ x=c\in(a;\, b)$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{5.9}$$

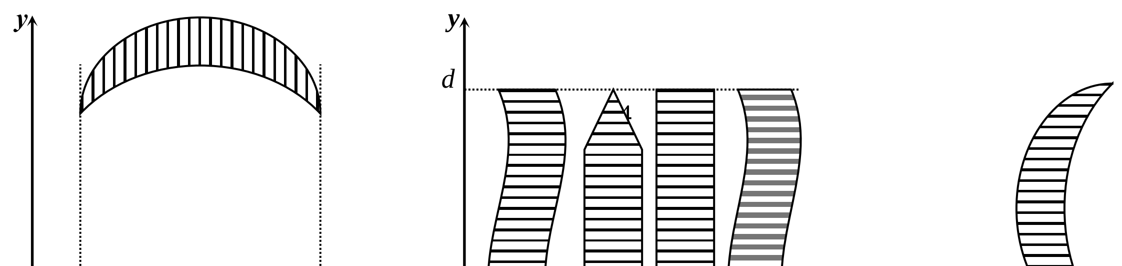
и

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,\ \int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{5.10}$$

Интегралы в левых частях равенств (5.9) и (5.10) называются ***несобственными интегралами***. Несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если существует конечный предел в правой части равенств (5.9) и (5.10). Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

6. Вычисление площадей плоских фигур. Область называется правильной относительно оси $Oy(Ox)$, если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках. Если область правильная относительно осей *Ox* и *Oy*, то она просто называется правильной областью. Области на рис. 6 – правильные относительно оси Oy, на рис. 7 – относительно оси Ox.



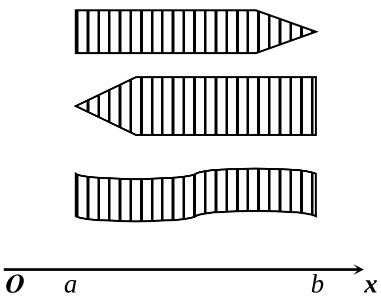


Рис. 6.

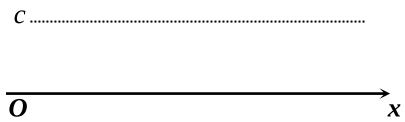


Рис. 7.

Условимся дальше области, правильные относительно оси $Oy(Ox)$, штриховать линиями, параллельными оси $Oy(Ox)$.

1. Если область *G*, правильная относительно оси Oy, проектируется на ось *Ox* в отрезок $[a; b]$, то ее граница разбивается на две линии: нижнюю границу области, задаваемую уравнением $y = f_1(x)$, и верхнюю, задаваемую уравнением $y = f_2(x)$. Тогда область *G* определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x), \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, на отрезке $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \tag{5.11}$$

Если область *G*, правильная относительно оси *Ox*, проектируется на ось *Oy* в отрезок $[c; d]$, то ее граница разбивается на две линии: левую границу области, задаваемую уравнением $x = g_1(y)$, и правую, задаваемую уравнением $x = g_2(y)$. В этом случае область *G* определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} g_1(y) \le x \le g_2(y), \\ c \le y \le d, \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $x = g_2(y)$ и $x = g_1(y)$, на отрезке $[c; d]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \left(g_2(y) - g_1(y) \right) dy. \tag{5.12}$$

2. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\,dt\,; \tag{5.13}$$

где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$.

3. В случае, когда непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, площадь криволинейного сектора OM_1M_2, ограниченного данной кривой и двумя полярными радиусами OM_1 и OM_2, которые соответствуют значениям φ_1 и φ_2 полярного угла, выражается интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2(\varphi)d\varphi\,. \tag{5.13}$$

7. Вычисление длины дуги

1. Пусть дуга *AB* кривой задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда длина дуги *AB*

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,. \tag{5.14}$$

2. В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $x(t),\, y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, длина дуги вычисляется по формуле

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\,. \tag{5.15}$$

Здесь α, β – значения параметра *t*, соответствующие концам дуги *AB*.

3. Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то длина *l* дуги *AB* вычисляется по формуле

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi\,, \tag{5.16}$$

где φ_1 и φ_2 соответствуют концам дуги *AB*.

8. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми линиями $x=a$, $x=b,\ y=0$ и частью графика кривой $y=f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_{a}^{b}y^2dx=\pi\int_{a}^{b}f^2(x)dx\,. \tag{5.17}$$

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{(2x-3)^2}$.

▲ Используя формулы (5.1), имеем

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-2}\, d(2x-3) = -\frac{1}{2(2x-3)} + C .$$

П р о в е р к а. $\left(-\frac{1}{2(2x-3)}+C\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}$. ▼

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

▲ Применяя (5.2), получим

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\{\frac{dx}{x} = d(1+\ln x)\right\} = \int \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln\left|1+\ln x\right| + C .$$ ▼

Пример 3. Найти $\int x\cos 2x dx$.

▲ Применяя формулу (5.3), имеем

$$\int x\cos 2x dx = \begin{Bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, & v = \int \cos 2x dx = 0.5\sin 2x \end{Bmatrix} =$$

$$= 0.5x\sin 2x - 0.5\int \sin 2x dx = 0.5x\sin 2x - 0.25\int \sin 2x d(2x) =$$

$$= 0.5x\sin 2x + 0.25\cos 2x + C .$$ ▼

Пример 4. Найти $\int e^{2x}\sin x dx$.

$$▲\ \int e^{2x}\sin x dx = \begin{Bmatrix} u = \sin x, & du = \cos x dx, \\ dv = e^{2x}\, dx, & v = \int e^{2x}\, dx = 0.5e^{2x} \end{Bmatrix} =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.5\int e^{2x}\cos x dx = \begin{Bmatrix} u = \cos x, & du = -\sin x dx, \\ dv = e^{2x}\, dx, & v = 0.5e^{2x} \end{Bmatrix} =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.5\left(0.5e^{2x}\cos x + 0.5\int e^{2x}\sin x dx\right) =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.25e^{2x}\cos x - 0.25\int e^{2x}\sin x dx .$$

Перенося последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$1.25\int e^{2x}\sin x dx = 0.5e^{2x}\sin x - 0.25e^{2x}\cos x + C .$$

Следовательно, $\int e^{2x}\sin x dx = 0.4e^{2x}\sin x - 0.2e^{2x}\cos x + C$. ▼

Пример 5. Найти $\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx$.

▲ Рациональная подынтегральная дробь является правильной (см. методы интегрирования 4) и разлагается на простейшие дроби вида (5.4):

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции. Числители в левой и правой частях последнего равенства будут тождественно равными, т.е.

$$3x^2-7x+10=A(x^2+4)+(Mx+N)(x-2).$$

Для нахождения неизвестного коэффициента *A* используем ***метод частных значений***, т. е. подставим вместо переменной *x* ее частное значение, совпадающее с вещественным корнем знаменателя, $x=2$. Получим равенство $8=8A$, откуда следует, что $A=1$.

Для вычисления значений *M*, *N* используем ***метод неопределенных коэффициентов***. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в обеих частях полученного тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 3=A+M, \\ x & -7=N-2M, \end{array}$$

Решение этой системы: $M=2,\ N=-3$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+4}\right)dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2xdx}{x^2+4}-$$

$$-3\int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\ln|x-2|+\ln(x^2+4)-1.5\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{x}{2}+C.$$ ▼

Пример 6. Найти $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\left\{\begin{matrix}\sqrt{1+x}=t,\ dx=2tdt, \\ x=t^2-1\end{matrix}\quad \begin{array}{|c|c|c|} x & 3 & 8 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}\right\}=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)2t}{t}dt=$$

$$= 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right) = \frac{32}{3}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

▲ 1) Первый интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению (5.9), имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+2)^2+9} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Bigg|_1^b =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{3}-\operatorname{arctg}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; функция $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x=0$. Согласно определению (5.10) получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{tg} x\Bigg|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} = 1-\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{tg}\varepsilon = 1.$$

Оба несобственных интеграла сходятся. ▼

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x-x^2$ и $y=-x$.

▲ Находим точки пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y=3x-x^2, \\ y=-x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=3x-x^2, \\ y=-x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4)=0, \\ y=-x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=-4. \end{cases}$$

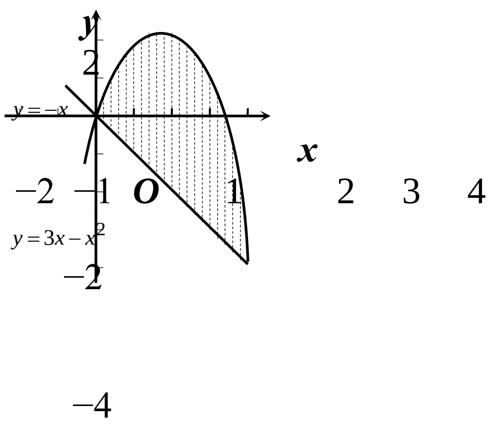


Рис.8

Следовательно, по формуле (5.11) имеем (см. рис. 8) $\begin{cases} 0\le x\le 4, \\ -x\le y\le 3x-x^2; \end{cases}$

$$S=\int_0^4\left(3x-x^2-(-x)\right)dx=\int_0^4(4x-x^2)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{32}{3}.\ \blacktriangledown$$

Пример 9. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

▲ Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим ее первую арку, вдоль которой параметр *t* изменяется от 0 до 2π (см. рис. 9). Тогда, согласно формуле (5.15), имеем $x'_t=a(1-\cos t),\ y'_t=a\sin t$,

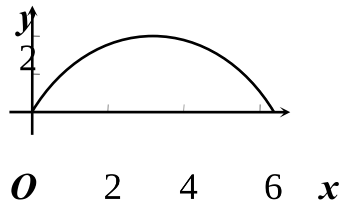


Рис. 9

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\tfrac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{t}{2}\,dt=-4a\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.\ \blacktriangledown$$

Пример 10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y=\sqrt{4x-x^2},\ y=0,\ x=2\ (0\le x\le 2)$.

▲ Объем полученного тела вращения найдем по формуле (5.17):

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2(4x-x^2)dx=\pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=16\frac{\pi}{3}.\ \blacktriangledown$$

После изучения темы ”Неопределенный и определенный интеграл“ выполните *контрольную работу 5*.

Контрольная работа 6 по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Л и т е р а т у р а

[1], гл. XXI, XXII; [2], т. 2, гл. 13; [3], гл. 11, п. 1–3, 5; [4], гл. 15; [5], ч. 2, гл. 4; [6], 11; [8].

Основные теоретические сведения

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений 1-го порядка

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой аргумент, функцию, ее производные: $F\left(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$.

Порядок дифференциального уравнения равен порядку высшей производной, содержащейся в уравнении. Дифференциальное уравнение первого порядка $F(x; y; y') = 0$.

Решение (интеграл) − явная (неявная) функция $y = y(x)$ $(\Phi(x; y) = 0)$, обращающая дифференциальное уравнение в тождество.

Общим решением (совокупность всех решений) − функция, которая удовлетворяет трем условиям:

1) содержит n произвольных постоянных величин, если n − порядок дифференциального уравнения;

2) при любых значениях произвольных постоянных является решением;

3) при произвольных начальных условиях позволяет решать задачу Коши (по заданным начальным условиям определить частное решение).

Решение уравнения $y' = f(x; y)$ существует в области **X**, где функция $f(x; y)$ непрерывна.

Геометрический смысл основных понятий

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x; y)$ геометрически представляет собой ***поле направлений касательных*** к интегральным кривым.
Общее решение − однопараметрическое семейство интегральных кривых $y = y(x; C)$, где C − параметр.

Решения, получающиеся из общего решения $y = y(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называется ***частными***.

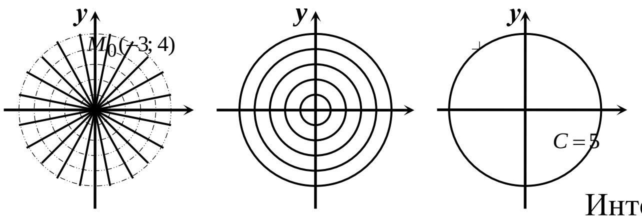
График всякого решения $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, построенный на плоскости xOy, называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Частное решение уравнения $y' = f(x; y)$ − интегральная кривая $y = y(x; C^{(0)})$, угловые коэффициенты касательных к которой определяются данным дифференциальным уравнением. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ (другая запись $y|_{x=x_0} = y_0$ или $y(x_0) = y_0$), называется ***задачей Коши***.

Пример. Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

Что есть что?

1) Дифференциальное уравнение 2) Общее решение $y^2 + x^2 = C^2$ 3) Частное решение $y^2 + x^2 = 25$



Интегральная кривая, соответствующая начальному условию $y(-3) = 4$.

Рис. 10.

2. Рассмотрим методы нахождения решений дифференциальных уравнений 1-го порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)\,, \tag{6.1}$$

где, $f_1(x)$ и $f_2 y)$ − непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Для отыскания решения уравнения (6.1) нужно, как говорят, разделить в нем переменные. Для этого

1) заменим в (6.1) y' на $\frac{dy}{dx}$,

2) умножим обе части уравнения на dx,

3) разделим обе части уравнения $f_2(y)$ $(f_2(y) \neq 0)$.

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx\,. \tag{6.2}$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть уравнения, а переменная y − только в левую часть. Следовательно, ***переменные разделены***. Далее необходимо проинтегрировать уравнение (6.2) и записать общий интеграл (решение).

Однородные дифференциальные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется ***однородной функцией измерения*** k относительно аргументов x и y если равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ справедливо для любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$, при котором функция $f(\lambda x, \lambda y)$ определена, $k = \text{const}$.

Например, функция $f(x, y) = 3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого измерения $(k = 4)$, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^4 - (\lambda x)^2(\lambda y)^2 + 5(\lambda y)^4 = \lambda^4(3x^4 - x^2y^2 + 5y^4) = \lambda^4 f(x, y).$$

Если $k = 0$, то функция будет однородной нулевого измерения, т.е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y) \tag{6.3}$$

называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Так как однородное дифференциальное уравнение (6.1) в нормальной форме всегда можно записать в виде $y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$, то, положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получим $y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Следовательно, уравнение (6.3) с помощью замены $y = xt$ $\left(t = \frac{y}{x}\right)$, $y' = t + xt'$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $t = t(x)$.

Чтобы решить однородное уравнение, нужно

1) ввести подстановку $t = \frac{y}{x}$ или $y = xt, y' = t + xt'$ и упростить полученное уравнение;

2) разделить переменные и проинтегрировать уравнение;

3) результат интегрирования упростить, пропотенцировать, если нужно, и записать общий интеграл, вернувшись к исходной переменной.

Линейные уравнения. Уравнение называется ***линейным***, если функция, а также ее производная входят в него в первой степени (линейно), т.е. уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{6.4}$$

Если $q(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***; если $q(x) \neq 0$ – ***неоднородным***. Общее решение однородного линейного уравнения получается путем разделения переменных; общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интегрирования C.

Данное линейное уравнение можно интегрировать также с помощью замены $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ – две неизвестные функции. Для определения u и v можно составить две идентичные системы. Подставьте $y = u \cdot v$ и $y' = u'v + v'u$ в уравнение (6.4) и убедитесь в этом сами

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \tag{6.5}$$

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$$

$$v'u + v(u' + p(x)u) = q(x) \tag{6.6}$$

Из уравнений (6.5) получается одна система, $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x), \end{cases}$ а из (6.6) − вторая $\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ v'u = q(x). \end{cases}$

В каждой из систем первое уравнение выбрано произвольно потому, что две неизвестные u и v нельзя найти из одного уравнения. Пользоваться можно любой системой.

Что необходимо для решения линейных уравнений
Прежде всего, нужно проверить признаки линейного уравнения: y и y' входят в уравнение в первой степени (линейно). Затем следует выполнить следующие операции: 1) Положить $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + v'u$ и подставить y и y' в уравнение (6.4). 2) Составить систему для определения u и v. Решить ее (допустим относительно v) . При определении v не нужно писать произвольную постоянную, ибо $v(x)$ достаточно знать с точностью до постоянной величины. 3) Подставить в уравнение $u'v = q(x)$ величину v и решить полученное уравнение. 4) Записать ответ $y = uv$, используя пункты 2) и 3). 5) Чтобы найти частное решение, нужно начальное условие подставить в общее решение и определить C.

Уравнение Бернулли. Одним из уравнений, сводящимся к линейным уравнениям, является уравнение Бернулли, которое имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^{\alpha}, \tag{6.7}$$

где α − любое вещественное число, кроме 0 и 1.

Чтобы свести уравнение (6.7) к линейному уравнению, нужно поделить обе его части на выражение y^{α}: $y^{-\alpha} + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$. Положить $z = y^{-\alpha+1}$, $z' = (-\alpha+1)y^{-\alpha}y'$, тогда $\frac{1}{-\alpha+1}z' + p(x) \cdot z = q(x)$ − линейное уравнение, которое можно решать методом замены переменной или методом вариации, а затем найти y из замены $y^{-\alpha+1} = z$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференциального уравнения 1-го порядка и его общего и частного решения (интеграла).

2. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и укажите ее геометрический смысл.

3. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения 1-го порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решений.

4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ и укажите, где условия этой теоремы не выполняются.

5. Дайте определение уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.

6. Дайте определение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

7. Дайте определение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

8. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод нахождения его общего решения.

9. Что называется особым решением дифференциального уравнения 1-го порядка?

3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

1. Уравнение n-го порядка $y^{(n)}=f(x)$ (**не содержит явно** $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$) решается последовательным интегрированием.

2. Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'')=0$ (**не содержит явно искомой функции** y) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=z(x)$ (откуда $y''=z'=\frac{dz}{dx}$).

3. Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'')=0$ (**не содержит явно аргумента** x) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=z(y)$ (откуда $y''=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'\cdot z$).

Что необходимо для решения
уравнений 2-го порядка допускающих понижение порядка

1. Определить тип уравнения.
2. По типу подобрать нужную подстановку.
3. Получить и решить уравнение 1-го порядка.
4. Вернуться к исходной функции. Решить полученное уравнение 1-го порядка.

4. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $py''+qy'+ry=f(x)$, где p, q, r – числа, причем $p\neq 0$. Если $f(x)=0$, то уравнение называется ***однородным***, а если $f(x)\neq 0$ – ***неоднородным***.

Квадратное уравнение $pk^2+qk+r=0$ называется ***характеристическим уравнением*** дифференциального уравнения $py''+qy'+ry=0$.

Пусть $D = q^2 - 4pr$ – дискриминант характеристического квадратного уравнения. Возможны следующие случаи зависимости общего решения от корней характеристического уравнения $(k_1; k_2)$:

1. $D > 0$ (корни действительные разные $k_1 \neq k_2$) – общим решением служит функция $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2. $D = 0$ (корни действительные равные $k_1 = k_2$) – общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$;

3. $D < 0$ (корни комплексные $k_{1,2} = a \pm bi$) – общим решением является функция $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Что нужно знать для составления общих решений уравнения $y'' + py' + qy = 0$
1) Уметь составить характеристическое уравнение по виду дифференциального уравнения. Для этого нужно формально заменить $y^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2)$ любой буквой в степени *n*: $y = y^{(0)}$ заменить $k^0 = 1$, $y' = y^{(1)}$ заменить $k^1 = k$, $y'' = y^{(2)}$ заменить k^2.
2) Уметь решать квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ по формуле $$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$ или по теореме Виета $k_1 k_2 = q,\ k_1 + k_2 = -p$.
3) Знать на память вид общего решения в зависимости от k_1 и k_2.

5. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если $y_ч$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения $py'' + qy' + ry = f(x)$ и y_o – общее решение соответствующего однородного уравнения $py'' + qy' + ry = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = y_o + y_ч$.

Правило нахождения частного решения $(y_ч)$ неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*, тогда:

а) $y_ч = Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени *n* с неопределенными коэффициентами, если $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$;

б) $y_ч = x \cdot Q_n(x)$, если $k_1 = 0$ (или $k_2 = 0$);

в) $y_ч = x^2 \cdot Q_n(x)$, если $k_1 = k_2 = 0$.

2. Пусть $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, тогда:

а) $y_ч = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$;

б) $y_ч = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha = k_1$ (или $\alpha = k_2$);

в) $y_ч = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha = k_1 = k_2$.

3. Пусть $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+S_n(x)\sin\beta x\right)$, где $P_n(x)$ и $S_n(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых n, тогда:

а) $(y_ч)'=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x\right)$, если $\alpha+\beta i\neq a+bi$;

б) $(y_ч)'=x\cdot\mathrm{e}^{\alpha x}\left(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x\right)$, если $\alpha+\beta i=a+bi$, где $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами.

Вопросы для самопроверки

1. Какие виды уравнения 2-го порядка допускают понижение порядка?
2. Как понизить порядок уравнения $y^{(n)}=f(x)$?
3. Как понизить порядок уравнения $y''=f(x;y')$?
4. Как понизить порядок уравнения $y''=f(y;y')$?
5. Как решить задачу Коши для уравнений 2-го порядка?
6. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n-го порядка (однородного и неоднородного). Докажите основные свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.
7. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций. Докажите, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю.
8. Сформулируйте теорему об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.
9. Изложите метод нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, если известно одно его частное решение.
10. Выведите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае вещественных различных корней характеристического уравнения.
11. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае равных вещественных корней характеристического уравнения.
12. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
13. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.
14. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $\mathrm{e}^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n\geq 0$.
15. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$.

16. В чем состоит краевая задача для дифференциального уравнения?

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xyy' = x^2 + y^2$.

▲ Так как функции xy и x^2+y^2 – однородные второго измерения, то данное уравнение – однородное (см. п. 2). Сделаем замену $y = tx,\ y' = t + t'x$. Тогда

$$x \cdot tx(t+t'x) = x^2 + (tx)^2,\ tx^2(t+t'x) = x^2(1+t^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем:

$$t^2 + tx\tfrac{dt}{dx} = 1 + t^2,\ \ txdt = dx.$$

Разделяя переменные (для разделения переменных необходимо перенести все, что содержит t в одну сторону, а все, что содержит x – в другую, при этом dx и dt должны быть только в числителях), последовательно находим:

$$tdt = \frac{dx}{x},\ \int tdt = \int \frac{dx}{x},\ \frac{t^2}{2} = \ln|x| + \ln C,\ \ t^2 = 2\ln|Cx|.$$

В последнее выражение вместо переменной t подставим значение $\frac{y}{x}$. Получим общий интеграл $y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$. Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения: $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. ▼

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy' - \mathrm{e}^{-x} + xy = 0$.

▲ 1. Убедившись, что данное уравнение линейное (см. п. 2), полагаем

$$y(x) = u(x)\cdot v(x), \text{ тогда } y' = u'v + v'u$$

и данное уравнение преобразуется к виду

$$x(u'v + v'u) + xuv = \mathrm{e}^{-x},\ \ xu'v + xu(v'+v) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Составим систему для определения u и v: $\begin{cases} v' + v = 0, \\ xu'v = \mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы $\frac{dv}{dx} + v = 0,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \ln|v| = -x,\ v = \mathrm{e}^{-x}$ (при определении v не нужно писать произвольную постоянную величину, ибо $v(x)$ достаточно знать с точностью до постоянной величины). Подставляем во второе уравнение системы $v = e^{-x}$ и решаем полученное уравнение:

$$xu'\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x},\ \ x\tfrac{du}{dx} = 1,\ \ du = \tfrac{dx}{x},\ \ u = \ln|x| + C.$$

Зная u и v, находим искомую функцию y: $y = uv = \left(C + \ln|x|\right)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Перепишем данное уравнение так: $xy'+xy=\mathrm{e}^{-x}$. Рассмотрим однородное уравнение $xy'+xy=0\Rightarrow x(y'+y)=0$. Так как $x\neq 0$ (значение $x=0$ не является решением неоднородного уравнения), то

$$y'+y=0\Rightarrow \tfrac{dy}{dx}=-y\Rightarrow \ln|y|=-x+\ln C\Rightarrow \ln\tfrac{|y|}{C}=-x\Rightarrow y=C\,\mathrm{e}^{-x}\ -$$

общее решение однородного уравнения.

Применяем далее метод вариации произвольной постоянной C. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-x};\ \ y'=C'(x)\mathrm{e}^{-x}-C(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Подставив значения y и y' в неоднородное уравнение, получим

$$xC'(x)\mathrm{e}^{-x}-xC(x)\mathrm{e}^{-x}+xC(x)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow xC(x)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}.$$

Т.к. $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$, то $xC'(x)=1\Rightarrow x\frac{dC(x)}{dx}=1\Rightarrow dC(x)=\frac{dx}{x}\Rightarrow C(x)=\ln|x|+C$.

Подставив это значение $C(x)$ в общее решение неоднородного уравнения, получим $y=(\ln|x|+C)\mathrm{e}^{-x}$ – общее решение неоднородного уравнения. ▼

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''x\ln x=y'$.

▲ В уравнении нет в явном виде искомой функции y. Понизим порядок этого уравнения, положив $y'=z(x)$. Тогда $y''=z'$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx}x\ln x=z\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x\ln x}\ \Rightarrow\ \ln|z|=\ln\ln x+\ln C_1\Rightarrow z=C_1\ln x.$$

Т.к. $z=y'=\frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\tfrac{dy}{dx}=C_1\ln x\ \Rightarrow\ dy=C_1\ln x dx\ \Rightarrow\ y=C_1\int\ln x dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right\}=C_1\left(x\ln x-\int dx\right)=C_1x(\ln x-1)+C.$$

Получили общее решение исходного уравнения $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$. ▼

Пример 4. Найти общее решение уравнения $(y')^2+2yy''=0$.

▲ В уравнении нет в явном виде аргумента x. Понизим порядок уравнения подстановкой $y'=z(y)$, тогда $y''=z\frac{dz}{dy}$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$z^2+2yz\frac{dz}{dy}=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{2y}\Rightarrow\ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|y|+\ln C_1\Rightarrow z=\frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Т.к. $z=y'=\frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\tfrac{dy}{dx}=\tfrac{C_1}{\sqrt{y}}\Rightarrow\sqrt{y}dy=C_1dx\Rightarrow\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2\Rightarrow y=\left(C_1x+C_2\right)^{\frac{2}{3}}.\ ▼$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=\frac{2}{29}$, $y'(0)=\frac{1}{29}$.

▲ Рассмотрим однородное уравнение $y''+4y'+13y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$, откуда $k_1=-2-3i$, $k_2=-2+3i$. Следовательно, $y_o=e^{-3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ – общее решение однородного уравнения.

Подберем вид частного решения для данного уравнения.

$$f(x)=5\sin 2x\colon P_n(x)=0,\ S_n(x)=5,\ n=0,\ \alpha=0,\ \beta=2,\ \alpha+\beta i\neq k_{1,2},$$
$$Q_0(x)=A,\ R_0(x)=B,\ y_ч=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Подставляя $(y_ч)'$ и $(y_ч)''$ в неоднородное исходное уравнение, получим тождество ($y_ч$ – решение данного уравнения). Для удобства вычислений будем выписывать выражения $y_ч$, $(y_ч)'$, $(y_ч)''$ в отдельные строки и слева за вертикальной чертой помещать коэффициенты, стоящие перед ними в уравнении. Умножая эти выражения на коэффициенты, складывая и приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{array}{r|l} 13 & y_ч=A\cos 2x+B\sin 2x,\\ 4 & (y_ч)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\\ 1 & (y_ч)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x,\end{array}$$
$$(y_ч)''+4(y_ч)'+13y_ч=(13A+8B-4A)\cos 2x+(13B-8A-4B)\sin 2x\equiv 5\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой части последнего тождества, находим A, B и $y_ч$:

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & 9A+8B=0,\quad A=-\tfrac{8}{29}\\ \sin 2x & -8A+9B=5,\quad B=\tfrac{9}{29}\end{array}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_ч=-\tfrac{8}{29}\cos 2x+\tfrac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения –

$$y = y_o + y_ч = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) - \tfrac{8}{29}\cos 2x + \tfrac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y(0) = \tfrac{2}{29} \Rightarrow C_1 - \tfrac{8}{29} = \tfrac{2}{29} \Rightarrow C_1 = \tfrac{10}{29};$$
$$y' = -2\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \mathrm{e}^{-3x}\left(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x\right) + \tfrac{16}{29}\sin 2x + \tfrac{18}{29}\cos 2x;$$
$$y'(0) = \tfrac{1}{29} \Rightarrow -2C_1 + 3C_2 + \tfrac{18}{29} \Rightarrow C_2 = \tfrac{1}{29}.$$

Искомое частное решение таково:

$$y = \mathrm{e}^{-2x}\left(\tfrac{10}{29}\cos 3x + \tfrac{1}{29}\sin 3x\right) - \tfrac{8}{29}\cos 2x + \tfrac{9}{29}\sin 2x. \ \blacktriangledown$$

Контрольная работа 7 по теме «Теория рядов»

Литература

[1], XVII, XIX; [2], т. 2, гл. 16, 17; [3], гл. 13; [4], гл. 14; [5], ч. 2, гл. 3; [6], 12; [8].

Основные теоретические сведения

1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{7.1}$$

где $a_n \in \mathbf{R}$, называется ***числовым рядом***. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называются ***членами ряда***, число a_n – ***общим членом ряда***.

Суммы $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называются ***частичными суммами***, а S_n n-й ***частичной суммой ряда*** (7.1).

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***сходящимся***, если существует предел его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Число $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ называется ***суммой ряда***.

Если же предел частичных сумм не существует, то ряд (7.1) называется ***расходящимся***.

Необходимый признак сходимости.

Если ряд (7.1) сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Достаточный признак расходимости.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = C \neq 0$, то ряд (7.1) расходится.

К достаточным признакам сходимости для рядов с положительными членами $(a_n \geq 0)$ относятся:

1. ***Признак сравнения***. Если даны два ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{7.2}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7.3}$$

и для всех $n > N$ выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$, то:

1) из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2);

2) из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

2. ***Признак сравнения в предельной форме***. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = C \ (0 < C < \infty)\,, \tag{7.4}$$

то ряды (7.2) и (7.3) одновременно сходятся или расходятся.

В качестве ***эталонных рядов*** для сравнения обычно служат:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, сходящийся при $\alpha > 1$ и расходящийся при $0 < \alpha \le 1$;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, сходящийся при $0 \le q < 1$ и расходящийся при $q \ge 1$.

3. ***Признак Д-Аламбера***. Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho\,, \tag{7.5}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$. Если же $\rho = 1$, то вопрос о сходимости ряда этим признаком не решается.

4. ***Радикальный признак Коши***. Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho\,, \tag{7.6}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$. Если $\rho = 1$ радикальный признак Коши неприменим.

5. ***Интегральный признак Коши***. Пусть положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет производящую функцию $f(n) = a_n$, положительную, непрерывную и убывающую. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_0^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Числовой ряд (7.1), члены a_n которого имеют разные знаки, называется ***знакопеременным***.

Если ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots |a_n| + \ldots \tag{7.7}$$

сходится, то ряд (7.1) также сходится и называется ***абсолютно сходящимся***.

Если ряд (7.7) расходится, а ряд (7.1) сходится, то ряд (7.1) называется ***неабсолютно (условно) сходящимся***.

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots, \tag{7.8}$$

где $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, называется ***знакочередующимся рядом***.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (7.8) удовлетворяют условиям: 1) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (7.8) сходится.

2. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ . \qquad (7.9)$$

называется ***степенным рядом*** (относительно $(x-a)$), где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами ряда***, *a* – фиксированное число. Если $a=0$ получаем степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ . \qquad (7.10)$$

Число *R* называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, если (7.9) сходится при $|x-a|<R$ и расходится при $|x-a|>R$. Если $|x-a|=R$, ряд может, как сходиться, так и расходиться. Интервал $(a-R; a+R)$ называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда (7.9). Радиус сходимости *R* может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \ . \qquad (7.11)$$

Областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R;\ R)$, к которому в отдельных случаях добавляются одна или обе границы интервала (что зависит от свойств конкретного исследуемого ряда).

Степенной ряд (7.9) внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать с сохранением радиуса сходимости.

3. ***Рядом Фурье*** периодической функции $f(x),\ -l \le x \le l$, называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \ , \qquad (7.12)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Если периодическая функция с периодом 2*l* кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-l; l]$, то ее ряд Фурье (7.12) сходится для любого $x \in \mathbf{R}$ к сумме

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Отсюда следует, что $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и сумма $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции $f(x)$ в точках разрыва первого рода.

Функция, заданная на полупериоде $[0;l]$, может быть представлена различными рядами Фурье.

При четном продолжении данной функции на второй полупериод $[-l;0]$ получается ***ряд по косинусам***:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l};\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots;\ b_n=0; \quad (7.13)$$

а при нечетном продолжении – ***ряд по синусам***:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l};\ a_n=0;\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;\ n=1,2,3,\ldots. \quad (7.14)$$

Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, нужно:

1. Проверить необходимый признак сходимости. Если $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд расходится;

2. Если $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то необходимо применить один из **достаточных признаков**:

а) признак Д′Аламбера или Коши (какой лучше подойдет к данному примеру);

б) интегральный признак Коши, если легко найти $\int_1^{\infty}f(x)dx$;

в) признак сравнения, если $\int_1^{\infty}f(x)dx$ найти трудно, а признак Д′Аламбера или Коши бессилен.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}$.

▲ Проверяем необходимый признак

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+(2n+3)^2}=0.$$

Здесь для вычисления предела использовано правило Лопиталя. Т.к. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то проверяем сходимость по признаку Д′Аламбера (7.5). Так как общий член ряда $a_n=\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}$, то, заменяя в выражении n-го члена n на величину $n+1$, находим $a_n=\frac{\operatorname{arctg}\big(2(n+1)+3\big)}{n+1}=\frac{\operatorname{arctg}(2n+5)}{n+1}$.

Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n\to\infty$:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+5)\,n}{(n+1)\operatorname{arctg}(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+5)}{\operatorname{arctg}(2n+3)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2n+3)^2}{1+(2n+5)^2}\cdot 1=1.$$

Поскольку полученный предел равен 1, признак Д′Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (для вычисления предела использовано правило Лопиталя). Применим теперь признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда выберем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ b_n=\frac{1}{n}$ и в силу формулы (7.4) получим

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)\cdot n}{n\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}(2n+3)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, исследуемый ряд является расходящимся, так как эталонный ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд). ▼

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$.

> **Для определения области сходимости степенного ряда**
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)$$
>
> **необходимо**:
>
> 1) вычислить радиус сходимости по формуле (7.11);
> 2) исследовать сходимость ряда при $x=\pm R\ (x=a\pm R)$;
> 3) записать область сходимости по результатам предыдущих пунктов.

▲ Т.к. $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{n+1}},\ a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+2}}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}=2.$$

Значит, степенной ряд сходится при $|x-2|<2$, т.е. в интервале $(0;4)$.

Если $x=0$, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(0-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Положим $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ при $x\ge 0$; эта функция положительная, непрерывная и убывает. Тогда несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b(x+1)^{-\frac{1}{2}}d(x+1)=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{x+1}\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b+1}-2\right)=\infty,$$

т.е. расходится, а значит, данный ряд также расходится.

Если $x=4$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Так как члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают

$$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots,\text{ и }\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0,$$

то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных членов данного ряда, т.е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, расходится, то исследуемый ряд сходится условно (неабсолютно). Таким образом, область сходимости исследуемого степенного ряда $(0;4]$. ▼

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-2;\ 2)$ выражением $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -2<x\le 0,\\ \frac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x<2,\end{cases}$ имеющую период $2l=4$.

▲ Как сама функция, так и ее первая производная кусочно-монотонная и ограниченная на $(-2;2)$. Значит, функцию можно разложить в ряд Фурье вида (7.12). В нашем случае $l=2$. Подсчитаем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{cases}-\frac{2}{(n\pi)^2}, \text{ если } n \text{ нечетное},\\ 0, \text{ если } n \text{ четное};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{-4(-1)^n}{\pi n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Итак, в каждой точке непрерывности функции имеем:

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

В точках разрыва функции ряд сходится к значению $\frac{1}{2}$ – среднему арифметическому предельных значений функции слева и справа. ▼

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение сходящегося и расходящегося ряда.
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
3. Сформулируйте признак сравнения рядов с положительными членами.
4. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.
5. Сформулируйте признак Коши сходимости рядов с положительными членами.
6. Сформулируйте интегральный признак сходимости.
7. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда.
8. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
9. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, название дисциплины и дату отправки работы в университет.

Задачи контрольной работы выбираются согласно тому варианту, который совпадает с первой буквой Вашей фамилии. Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением. Решение задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных вычислений.

В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенная контрольная работа предъявляется студентом перед сдачей зачета или экзамена.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии
Контрольная работа 1

I. Даны координаты вершин пирамиды. Найти: 1) длину ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямой A_1A_2; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Координаты вершин приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Координаты точки			
	A_1	A_2	A_3	A_4
А	(0; 3; 2)	(–6; 3; 6)	(–2; 4; 2)	(0; 5; 4)
Б	(–1; 2; 0)	(–2; 2; 4)	(–3; 3; 0)	(–1; 4; 2)
В	(2; 2; 3)	(1; 2; 7)	(0; 3; 3)	(2; 4; 5)
Г	(0; –1; 2)	(–1; –1; 6)	(–2; 0; 2)	(0; 1; 4)
Д	(3; 0; 2)	(2; 0; 6)	(1; 1; 2)	(3; 2; 4)
Е	(0; 2; –1)	(–1; 2; 3)	(–2; 3; –1)	(0; 4; 1)
Ж	(2; 3; 2)	(1; 3; 6)	(0; 4; 2)	(2; 5; 4)
З	(–1; 0; 2)	(–2; 0; 6)	(–3; 1; 2)	(–1; 2; 4)
И	(2; 0; 3)	(1; 0; 7)	(0; 1; 3)	(2; 2; 5)
К	(2; –1; 2)	(1; –1; 6)	(0; 0; 2)	(2; 1; 4)
Л	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)	(1; 5; 0)
М	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)	(9; 6; 4)
Н	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)	(7; 5; 9)
О	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(5; 10; 4)	(4; 7; 8)
П	(10; 6; 6)	(–2; 8; 2)	(6; 8; 9)	(7; 10; 3)
Р.	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)	(4; 10; 9)
С	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)
Т	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)	(2; 3; 7)
У	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)	(8; 10; 7)
Ф.	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)	(8; 4; 1)
Х	(5; 1; 0)	(7; 1; 0)	(2; 1; 4)	(5; 5; 3)
Ц	(0; 1; 2)	(3; 1; 4)	(2; 1; 7)	(3; 0; 1)
Ч	(1; 3; 2)	(5; 0; 1)	(2; 1; 4)	(2; 2; 2)
Ш	(0; 2; 1)	(2; 1; 2)	(4; 1; 1)	(2; 3; 5)
Щ	(1; 1; 1)	(3; 1; 7)	(0; 2; 4)	(2; 7; 1)

Э	(0; 2; 1)	(5; 1; 0)	(5; 5; 3)	(2; 7; 1)
Ю	(0; 1; 2)	(2; 1; 4)	(2; 2; 2)	(1; 1; 1)
Я	(5; 1; 0)	(0; 1; 2)	(3; 0; 1)	(2; 2; 2)

II. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

1. построить линию по точкам от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;

2. найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

3. по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия. Уравнение $r = r(\varphi)$ приведено в таблице 2.

Таблица 2

	r		r
А	$\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$	**П**	$\dfrac{1}{6+3\cos\varphi}$
Б	$\dfrac{1}{2+\cos\varphi}$	**Р.**	$\dfrac{2}{2-\cos\varphi}$
В	$\dfrac{4}{2-3\cos\varphi}$	**С**	$\dfrac{2}{1+\cos\varphi}$
Г	$\dfrac{8}{3-\cos\varphi}$	**Т**	$\dfrac{1}{2-\sin\varphi}$
Д	$\dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$	**У**	$\dfrac{3}{1+\sin\varphi}$
Е	$\dfrac{5}{3-4\cos\varphi}$	**Ф.**	$\dfrac{1}{2+\sin\varphi}$
Ж	$\dfrac{10}{2+\cos\varphi}$	**Х**	$\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$
З	$\dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$	**Ц**	$\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$
И	$\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$	**Ч**	$\dfrac{5}{1-\cos\varphi}$
К	$\dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$	**Ш**	$\dfrac{4}{3-2\cos\varphi}$

Л	$\dfrac{3}{2+\sin\varphi}$	**Щ**	$\dfrac{8}{1-3\cos\varphi}$
М	$\dfrac{4}{1-\cos\varphi}$	**Э**	$\dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$
Н	$\dfrac{4}{1+\sin\varphi}$	**Ю**	$\dfrac{3}{1-2\sin\varphi}$
О	$\dfrac{6}{2+\cos\varphi}$	**Я**	$\dfrac{1}{1-2\sin\varphi}$

Элементы линейной алгебры
Контрольная работа 2

I. Даны две матрицы A и B. Найти $(2A^T - 3B)\cdot(A + 2B^T)$.

А. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Б. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

В. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Г. $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Д. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Е. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ж. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

З. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

И. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

К. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Л. $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

М. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Н. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

О. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

П. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Р. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

С. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Т. $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

У. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Ф. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Х. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ц. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ч. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ш. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Щ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Э. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ю. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Я. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

II. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

А. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$ **П.** $\begin{cases} 3x_1-5x_2+6x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=8, \\ x_1+4x_2-x_3=1. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$ **Р.** $\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5, \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=-4. \end{cases}$

В. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$ **С.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ **Т.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

Д. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ **У.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

Е. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **Ф.** $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

Ж. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ **Х.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

З. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$ **Ц.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

И. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$ **Ч.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

К. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ **Ш.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

Л. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$ **Щ.** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

М. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 13. \end{cases}$ **Э.** $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

Н. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ **Ю.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

О. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$ **Я.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

III. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

А. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Л.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Х.** $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **М.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **Ц.** $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **Н.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. **Ч.** $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **О.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. **Ш.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Д. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **П.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. **Щ.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Е. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **Р.** $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **Э.** $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

Ж. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **С.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **Ю.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

З. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. **Т.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. **Я.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

И. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **У.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

К. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. **Ф.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

IV. Дано комплексное число z. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Таблица 3

	z		z		z
А	$\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$	**Л**	$\frac{2\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$	**Х**	$\frac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$
Б	$\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$	**М**	$-\frac{4}{\sqrt{3}+i}$	**Ц**	$\frac{3}{1+i\sqrt{2}}$
В	$-\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$	**Н**	$\frac{4}{\sqrt{3}-i}$	**Ч**	$-\frac{1}{1-i\sqrt{2}}$
Г	$-\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$	**О**	$\frac{4}{\sqrt{3}+i}$	**Ш**	$\frac{3}{\sqrt{2}+i}$
Д	$-\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$	**П**	$-\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$	**Щ**	$-\frac{4}{\sqrt{3}-i}$
Е	$\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$	**Р**.	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$	**Э**	$\frac{3}{1-i\sqrt{2}}$
Ж	$\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$	**С**	$-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$	**Ю**	$-\frac{3}{1+i\sqrt{2}}$
З	$-\frac{4}{\sqrt{3}-i}$	**Т**	$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$	**Я**	$-\frac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$
И	$\frac{1}{\sqrt{3}+i}$	**У**	$-\frac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$		
К	$\frac{1}{\sqrt{3}-i}$	**Ф**.	$-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$		

Дифференциальное исчисление
Контрольная работа 3

I. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

А. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

П. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)\ln\dfrac{3-2x}{4-2x}$.

Б. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x-5}-3}{x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

Р. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\,\mathrm{tg}\,3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$.

В. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

С. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+8}{2x^5-3x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\ln\dfrac{1-3x}{2-3x}$.

Г. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}\,x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Т. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Д. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

У. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\operatorname{ctg}^2 x$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+2)\ln\dfrac{x+3}{x+4}$.

Е. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)\ln\dfrac{x+3}{x}$.

Ф. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x^2-4}{6x^5-3x^2+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

Ж. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)\ln\dfrac{x-3}{x}$.

Х. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

З. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

Ц. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{-\frac{4}{x+3}}$.

И. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2+2}{x^4+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

Ч. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-x^2+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

К. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}5x\operatorname{ctg}3x$;

Ш. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{9-3x}}$.

Л. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg}3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln\dfrac{2x-3}{2x+1}$.

Щ. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

М. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{tg}3x\operatorname{ctg}^2 2x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

Э. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

Н. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

Ю. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

О. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

Я. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{1}{2x+8}}$.

II. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

А. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

П. $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}; \\ x-\frac{\pi}{2}, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Б. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$ **Р.** $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ x, & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

В. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ **С.** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x\le 0; \\ 2, & 0<x\le 2; \\ x, & x>2. \end{cases}$

Г. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$ **Т.** $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2; \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

Д. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$ **У.** $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^3, & -1<x<0; \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$

Е. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$ **Ф.** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1; \\ 2x, & 1<x\le 3; \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

Ж. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$ **Х.** $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0; \\ x+1, & 0\le x\le 4; \\ 3+x, & x>4. \end{cases}$

З. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$ **Ц.** $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0; \\ x, & 0<x\le 1; \\ 2+x, & x>1. \end{cases}$

И. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$ **Ч.** $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0; \\ x, & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$

К. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ \sqrt{x}, & 0<x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$ **Ш.** $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi; \\ 2, & x\ge \pi. \end{cases}$

Л. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ \frac{1}{2}x, & x>2. \end{cases}$ **Щ.** $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x<2; \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

М. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\frac{\pi}{4}; \\ 2, & x\ge \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ **Э.** $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0; \\ x^2-1, & 0\le x<1; \\ -x, & x\ge 1. \end{cases}$

Н. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0; \\ x^2+1, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$ **Ю.** $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0; \\ 1, & 0<x\le 2; \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

О. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0; \\ 1-x, & 0\le x\le 2; \\ 2, & x>2. \end{cases}$ **Я.** $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0; \\ 1, & 0<x\le 2; \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

III. Найти производные первого порядка данных функций.

А. 1) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+3}}$;
2) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$;
3) $y=\ln\sin(2x+5)$;
4) $y=\left(\ln(8x+3)\right)^{\operatorname{tg}5x}$;
5) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=5x$.

П. 1) $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$;
2) $y=e^{\operatorname{tg}x}\cos x$;
3) $y=2^{\arcsin 3x}$;
4) $y=(\cos x)^{\operatorname{tg}x}$;
5) $\operatorname{tg}(x+2y)-3x+y=0$.

Б. 1) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;
2) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$;
3) $y=\operatorname{arctg}e^{2x}$;
4) $y=x^{\frac{1}{x}}$;
5) $x-y+\operatorname{arctg}y=0$.

Р. 1) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$;
2) $y=\arcsin\operatorname{tg}x$;
3) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;
4) $y=(\cos 3x)^x$;
5) $\ln(x+y)-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=0$.

В. 1) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$;
2) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$;
3) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;
4) $y=x^{\ln x}$;
5) $y\sin x=\cos(x-y)$.

С. 1) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$;
2) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
3) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
4) $y=(\sin 3x)^x$;
5) $\ln\dfrac{x}{y}-x+2y=0$.

Г. 1) $y=\dfrac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$;
2) $y=\sin x-x\cos x$;
3) $y=x^m\ln x$;
4) $x^{\lg x}$;

Т. 1) $y=\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^2$;
2) $y=\dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$;
3) $y=\operatorname{arctg}e^{3x}$;
4) $y=x^{\sqrt{x+1}}$;

5) $\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

5) $\operatorname{arctg}(x+y)-x-2y=0$.

Д. 1) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

2) $y=\frac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

3) $y=\frac{x\ln x}{x-1}$;

4) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\ln x}$;

5) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$.

У. 1) $y=\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{3x-2}}$;

2) $y=\frac{e^x}{\cos x}$;

3) $y=\operatorname{arccostg}x$;

4) $y=(\operatorname{tg}2x)^{\sin x}$;

5) $\sin(2x+y)+2x-3y=0$.

Е. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[3]{x^3+1}$;

2) $y=2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$;

3) $y=3^{\operatorname{arctg}x^3}$;

4) $y=(\operatorname{arctg}x)^x$;

5) $y^2x=y^{\frac{y}{x}}$.

Ф. 1) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\frac{4}{(x-2)^5}$;

2) $y=\sin^3 2x\cos 8x^5$;

3) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;

4) $y=\left(\cos(x+2)\right)^{\ln x}$;

5) $\ln y-\frac{y}{x}=7$.

Ж. 1) $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

2) $y=0.5\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$;

3) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y=(x+x^2)^x$;

5) $x^3+y^3-3axy=0$.

Х. 1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$;

2) $y=\cos^5 3x\operatorname{tg}(4x+1)^3$;

3) $y=\ln^2(x+\cos x)$;

4) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$;

5) $xy=\operatorname{ctg}y$.

З. 1) $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\frac{5}{x}}$;

2) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

3) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

4) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

5) $x-y+a\sin y=0$.

Ц. 1) $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$;

2) $y=\operatorname{arcctg}^2 5x\ln(x-4)$;

3) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

4) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{\operatorname{arcctg}3x}$;

5) $4\sin^2(x+y)=x$.

И. 1) $y=5\sqrt[5]{x^5+x+\frac{1}{x}}$;

2) $y=2^x e^{-x}$;

3) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y=(\cos x)^x$;

Ч. 1) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}$;

2) $y=\operatorname{arctg}^3 2x\ln(x+5)$;

3) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

4) $y=\left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos 3x}$;

5) $\ln y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

5) $xy - 6 = \cos y$.

К. 1) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;

2) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;

4) $y = (\cos x)^{x^2}$;

5) $x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$.

Ш. 1) $y = \dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{2+x^3}}$;

2) $y = \operatorname{tg}^3 2x \arcsin x^5$;

3) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

4) $y = (\sin 4x)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$;

5) $\sin y = xy^2 + 5$.

Л. 1) $y = \sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

2) $y = \dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

3) $y = 5^{\operatorname{arctg}^2 x}$;

4) $y = x^{\frac{2}{\ln^2 x}}$;

5) $e^{x+y} - xy$.

Щ. 1) $y = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x} - \dfrac{4}{(x+2)^3}$;

2) $y = \operatorname{ctg}^7 x \arccos 2x^8$;

3) $y = \ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$;

4) $y = \left(\operatorname{tg} 3x^4\right)^{\sqrt{x+3}}$;

5) $\sin^2(3x + y^2) = 5$.

М. 1) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} - 2\sqrt{6x+5}$;

2) $y = \cos 2x \sin^2 x$;

3) $y = \ln \operatorname{arctg} x$;

4) $y = (\operatorname{arctg} 7x)^{\ln(x+1)}$;

5) $e^{xy} - (x+3y) = 0$.

Э. 1) $y = 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$;

2) $y = 2^{\cos x} \operatorname{arcctg} 5x^3$;

3) $y = \ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$;

4) $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$;

5) $y^2 + x^2 = \sin y$.

Н. 1) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

2) $y = \sin^3 5x \cos^5 3x$;

3) $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

4) $y = \left(\ln(7x+4)\right)^{\operatorname{tg} x}$;

5) $y\sin(x+y) - x = 0$.

Ю. 1) $y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \dfrac{2}{2x^2 - 3x + 7}$;

2) $y = 4^{-x} \ln^5(x+2)$;

3) $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$;

4) $y = \left(\ln(7x-5)\right)^{\operatorname{arctg} 2x}$;

5) $e^y = 4x - 7y$.

О. 1) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

2) $y = e^{\cos^2 9x}$;

3) $y = \ln \arcsin x$;

4) $y = \left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos x}$;

5) $\operatorname{tg}(x+y) - xy = 0$;

Я. 1) $y = \dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$;

2) $y = 3^{\operatorname{tg} x} \arcsin 7x^4$;

3) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$;

4) $y = \left(\operatorname{ctg}(7x+4)\right)^{\sqrt{x+3}}$;

5) $3y = 7 + xy^3$.

IV. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: 1) $y = f(x)$;

2) $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

Таблица 4

	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$		$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
А	$\frac{x}{x^2-1}$	$\cos\frac{t}{2}$	$t-\sin t$	**П**	$x e^{-x}$	$4t+2t^3$	$5t^3-3t^2$
Б	$\ln \operatorname{ctg} 2x$	t^3+8t	t^5+2t	**Р**	$x\cos x^2$	$2t^3+t$	$\ln t$
В	$x^3\ln x$	$t-\sin t$	$1-\cos t$	**С**	$\frac{\ln x}{x^2}$	e^{-2t}	e^{4t}
Г	$x\operatorname{arctg} x$	e^{2t}	$\cos t$	**Т**	$\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$	$e^t\cos t$	$e^t\sin t$
Д	$\operatorname{arctg} x$	$3\cos^2 t$	$2\sin^3 t$	**У**	$x e^{\frac{1}{x}}$	$\operatorname{ctg} t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$
Е	$e^{\operatorname{ctg} 3x}$	$3\cos t$	$4\sin^2 t$	**Ф**	$x^2\sin 5x$	t^4	$\ln t$
Ж	$e^x\cos x$	$3t-t^3$	$3t^2$	**Х**	$x^3 e^{4x+3}$	$\sqrt{1-t^2}$	$\frac{1}{t}$
З	$e^{-x}\sin x$	$2t-t^3$	$2t^2$	**Ц**	$5x\ln^2 x$	$t+\sin t$	$2-\cos t$
И	$x\sqrt{1+x^2}$	$6\cos^3 t$	$2\sin^3 t$	**Ч**	$5x2^{-x}$	$e^t\cos t$	$e^t\sin t$
К	$x e^{-x^2}$	$\frac{\ln t}{t}$	$t\ln t$	**Ш**	$e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$	$5\cos t$	$4\sin t$
Л	$x\cos x^2$	$2t-t^2$	$3t-t^3$	**Щ**	$\frac{\ln x}{x^3}$	$\sin 2t$	$\cos^2 t$
М	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$2\cos^2 t$	$3\sin^2 t$	**Э**	$\frac{\sin 2x}{x}$	e^{-3t}	e^{8t}
Н	$\frac{\ln x}{x}$	$2\cos^3 t$	$4\sin^3 t$	**Ю**	$3x3^{-x}$	$t e^t$	$\frac{t}{e^t}$
О	$x^2\ln x$	$\sqrt{t}$	$\sqrt[5]{t}$	**Я**	$x^3\cos x$	$6t^2-4$	$3t^5$

Приложения дифференциального исчисления
Контрольная работа 4

I. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Таблица 5

	$f(x)$	$[a;b]$		$f(x)$	$[a;b]$
А	$x^3-12x+7$	$[0;3]$	**П**	$x^2+\frac{16}{x}-16$	$[1;4]$
Б	$x^5-\frac{5x^3}{2}+2$	$[0;2]$	**Р**	$4-x-\frac{4}{x^2}$	$[1;4]$
В	$\frac{\sqrt{3}X}{2}+\cos x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	**С**	$2\sqrt{x}-x$	$[0;4]$
Г	$3x^4-16x^3+2$	$[-3;1]$	**Т**	$x-4\sqrt{x}+5$	$[1;9]$
Д	x^3-3x+1	$[0.5;2]$	**У**	$\frac{10x}{1+x^2}$	$[0;3]$
Е	x^4+4x	$[-2;2]$	**Ф**	$2x^2+\frac{108}{x}-59$	$[2;4]$
Ж	$\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sin x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	**Х**	$\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$	$[-4;-1]$
З	$81x-x^4$	$[-1;4]$	**Ц**	$8x+\frac{4}{x^2}-15$	$[0.5;2]$
И	$3-2x^2$	$[-1;3]$	**Ч**	$\frac{4}{x^2}-8x-15$	$[-2;-0.5]$
К	$x-\sin x$	$[-\pi;\pi]$	**Ш**	$x-4\sqrt{x+2}+8$	$[-1;7]$
Л	$\frac{x-3}{x^2+7}$	$[2;8]$	**Щ**	$\frac{4x}{4+x^2}$	2$[-4;2]$
М	$\frac{x}{2}+\cos x$	$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$	**Э**	$3-x-\frac{4}{(x+2)^2}$	$[-1;2]$
Н	$\frac{x-2}{x^2+5}$	$[2;8]$	**Ю**	$\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$[-0.5;0]$
О	$\frac{x}{2}-\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$	**Я**	$\frac{3x}{x^2+1}$	$[0;5]$

II. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Таблица 6

	$f(x)$	$f(x)$		$f(x)$	$f(x)$
А	$\frac{4x}{4+x^2}$	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	**П**	$\frac{1}{x^2+x}$	$(x+4)e^{2x}$
Б	$\frac{x^2-1}{x^2+1}$	xe^{-x^2}	**Р**	$\frac{x^2-1}{x^2+2}$	$\frac{e^{2-x}}{2-x}$
В	$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	e^{2x-x^2}	**С**	$\frac{1-2x}{x^2-x-2}$	xe^{2x-1}
Г	$\frac{x^2}{x-1}$	$x^2-2\ln x$	**Т**	$\frac{4x^3+5}{x}$	$\ln\frac{x-1}{x-2}$

Д	$\frac{x^3}{x^2+1}$	$\ln(x^2-4)$	**У**	$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$	$x+\frac{\ln x}{x}$
Е	$\frac{4x^3+5}{x}$	$e^{\frac{1}{2-x}}$	**Ф**	$\frac{x+1}{(x-1)^2}$	$\frac{e^{3-x}}{3-x}$
Ж	$\frac{x^2-5}{x-3}$	$\ln(x^2+1)$	**Х**	$\frac{x}{9-x}$	$x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
З	$\frac{x^4}{x^3-1}$	$\frac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$	**Ц**	$\frac{4x-x^2-4}{x}$	$-\ln\frac{1+x}{1-x}$
И	$\frac{4x^3}{x^3-1}$	$\ln(9-x^2)$	**Ч**	$\frac{x^2}{4x^2-1}$	$x\ln x$
К	$\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	$\frac{\ln x}{x}$	**Ш**	$\frac{x^3}{x^2-x+1}$	$x\ln^2 x$
Л	$\frac{2(x+1)^2}{x-2}$	$(x-2)e^{3-x}$	**Щ**	$\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$	$x e^{\frac{1}{x}}$
М	$\frac{1-x^2}{(x-2)^2}$	$\ln(1+x^2)$	**Э**	$\frac{(x-2)^2}{x+1}$	$\frac{e^{2x+2}}{2x+2}$
Н	$\frac{x^3-8}{2x^2}$	$x^2 e^{-x}$	**Ю**	$\frac{x^2+6}{x^2+1}$	$(x+2)e^{1-x}$
О	$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$	$\ln\frac{x}{x-1}$	**Я**	$\frac{4-x^3}{x^2}$	$\frac{e^{-x-2}}{x+2}$

Интегральное исчисление
Контрольная работа 5

I. Найти неопределенные интегралы. В п. 1) и 2) результаты проверить дифференцированием.

А. 1) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$;
2) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$;
3) $\int \frac{dx}{x^3+8}$;
4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

П. 1) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$;
2) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;
3) $\int \frac{xdx}{x^3+x^2+2x+2}$;
4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

Б. 1) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$;
2) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$;
3) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$;
4) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$.

Р. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
2) $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$;
3) $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2}dx$;
4) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.

В. 1) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;
2) $\int x\cdot 3^x dx$;
3) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$;
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

С. 1) $\int \frac{\sin 2xdx}{3\sin^2 x+4}$;
2) $\int x^2\cos 6xdx$;
3) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx$;
4) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Г. 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$;
2) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
3) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;
4) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Т. 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$;
2) $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;
3) $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1}dx$;
4) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.

Д. 1) $\int \frac{\cos 3xdx}{4+\sin 3x}$;
2) $\int x^2 e^{3x}dx$;

У. 1) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$;
2) $\int e^{3x}\sin xdx$;

3) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; 3) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

4) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$. 4) $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}$.

Е. 1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;

2) $\int x \arcsin\frac{1}{x}dx$;

3) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$;

4) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.

Ф. 1) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

2) $\int (5x-2)\ln x dx$;

3) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$.

Ж. 1) $\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

2) $\int x\ln(x^2+1)dx$;

3) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

Х. 1) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}dx$;

2) $\int x\cos^2 x dx$;

3) $\int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

З. 1) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

2) $\int x\sin x\cos x dx$;

3) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$;

4) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.

Ц. 1) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$;

2) $\int \ln(3+x^2)dx$;

3) $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

И. 1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$;

2) $\int x^2\sin 4x dx$;

3) $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Ч. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}x$;

2) $\int x\arcsin x dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

К. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$;

2) $\int x\ln^2 x dx$;

3) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$;

Ш. 1) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$;

2) $\int (2-x)\sin x dx$;

3) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$;

4) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$.

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x - \sqrt[4]{x}}$.

Л. 1) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$;

2) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$;

3) $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x + 1} dx$;

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Щ. 1) $\int \frac{x^2 dx}{8 + x^3}$;

2) $\int (1 - \ln x) dx$;

3) $\int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x - \sqrt[3]{x^2}}$.

М. 1) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x dx}{\sin x \cos x}$;

2) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$;

3) $\int \frac{2x+1}{x^3 - 1} dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Э. 1) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x dx}{\sin x \cos x}$;

2) $\int (3x + 4) \cos x dx$;

3) $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}}$.

Н. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}$;

2) $\int \cos \ln x dx$;

3) $\int \frac{(x^2 - 3) dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$;

4) $\int \sqrt{\frac{3 + 2x}{x - 2}} dx$.

Ю. 1) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$;

2) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$;

3) $\int \frac{4x - x^2 - 12}{x^3 + 8} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{\sqrt[3]{x^2} + 3}$.

О. 1) $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx$;

2) $\int x^2 5^{\frac{x}{2}} dx$;

3) $\int \frac{x - 1}{4x^3 + x} dx$;

4) $\int \frac{(3 + \sqrt[3]{x+2}) dx}{(1 + \sqrt{x+2})(\sqrt[6]{x+2})^5}$.

Я. 1) $\int \sqrt[3]{1 + \sin x} \cos x dx$;

2) $\int x \ln^2 x dx$;

3) $\int \frac{3 - 9x}{x^3 - 1} dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x-2} dx}{1 + \sqrt{x-2}}$.

II. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

А. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

Л. $\int_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

Х. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}$.

Б. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$.

М. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Ц. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx$.

В. $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$. **Н.** $\int\limits_{4}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$. **Ч.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

Г. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **О.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{x-1}$. **Ш.** $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-3x}dx$.

Д. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$. **П.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\operatorname{tg}xdx$. **Щ.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

Е. $\int\limits_{-3}^{2}\frac{dx}{(x+3)^2}$. **Р.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$. **Э.** $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

Ж. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. **С.** $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$. **Ю.** $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

З. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$. **Т.** $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$. **Я.** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)}}$.

И. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. **У.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}xdx$.

К. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$. **Ф.** $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{16x^4+1}$.

III. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

А. $y=3x^2+1,\ y=3x+7$. **Е.** $x=a(1-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

Б. $3x^2=4y,\ 2x-4y+1=0$. **Ж.** $r=3(1+\cos\varphi)$.

В. $y=x+1,\ y=\cos x,\ y=0$. **З.** $r=4\sin 2\varphi$.

Г. $x=7\cos^3 t,\ y=7\sin^3 t$. **И.** $r=4\cos 3\varphi$.

Д. $x=3\cos t,\ y=2\sin t$. **К.** $r=2(1-\cos\varphi)$.

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ω вокруг указанной оси координат.

Л. $y=x^2,\ y=\sqrt{x};\ Ox$. **Р.** $y=2-\frac{1}{2}x^2,\ x+y=2;\ Oy$.

М. $y=\frac{2}{1+x^2},\ y=x^2,\ Oy$. **С.** $y=3\sqrt{1-x^2},\ x=\sqrt{1-y};\ Ox$.

Н. $y=-4x^3,\ x=0,\ y=4;\ Ox$. **Т.** $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t;\ Ox$.

О. $y^2=4-x,\ x=0;\ Oy$. **У.** $\begin{cases}x=6(t-\sin t),\\ y=6(1-\cos t);\end{cases}\ Ox$.

П. $y=x^2,\ y^2=x;\ Ox$.

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии

Ф. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \le x \le 2)$.

Щ. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Х. $y = 1 - \ln\cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{8}\right)$.

Э. $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$.

Ц. $r = 3(1 - \cos\varphi)$.

Ю. $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$.

Ч. $r = 3\cos\varphi$.

Я. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Ш. $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения
Контрольная работа 6

I. Найти общее решение дифференциального уравнения.

А. $(x^2-y^2)y'=2xy$; $(1-x^2)y''=xy'$.

Б. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; $2yy''+(y')^2+(y')^4=0$.

В. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Г. $xy'+y=3$; $y''+\frac{y'}{x}=x^2$.

Д. $xy'+x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-y=0$; $1+(y')^2+yy''=0$.

Е. $y'\cos x=(y+1)\sin x$; $(1+y)y''-5(y')^2=0$.

Ж. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; $xy''+2y'=x^3$.

З. $x^2y'-2xy=3$; $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

И. $x^2y'+y^2-2xy=0$; $y''-2y'\operatorname{tg}x=\sin x$.

К. $xy'+y=x+1$; $3yy''+(y')^2=0$.

Л. $\mathrm{e}^{x+3y}\,y'=x$; $y''x\ln x=y'$.

М. $xy'-3y=x^4\,\mathrm{e}^x$; $(1-x^2)y''-xy'=2$.

Н. $y'\sin x=y\ln y$; $2xy'y''=(y')^2-1$.

О. $(y^2-3x^2)y'+2xy=0$; $x^3y''+x^2y'=1$.

П. $y'\cos x+y\sin x=1$; $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Р. $y'=(2x-1)\operatorname{ctg}y$; $y''=y'\mathrm{e}^y$.

С. $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$; $(y')^2+2yy''=0$.

Т. $xy'+y=\sin x$; $y''x\ln x=y'$.

У. $(1+\mathrm{e}^x)yy'-\mathrm{e}^y=0$; $xy''-y'=x^2\,\mathrm{e}^x$.

Ф. $xy'=y-x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $x^2y''+xy'=1$.

Х. $x^2y'+2xy=1$; $y''+2y(y')^3=0$.

Ц. $x(y^2+3)-\mathrm{e}^x\,yy'=0$; $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

Ч. $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$; $x^2y''+xy'=1$.

Ш. $y'-y\cos x=-\cos x$. $xy''=y'+x^2$.

Щ. $y'\sin y\cos x=\cos y\sin x$; $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

Э. $y+\sqrt{xy}=xy'$; $y''\operatorname{tg}x=y'+1$.

Ю. $x^2y'+xy+1=0$; $y''=2-y$.

Я. $y'=(2y+1)\operatorname{tg}x$; $y''(1-y)+2(y')^2=0$.

II. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

А. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

Б. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; $y(0)=\frac{4}{3},\ y(0)=\frac{4}{3}$.

В. $y'' + 4y = e^{-2x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Г. $y'' - 2y' + 5y = x e^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Д. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

Е. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Ж. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

З. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

И. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

К. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.

Л. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}$; $y(0) = \frac{2}{3},\ y(0) = 2$.

М. $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

Н. $y'' + y' - 6y = 50\cos x$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 5$.

О. $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

П. $y'' - 4y' + 5y = 10x$; $y(0) = 10,\ y'(0) = 6$.

Р. $y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2$; $y(0) = 3,\ y(0) = \frac{4}{3}$.

С. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{x}$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 8$.

Т. $y'' - 4y' + 4y = -169\sin 3x$; $y(0) = -12,\ y'(0) = 16$.

У. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$; $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

Ф. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$; $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

Х. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

Ц. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$; $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.

Ч. $y'' + 6y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x)$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.

Ш. $y'' - 4y' + 20y = 16x e^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Щ. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos x + 24\sin 2x$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.

Э. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

Ю. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

Я. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.

Теория рядов

Контрольная работа 7

I. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Таблица 7

	u_n		u_n		u_n
А	$\frac{n+3}{n^3-2}$	**Л**	$\frac{2^n}{3n!}$	**Х**	$\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$
Б	$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	**М**	$\frac{n^3}{(2n)!}$	**Ц**	$\frac{10^3 n!}{(2n)!}$
В	$\frac{1}{(2n+1)^2-1}$	**Н**	$\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$	**Ч**	$\frac{n^n}{3^n n!}$
Г	$\frac{3^n}{(2n)!}$	**О**	$\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$	**Ш**	$\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$
Д	$\frac{n^3}{e^n}$	**П**	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	**Щ**	$\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$
Е	$\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	**Р**	$\frac{n}{(n+1)^3}$	**Э**	$\frac{3^n}{4^n(n+2)!}$
Ж	$\frac{2n+1}{\sqrt{2^n n}}$	**С**	$\frac{1}{n^2-1}$	**Ю**	$\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$
З	$\frac{n^2}{(3n)!}$	**Т**	$\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$	**Я**	$\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$
И	$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	**У**	$\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$		
К	$\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$	**Ф**	$\frac{4^n}{(n!)^2}$		

II. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Таблица 8

	a_n		a_n		a_n
А	$\frac{2^n}{n^2+1}$	**Л**	$\frac{2^n}{\sqrt{2n-1}}$	**Х**	$\frac{2^n}{2n-1}$
Б	$\frac{2^n}{n(n+1)}$	**М**	$\frac{1}{5^n(n-1)}$	**Ц**	$\frac{1}{n^2}$
В	$\frac{1}{2^n n}$	**Н**	$\frac{1}{n(n+1)}$	**Ч**	$\frac{1}{5^n}$
Г	$\frac{3^n}{\sqrt{n}}$	**О**	$\frac{10^n}{\sqrt{n}}$	**Ш**	$\frac{5^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$

Д	$\frac{n}{3^n(n+1)}$	**П**	$\frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-2)}}$	**Щ**	$\frac{2^n}{\sqrt{n}}$
Е	$\frac{5^n}{\sqrt{n}}$	**Р**	$\frac{(n+1)^2}{2^n}$	**Э**	$\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$
Ж	$\frac{1}{n(n+1)}$	**С**	$\frac{5^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$	**Ю**	$\frac{1}{2^n\sqrt{3n-1}}$
З	$\frac{n+1}{3^n(n+2)}$	**Т**	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	**Я**	$\frac{1}{5^n(n-1)}$
И	$\frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}$	**У**	$\frac{n+1}{2^n 3^{n+1}}$		
К	$\frac{n+2}{n(n+1)}$	**Ф**	$n(n+1)$		

III. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a;b)$.

Таблица 9

	$f(x)$	$(a;b)$		$f(x)$	$(a;b)$
А	$x+1$	$(-\pi;\pi)$	**П**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ x+2, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Б	x^2+1	$(-2;2)$	**Р**	$\begin{cases} \frac{1}{2}-x, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
В	$\frac{1}{2}(\pi-x)$	$(-\pi;\pi)$	**С**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ \frac{x}{2}+1, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Г	$1+\lvert x\rvert$	$(-1;1)$	**Т**	$\begin{cases} 2x+3, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Д	$1-x$	$(-2;2)$	**У**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ 3-x, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Е	$\lvert x\rvert$	$(-\pi;\pi)$	**Ф**	$\begin{cases} x-2, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Ж	$x-1$	$(-1;1)$	**Х**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ 4x-3, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
З	x^2	$(-1;1)$	**Ц**	$\begin{cases} 5-x, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
И	$2+\lvert x\rvert$	$(-1;1)$	**Ч**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ 3x-1, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
К	x	$(-\pi;\pi)$	**Ш**	$\begin{cases} 3-2x, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
Л	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ x, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$	**Щ**	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$
М	$\begin{cases} 0, & -\pi<x<0, \\ 4-2x, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$	**Э**	$\begin{cases} 5x+1, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	$(-\pi;\pi)$

Н	$\begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x-1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$(-\pi; \pi)$	**Ю**	$\begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1-4x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$(-\pi; \pi)$
О	$\begin{cases} 2x-1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$(-\pi; \pi)$	**Я**	$\begin{cases} 3x+2, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$(-\pi; \pi)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Веретенников В. Н. Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной. – СПб.: РГГМУ, 2008. – 254 с.
2. Веретенников В. Н. Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра. Учебные пособия. – СПб.: РГГМУ, 2004.
3. Веретенников В. Н. Математика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ. – СПб.: изд. РГГМУ, 2000. – 68 с.
4. Веретенников В. Н. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Индивидуальное домашнее задание. – СПб.: РГГМУ, 2004.
5. Веретенников В. Н. Программа дисциплины “Математика” для высших учебных заведений. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 21 с.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I–III. – М.: Высшая школа, 1980.
7. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. – 528 с.: с ил.
8. Зайцева И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография НОУ ВПО СКСИ. Ставрополь, 2009. – 116 с.
9. Зайцева И.В., Малафеев О.А. Линейная алгебра с приложениями к математическому анализу и моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы. - Санкт-Петербург, 2021. (2-е издание, переработанное и дополненное). – 382 с.
10. Зайцева И.В., Ржонсницкая Ю.Б. Математика и статистика. - Санкт-Петербург, 2021. – 184 с.
11. Колосова А.А., Степанов В.Е.- Матрицы и определители, решение задач. 18. Льюс, Р.Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х. Райфа. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 644 с.
12. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 1– Т. 3. – М.: Эдиториал УРСС, 2000–2001.
13. Малафеев О. А. О существовании значения игры преследования // Сибирский журнал исследования операций. – 1970. – № 5. – С. 25–36.
14. Малафеев О. А. О существовании обобщенного значения динамической игры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1972. – № 4. – С. 41–46.
15. Малафеев О. А. Управляемые конфликтные системы. – СПб.: СПбГУ, 2000. – 280 с.
16. Малафеев О. А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемые динамические процессы. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 1990. – 103 с.
17. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости, надежности). – СПб.: Мобильность-плюс, 2006. – 1006 с.

18. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2001. – 101 с.
19. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2000. – Т. 1. – 283 с.
20. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2001. – Т. 2. – 294 с.
21. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 1998. – 317 с.
22. Малафеев, О.А. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности) / Малафеев О. А., А. Ф. Зубова. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. – 1006 с.
23. Меньшиков, Г. Г. Практические начала интервальных вычислений: учебное пособие / Г.Г. Меньшиков. – Л.: РИО ЛГУ, 1991. – 92 с.
24. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – СПб: Лань, 1997. – 727 с.
25. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985, т. 1, 2.
26. Рябушко А. П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. В 3 ч. – Мн. Выш. шк., 1991.
27. Щипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.

Для заметок

Учебное издание

Зайцева Ирина Владимировна,
канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Беликова Галина Иосифовна,
старший преподаватель кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Бровкина Екатерина Анатольевна,
старший преподаватель кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Герасименко Николай Иванович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Петрова Вера Валерьевна,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Ржонсницкая Юлия Борисовна,
д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Фадеев Сергей Николаевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»

Математика

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 01.07.2022. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7. Тираж 10 экз. Заказ № 1250.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.