Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
(РГГМУ)

**Истомин Е.П., Истомин И.Е., Жарикова М.А.,
Новожилова Е.С., Соколов А.Г.**

ВВЕДЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Учебное пособие

Под общей редакцией
доктора технических наук, профессора Е.П. Истомина

Санкт-Петербург 2023

УДК 551.509.3

ББК 22.183.4я73

И89

Введение в моделирование систем: учебное пособие Истомин Е.П. [и др.]; под общ. ред. Е.П. Истомина. - СПб.: РГГМУ, 2023. – 182 с.

Авторский коллектив:

Истомин Е.П., Истомин И.Е., Жарикова М.А., Новожилова Е.С., Соколов А.Г.

Рекомендовано в качестве учебного пособия Ученым Советом Института информационных систем и геотехнологий РГГМУ

В учебном пособии раскрываются вопросы основ моделирования систем, что является одним из ключевых аспектов профессионального цикла подготовки специалистов и бакалавров инженерных специальностей.

Цель данного учебного пособия – формирование у студентов комплекса научных знаний о принципах и методах моделирования систем различного назначения.

Учебное пособие разработано с учетом требований государственных образовательных стандартов и предназначен для студентов высших учебных заведений инженерных направлений подготовки, а также подготовки, переподготовки и повышения квалификации в сфере научной и практической деятельности для специалистов в области моделирования и управления организационно-техническими системами, студентов, аспирантов и преподавателей вузов.

Основы моделирования систем: учебное пособие под общей редакцией Е.П. Истомина

Издательство: РГГМУ

Подписано в печать 12.12.2023 г.

Печ. листов 12,25. Тираж 200 экз.

Электронное издание в авторской редакции

© Истомин Е.П., Истомин И.Е., Жарикова М.А., Новожилова Е.С., Соколов А.Г.

© РГГМУ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть имеется некоторая конкретная система. Лишь в единичных случаях мы имеем возможность провести с самой этой системой все интересующие нас исследования. В большинстве же ситуаций по разным причинам (сложность, габаритность, недоступность и др.) мы вынуждены рассматривать не саму систему, а в той, или иной степени детализованное (формальное) описание тех ее особенностей, которые существенны для целей исследования. Такое формальное описание – представление субъекта об объекте в терминах существенных признаков – принято называть моделью объекта моделирования (системы).

Пример. Для исследования радиотехнического элемента можно подавать на его входы все интересующие нас комбинации сигналов и снимать соответствующие выходные сигналы. Это будет полный натурный эксперимент. Если же описать прохождение сигналов внутри элемента формальным образом (дифференциальное уравнение, передаточная функция и др.), то мы можем без самой системы определять выходные сигналы по входным. Это – работа с моделью радиотехнического элемента.

Возникает вопрос – что лучше? Радиолюбителю легче тестировать элемент, чем вводить и рассматривать уравнения. Но проектировщик радиоаппаратуры уже предпочтет хорошо описывающие элемент зависимости для того, чтобы с их помощью подобрать нужные параметры или даже саму структуру элемента.

Методы теории моделирования незаменимы при малой изученности сложных объектов, при отсутствии математического описания объектов или сложности аналитических исследований.

Данное пособие предназначено для формирования у студентов инженерных специальностей системного представления о моделировании, знакомства с основными видами моделей систем, методами и процессами разработки моделей.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Определения моделирования

Исследование свойств различных объектов позволяет сделать вывод об их сходстве или различии – например, существенное сходство или несущественное и аналогично, существенное или несущественное различие. В случае существенного сходства объектов O_1 и O_2 появляется возможность изучения важнейших свойств O_1 с помощью O_2. Замещение объекта O_1 объектом O_2 для изучения и фиксации важнейших свойств O_1 называется **моделированием** объекта O_1 с помощью O_2. В этом случае объект O_1 (замещаемый, моделируемый) называется ***оригиналом*** (натурой), а замещающий (моделирующий) O_2 – ***моделью***.

Поскольку определение важнейших свойств, по которым проводится моделирование, всегда связывается с целями субъекта моделирования, можно определить ***модель как представление субъекта об объекте в терминах существенных признаков***.

Фиксация свойств оригинала представляет частную задачу моделирования. Более общим и важным является исследование оригинала с помощью модели, всегда сопровождающееся фиксацией его существенных свойств. В общем виде **процесс моделирования** состоит из нескольких этапов [1]:

- постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию (цели субъекта и предмет исследований объекта);
- констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала в натуре;
- выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию;
- исследование модели в соответствии с поставленной целью;
- перенос результатов исследований модели на оригинал;
- проверка полученных результатов моделирования.

Основными задачами теории моделирования являются выбор моделей и перенос результатов исследования моделей на оригинал, что предполагает разработки специальных методов в различных областях науки и техники.

Классификация моделей может быть выполнена на основании признаков, важнейшими из которых являются:

закон функционирования и характерные особенности выражения свойств и отношений оригинала – логические модели (образные, знаковые и образно-знаковые) и материальные (функциональные, геометрические, функционально-геометрические);

основания для преобразования свойств и отношений модели в свойства и отношения оригинала – условные, аналогичные и математические модели.

Логические модели функционируют по законам логики в сознании человека, *материальные* – по объективным законам природы.

Образные (иконические) модели выражают свойства оригинала с помощью наглядных чувственных образов, имеющих прообразы среди элементов оригинала или объектов материального мира (например, в кинетической теории газов частицы газа образно моделируются в виде упругих шаров, воздействующих друг на друга во время столкновений).

Знаковые (символические) модели выражают свойства оригинала с помощью условных знаков или символов. К ним относят математические выражения и уравнения, физические и химические формулы и т.п.

Образно-знаковые модели обладают признаками образных и знаковых – схемы, графики, чертежи, графы и т.д.

Функциональные, геометрические и функционально-геометрические модели отражают соответственно только функциональные, только пространственные и одновременно функциональные и пространственные свойства оригинала. В зависимости от физической однородности и разнородности с оригиналом функциональные и функционально-геометрические модели разделяют на *физические* и *формальные*. Например, последовательное соединение резистора и конденсатора является физической моделью потребителя энергии генератора. Если оригинал – маятник, то электрический колебательный контур является его формальной моделью

Условные модели выражают свойства и отношения оригинала на основании принятого условия или соглашения. У таких моделей сходство с оригиналом может совершенно отсутствовать. К ним относятся все *знаковые* и *образно-знаковые* модели. *Аналогичные* модели обладают сходством с оригиналом, достаточным для перехода к оригиналу на основании умозаключения об аналогии (на основании логического вывода, что оригинал, возможно, обладает некоторым признаком, имеющимся у модели, так как другие признаки оригинала сходны с признаками модели).

Математические модели обеспечивают переход к оригиналу, фиксацию и исследование его свойств и отношений с помощью математических методов. *Расчетные* модели выражают свойства и отношения оригинала с помощью математических представлений – формул, уравнений, графиков, таблиц, операторов, алгоритмов и т.д. В *соответственных* моделях переменные величины связаны с соответствующими переменными величинами оригинала определенными математическими зависимостями. Если, например, два логических объекта – функции $\boldsymbol{Z = XY}$, $\boldsymbol{z = x+y}$, и эти функции, а также их независимые переменные связаны соотношениями $\boldsymbol{x = lgX}$, $\boldsymbol{y = lgY}$, $\boldsymbol{z = lgZ}$, то каждый из этих объектов может служить соответственной моделью другого. Математические модели имеют признаки условных моделей и могут обладать признаками аналогичных.

Важнейшей разновидностью соответственных моделей являются *подобные*, переменные величины которых пропорциональны соответствующим переменным оригинала. Они также могут быть логическими и материальными. Подобные материальные модели разделяют на *аналоговые (непрерывные), цифровые (дискретные) и аналого-цифровые (комбинированные, гибридные)* в зависимости от того, какие величины связывает их математическое описание – непрерывные, дискретные или одновременно непрерывные и дискретные. Подобие оригинала и его материальной модели позволяет использовать последнюю в качестве вычислительного устройства для решения уравнений, описывающих оригинал.

1.2 Основные понятия, применяемые при моделировании систем

Суть моделирования заключается в том, чтобы как можно точнее, полнее и нагляднее отобразить моделируемый объект и динамику его функционирования. Наиболее полно эти требования реализуются на основе **системного анализа объекта и системного синтеза модели**. Оба понятия связаны с определением **системы** и ее атрибутов, а также с оценкой **сложности систем**, **качества управления системами**, их **надежностью** и **самоорганизацией**. Рассмотрение этих понятий позволит сформировать общий язык моделирования.

Система. Это понятие давно стало ходовым и его используют для характеристики сложного явления или объекта, включающего множество составных частей различного назначения (компоненты системы - подсистемы, элементы), взаимосвязанных между собой (связи, общие законы функционирования). Логика определения понятия система включает несколько уровней:

- ***множество компонентов или разнообразие элементов множества***, под которыми понимают совокупность каких-либо объектов, которые являются составными частями системы;

- если все разнообразие элементов множества упорядочить по каким-либо признакам (решаемые задачи, подчиненность, ответственность и др.), тот мы получим ***упорядоченную совокупность элементов множества***;

- дополнение упорядоченного множества элементов совокупностью связей и взаимосвязей между ними образует ***структуру системы*** – организует множество элементов (организованная система). В зависимости от упорядоченности и выделяемых связей для каждой системы можно построить несколько типов структур;

- искусственные системы как целостное единство, создаваемые для удовлетворения соответствующих потребностей людей, имеют общую цель функционирования – являются ***целенаправленными***.

Только при наличии всех перечисленных признаков можно рассматривать объект моделирования как систему и реализовать **системный подход** – метод исследования и моделирования. Причем представление системы всегда относительно, так как в ней можно выделить системы меньшего масштаба (подсистемы), а сама она может быть составной частью системы большего масштаба.

Схематично модель системы представлена на рис. 1.1 [2].

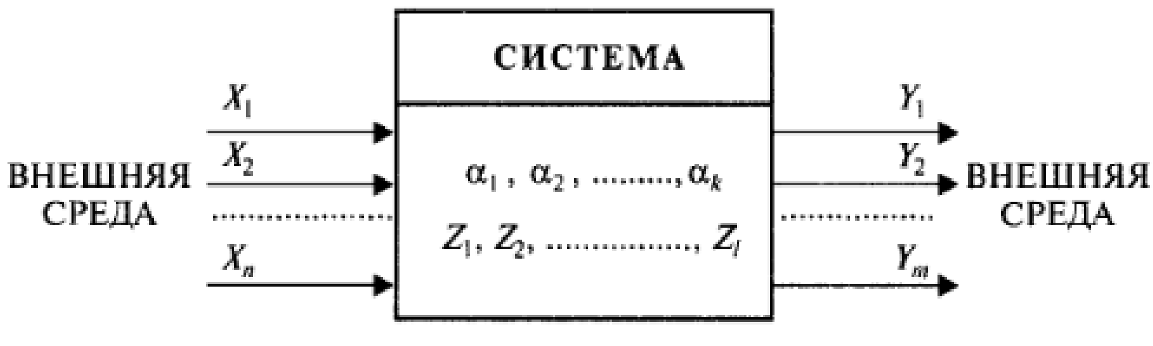


Рисунок 1.1 – Обобщенная модель системы

Элементы X_1, X_2, …, X_n называются входами системы (входными переменными), Y_1, Y_2, …, Y_m – выходами системы (выходными переменными), Z_1, Z_2, …, Z_l характеризуют состояние системы. Символы α_1, α_2, …, α_k обозначают параметры системы. Входы и выходы осуществляют связь системы с внешней средой (с другими системами). Состояния Z_1, Z_2, …, Z_l фиксируют все изменения, происходящие в системе из-за прихода входных сигналов или по причине внутренних изменений.

В конкретных моделях систем входы, выходы и состояния связаны между собой функциональными, статистическими или другими зависимостями. Задавая определенные значения входных сигналов, исходных параметров, зависимости между переменными при помощи соответствующих методов, исследуют модель по интересующим показателям.

Модели различных систем могут образовывать более крупные и сложные модели. Для этого модели соединяют через их входы и выходы (рис. 1.2).

Сопряжение моделей между собой задается при помощи ***оператора сопряжений***, который указывает на наличие или отсутствие связей между отдельными входами и выходами (для модели на рис. 1.2 оператор в матричной форме показан на рис. 1.3).

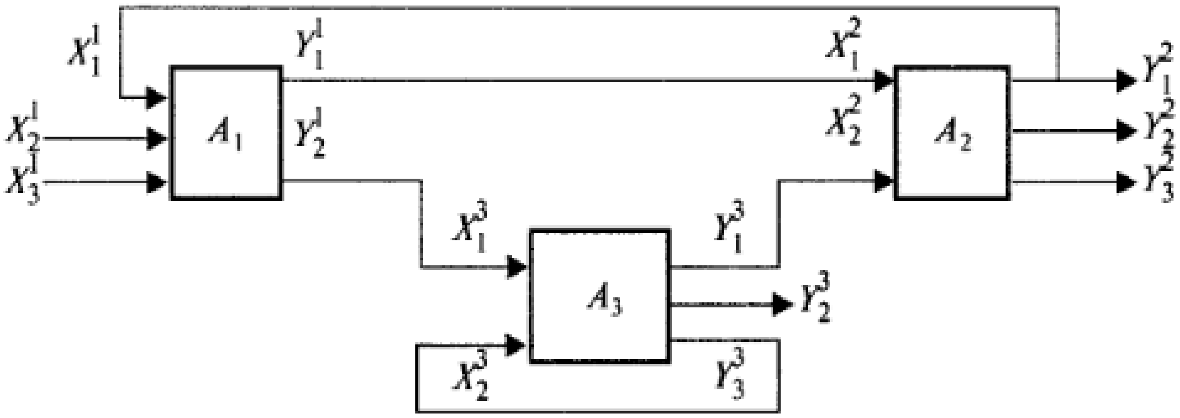


Рисунок 1.2 – Пример соединения систем

При наличии связей между входами и выходами в матрице проставляется цифра 1, в противном случае клетка матрицы остается пустой. Любую совокупность моделей систем, сопряженных друг с другом, можно представить в виде одной модели системы с новыми наборами входов, выходов, состояний и параметров.

Оператор сопряжения

Вход	Выход							
	Y_1^1	Y_2^1	Y_1^2	Y_2^2	Y_3^2	Y_1^3	Y_2^3	Y_3^3
X_1^1			1					
X_2^1								
X_3^1								
X_1^2	1							
X_2^2						1		
X_1^3		1						
X_2^3								1

Рисунок 1.3 – Пример оператора сопряжения систем в матричной форме

Функционирование системы во времени характеризуется появлением входных, выходных сигналов и изменением состояний в векторных пространствах входных, выходных сигналов и состояний.

Под пространством сигналов или состояний понимается n-мерное векторное пространство типа

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \ldots \times \bar{A}_\gamma \times \ldots \times \bar{A}_n, \gamma = \overline{1, n}$$

Точка в пространстве соответствует конкретному значению сигнала или состояния. Так, если задано пространство состояний $\bar{Z} = \bar{Z}_1 \times \bar{Z}_2 \times \ldots \times \bar{Z}_\gamma \times \ldots \times \bar{Z}_n$, где $Z_\gamma \in \bar{Z}$ – ось пространства, то задание конкретного состояния системы означает задание точки $Z \subset \bar{Z}$ в пространстве состояний с ее координатами. Координатами точки Z в пространстве $\bar{Z}$ являются проекции этой точки на все оси пространства, т.е. $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Частные случаи пространств сигналов и состояний – двух- и трехмерные пространства (рис. 1.4 – двумерное пространство).

Последовательность состояний системы в различные моменты времени ***t₁, t₂, …, tₙ*** называется **траекторией движения системы**, которая показывает изменение состояния системы во времени.

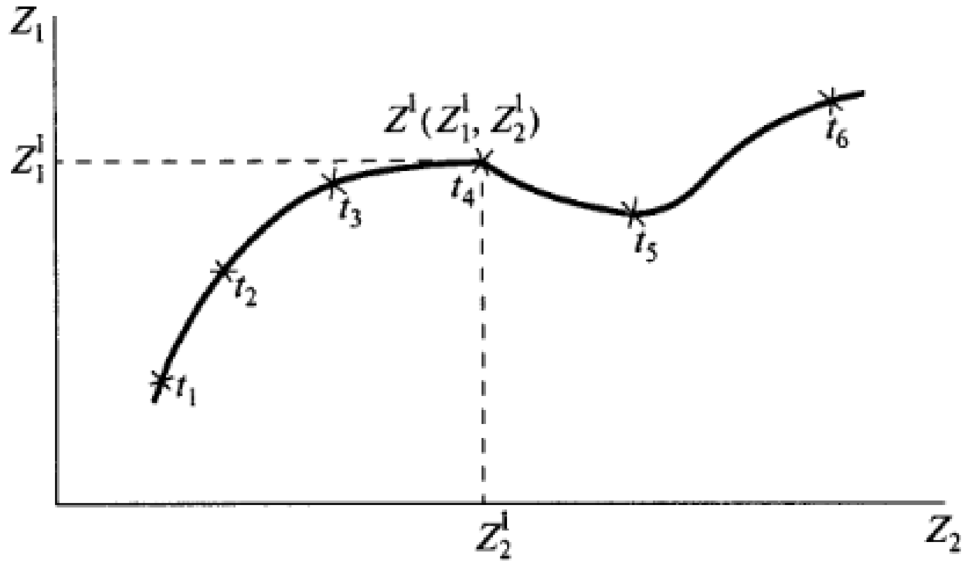


Рисунок 1.4 – Пример двумерного пространства состояний системы

Реакция системы на какой-либо входной сигнал называется **переходным процессом**. Понятие переходного процесса можно применить как для состояний, так и для выходов системы (рис. 1.5).

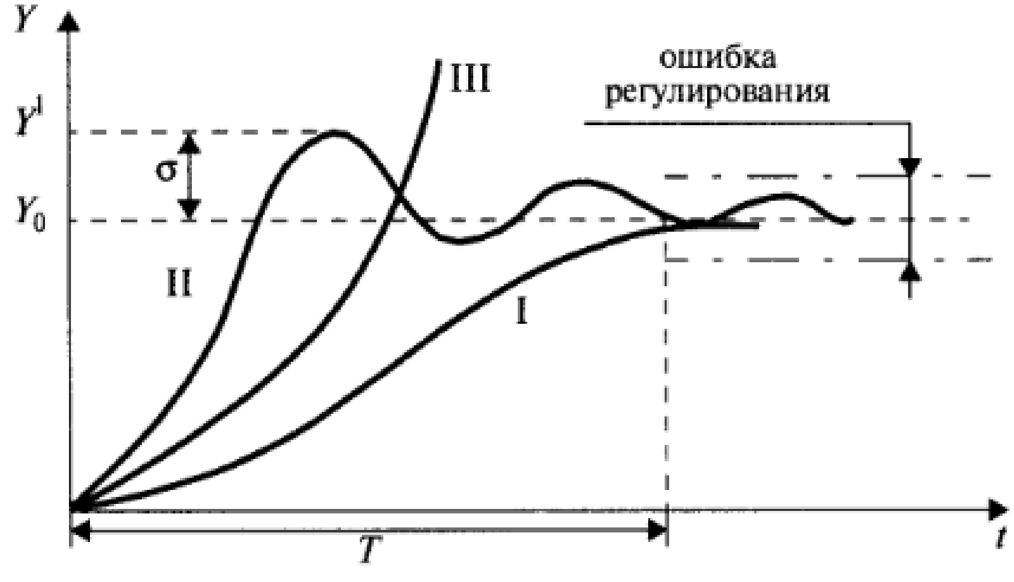


Рисунок 1.5 – Переходные процессы систем

Эти процессы характеризуются:

- временем переходного процесса ***T***;

- величиной перерегулирования $\boldsymbol{\sigma}$ – максимальное отклонение ***Y*** от $\boldsymbol{Y_0}$ за время переходного процесса;

- величиной колебательности переходного процесса $\boldsymbol{\xi}$ – коэффициент демпфирования и др.

Переходный процесс – это показатель функционирования системы во времени, указывающий, как быстро и в какое новое состояние перейдет система в результате появления входного сигнала. Система находится в **равновесии**, если ее состояние может оставаться неизменным неограниченное время. В системе может быть несколько состояний равновесия. Она может переходить из одного состояния равновесия в другое под действием входных сигналов или внутренних причин.

Система называется устойчивой, если под действием входного сигнала она переходит из одного равновесного состояния в другое (возвращается в исходное состояние). На рис. 1.5 неустойчивой является система III.

Сложность системы. Объекты моделирования различаются по степени сложности. Для различения **уровня сложности** используем количество разнообразия – количество компонентов системы того или иного вида, из связей и взаимосвязей, отношений порядка между ними.

В таком случае можно утверждать, что каждый сложный объект обладает определенным разнообразием, а уровень сложности характеризуется числом компонентов любой природы, входящих в систему как объект моделирования.

Оценим количество разнообразия в системе [3]. Пусть наша система состоит из различных типов элементов. Для каждого элемента $\boldsymbol{i}$-го типа ($\boldsymbol{i}$ = 1, $\boldsymbol{n}$), установим весовой коэффициент $\boldsymbol{S_i}$, характеризующий сложность этого элемента. Тогда количество разнообразия в системе будет:

$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \, k_i,$

где k_i – число элементов $\boldsymbol{i}$-го типа, входящих в систему.

Учесть число связей с определенной степенью точности можно следующим образом. Общее число элементов $N = \sum_{i=1}^{n} k_i$ и максимально возможное число связей между элементами будет $N(N-1)$. Пусть фактическое число связей, реализуемых в системе, будет $\boldsymbol{M^{+}}$, тогда величина

$$\alpha = M^{+}/N(N-1) \approx M^{+}/N^{2}$$

фиксирует долю реализованных связей, а количество разнообразия системы можно оценить величиной

$S = (1 - \gamma\alpha) \sum_{i=1}^{n} S_i k_i,$

где γ – коэффициент, учитывающий разнообразие связей по сравнению со сложностью элементов.

Эквивалентность объектов моделирования по их сложности оценивается при совпадении численного значения сложности S. Однако это не означает эквивалентности по целевым функциям или критериям их достижения, а также по виду решаемой задачи или типу применяемой модели.

Управление системой. Под управлением системой понимают процесс, обеспечивающий достижение системой определенной цели. Это понятие может рассматриваться как управленческая деятельность и как управленческий процесс.

При рассмотрении управления как ***управленческой деятельности*** выделяют субъект управления (орган управления) и объект управления. В этом случае управление сводится к выбору *цели управления, методов и средств ее достижения, постановке задач управления, выбору исполнителей и контролю*. Основу управленческой деятельности (с точки зрения системного подхода) составляет отношение субъекта и объекта управления в конкретной системе.

Управление как процесс рассматривается независимо от конкретных характеристик объекта и субъекта. В этом случае управление сводится к определению параметров процесса управления и исследованию структурных особенностей процесса, последовательности его этапов. При такой трактовке выделяют управляющую и управляемую подсистемы.

Понятие управления как процесса дает возможность управлять системой, не познавая полностью объект управления (управлять автомобилем, не зная детально его устройства; настраивать телевизор, не имея представления о его конструкции). Такой подход определяют как функциональный.

Различие понятий управления проявляется при принятии решений. Если управление рассматривается как процесс, то принятие решения сводится к выбору одного из вариантов управления, оптимального по заранее заданному критерию. Критерий в данном случае не является предметом принятия решения. При рассмотрении управления как управленческой деятельности субъект управления должен сам вырабатывать критерии и цели управления, корректировать их в процессе реализации решения. В этом смысле управление как деятельность – более широкое понятие, чем управление как процесс. Управленческая деятельность в целом гораздо менее формализуемое явление.

При моделировании используются оба понятия управления, однако, как правило, цели объектов моделирования задаются заранее и другими методами. Методы моделирования ориентированы на определение наилучших путей управления системой для достижения заранее заданных целей функционирования.

Модель системы, как объекта моделирования, способного вырабатывать и корректировать цели своего функционирования, можно представить как обычную систему с дополнительными управляющими входами (рис. 1.6)

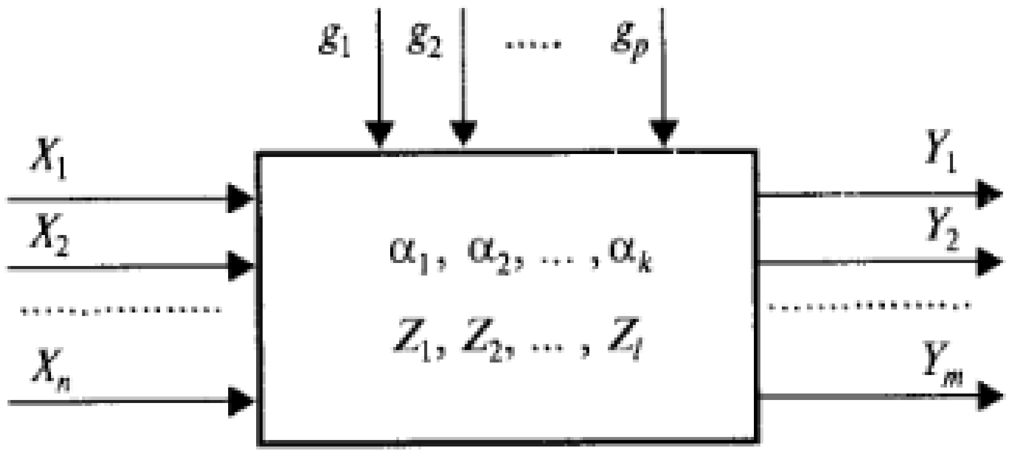


Рисунок 1.6 – Модель системы с корректируемыми целями

Управляющие входы ***g_1, g_2, …, g_p*** предназначены для изменения цели функционирования системы, которое может произойти только из внешней для данной системы среды.

Всякое управление в таких системах осуществляется как информационный процесс – получение, обработка и передача информации. Изменения состояния системы в результате управления происходит на основе полученной информации (входные сигналы) и является реакцией на управляющее воздействие (команду), которая вырабатывается в системе после анализа информации входного сигнала (рис. 1.7).

Здесь ***Z_0*** – исходное состояние системы, а ***Z_{n1}, Z_{n2}, Z_{n3}*** – новые состояния системы, полученные при различной интенсивности управляющего сигнала.

Управление системой неразрывно связано с понятием цели управления системой (цели управления). Под ***целью управления*** принято понимать будущее, желаемое, достижимое состояние системы. Цель – это своеобразный эталон функционирования системы, отражающий видение субъектом управления будущего желаемого состояния системы [4].

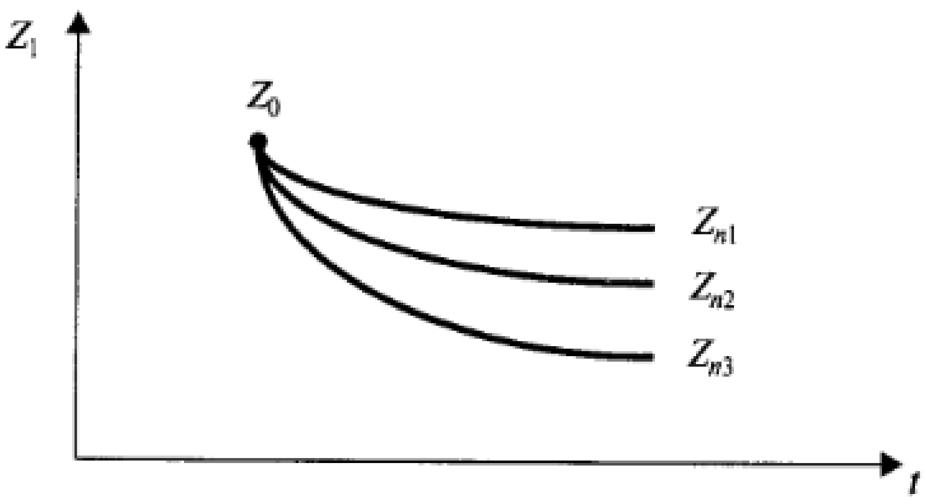


Рисунок 1.7 – Изменения состояния системы

При моделировании цель может быть представлена в виде целевой функции - математического выражения динамики связей входов и выходов системы друг с другом, отражающих требуемое поведение (траекторию движения) системы.

Понятие цели системы – идеализированное понятие. Обычно выходные сигналы или состояния системы находятся вблизи целевых значений или колеблются около них. Чтобы оценить степень приближения к цели, вводят понятие ***критерия достижения цели*** (критерия цели) как меру эффективности системы.

Критерием цели называют правило, позволяющее оценить фактическое поведение системы (состояние входов, выходов, параметров системы, значений целевой функции) по сравнению с желаемые (целевым) поведением и зафиксировать достаточность или недостаточность этой оценки. По критерию цели отбирают вариант поведения системы (оптимальный, рациональный, удовлетворительный и др.), отвечающий цели системы. Способ задания критерия может быть различным – максимизирующий целевую функцию и другой.

Принципы определения целевых функций:

- принцип *однозначности* требует наличия единственной целевой функции системы. При наличии нескольких целевых функций – их следует объединить (обобщить);

- принцип *управляемости* выражает необходимость зависимости целевой функции от параметров управления системой (входных сигналов);

- принцип *подходящей формы* заключается в такой формы целевой функции, при которой она имела бы практический смысл, т.е. задавала бы экстремальность, попадание в определенный интервал, какие-либо другие требования к показателям и была однозначной.

Примерами целевых функций сложных систем могут быть:

- функция прибыли (экономические системы);
- функция себестоимости (производственные системы);
- функция качества (реальные системы), оценивается путем сравнения с нормативами;
- функция времени (процессы).

Обратная связь. Это понятие лежит в основе большинства процессов управления. В формальном представлении с позиции системы обратная связь означает получение информации о результате управления. Выходной сигнал системы, несущий информацию о ее состоянии, должен поступить на вход системы (рис. 1.8). Прохождение информации обратной связи возможно через некоторый орган управления.

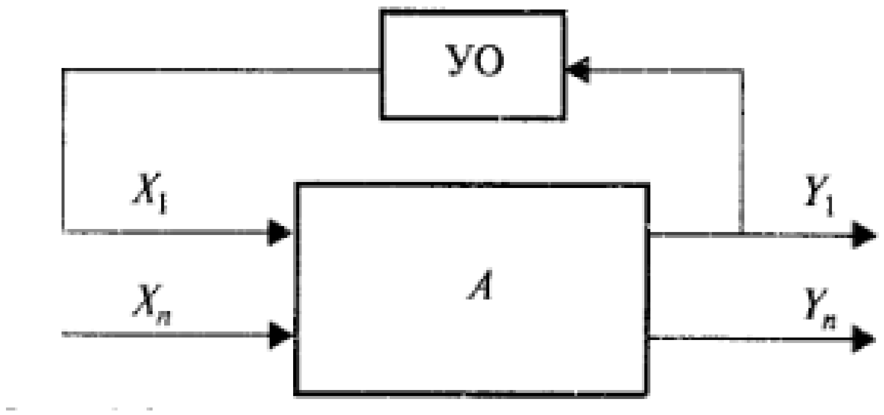


Рисунок 1.8 – Модель системы с обратной связью

Обратная связь в системах может быть отрицательной и положительной.

Отрицательная обратная связь характеризуется тем, что выходной сигнал, воздействующий на вход системы, имеет противоположный знак по отношению к входному, вызвавшему изменение состояния системы. Тем самым он нейтрализует в определенной степени входной сигнал. Системы с отрицательной обратной связью обычно предназначены для поддержания ее в устойчивом состоянии.

Положительная обратная связь характеризуется тем, что выходной сигнал, подаваемый в качестве обратной связи на вход, имеет одинаковый знак с входным сигналом и усиливает действие входного сигнала. Системы с положительной обратной связью неустойчивы и обычно находятся в стадиях развития или гибели.

Типы управления. В практике встречается несколько типов управления системами.

Жесткое управление (управление без обратной связи) является простейшим. При нем система полностью зависит от программы изменения входного управляющего сигнала. Такой вид управления применяется, когда изменения выходного сигнала в зависимости от входного известны, и действие помех на систему не приводит к существенному искажению ее выходных характеристик (управление токарным станком, управление движение светофором, работа ЭВМ по заданной программе).

Управление с обратной связью – наиболее распространенный тип управления.

Адаптивное управление также относится к управлению с обратной связью и отличается наличием специального адаптивного (приспособительного) механизма, накапливающего и анализирующего информацию о прошлых управленческих ситуациях, вырабатывающего новое поведение на основе прошлого опыта в соответствии с заложенными целями и критериями.

Оценка качества управления. Ее принято проводить с точки зрения эффективности и устойчивости.

Под ***эффективностью*** понимается степень достижения поставленной цели с учетом заданных критериев ее достижения. При моделировании для каждого элемента модели может быть определена целевая функция и в целом для системы может быть выбран один из способов формирования единой целевой функции, а также модель допустимого компромисса или выбор оптимального решения по убыванию важности целевых функций.

Устойчивость системы принято трактовать, как способность системы переходить из одного состояния равновесия в другое (возвращаться в исходное состояние равновесия).

Контурной линией обозначена область устойчивости систем (рис. 1.9). выход значения из данной области значений говорит о том, система становится неустойчивой (система Б).

Понятие устойчивости связано с величиной воздействия или сигнала, вызвавшего изменения состояния системы. Поэтому, говоря об устойчивости системы, следует учитывать предельные отклонения воздействующего сигнала или внутреннего изменения системы, сопоставляя его с изменением состояния последней.

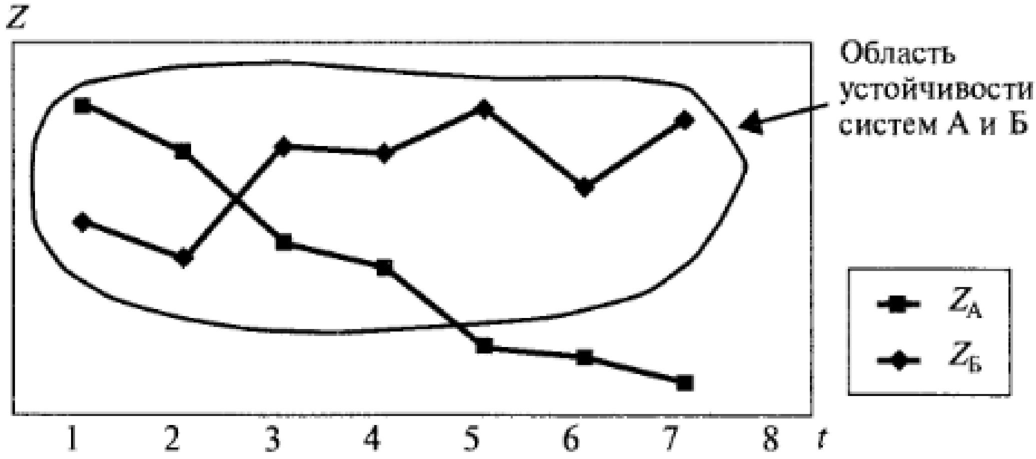


Рисунок 1.9 – Область устойчивости систем А и Б

Если входные воздействия обозначить через $\boldsymbol{X}$, то для устойчивой системы можно записать:

при $X_{min} \leq X \leq X_{max}$ значения $Z_{min} \leq Z \leq Z_{max}$;

а для неустойчивых систем:

при $X_{min} > X > X_{max}$ значения $Z_{min} > Z > Z_{max}$,

где X_{min}, X_{max} – соответственно минимально и максимально возможные изменения воздействия, т.е. сигнала или внутреннего изменения в системе;

$\mathrm{Z_{min}}$, Z_{max} – соответственно минимально и максимально возможные изменения состояния систем, не выходящие из области устойчивости последних.

Если Z состояние системы, то величины ΔZ^{-} и ΔZ^{+}, т.е.

$\Delta Z^{-} = \mathrm{Z_{min}} - Z$ и $\Delta Z^{+} = Z_{max} - Z$

будем называть запасом устойчивости системы.

При наличии в системе нескольких параметров состояния, т.е. при наличии пространства состояний $Z \subset \bar{Z}$, необходимо, чтобы условия устойчивости выполнялись для каждой составляющей состояния $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, ($\boldsymbol{i}$ = 1, $\boldsymbol{n}$). Если хотя бы для одного значения Z_i условия устойчивости не выполняются, то система неустойчива в целом. Для устойчивых систем имеют место устойчивые переходные процессы (рис. 1.5).

Выбор значений $\mathrm{Z_{min}}$, Z_{max} имеет весьма существенное значение для качества управления, так как он влияет на устойчивость системы. Запасы устойчивости ΔZ следует выбирать исходя из наличия случайных или враждебных для системы возмущений с учетом заданной или доверительной вероятности случайного или враждебного возмущения. В общем случае устойчивость системы можно характеризовать некоторым функционалом $U(Z, Z_{min}, Z_{max}, \theta)$, где θ – оценка надежности системы.

Надежность и эффективность системы. Под ***надежностью*** объектов моделирования будем понимать способность объекта противостоять изменению его эффективности в случае выхода из строя отдельных его частей, взаимосвязей или несанкционированного изменения «отношений порядка» между частями этого объекта, а также несанкционированного воздействия на объект извне для нарушения его эффективности.

Причины выхода из строя отдельных частей объекта или нарушения взаимосвязей между ними могут быть различными. К ним можно отнести ошибки при организационном построении элементов объекта, недостаточный уровень дублирования отдельных звеньев или частей объекта, форс-мажорные обстоятельства и даже противодействие со стороны конкурирующих объектов. С точки зрения системного подхода, *надежность системы зависит* от надежности каждого ее элемента, связей между элементами и правильность установления «отношений порядка» в системе – от надежности всех атрибутов системы.

Наиболее часто используемые ***показатели надежности***: вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы. Эти показатели есть у каждого атрибута системы – компонентов, связей, отношений порядка. Оценка этих показателей по каждому атрибуту системы позволит оценить надежность системы в целом.

Общую ***модель оценки надежности системы*** можно представить следующим образом. Предположим, что надежность системы непосредственно влияет на качество управления системой. Обозначим *качество управления* через $\boldsymbol{W}$. Предположим, что оно выражается через две основные характеристики: эффективность системы $\boldsymbol{Э}$ и устойчивость системы $\boldsymbol{U}$, т.е.

$$W = \varphi(Э, U, \Theta),$$

где φ – функционал, связывающий $Э, U, \Theta$;

Θ – показатель надежности системы.

В этом случае изменение показателя надежности системы повлияет на качество управления системой. Влияние может быть оказано как на значения показателей эффективности, т.е. на степень достижения целей системы, так и на показатели устойчивости системы, т.е. запасы устойчивости.

Изменение показателей эффективности системы, в том числе ее снижение, можно выразить следующим образом:

$\Delta Э = Э^{\mathbf{0}} - Э^{\mathrm{Н}}$,

где $\Delta Э$ – изменение показателя эффективности или степени достижения целевой функции;

$Э^0$ – эффективность системы (значение целевой функции) в пределах заданной ошибки в случае невыхода из строя атрибутов системы;

$Э^{Н}$ – значение целевой функции системы в случае выхода из стоя каких-либо атрибутов системы.

Величину ***Э*** следует определять для каждого вида систем отдельно.

Рассчитать эффективность ***Э*** теоретически для сложных систем невозможно, поэтому оценить надежность системы под влиянием внешних воздействий или отказов тех или иных атрибутов системы можно только применяя имитационные модели.

Аналогичные выводы можно сделать в отношении показателей устойчивости системы, т.е. оценить изменения запасов устойчивости при прогнозируемых внешних возмущениях или отказах атрибутов системы можно только применяя имитационные модели.

Самоорганизация систем. Под самоорганизацией понимают процесс упорядочения элементов одного уровня в системе за счёт внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия (изменение внешних условий может также быть стимулирующим либо подавляющим воздействием). Результат — появление системы следующего качественного уровня. В зависимости от подхода к описанию самоорганизации в определение включают характеристики системы, тип внутреннего фактора, особенности процесса [5].

К сложным открытым самоорганизующимся системам относятся биологические и социальные системы, которые более всего значимы для человека.

Результаты исследований в области математического моделирования сложных открытых систем привели к рождению нового мощного научного направления в современном естествознании — синергетики. Как и кибернетика, синергетика — это некоторый междисциплинарный подход. Но если в кибернетике акцент делается на процессах управления и обмена информацией, то синергетика ориентирована на исследование принципов построения организации, ее возникновения, развития и самоусложнения.

Мир самоорганизующихся систем гораздо богаче, чем мир закрытых, линейных систем. Вместе с тем его сложнее моделировать. Как правило, для (приближенного) решения большинства возникающих здесь нелинейных уравнений (порядок выше первого) требуется сочетание современных аналитических методов и вычислительных экспериментов. Синергетика открывает для точного, количественного, математического исследования такие стороны мира, как его нестабильность, многообразие путей изменения и развития, раскрывает условия существования и устойчивого развития сложных структур, позволяет моделировать катастрофические ситуации и т.п.

Основной вопрос синергетики — существуют ли общие закономерности, управляющие возникновением самоорганизующихся систем, их структур и функций.

Основные свойства самоорганизующихся систем — открытость, нелинейность, диссипативность. Теория самоорганизации имеет дело с открытыми, нелинейными диссипативными системами, далекими от равновесия.

Диссипация — это тенденция к размыванию организации, но в нелинейных, неравновесных системах она проявляет себя и через противоположную функцию — структурообразование. Благодаря диссипативности в неравновесных системах могут спонтанно формироваться новые типы структур, совершаться переходы от хаоса и беспорядка к порядку и организации, возникать новые динамические состояния материи.

Диссипативность проявляется в различных формах: в способности «забывать» детали некоторых внешних воздействий, в «естественном отборе» среди множества микропроцессов, разрушающем то, что не отвечает общей тенденции развития; в когерентности (согласованности) микропроцессов, устанавливающей их некий общий темп развития, и др.

Главная идея синергетики — идея о принципиальной возможности спонтанного возникновения порядка и организации из беспорядка и хаоса в результате процесса самоорганизации. Решающим фактором самоорганизации является образование петли положительной обратной связи системы и среды. При этом система начинает самоорганизовываться и противостоит тенденции ее разрушения средой.

Самоорганизующиеся системы — это обычно очень сложные открытые системы, которые характеризуются огромным числом степеней свободы.

Однако далеко не все степени свободы системы одинаково важны для ее функционирования. С течением времени в системе выделяется небольшое количество ведущих, определяющих степеней свободы, к которым «подстраиваются» остальные. Такие основные степени свободы системы получили название аттракторов. Аттракторы характеризуют те направления, в которых способна эволюционировать открытая нелинейная среда. (В закрытой системе аттрактор один, и он определяется вторым началом термодинамики — максимальная энтропия.) Иначе говоря, аттракторы — это те структуры (и цели), по направлению к которым протекают процессы самоорганизации в нелинейных средах. Для наглядной иллюстрации понятия аттрактора часто используют образ конуса «воронки», который втягивает в себя траектории эволюции нелинейной системы.

В процессе самоорганизации возникает множество новых свойств и состояний. Очень важно, что обычно соотношения, связывающие аттракторы, намного проще, чем математические модели, детально описывающие всю новую систему. Это связано с тем, что аттракторы отражают содержание оснований неравновесной системы. Поэтому задача определения аттракторов — одна из важнейших при конкретном моделировании самоорганизующихся систем.

1.3 Основные этапы развития теории моделирования

Исторически первыми моделями как заместителями некоторых объектов были символические условные модели. Ими являлись языковые знаки, естественно возникшие в ходе развития человечества и постепенно составившие разговорный язык. Первое применение символических условных моделей другого типа, по-видимому, связано с возникновением обмена в первобытном обществе.

Первоначально обмениваемые предметы просто раскладывались в два ряда и этим достигалось непосредственное однозначное соответствие материальных объектов одного рода объектам другого рода. Затем было установлено, что соответствия между объектами можно достигнуть с помощью объектов третьего рода как посредников (заместителей). Этими заместителями являлись сначала такие естественные объекты, как пальцы рук и ног, затем такие искусственные объекты, как специально изготовленные палочки. Это были первые логические условные модели, представленные в реальной форме. Их применение привело постепенно к понятию числа.

Следующим этапом развития логического моделирования можно считать возникновение знаковых числовых обозначений. Сведения о результатах счета первоначально сохранялись в виде зарубок. Постепенное совершенствование этого метода привело к изображению чисел в виде цифр как системы знаков (например, зарубки как прототипы римских цифр).

В глубокой древности возник и затем стал широко использоваться метод распространения свойств одних объектов на другие, который теперь называется умозаключением по аналогии. уже первобытный человек многократно наблюдал постоянство некоторых связей между признаками в предметах и явлениях (например, если есть корни и ствол – то, как правило, есть и ветви). С течением времени эти связи признаков вещей привели к формированию уверенности в том, что если у двух предметов имеются одинаковые существенные признаки, то, несмотря на различие этих предметов, вполне возможно, что они обладают и другими одинаковыми признаками.

Дальнейшее развитие логических знаковых моделей связано с возникновением письменности и математической символики. Наиболее древние письменные тексты, известные в настоящее время, относят примерно к 2000 г. до н. э. Это время расцвета двух великих цивилизаций Египта и Вавилона. Имеются некоторые основания полагать, что вавилоняне уже пользовались исключительно важным для моделирования понятием подобия в форме такого элементарного геометрического подобия, как подобие прямоугольных треугольников [6].

Значительное развитие моделирование получает в древней Греции в V – III вв. до н.э. В Греции была создана геометрическая модель Солнечной системы. Греческий врач Гиппократ для изучения человеческого глаза воспользовался его физической аналогичной моделью – глазом быка. Греческим математиком Евклидом было построено учение о геометрическом подобии.

По мере развития и укрупнения механистического производства, металлургии, кораблестроения, градостроительства, строительства гидротехнических сооружений в XVI – XVIII вв. до н.э. се чаще обнаруживается недостаточность геометрического подобия физически однородных объектов для прогнозирования свойств объектов больших размеров на основании свойств объектов меньших размеров. Например, при постройке в Венеции (XVII в.) галеры увеличенного размера подпорки с сечениями, выбранными на основании геометрического подобия, оказались недостаточно прочными. «Прочность подобных тел не сохраняет того отношения, которое существует между величиной тел» (Галилей, 1564-1642 гг.).

Это требовало развития вопросов подобия при физическом моделировании. Первый шаг в этом направлении был сделан И. Ньютоном (1643-1727 гг.), сформулировавшим условия подобия механических явлений. Затем развитие учения о подобии длительное время шло путем определения частных условий подобия для явлений только определенной физической природы. Здесь нужно отметить работы И.П. Кулибина (1735-1818 гг.) и Л. Эйлера (1707-1783 гг.) в области строительной механики, В. Фруда (1810-1879 гг.) и О. Рейнольдса (1842-1912 гг.) в области гидродинамики, В.Л. Кирпичева (1845-1913 гг.) в области упругости. Наконец, в 1909-1914 гг. в результате работ Н.Е. Жуковского, Д. Рэлея, Ф. Букингема была сформулирована в первой редакции пи-теорема [1], позволившая установить условия подобия явлений любой физической природы. Начиная с этого времени метод подобия становится основным методом экстраполяции характеристик модели в характеристики оригинала при физическом моделировании.

Параллельно с развитием материального (физического) моделирования шло развитие логического моделирования в знаковой форме. История развития знакового моделирования – это прежде всего история развития математики. В конце XVI века Д. Непер (1550-1617 гг.) изобрел логарифмы. В XVII веке И. Ньютон и Г. Лейбниц (1646-1716 гг.) создают дифференциальное исчисление. Наряду с аналитическими получают развитие численные методы решения различных задач.

Стремление упростить, ускорить и облегчить вычисления приводят к появлению различных вычислительных устройств. По существу это материальные формальные подобные модели таких логических объектов, как различные математические операции. Первыми вычислительными устройствами были многочисленные предшественники счетов. Русские счеты появляются в XVI веке и принимают почти современный вид в XVII веке. Это первое простейшее цифровое устройство для полуавтоматического выполнения арифметических операций. В начале XVII века появляется логарифмическая линейка – простейшее аналоговое устройство для полуавтоматического выполнения операций умножения и деления.

Значительное развитие вычислительные устройства получают в середине XIX века и, особенно, на рубеже XIX – XX веков. Появляются математические инструменты, счетно-решающие механизмы, арифмометр. В 1904 г. А.Н. Крылов создает первую аналоговую машину для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Длительное время вычислительные устройства были исключительно механическими. В 30-х годах XX века начинается развитие электромеханических, а затем электрических и цифровых вычислительных устройств. Оно привело к появлению в средине столетия современных ЭВМ. Обобщения для физического и вычислительного моделирования были сделаны В.А. Вениковым (1949 г.) и Л.И. Гутенмахером (1949 г.), затем они получили развитие в работах И.М. Тетельбаума (1959 г.), А.М. Сучилина (1964 г.), П.М. Алабужева (1968 г.) и др. авторов.

2 УСЛОВНОЕ И АНАЛОГИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

2.1 Условное моделирование

Условное моделирование – это замещение оригинала условной моделью, представляющей его только благодаря определенной договоренности о смысле принятой модели. Условными являются, прежде всего, знаковые модели. Знак или символ – это искусственный образ, чисто условно обозначающий вполне определенный объект и, как правило, не имеющий с этим объектом никакого сходства. Отдельный знак (простейшая условная модель) обладает ограниченными моделирующими возможностями. Он условно обозначает вещь, явление действие, событие, свойство, связь или отношение вещей, явлений, свойств и т.д. Однако в случае применения нескольких простейших знаковых моделей (системы знаков) эти возможности существенно возрастают.

Формирование правил построения условных знаковых моделей имеет поисковый эвристический характер, что делает невозможным формулировку общих правил. Вместе с тем, можно определить некоторые требования к таким моделям [1]:

- необходимость – невозможность использовать имеющиеся символы;
- простота – простое при равных условиях предпочтительнее сложного;
- наглядность – определенное сходство с оригиналом;
- индивидуальность – достаточное отличие от других символов;
- однозначность – недопустимость обозначения одним символом различных объектов;
- единообразие – при моделировании однородных объектов;
- определенность – сопровождение четким указанием о принятом соглашении;
- учет установившихся традиций.

Удачно выбранная условная знаковая модель получает всеобщее признание и распространение. Примерами удачных знаковых моделей являются русские и латинские буквы, примерами неудачных – немецкие готические буквы и китайские иероглифы.

Условными являются также образно-знаковые модели, которые отличаются наглядностью и могут обладать определенным сходством с оригиналом. Примерами удачных образно-знаковых моделей служат структурные схемы и направленные графы систем автоматического управления. Они наглядно показывают число звеньев, связи звеньев, переменные величины, действующие на входах и выходах звеньев и системы в целом.

К знаковым и образно-знаковым моделям относят все математические формы выражения количественных отношений между переменными и постоянными величинами (функции, уравнения, неравенства, графики, номограммы, таблицы, алгоритмы и т.д.). Поэтому условным моделированием приходится заниматься каждому, кто применяет математические методы при решении различных задач. Практически при этом приходится иметь дело с математическими описаниями материальных объектов, являющимися условными логическими моделями количественных отношений между размерами или числовыми значениями физических величин.

В общем случае ***физическая величина X*** – это некоторое свойство материальных объектов, допускающее количественное выражение, например: длина ***L***, объем ***V***, масса ***M***. Количественное выражение физической величины ***X*** в конкретном материальном объекте ***x*** – это ***размер*** физической величины ***X***, например: длина данного стержня ***l***, объем бака ***v***, масса данной гири ***m***. Для определения размера ***x*** физической величины ***X*** данного объекта требуется измерить этот размер, т.е. сравнить с размером ***{x}*** той же физической величины другого объекта, принятого за единицу. В результате измерения устанавливается числовое значение $\dot{x}$ размера ***x***:

$$\dot{x} = \mathrm{x}/\{\mathrm{x}\} \qquad (2.1)$$

и размер выражается через числовое значение $\dot{x}$ и единицу ***{x}***

$$\mathrm{x} = \dot{x}\ \{\mathrm{x}\}. \qquad (2.2)$$

Символы ***x***, $\dot{x}$, ***{x}*** в формуле как условной знаковой модели показывают размер, числовое значение и единицу физической величины X. Знак = означает равенство объектов-оригиналов, символические модели которых расположены справа и слева от него. Эти символы называют членами формулы.

Говорить о равенстве тех или иных объектов можно, только если они однородны. В случае однородности объектов-оригиналов говорят об однородности их символических моделей.

Размер ***x*** не зависит от единицы ***{x}***. От единицы зависит только числовое значение $\dot{x}$ размера ***x***.

Пример. При измерении тока за единицу был принят ампер ***{i}***=А, и оказалось, что i = 10, ***i*** = i·***{i}*** = 10А. Если принять за единицу миллиампер $\boldsymbol{\{i^1\}}$ = мА, то i = 10000 мА. таким образом ***i*** = 10 А = 10000 мА. Члены каждого равенства представляют один и тот же размер одной и той же физической величины, но выраженный в разных единицах.

Каждый материальный объект обладает несколькими свойствами, допускающими количественное выражение. Каждое свойство характеризуется определенной физической величиной своего размера. Между различными свойствами объективно существуют конкретные связи. Они обусловливают определенные соотношения между размерами физических величин, которые можно выразить в виде формулы. Поэтому, если выбрать произвольно единицы некоторых физических величин, то через эти единицы можно выразить единицы всех остальных физических величин.

Физические величины, размеры единиц которых выбираются произвольно, называются ***основными***. Единицы измерения основных физических величин также называют ***основными***. Единицы всех остальных физических величин выражают через основные и называют ***производными***. Совокупность основных и производных единиц составляет ***систему единиц измерения***.

В Международной системе единиц (СИ – «система интернациональная») основными физическими величинами и, соответственно единицами измерения, являются:

- длина – метр (м, ***m***);
- масса – килограмм (кг, ***kg***);
- время – секунда (с, ***s***);
- сила электрического тока – ампер (А);
- сила света – кандела (кд, ***kd***);
- количество вещества – моль (моль, ***mol***);
- температура – кельвин (К).

Некоторые производные единицы представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Некоторые производные единицы системы СИ

Величина		Единицы измерения			
Название	Обозначение	Наименование	Обозначение: русское	Обозначение: международное	Определение
Электрическая емкость	C	Фарада	Ф	F	Емкость конденсатора, между обкладками которого при заряде 1 Кл возникает напряжение 1 В
Электрический заряд	q	Кулон	Кл	C	Количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника в течение 1 с при токе силой 1 А
Магнитный поток	Ф	Вебер	Вб	Wb	Магнитный поток, при убывании которого до нуля в контуре, сцепленном с этим потоком, сопротивлением 1 Ом проходит количество электричества 1 Кл
Индуктивность	L	Генри	Гн	H	Индуктивность контура, с которым при силе постоянного тока в нем 1 А сцепляется магнитный поток 1 Вб
Магнитная индукция	B	Тесла	Тл	T	Магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 $м^2$ равен 1 Вб
Активная мощность электрической цепи	P	Ватт	Вт	W	Мощность электрической цепи, эквивалентная механической мощности 1 Вт
Реактивная мощность электрической цепи	Q	Вар	Вар	var	Мощность электрической цепи с синусоидальным переменным током при sin φ = 1 и действующих значениях напряжения 1 В и силы тока 1 А
Полная мощность электрической цепи	S	Вольт-Ампер	В · А	V · A	Мощность электрической цепи с действующими значениями напряжения 1 В и силы тока 1 А
Абсолютная магнитная проницаемость, магнитная постоянная	μ	Генри на метр	Гн/м	H/m	Абсолютная магнитная проницаемость среды, в которой при напряженности магнитного поля 1 А/м создается магнитная индукция 1 Гн

Рассмотрим процедуру определения формы производной единицы измерения для некоторой формальной физической величины. Пусть для физических величин $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, … выбраны независимые основные единицы $\boldsymbol{\{y_1\}}$, $\boldsymbol{\{y_2\}}$, … и для другой физической величины $\boldsymbol{X}$ требуется установить производную единицу $\boldsymbol{\{x\}}$. Для этого выбирается материальный объект, в котором размеры $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, … связаны уравнением

$$x = kF(y_1, y_2, \dots), \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{k}$ – коэффициент пропорциональности, или

$$\dot{x}\{x\} = kF(\dot{y}_1\{y_1\}, \dot{y}_2\{y_2\}, \dots). \tag{2.4}$$

Положив $\dot{x} = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dots = 1$, можно выразить производную единицу через основные:

$$\{x\} = kF(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots). \tag{2.5}$$

Для обеспечения «согласованности», т.е. идентичности выражений, связывающих размеры и числовые значения $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, …, аналогичной (2.3) должна быть зависимость

$$\dot{x} = kF(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots). \tag{2.6}$$

Рассмотрим процедуру определения формы производной единицы измерения для некоторой формальной физической величины. Пусть для физических величин $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, … выбраны независимые основные единицы $\boldsymbol{\{y_1\}}$, $\boldsymbol{\{y_2\}}$, … и для другой физической величины $\boldsymbol{X}$ требуется установить производную единицу $\boldsymbol{\{x\}}$. Для этого выбирается материальный объект, в котором размеры $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, … связаны уравнением

$$x = kF(y_1, y_2, \dots), \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{k}$ – коэффициент пропорциональности, или

$$\dot{x}\{x\} = kF(\dot{y}_1\{y_1\}, \dot{y}_2\{y_2\}, \dots). \tag{2.4}$$

Положив $\dot{x} = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dots = 1$, можно выразить производную единицу через основные:

$$\{x\} = kF(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots). \tag{2.5}$$

Для обеспечения «согласованности», т.е. идентичности выражений, связывающих размеры и числовые значения $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, …, аналогичной (2.3) должна быть зависимость

$$\dot{x} = kF(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots). \tag{2.6}$$

Подставив выражения (2.5), (2.6) в (2.4), получаем уравнение

$$kF(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots)kF(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots) = kF(\dot{y}_1\{y_1\}, \dot{y}_2\{y_2\}, \dots),$$

равносильное системе двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= k \\ F(\dot{y}_1\{y_1\}, \dot{y}_2\{y_2\}, \dots) &= F(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots)F(\{y_1\}, \{y_2\}, \dots) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(2.7) \\ &(2.8) \end{aligned}$$

Алгебраическое уравнение (2.7) имеет два вещественных корня (0,1). Отбросив первый корень как не имеющий смысла, получим $\boldsymbol{k} = 1$. Уравнение (2.8) является функциональным, в котором неизвестен вид функции $\boldsymbol{F}$. По смыслу выражения (2.3) эта функция должна быть непрерывной. Единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей уравнению (2.8), является произведение степеней y_1, y_2, ..., т.е. функция

$$F(y_1, y_2, \dots) = y_1^{\alpha_1}, y_2^{\alpha_2} \dots, \tag{2.9}$$

в котором показатели степеней могут быть любыми числами и которую называют ***степенным комплексом***.

Мы пришли к важному выводу, что для установления производных единиц измерения пригодны только физические формулы в виде степенных комплексов с постоянным коэффициентом, равным единице. Степенной комплекс, выбранный для установления произвольной единицы измерения, называется определяющим уравнением для этой единицы.

В самом общем случае производная единица ***{x}*** физической величины $\boldsymbol{X}$ выражается не только через основные единицы $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots$ основных физических величин $\boldsymbol{Y_1}$, $\boldsymbol{Y_2}$, …, но и через ранее установленные производные единицы $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots$ других величин $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, **…** и определяющее уравнение для ***{x}*** имеет вид

$$x = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots \tag{2.10}$$

После подстановки выражений $x = \dot{x}\{x\}, y_i = \dot{y}_i\{y_i\}$, $x_j = \dot{x}_j\{x_j\}$ при $\dot{x} = \dot{y}_i = \dot{x}_j = 1$ получаем общее символическое выражение производной единицы

$$\{x\} = \{y_1\}^{\alpha_1}\{y_2\}^{\alpha_2} \dots \{x_1\}^{\beta_1}\{x_2\}^{\beta_2} \dots \tag{2.11}$$

Чем проще определяющее уравнение (2.10), т.е. чем меньше физических величин связано этим уравнением, и чем проще связи между ними, тем отчетливее проявляется физический смысл размера произвольной единицы. Поэтому, как правило, определяющее уравнение выбирается так, чтобы оно содержало не более трех-четырех физических величин, а модули степеней $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ были равны единице или двум (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Представление производных размерностей через степенные комплексы

Величина	Наименование	Размерность	Обозначение		Содержит единиц систем СГС	
			русским шрифтом	латинским шрифтом	СГСЭ	СГСМ
1. Основные единицы						
Длина	метр	м	м	m	10^2 см	10^2 см
Масса	килограмм	кг	кг	kg	10^3 г	10^3 г
Время	секунда	сек	сек	sec	1 сек	1 сек
Сила тока	ампер	а	а	A	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
Температура	градус Кельвина	град	град	grad	-	-
Сила света	свеча	св	св	cd	-	-
2. Механические единицы						
Скорость	метр в секунду	м/сек	м/сек	м/сек	$10^2 \cdot$ м/сек	$10^2 \cdot$ м/сек
Ускорение	метр в секунду за секунду	м/сек^2	м/сек^2	m/sek^2	$10^2 \cdot$ см/сек^2	$10^2 \cdot$ см/сек^2
Энергия и работа	Джоуль	кг $\cdot$ м^2/сек^2=дж	дж	j	10^7 эрг	10^7 эрг
Сила	ньютон	кг $\cdot$ м/сек^2=дж/м	н	N	10^5 дин	10^7 дин
Мощность	ватт	кг $\cdot$ м^2/сек^3=дж/сек	вт	W	10^7 эрг/сек	10^7 эрг/сек
4. Электрические единицы						
Количество электричества	кулон	а $\cdot$ сек = к	к	C	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
Напряжение, ЭДС	вольт	кг $\cdot$ м^2/а $\cdot$ сек^3 = в	в	V	1/300	10^8
Напряженность электрического поля	вольт на метр	кг $\cdot$ м/а $\cdot$ сек^3 = в/м	в/м	V/m	$1/3 \cdot 10^{-4}$	10^6
Электроемкость	фарада	а^2 $\cdot$ сек^4/кг $\cdot$ м^2 = а $\cdot$ сек/в = сек/ом	ф	F	$9 \cdot 10^{11}$ см	10^{-9}
Электрическое сопротивление	ом	кг $\cdot$ м^2/а^2 $\cdot$ сек^3 = в/а	ом	Ω	$1/9 \cdot 10^{-11}$	10^9
Удельное сопротивление	ом на метр	кг $\cdot$ м^3/а^2 $\cdot$ сек^3 = ом $\cdot$ м	ом $\cdot$ m	Ω $\cdot$ m	$1/9 \cdot 10^{-9}$	10^{11}
Диэлектрическая проницаемость	фарада на метр	а^2 $\cdot$ сек^4/кг $\cdot$ м^3 = ф/м	ф/м	F/m	$36\pi \cdot 10^9$	$4\pi \cdot 10^{-11}$
4. Магнитные единицы						
Магнитный поток	вебер	кг $\cdot$ м^2/а $\cdot$ сек^2	вб	W/b	1/300	10^8 мкс
Магнитная индукция	тесла	кг/а $\cdot$ сек^2	тл	T	$10^{-6} \cdot 1/3$	10^4 гс
Напряженность	ампер на метр	а/м	а/м	A/m	$12\pi \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-3}$ э

магнитного поля						
Индуктивность	генри	кг · м^2/а^2 · сек^2 = ом · сек	гн	H	1/9 · 10^{-11}	10^9 см
Магнитная проницаемость	генри на метр	гн/м	гн/м	H/m	1/36π · 10^{13}	1/4π · 10^7
5. Оптические единицы						
Световой поток	люмен	св · стер	лм	lm	—	—
Яркость	нит	св/м	нт	nt	—	—
Освещенность	люкс	лм/м^2	лк	lx	—	—
Освещенность	люкс	лм/м^2	лк	lx	—	—

Пример. Определяющее уравнение для единицы силы в СИ имеет вид $F = ma$, где $\boldsymbol{m}$ – масса, $\boldsymbol{a}$ – ускорение. Поэтому единица силы равна $\{F\} = \{m\}\{a\}$. В СИ основной единицей массы является килограмм $\{\boldsymbol{m}\}$=кг, единица ускорения – метр в секунду за секунду $\{\boldsymbol{a}\}$=$\frac{\text{м/с}}{\text{с}}$. Поэтому

$$\{F\} = H = \text{кг}\frac{\text{м/с}}{\text{с}} \ , \tag{2.12}$$

т.е. единица силы (ньютон - ***Н***) – это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение в 1$\frac{\text{м/с}}{\text{с}}$.

Символическое выражение (2.12) достаточно ясно указывает физический смысл единицы силы. Если это выражение подвергнуть формальному преобразованию и привести к виду

$$H = \frac{\text{кг·м}}{\text{с}^2}, \tag{2.13}$$

физический смысл утрачивается.

Формула (2.12) выражает производную единицу через единицы физических величин определяющего уравнения, формула (2.13) – через основные единицы.

Как видно из примера, производную единицу физической величины ***X*** можно определить символически в двух формах. Первая выражает производную единицу через единицы физических величин определяющего уравнения и раскрывает ее физический смысл. По существу она является конкретным представлением размера $\{x\}$. Вторая форма выражает производную единицу через основные единицы, не раскрывает ее физический смысл, имеет несколько абстрактный характер, но отличается определенной общностью для всех физических величин. Эту форму представления производной единицы называют ***размерностью*** и обозначают [***x***].

Так как размер $\{x\}$ и размерность [***x***] выражают по-разному одну и ту же единицу измерения, то

$$\{x\} = [\boldsymbol{x}]. \tag{2.14}$$

Основная единица обозначается либо символом соответствующей физической величины $\boldsymbol{Y}$ (например: единица длины $\boldsymbol{L}$, единица времени $\boldsymbol{T}$), либо специальным символом, представляющим сокращенное ее название (например: единица длины метр – м, единица времени секунда – с). Первое обозначение преимущественно используется в формулах размерностей $[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{Y}$, второе – при конкретизации единиц физических величин.

Производная единица обозначается при ее конкретизации либо специальным символом, представляющим сокращенное ее название $\{x\}$ = ***назв.*** (например: единица силы ньютон – Н, единица работы джоуль – Дж), либо символом единиц физических величин определяющего уравнения (например: единица скорости м/с, единица давления Н/м^2). В формулах размерностей используется общее обозначение $[\boldsymbol{x}]$.

Если в правой части определяющего уравнения (2.10) содержатся только размеры основных физических величин и $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = 0$, то согласно (2.11)

$$\{x\} = \{y_1\}^{\alpha_1}\{y_2\}^{\alpha_2} \ldots \quad (2.15)$$

Положив $\{x\} = [\boldsymbol{x}]$, $\{y_1\} = [\boldsymbol{y_1}]$, $\{y_2\} = [\boldsymbol{y_2}]$, …, получим формулу размерности

$$[x] = [y_1]^{\alpha_1}[y_2]^{\alpha_2} \ldots \quad (2.16)$$

аналогичную (2.15).

Например, для единицы скорости

$$\{v\} = \{l\}\{t\}^{-1}, [v] = [l][t]^{-1}.$$

В общем случае формулы размера и размерности производной единицы различны.

Например, для единицы силы в СИ

$$\{F\} = \text{кг}\frac{\text{м/с}}{\text{с}}, [F] = LMT^{-2}.$$

В результате физическое истолкование формул размерности производных единиц часто оказывается невозможным. На основании примера можно сказать только, что основными физическими величинами при определении единицы силы приняты длина, масса и время, что размер силы прямо пропорционален размерам единиц длины и массы и обратно пропорционален квадрату размера единицы времени. Представления о конкретных размерах единиц длины, массы, времени и силы формула не дает. **Размерность** – это символическое выражение единицы величины через основные единицы, показывающее соотношение между размерами без указания этих размеров. Понятие «размерность» относится к единице измерения физической величины. Однако его распространяют и на физическую величину. Например, говорят о размерности скорости, ускорения, силы, вместо того, чтобы говорить только о размерности единиц этих величин. В результате подходят к понятиям размерных и безразмерных величин.

Величина X называется ***безразмерной***, если ее размерность равна единице. При этом $[x] = [y_1]^0[y_2]^0 \ldots = 1, x = \dot{x}$. На этом основании говорят также и о нулевой или единичной размерности. Все величины, не являющиеся безразмерными, называют ***размерными***.

Примерами безразмерных величин являются относительные изменения любой величины ***Δx/x***, отношение дуги окружности к радиусу и др. Безразмерными являются переменные и постоянные, которыми оперирует математика. С изменением размеров основных единиц числовое значение безразмерных величин не меняется.

Формула размерности любой физической величины однозначно определяется выбором основных единиц измерения и определяющего уравнения. Однако одна и та же формула размерности может соответствовать различным физическим величинам.

Например, в СИ размерность работы, энергии, момента силы, количества теплоты совпадают и равны $\boldsymbol{L^2MT^2}$.

Уравнение в виде степенного комплекса, не являющееся определяющим для единицы физической величины, может содержать в общем случае постоянный коэффициент $\boldsymbol{k \neq 1}$, который может быть как безразмерной, так и размерной величиной.

Пример. Формула закона тяготения $F = km_1m_2l^{-2}$ не является определяющим уравнением в СИ. Поэтому $\boldsymbol{k}$ – размерная величина (гравитационная постоянная $\boldsymbol{G}$) с размерностью $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$.

Число размерных коэффициентов (физических констант) в физических формулах зависит от числа основных единиц измерения. Чем больше это число (количество констант), тем сложнее запоминание формул, установление эталонов основных единиц. Чем меньшее число физических констант, тем проще физические формулы, но тем большее число единиц, обладающих одинаковыми размерностями.

Расчеты по математическим описаниям материальных объектов, т.е. по соответствующим физическим формулам и уравнениям, можно выполнить двояко:

- если есть уверенность в размерной однородности всех членов и ее соответствии определенной системе единиц измерения, то буквенные символы физических величин принимаются за числовые значения этих величин при данной системе единиц;

- в другом случае – необходимо сопоставить размерности математической модели и привести их в соответствие, или проверить правильность математической модели (анализ размерностей).

2.2 Аналогия как модель

Аналогия – это сходство различных объектов по некоторым признакам. Объекты, сходные по соответствующим признакам, ***называются аналогами***, а признаки, по которым объекты признаются аналогами - ***сходственными***. Сходственные признаки могут иметь качественный и количественный характер. В зависимости от этого различают качественную, количественную и смешанную аналогии. Основное значение аналогии для целей моделирования состоит в возможности переноса сведений (измеренных характеристик) с одного объекта (модель - аналог) на другой (оригинал - аналог) на основании заключения по аналогии.

Умозаключение по аналогии основано на предположении существования тождественного в различном и выполняется по схеме: [1]

1) установлено, что объект О1 обладает свойствами С0, С1,…, СN, С´1, …, С´n1;
2) установлено, что объект О2 обладает свойствами С1,…, СN, С´´1, …, С´´n2;
3) вывод: возможно, что объект О2 обладает свойством С0, как и объект О1.

Очевидно, что если среди свойств $\boldsymbol{C''}$ есть хотя бы одно свойство $\boldsymbol{C''_i}$, несовместимое с $\boldsymbol{C_0}$, то сходство по свойствам $\boldsymbol{C_1,\ldots,\ C_N}$ не имеет никакого значения.

Умозаключение по аналогии имеет гипотетический характер. Оно может привести к истинному и ложному выводу. Поэтому суждение, полученное по аналогии, как правило, нуждается в специальной проверке. Однако, вероятность правильного суждения тем больше, чем сильнее связи между свойствами объектов-аналогов, чем больше N и чем меньше количество различий n_1 и n_2.

Умозаключение по аналогии имеет доказательный характер, если общие свойства объектов $C_1,\ldots, C_N$ обусловливают свойство C_0. Оно в этом случае выступает основой аналогичного моделирования.

Классический пример – замещение организма человека организмом животного с целью исследования действия лекарственных препаратов.

Положительная роль аналогии электрического тока с движением жидкости при изучении прохождения тока в электрической цепи.

Примерами понятий, введенных по аналогии, являются теплоемкость, запоминающее устройство, электродвижущая сила, шарик на вогнутой поверхности и поле тяготения.

Аналогия может служить и как активизатор мышления, и как источник идей. Аналогия позволяет перейти к важнейшему понятию подобия, обеспечивающему строгий пересчет данных модели в данные оригинала – ***аналогия математическая***, т.е. сходство объектов по их математическому описанию. Наиболее полная математическая аналогия имеет место, если объекты описываются сходственными функциями и уравнениями.

Сходственные функции различаются только аргументами и ненулевыми постоянными.

Среди функций $z = x\cos y,\ u = 2v\cos 3w,\ r = 4s\cos(5t + 6),\ q = 7p\cos(8l + 9)$ сходственными являются первая и вторая, третья и четвертая.

Сходственные переменные – это переменные величины, входящие под знаки сходственных функций совершенной одинаковым образом. По аналогии с этим можно говорить и о *сходственных постоянных*.

Сходственные функции $x = a_1 + a_2x_1\ln a_3x_2,\ y = b_1 + b_2y_1\ln b_3\, y_2$ содержат сходственные переменные x и y, x_1 и y_1, x_2 и y_2 и сходственные постоянные a_1 и b_1, a_2 и b_2, a_3 и b_3.

Сходственные уравнения получаются приравниванием нулю или друг другу сходственных функций. Аналогично определяются и все другие сходственные математические формы количественных отношений между различными объектами.

Аналогичное моделирование – это замещение оригинала аналогичной моделью, обладающей сходством с оригиналом, достаточным для экстраполяции ее свойств и отношений в свойства и отношения оригинала на основании умозаключения по аналогии. Аналогичное моделирование используется обычно при сравнительно слабой изученности оригинала, когда имеющиеся сведения о его свойствах носят только качественный характер.

При удачном выборе модели аналогичное моделирование позволяет получить весьма интересные и важные результаты. К сожалению, общая методика аналогичного моделирования невозможна, и требуется поиск модели. Во многих случаях целесообразно использовать аналогичные формальные модели, основанные на механических, электрических, акустических аналогиях (например, аналоговые вычислительные машины).

3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

3.1 Основные понятия

Математические модели относятся к типу идеального моделирования, которое может быть интуитивным или знаковым.

Под интуитивным принято понимать моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающемся в ней. В этом смысле, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования различного вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т. д., включающие совокупность законов, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми элементами. Знаковая модель рассматривается как лингвистическая, визуальная, графическая и математическая.

Модель лингвистическая – представлена некоторым лингвистическим объектом, формализованной языковой системой или структурой. Иногда такие модели называют вербальными, например, правила дорожного движения – языковая, структурная модель движения транспорта и пешеходов на дорогах.

Модель визуальная – позволяет визуализировать отношения и связи моделируемой системы, особенно в динамике. Например, на экране компьютера часто пользуются визуальной моделью объектов, клавиатуры в программе-тренажере по обучению работе на клавиатуре.

Модель графическая – представима геометрическими образами и объектами, например, макет дома является натурной геометрической моделью строящегося дома.

Важнейшим видом знакового моделирования является *математическое моделирование*, классическим примером которого является описание и исследование основных законов механики И. Ньютона средствами математики.

Классификация математических моделей.

По принадлежности к иерархическому уровню математические модели делятся на модели микроуровня, макроуровня, метауровня (рис. 3.1). Математические модели на микроуровне процесса отражают физические процессы, протекающие, например, при резании металлов. Они описывают процессы на уровне перехода (прохода). Математические модели на макроуровне процесса описывают технологические процессы. Математические модели на метауровне процесса описывают технологические системы (участки, цехи, предприятие в целом).

Рисунок 3.1 - Схема классификации математических моделей по принадлежности к иерархическому уровню

По характеру отображаемых свойств объекта модели можно классифицировать на структурные и функциональные (рис. 3.2).

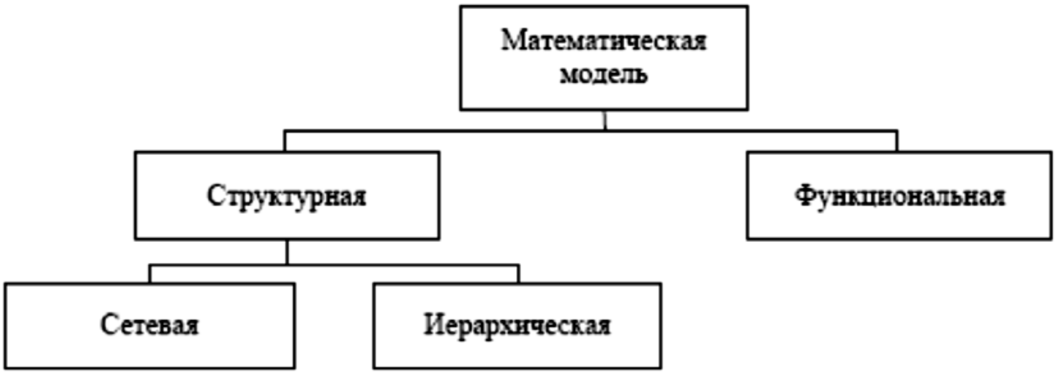


Рисунок 3.2 - Схема классификации математических моделей по характеру отображаемых свойств объекта

Модель структурная – представима структурой данных или структурами данных и отношениями между ними; например, структурной моделью может служить описание (табличное, в виде графа, функциональное или другое) трофической структуры экосистемы. В свою очередь, структурная модель может быть иерархической или сетевой.

Модель иерархическая (древовидная) – представима некоторой иерархической структурой (деревом); например, для решения задачи нахождения маршрута в дереве поиска можно построить древовидную модель, приведенную на рис. 3.3.

Модель сетевая – представима некоторой сетевой структурой. Например, строительство нового дома включает операции, приведенные в нижеследующей таблице. Эти операции можно представить в виде сетевой модели, приведенной на рис. 3.4 и в табл. 3.1.

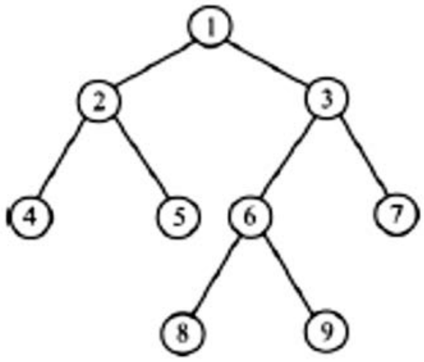


Рисунок 3.3 - Модель иерархической структуры

Таблица 3.1 - Перечень работ при строительстве дома

№	Операция	Время выполнения (дни)	Предшествующие операции	Дуги графа
1	Расчистка участка	1	Нет	–
2	Закладка фундамента	4	Расчистка участка (1)	1–2
3	Возведение стен	4	Закладка фундамента (2)	2–3
4	Монтаж электропроводки	3	Возведение стен (3)	3–4
5	Штукатурные работы	4	Монтаж электропроводки (4)	4-5
6	Благоустройство территории	6	Возведение стен (3)	3–6
7	Отделочные работы	4	Штукатурные работы (5)	5–7
8	Настил крыши	5	Возведение стен (3)	3–8

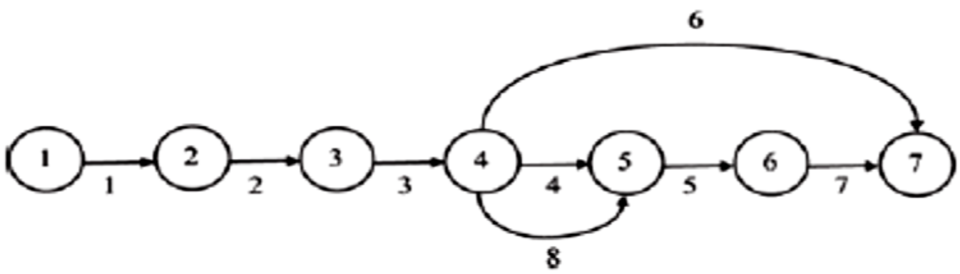


Рисунок 3.4 - Сетевой график строительных работ

Модель функциональная – представима в виде системы функциональных соотношений. Например, закон Ньютона и модель производства товаров – функциональные.

По способу представления свойств объекта (рис. 3.5) модели делятся на аналитические, численные, алгоритмические и имитационные [1].

Рисунок 3.5 - Схема классификации математических моделей по способу представления свойств объекта

Аналитические математические модели представляют собой явные математические выражения выходных параметров как функций от параметров входных и внутренних и имеют единственные решения при любых начальных условиях. Например, процесс резания (точения) с точки зрения действующих сил представляет собой аналитическую модель. Также квадратное уравнение, имеющее одно или несколько решений, будет аналитической моделью.

Модель будет численной, если она имеет решения при конкретных начальных условиях (дифференциальные, интегральные уравнения).

Модель алгоритмическая – описана некоторым алгоритмом или комплексом алгоритмов, определяющим ее функционирование и развитие. Введение данного типа моделей (действительно, кажется, что любая модель может быть представлена алгоритмом её исследования) вполне обосновано, т. к. не все модели могут быть исследованы или реализованы алгоритмически. Например, моделью вычисления суммы бесконечного убывающего ряда чисел может служить алгоритм вычисления конечной суммы ряда до некоторой заданной степени точности. Алгоритмической моделью корня квадратного из числа X может служить алгоритм вычисления его приближенного, сколь угодно точного значения по известной рекуррентной формуле.

Модель имитационная – предназначена для испытания или изучения возможных путей развития и поведения объекта путем варьирования некоторых или всех параметров модели, например модель экономической системы производства товаров двух видов. Такую модель можно использовать в качестве имитационной с целью определения и варьирования общей стоимости в зависимости от тех или иных значений объемов производимых товаров.

По способу получения модели делятся на теоретические и эмпирические.

Теоретические математические модели создаются в результате исследования объектов (процессов) на теоретическом уровне. Например, существуют выражения для сил резания, полученные на основе обобщения физических законов. Но они неприемлемы для практического использования, т. к. очень громоздки и не совсем адаптированы к реальным процессам обработки материалов.

Эмпирические математические модели создаются в результате проведения экспериментов (изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения его параметров на входе и выходе) и обработки их результатов методами математической статистики.

По форме представления свойств объекта модели делятся на логические, теоретико-множественные и графовые (рис. 3.6).

Рисунок 3.6 – Виды моделей по форме представления свойств объекта

Модель логическая – представима предикатами, логическими функциями, например, совокупность двух логических функций может служить математической моделью одноразрядного сумматора.

Модель теоретико-множественная – представима с помощью некоторых множеств и отношений принадлежности к ним и между ними.

Модель графовая – представима графом или графами и отношениями между ними.

Математическое моделирование – это замещение оригинала **математической моделью**, обеспечивающей фиксацию и исследование свойств и отношений оригинала, а также переход к оригиналу с помощью математических методов. Особое значение среди математических моделей имеют подобные, обеспечивающие перенос данных на оригинал на основании подобия.

Существенным моментом является то обстоятельство, что при изучении любого процесса методом математического моделирования необходимо в первую очередь построить его математическое описания (математическую модель). Математическая модель реальной системы является тем абстрактным формально описанным объектом, изучение которого возможно математическими методами (в том числе с помощью математического моделирования). Сложность и многообразие процессов функционирования реальных систем не позволяют строить для них абсолютно адекватные математические модели. Математическая модель, описывающая формализованный процесс функционирования системы, в состоянии охватить только основные (существенные для субъекта - релевантные) закономерности, оставляя в стороне второстепенные факторы.

Процесс математического моделирования реальных систем (процессов) опирается на ***критерий практики***, что позволяет сделать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению и использованию (гипотетической) модели. Поэтому процесс математического моделирования включает несколько ***этапов*** [7]:

- *формулирование законов*, связывающих основные объекты моделирования. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их зависимости. Эта стадия завершается записью в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между элементами модели;

- исследование математических задач, к которым приводит математическая модель. Основной вопрос исследования – *решение прямой задачи* – получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений (систем, процессов);

- выяснение того, удовлетворяет ли принятая (гипотетическая) модель *критерию практики*, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений (экспериментов) с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена (все параметры были заданы), то определение уклонений теоретических следствий от наблюдений дает решение прямой задачи с последующей оценкой уклонений. Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются неопределенными. Задачи, в которых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений изучаемых явлений (систем, процессов) называются *обратными задачами*. Если математическая модель такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений (систем, процессов);

- последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и *модернизация модели*. В процессе развития науки и техники, данные об изучаемых явлениях уточняются, и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании принятой модели, не соответствуют нашим знаниям о явлении (системе, процессе) – возникает необходимость построения новой, более совершенной математической модели.

Пример - модель Солнечной системы.

Наблюдения звездного неба начались в глубокой древности. Первичный анализ этих наблюдений позволил выделить планеты из всего многообразия небесных светил (выделение объектов изучения).

Второй шаг – определение закономерностей их движений:

- ***модель Птолемея*** (2 век н.э.) – планеты и Солнце совершают движение вокруг Земли (***геоцентрическая модель***). Движение описывалось с помощью правил (формул), многократно усложнявшихся по мере накопления наблюдений;

- ***модель Коперника*** (Н. Коперник, 1543 г.) – принципиально новая (***гелиоцентрическая***) модель – планеты вращаются вокруг Солнца. Причина появления – необходимость повышения точности наблюдений для нужд кораблевождения. Это качественная модель, в которой не существовало параметров системы (радиусы окружностей, угловые скорости движения и др.). Коперник вынужден был вводить поправки в характеристики движения планет по окружностям («эпициклы»);

- ***исследования И. Кеплера*** (начало 17 века), который сформулировал ***законы движения планет***, что позволило кинематически описать движения, каждой планеты обособлено, не затрагивая причин, обуславливающих эти движения;

- ***работы И. Ньютона*** (2 половина 17 века**)** **–** динамическая модель Солнечной системы, основанная на ***законе всемирного тяготения***. Динамическая система согласуется с кинематической моделью И. Кеплера (из нее следуют законы Кеплера);

- в 40-м году 19 века выводы динамической модели (по видимым планетам) пришли в противоречие с наблюдениями. Планета Уран уклонялась от теоретической траектории. ***У. Леверье*** (1846 г.) предсказал и вычислил новую планету (Нептун) и эта планета была открыта в предсказанном месте. Аналогично в 1930 году была открыта планета Плутон.

3.2 Общие принципы математического моделирования

Формализации любого реального процесса (системы) предшествует изучение структуры составляющих его явлений. В результате этого составляется так называемое ***содержательное описание процесса*** (системы), которое представляет собой начальный этап формулирования закономерностей функционирования процесса (системы) и реализуется в постановке прикладной задачи. Содержательное описание – исходный материал для последующих этапов формализации: построение формализованной схемы процесса (системы) и математической модели.

Содержательное описание процесса (системы) в словесном выражении (концептуальная модель) концентрирует сведения о физической природе и количественных характеристиках элементарных явлений исследуемого процесса (системы), о степени и характере связей в общем процессе функционирования процесса (системы). Изучение процесса (системы) предполагает наблюдение за ним и фиксацию количественных характеристик, проведение экспериментов и т.п. Если процессы и системы реально не существую (проектируются), для составления содержательного описания может использоваться накопленный опыт и результаты моделирования аналогичных процессов (систем) с учетом особенностей моделируемого процесса.

Дополнительные материалы для содержательного описания процесса (системы) включают информацию о постановке прикладной задачи (цели моделирования):

- изложение идеи предполагаемого исследования;

- основные факторы, которые следует учесть при моделировании;

- исходные данные для проведения исследований: численные характеристики известных величин, значения начальных (граничных) условий;

- перечень искомых величин с указанием их практического предназначения;

- требуемую точность измерений при проведении экспериментов.

Составление ***формализованной схемы процесса*** (системы) является следующим этапом математического моделирования. Она разрабатывается для сложных процессов (систем), при условии трудности формализации элементов и др. Формализованная схема требует совместных усилий математиков и специалистов прикладной области знаний. *Форма представления* может быть произвольной, но содержание должно включать формальное описание процесса (системы):

основные характеристики процесса (системы);

система параметров (характеристик) процесса;

система связей элементов;

основные факторы для учета;

систематизированная и утоненная совокупность исходных данных;

известные параметры и начальные (граничные) условия.

Построение формализованной схемы завершается точной математической формулировкой задачи исследования с указанием окончательного перечня искомых и оцениваемых зависимостей. Для уточнения формализованной схемы и построения математической модели могут потребоваться дополнительные исследования и эксперименты или наблюдения исследуемого процесса (системы).

Для преобразования формализованной схемы в ***математическую модель*** необходимо:

записать в аналитической форме все соотношения между характеристиками;

выразить логические условия (например, в виде систем неравенств);

придать (по возможности) аналитическую форму всем другим сведениям, содержащимся в формализованной схеме (числовые данные процесса, аппроксимация, статистическая обработка и др.).

Математическая модель в общем случае не полностью идентична формализованной схеме, имеют место определенные искажения количественных характеристик исследуемого процесса, что предполагает определенные ограничения при использовании математической модели.

При любом способе ***использования математической модели*** для исследования реального процесса (системы) наиболее значимыми являются искомые величины (результаты моделирования) – параметры, определение которых является целью моделирования и способы использования математической модели для их определения:

аналитическое исследование процессов (систем);

исследование процессов (систем) при помощи численных методов;

цифровое моделирование;

имитационное (цифровое, аппаратурное, стендовое, аналоговое) моделирование.

Аналитическое исследование процессов (систем) предполагает, что математическая модель в первоначальном виде, как правило, требует доработки:

- представление в явном виде искомых величин – преобразование системы математических соотношений (например, уравнений), которая допускает получение нужного результата;

- приведение уравнений к виду, для которого решения известны;

- проведение исследования уравнений качественными методами (оценка асимптотических значений, оценка устойчивости и др.)

Использование аналитических методов удается редко, т.к. преобразование математической модели в систему уравнений, допускающую эффективное решение, является трудной задачей для сложных процессов (систем). Заманчивость такого метода (полное теоретическое решение задачи исследований) приводит к упрощениям и огрублениям реальной картины явлений (процессов функционирования системы), что предполагает ограничения по использованию результатов использования аналитических методов исследования.

Численные методы исследования процессов (систем) требует преобразования математической модели в систему уравнений (математических построений), допускающих эффективное решение численными методами. Результаты представляются, например, в форме таблиц значений искомых величин для конечного набора значений параметров системы, начальных условий и времени.

Класс математических задач, которые могут быть решены приближенно численными методами, значительно шире, чем класс уравнений, доступных аналитическому исследованию, но полнота решения существенно ограничена, что предполагает ограничение реализаций исследуемого процесса (системы) и условий его функционирования.

Кроме того, преобразование математической модели в форму, допускающую использование численных методов не всегда возможно им пригодно для цели исследований, что ограничивает использование метода исследования.

Для моделирования процесса (системы) на вычислительных системах (*цифровое моделирование*) необходимо преобразовать математическую модель процесса (системы) в специальный *моделирующий алгоритм*. Явления исследуемого процесса (системы) и процессы, происходящие в ЭВМ, реализующие моделирующий алгоритм, различны по своему физическому содержанию. Они должны быть близкими с точки зрения состава и характера информации, описывающей поведение реальной системы, информации, используемой для моделирования.

Имитационное моделирование (цифровое, аппаратурное, стендовое, аналоговое и др.) не требует (и не отрицает!) наличия физического сходства между процессами (системами) и процессами в моделирующем устройстве. Основное требование – имитация в определенном смысле элементарных явлений, составляющих исследуемый процесс, с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени, характера и состава информации о состояниях процесса (системы).

Такой метод исследований предполагает, что структура моделирующего алгоритма слабо зависит от совокупности искомых величин. А определяется строением математической модели. В этом случае процесс моделирования предполагает не только создание специальных моделирующих установок (см. физическое моделирование) или специализированных моделирующих систем (аналоговое моделирование). Моделирование можно провести при помощи универсальных ЭВМ.

3.3 Математическая модель элемента системы

Построение математической модели сложной системы в целом оказывается практически невозможно, что предполагает декомпозицию системы, что выводит на первый план понятие подсистемы или элемента системы – сложная система является многоуровневой конструкцией из взаимодействующих элементов (подсистем). Такой подход к представлению процесса (системы) принято называть структуризацией объекта (оригинала) моделирования. В таком случае, математическая модель процесса (системы) состоит из математических моделей элементов и математических моделей связей между элементами [3].

Математические модели широкого класса детерминистических объектов (влияние случайных факторов не учитывается) в дискретном времени определены в различных типах конечных автоматов. ***Детерминистские объекты***, функционирующие в непрерывном времени, обычно описываются дифференциальными уравнениями (общий вид):

$$\frac{dz}{dt} = f[z(t), x(t), t],$$

где $z(t)$ – характеристика состояния системы, а в качестве выходного сигнала может быть взята любая функция состояния.

Стохастические объекты (при описании которых учитываются случайные факторы) функционируют (оцениваются, измеряются) в дискретном времени и могут быть представлены с учетом вероятности состояния (вероятностные автоматы), что предполагает вероятность состояния с учетом перехода (автомат со случайными переходами), а функция выходов - распределение вероятностей на множестве выходных сигналов (автомат со случайными выходами). Функционирование вероятностных автоматов изучается при помощи цепей Маркова. Для формирования математических моделей стохастических объектов с непрерывным временем используются модели систем массового обслуживания или представители марковских случайных процессов.

Общие свойства динамических систем в широком смысле (характеризуются обыкновенными дифференциальными уравнениями - детерминистскими и стохастическими, с непрерывным и дискретным временем) характеризуются:

- элемент сложной системы функционирует во времени: в каждый момент времени $\boldsymbol{t}$ он находится в одном из возможных состояний $\boldsymbol{z}$;

- с течением времени элемент переходит из одного состояния в другое под действием внутренних и внешних причин;

- в процессе функционирования элемент взаимодействует с другими элементами сложной системы и объектами внешней среды (получает входные сигналы $\boldsymbol{x}$ и выдает выходные сигналы $\boldsymbol{y}$).

Множество состояний динамической системы будем обозначать $\boldsymbol{Z}$, множество входных сигналов $\boldsymbol{X}$, а множество выходных сигналов $\boldsymbol{Y}$. кроме того, множество моментов времени $\boldsymbol{t}$, в которых определена динамическая система, обозначим $\boldsymbol{T}$.

Отображение $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{Z}$ называется движением динамической системы и обозначается $\boldsymbol{z(t)}$. Совокупность состояний $\boldsymbol{z}$, соответствующих всем $\boldsymbol{t}$ в данном движении, называется траекторией этого движения. Отображение $\boldsymbol{x(t)}$: $\boldsymbol{T\to X}$ – входной процесс, а $\boldsymbol{y(t)}$: $\boldsymbol{T\to Y}$ – выходной процесс динамической системы.

Состояние $\boldsymbol{z}$ динамической системы не всегда можно представить как число, обычно оно описывается некоторым набором характеристик $\boldsymbol{z_1, z_2, \dots, z_n}$, что отражается соотношением

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Если характеристики $\boldsymbol{z_i}$, $\boldsymbol{i}$ = 1, 2, …, $\boldsymbol{n}$, являются числами, то состояние $\boldsymbol{z}$ рассматривается как вектор с координатами $z_1, z_2, \dots, z_n$. В общем случае, когда $\boldsymbol{z_i}$ не являются числами (например, они – векторы, матрицы или объекты более сложной природы), состояние $\boldsymbol{z}$ интерпретируется как «обобщенный» вектор, а характеристики $\boldsymbol{z_i}$ – как его координаты.

То же самое можно сказать и о сигналах. Входной сигнал представляется как $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а выходной как $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$.

3.4 Математическая модель взаимодействия элементов системы

Взаимодействие элементов в процессе функционирования сложной системы рассматривается как результат совокупности воздействий каждого элемента на другие элементы. Воздействие, представленное набором своих характеристик, обычно называют ***сигналом***. Таким образом, взаимодействие элементов сложной системы следует рассматривать как механизм обмена сигналами.

Сигналы передаются по ***каналам связи***, проложенным между элементами сложной системы. Началом каждого канала выход элемента, выдающего сигнал (*выходной полюс*), а концом – вход элемента, принимающего сигнал (*входной полюс*). Слово «проложенные» следует понимать условно в том смысле, что некоторые каналы «физически» не существуют, а появляются в системе при формализованном описании. Канал, передающий сигналы мгновенно и без искажений (характеристики сигнала в начале канала и в конец его совпадают в любой момент времени), называется *идеальным*.

Если канал связи далек от идеального (сигналы претерпевают искажения), его следует рассматривать как самостоятельный элемент системы, функционирование которого сводится к соответствующим задержкам и искажениям сигналов.

При построении математической модели сложной системы необходимо учитывать ***взаимодействие ее с внешней средой***. Внешняя среда рассматривается как некоторая совокупность объектов, воздействующих на элементы сложной системы, а также испытывающих воздействия, поступающие от элементов системы. Поэтому взаимодействие с внешней средой сводится к механизму обмена сигналами между элементами сложной системы и объектами внешней среды, совершенно аналогично тому, как характеризуется взаимодействие внутри системы.

Разница состоит в том, элементы внешней среды не входят в состав системы и интересуют исследователя только как источники сигналов (или адресаты сигналов из системы). В первом случае характеристики сигналов должны быть заданы заранее, как исходные данные для анализа системы, что позволит моделировать элементы системы с учетом воздействий внешней среды. Во втором случае характеристики выходных сигналов элементов вырабатываются моделью по ходу моделирования – фиксируются как результат моделирования.

Механизм обмена сигналами как формализованная схема взаимодействия элементов включает наборы следующих составляющих:

1) процесс формирования выходного сигнала элементом, выдающим сигнал;

2) определение адреса передачи для каждой характеристики выходного сигнала;

3) прохождение сигналов по каналам связи и компоновка входных сигналов для элементов, принимающих сигналы;

4) реагирование элемента, принимающего сигнал, на поступивший входной сигнал.

Первая и четвертая составляющие не требуют особого рассмотрения в рамках модели взаимодействия. Их следует отнести к построению моделей функционирования самих элементов системы. При этом следует иметь в виду, что рассматривая элементы системы как динамические объекты, следует озаботиться выбором *функций (операторов) переходов* в новое состояние и выходов для этих элементов, чтобы гарантировать достаточно адекватное описание поведения формализуемых объектов с учетом их взаимодействия.

Таким образом, главная часть взаимодействия – формирование выходных сигналов и реагирование на входные сигналы – включается непосредственно в процесс построения математических моделей элементов сложной системы. Без этого не могут быть правильно выбраны не только основные характеристики модели элемента (функции, операторы переходов и выходов), но даже определены для них множества входных и выходных сигналов. Построение математических поведения элементов и главной части их взаимодействия – единый процесс.

Третья составляющая механизма обмена предполагает рассмотрение физического канала связи как самостоятельного элемента сложной системы и построение математической модели его в виде динамической системы особого типа, что основывается на результатах и выводах специальных наук, исследующих системы передачи информации.

Методика описания связей между элементами сложной системы (вторая составляющая механизма обмена) может основываться на формировании *операторов сопряжения*, характеризующих связи между всеми входными контактами всех элементов системы и всех выходных контактов, предполагая наличие связей между ними в виде элементарных каналов. Такой оператор может быть представлен:

- в форме таблицы, в которой на пересечении строк с номерами элементов системы и столбцов с номерами контактов располагаются пары чисел, указывающие номер элемента и номер контакта, с которым осуществляется соединение;

- матрицей смежности ориентированного графа, вершинами которого являются контакты, а ребрами – элементарные каналы.

3.5 Подобие

Сходство объектов по их математическому описанию (математическая аналогия) при определенных условиях превращается в математическое подобие или просто подобие. **Подобие** – это полная математическая аналогия при наличии пропорциональности между сходственными переменными, неизменно сохраняющаяся при всех возможных значениях этих переменных, удовлетворяющих сходственным уравнениям.

Математическое описание объекта (расчетная модель) может иметь разнообразную форму:

- простейший случай – явная функция, выражающая переменную через ее аргументы $\boldsymbol{x_i}$: $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ или сокращенно $y = f(x_i)$, ***i=1,2,…,n***;

- конечное уравнение $F(y, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$ или сокращенно $F(y, x_i) = 0$, ***i=1,2,…,n***, выражающее зависимость $y = f(x_i)$ в неявной форме;

- обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, x_i,\ x_i',\ x_i'', \dots, x_i^{(m)}, t\right) = 0,$$

связывающее независимую переменную $\boldsymbol{t}$, известные функции $\boldsymbol{x_i = x_i(t)}$, неизвестную функцию $\boldsymbol{y = y(t)}$ и производные функций $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{y}$. Если ввести оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, то в символической форме

$$F(y, Dy, D^2y, \dots, D^ny, x_i,\ Dx_i,\ D^2x_i, \dots, D^Mx_i, t) = 0,$$

или сокращенно $F(y,\ x_i,\ t,\ D) = 0$;

- дифференциальное уравнение в частных производных

$$F\left(y,\ x_i, t_1, \dots, t_j, \dots, t_k; D_1, \dots, D_j, \dots, D_k\right) = 0,$$

или сокращенно $F\left(y,\ x_i,\ t_j,\ D_j, A_s\right) = 0$, где $D_j = \frac{d}{dt_j}$ и учтены постоянные коэффициенты $\boldsymbol{A_s}$.

В **общем случае** под ***F*** можно понимать любой оператор, символизирующий совокупность некоторых действий, выполняемых над $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{t_j}$, $\boldsymbol{D_j}$.

Два объекта подобны, если

1) они имеют сходственные математические описания:

$$F\left(y_1,\ x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

$$F\left(y_2,\ x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}\right) = 0, \qquad (3.2)$$

где $y_1 = y_1\left(t_{1j}\right)$; $x_{1i} = x_{1i}\left(t_{1j}\right)$; $D_{1j} = \frac{d}{dt_{1j}}$; $y_2 = y_2\left(t_{2j}\right)$; $x_{2i} = x_{2i}\left(t_{2j}\right)$; $D_{2j} = \frac{d}{dt_{2j}}$; $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$ и $\boldsymbol{x_{1i}}$, $\boldsymbol{x_{2i}}$ – соответственно неизвестные и заданные функции независимых переменных $\boldsymbol{t_{1j}}$ и $\boldsymbol{t_{2j}}$;

2) сходственные переменные, содержащиеся в математических описаниях, связаны постоянными коэффициентами пропорциональности, которые называют ***масштабами (константами) подобия***

$$m_y = y_1/y_2\,, m_{x_i} = x_{1i}/x_{2i}\,;\; m_{t_j} = t_{1j}/t_{2j}\,. \qquad (3.3)$$

При условии (3.3) сходственные уравнения и функции, описывающие математические аналоги, а также содержащиеся в них сходственные переменные называются подобными. Подобные функции могут быть изображены в пространстве подобных переменных одной и той же кривой или поверхностью.

Пример. Сходственные функции $y_1 = x_1^2$; $y_2 = 8x_2^2$ подобны, если $m_y = y_1/y_2 = 2, m_x = x_1/x_2 = 4$.

При этих условиях для них справедлива зависимость на рис. 3.7а. Если принять $m_y = 4, m_x = 4$, то сходственные функции y_1, y_2 не будут подобными и их графические изображения не совпадают (рис. 3.7б).

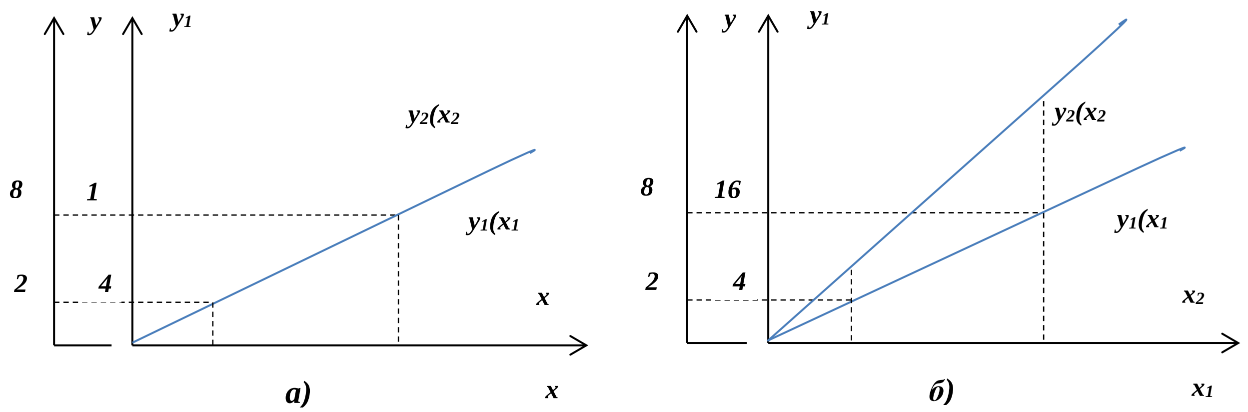


Рисунок 3.7 – Сходственные функции при наличии (а) и при отсутствии (б) подобия

Особыми частными случаями являются геометрическое, физическое и временное подобие.

Геометрическое подобие – это подобие геометрических образов: точек, линий, поверхностей, фигур, тел. В теории моделирования понимается в более широком смысле, чем принято обычно. Два образа геометрически подобны в широком смысле, если при соответствующем расположении этих образов в некоторой системе координат подобны их математические описания. При этом масштабы, связывающие различные, но однородные по размерности координаты точек геометрических объектов (например, линейные координаты), могут быть одинаковы (*равномерное, обычное подобие*) и различными (*неравномерное подобие*) по величине.

Физическое подобие означает подобие физически однородных объектов. Все масштабы являются при этом безразмерными величинами. *Временное подобие* – подобие функций времени.

Пример. Имеются два генератора переменного тока. Их описывают функции, выражающие напряжения в зависимости от времени $\boldsymbol{t}$. Для первого генератора $u_1 = 100 \sin 2\pi(t/4)$, для второго $u_2 = 10 \sin 2\pi(t/2)$, причем $[\boldsymbol{u}]$ = В, $[\boldsymbol{t}]$ = с. Чтобы записать выражения для масштабов, представим эти уравнения в виде $u_1 = 100 \sin 2\pi(t_1/4)$, $u_2 = 10 \sin 2\pi(t_2/2)$. Тогда $m_u = u_1/u_2\,; m_t = t_1/t_2$.

Различное обозначение напряжений различных генераторов вполне естественно. Различное обозначение $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$ одной той же величины – времени – имеет на первый взгляд чисто формальный характер. Можно формально считать их «различными» т.к. они входят в разные формулы. Что тогда означает $\boldsymbol{m_t}$?

Если считать $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$ такие различные значения одной и той же независимой переменной $\boldsymbol{t}$, при которой фиксируются значения различных зависимых переменных $\boldsymbol{u_1(t)}$ и $\boldsymbol{u_2(t)}$.

Физическое и временное подобие имеет место (рис. 3.8) при $\boldsymbol{m_u}$ = 10, $\boldsymbol{m_t}$ = 2. Масштаб $\boldsymbol{m_u}$ показывает отношение амплитуд напряжений $\boldsymbol{u_1}$ и $\boldsymbol{u_2}$, масштаб $\boldsymbol{m_t}$ - отношение периодов $\boldsymbol{T_1}$ = 4с и $\boldsymbol{T_2}$ = 2с.

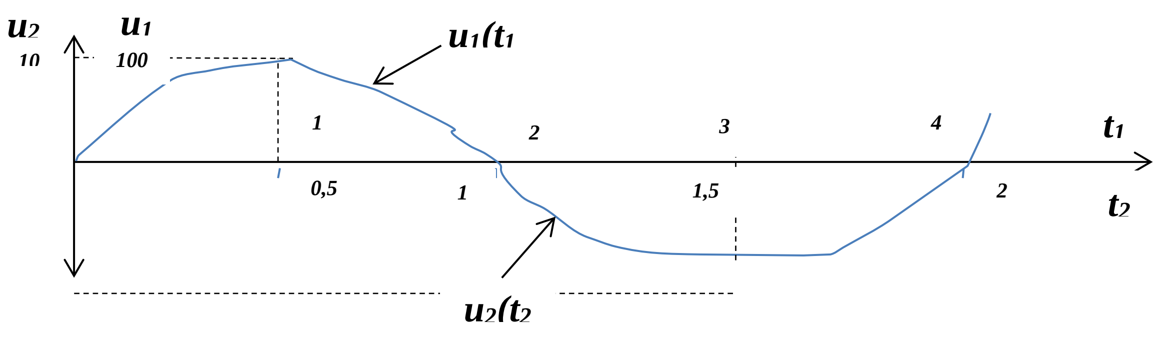


Рисунок 3.8 – Подобные синусоидальные напряжения

В общем случае временного подобия безразмерный масштаб времени представляет отношение сходственных временных интервалов, которым соответствует неизменное отношение значений или приращений подобных временных функций. В частности, временной масштаб показывает, в каком отношении находятся временные параметры подобных временных функций τ_1 и τ_2, представляющие, например, периоды колебаний (рис. 3.8), постоянные времени, длительности переходных процессов, временные задержки и т.д.

В теории и практике подобие имеет большее значение, чем аналогия. При аналогии двух объектов распространение свойств одного на другой носит характер предположения и нуждается в проверке. При подобии двух объектов знание поведения одного из них означает знание поведения другого.

3.6 Степенные комплексы

Степенной комплекс – это функция вида

$$y = x_1^{\propto_1} x_2^{\propto_2} \dots x_n^{\propto_n}, \tag{3.4}$$

т.е. произведение различных степеней переменных или постоянных величин $\boldsymbol{x_i}$, причем $\propto_i$ – любые числа. Такие функции имеют важное значение. степенными комплексами описываются фундаментальные законы природы (законы Ньютона, Ома и др.), выражаются зависимости, с помощью которых устанавливаются единицы физических величин, представляются размерности производных единиц измерения. Любую функцию можно представить как функцию некоторых степенных комплексов. Любое уравнение, связывающее различные величины, можно представить как уравнение, связывающее соответствующие степенные комплексы. Безразмерными степенными комплексами являются так называемые ***критерии подобия***, определяющие подобие различных объектов.

Рассмотрим несколько важных положений, относящихся к степенным комплексам.

1. Число простых степенных комплексов, образованных из некоторых величин, не может превзойти числа этих величин.

Пусть из $\boldsymbol{N}$ величин $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_N}$ образовано $\boldsymbol{n}$ различных степенных комплексов

$$\begin{matrix} k_1 = x_1^{\propto_1} x_2^{\beta_1} \dots x_N^{\omega_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_p = x_1^{\propto_p} x_2^{\beta_p} \dots x_N^{\omega_p} \end{matrix} \tag{3.5}$$

$$\begin{matrix} k_{p+1} = x_1^{\propto_{p+1}} x_2^{\beta_{p+1}} \dots x_N^{\omega_{p+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_n = x_1^{\propto_n} x_2^{\beta_n} \dots x_N^{\omega_n} \end{matrix} \tag{3.6}$$

где $\alpha, \beta, \dots, \omega$ любые числа.

В общем случае все эти комплексы разделяются на $\boldsymbol{p}$ простых (3.5) и ($\boldsymbol{n}$ – $\boldsymbol{p}$) составных (3.6). *Простые комплексы* $k_1, \dots, k_p$ таковы, что ни один из них не может быть представлен в виде степенного комплекса, образованного из других комплексов группы. Каждый комплекс $k_{p+1}, \dots, k_n$ можно представить в виде степенного комплекса, образованного из $k_1, \dots, k_p$. Для того, чтобы выразить $k_{p+1}, \dots, k_n$ через $k_1, \dots, k_p$, необходимо с помощью (3.5) исключить из (3.6) величины $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_N}$. Так как при $p > N$ это невозможно, то должно быть $p \leq N$.

Пример. Из $\boldsymbol{N}$ = 3 величин $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ образовано $\boldsymbol{n}$ = 4 степенных комплекса

$$k_1 = x_1 x_2\,,\ k_2 = x_1 x_2^2 x_3,\ k_3 = x_1^2 x_2^2 x_3,\ k_4 = x_1^3 x_2^4 x_3. \tag{3.7}$$

Требуется установить число простых комплексов $\boldsymbol{p}$.

Находим первого равенства $x_1 = k_1/x_2$ и подставляем это выражение во все остальные равенства (3.7)

$$k_2 = k_1 x_2 x_3, k_3 = k_1^2 x_2 x_3, k_4 = k^3{}_1 x_2 x_3\ . \tag{3.8}$$

Первое из этих равенств дает $x_2 x_3 = k_2/k_1$. Подставив это выражение в два остальных равенства (3.8), получим

$$k_3 = k_1 k_2, k_4 = k_1^2 k_2. \tag{3.9}$$

Таким образом, $\boldsymbol{p}$ = 2 и простыми можно считать комплексы k_1, k_2. На основании (3.9) можно получить и другие варианты двух простых комплексов.

2. Любую функцию некоторых величин можно представить в виде функции степенных комплексов этих величин. В любом выражении вида

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_N) \tag{3.10}$$

символ $\boldsymbol{F}$ означает различные операции, выполняемые над переменными или постоянными $x_1, x_2, \dots, x_N$, но во всех случаях включает возведение в степень и умножение степеней. В простейших случаях может быть $x_i^{-1}, x_i x_j, x_i x_j^{-1}, x_i^{-1} x_j^{-1}$ и др. Обязательное выполнение указанных двух операций означает, что под знаком $\boldsymbol{F}$ величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ образуют степенные комплексы (3.5), (3.6). Следовательно, любую функцию (3.10) можно представить в виде

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(k_1, k_2, \dots, k_n)\ . \tag{3.11}$$

В этом выражении символ $\boldsymbol{f}$ различные операции, выполняемые над величинами $k_1, k_2, \dots, k_n$, кроме возведения в степень и умножения степеней.

Поэтому под знаком функции $\boldsymbol{f}$ объединения величин $k_1, k_2, \dots, k_n$ в какие-либо степенные комплексы быть не может.

Следует отметить, что в выражении (3.11) если величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ независимые, то степенные комплексы $k_1, k_2, \dots, k_n$ независимыми могут и не быть.

Пример. В выражении

$$y = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 x_3 \sin x_4\, x_5} = \frac{k_1}{k_2 + k_3 \sin k_4}$$

Степенные комплексы $k_1 = x_2, k_2 = x_1^2, k_3 = x_2^2 x_3, k_4 = x_4 x_5$ в общем случае можно рассматривать как независимые переменные, если независимы переменные $x_1, \dots, x_5$. Но, если, например, $x_3 = 2$, то $k_3 = 2k_1^2$.

3. Любую безразмерную функцию размерных величин можно представить в виде функции безразмерных степенных комплексов, образованных из этих величин.

Пусть в системе единиц с $\boldsymbol{q}$ основными единицами измерения $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ прозвольная функция (3.10) является безразмерной $[\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{F}] = 1$, а размерности величин $x_1, x_2, \dots, x_N$

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{x_1}] = \eta_1^{a_1}\eta_2^{b_1} \dots \eta_q^{h_1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [\boldsymbol{x_N}] = \eta_1^{a_N}\eta_2^{b_N} \dots \eta_q^{h_N}.\end{gathered} \qquad (3.12)$$

Уменьшим размеры основных единиц $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ соответственно в $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$ раз. Численные значения величин, обладающих размерностями (3.12), вместо прежних $x_1, x_2, \dots, x_N$, становятся равными

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x'_1} = \varepsilon_1^{a_1}\varepsilon_2^{b_1} \dots \varepsilon_q^{h_1} x_1 = e_1 x_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{x'_N} = \varepsilon_1^{a_N}\varepsilon_2^{b_N} \dots \varepsilon_q^{h_N} x_N = e_N x_N.\end{gathered} \qquad (3.13)$$

Численные значения степенных комплексов (3.5), (3.6), в которые объединяются $x_1, x_2, \dots$ вместо прежних $k_1, k_2, \dots$ становятся равными

$$\begin{gathered}\boldsymbol{k'_1} = e_1^{\alpha_1} e_2^{\beta_1} \dots e_N^{\omega_1} k_1 = E_1 k_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{k'_n} = e_1^{\alpha_n} e_2^{\beta_n} \dots e_q^{\omega_n} k_n = E_n k_n.\end{gathered} \qquad (3.14)$$

Так как численные значения функций (3.11), т.е. $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{f}$, как безразмерных величин остаются неизменными,

$$F(x_1, \dots, x_N) = F\left(x'_1, \dots, x'_N\right) = f(e_1 x_1, \dots, e_N x_N), \qquad (3.15)$$

$$f(k_1, \dots, k_n) = f\left(k'_1, \dots, k'_n\right) = f(E_1 k_1, \dots, E_n k_n). \qquad (3.16)$$

Равенство (3.15) требует, чтобы под знаком функции $\boldsymbol{F}$ безразмерные множители $e_1, \dots, e_N$ сокращались. Сокращение возможно только при объединении величин $e_1 x_1, \dots, e_N x_N$ под знаком $\boldsymbol{F}$ в степенные комплексы. согласно (3.11), (3.15), (3.16) величины $e_1 x_1, \dots, e_N x_N$ под знаком $\boldsymbol{F}$ объединяются в степенные комплексы $E_1 k_1, \dots, E_n k_n$, стоящие под знаком функции $\boldsymbol{f}$. Равенство (3.16) имеет место либо при объединении величин $E_1 k_1, \dots, E_n k_n$ под знаком функции $\boldsymbol{f}$ в степенные комплексы, в которых безразмерные множители $E_1, \dots, E_n$ сокращаются, либо при $E_1 = E_2 = \dots = 1$. Так как было показано, что величины, стоящие в (3.11) под знаком $\boldsymbol{f}$, в степенные комплексы не объединяются, то должно быть $E_1 = E_2 = \dots = 1$. Последнее означает, что в случае $[\boldsymbol{F}]$=1 при произвольном изменении основных единиц измерения численные значения степенных комплексов $k_1, \dots, k_n$ остаются неизменными и, следовательно, эти степенные комплексы безразмерные.

4. Любую размерную функцию размерных величин можно представить в виде произведения размерного степенного комплекса, составленного из этих величин, и безразмерной функции этих же величин.

Если функция (3.10) является размерной, то ее размерность $[\boldsymbol{F}]\neq 1$ определяется размерностями (3.12) величин $x_1, x_2, \dots, x_N$. Поэтому существует размерный степенной комплекс

$$k = x_1^{\propto} x_2^{\beta} \dots x_N^{\omega} \qquad (3.17)$$

с размерностью $[\boldsymbol{k}]$ = $[\boldsymbol{F}]$. Умножив и разделив правую часть выражения (3.10) на $\boldsymbol{k} \neq 0$, получим

$$F = F(x_1, \dots, x_N) = k\Phi(x_1, \dots, x_N), \qquad (3.18)$$

где $\Phi(x_1, \dots, x_N) = k^{-1} F(x_1, \dots, x_N)$, причем $[\Phi] = 1$.

При образовании степенных комплексов, особенно безразмерных, может встретиться затруднение, связанное с необходимостью деления на размерную величину, обращающуюся в ноль, что недопустимо. Это затруднение принципиально можно устранить, выразив эту величину в относительных единицах.

Подобие степенных комплексов. Два сходственных степенных комплекса

$$y_1 = a_1 \prod_0^n x_{1_i}^{\propto_i}, y_2 = a_2 \prod_0^n x_{2_i}^{\propto_i} \qquad (3.19)$$

подобны, если $m_y = y_1/y_2, m_{x_i} = x_{1i}/x_{2i}$. (3.20)

В простейшем случае $y_1 = a_1 x_1^2, y_2 = a_2 x_2^2$, (3.21, 3.22)

$m_y = y_1/y_2, m_x = x_1/x_2$ (3.23)

После ввода масштабов соотношения между y_1, y_2, x_1, x_2 определяются четырьмя уравнениями (3.20) – (3.23). Дополнительные соотношения (3.23) должны быть такими, чтобы система уравнений (3.20) – (3.23) не оказалась противоречивой, что и является необходимым для подобия функций (3.21) и (3.22).

При условии непротиворечивости системы (3.20) – (3.23) можно:

- задавшись значением x_1, определить y_1 двумя путями (рис. 3.9а);
- задавшись значением x_2, определить y_2 двумя путями (рис. 3.9б).

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d] & y_1 \\ x_2 \arrow[r] & y_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

а)

$$\begin{tikzcd} x_2 \arrow[r] \arrow[d] & y_2 \\ x_1 \arrow[r] & y_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

б)

Рисунок 3.9 – Два пути определения функций y_1 и y_2 в случае их подобия

В первом случае рассчитать y_1 можно:

$y_1 = a_1 x_1^2$ (прямой путь),

$x_2 = x_1/m_x, y_2 = a_2(x_1/m_x)^2, y_1 = m_y y_2 = m_y a_2 (x_1/m_x)^2$ (косвенный путь).

Система (3.23) – (3.25) непротиворечива, если тождественны выражения

$$a_1 x_1^2 = m_y a_2 (x_1/m_x)^2 \tag{3.24}$$

т.е. условие непротиворечивости

$$a_2 m_y / a_1 m_x^2 = 1 \tag{3.25}$$

Во втором случае рассчитать y_2 можно:

$y_2 = a_2 x_2^2$ (прямой путь),

$x_1 = m_x x_2, y_1 = a_1(m_x x_2)^2, y_2 = \frac{y_1}{m_y} = \frac{a_1(m_x x_2)^2}{m_y}$ (косвенный путь).

Аналогично рассуждая, непротиворечивость обеспечивается тождеством

$$a_2 x_2^2 = a_1 (m_x x_2)^2 / m_y \qquad (3.26)$$

т.е. условие непротиворечивости

$$a_1 m_x^2 / a_2 m_y = 1 \qquad (3.27)$$

равносильное (3.27).

Таким образом, при отсутствии противоречивости системы (3.20) – (3.23) благодаря масштабам можно преобразовать уравнение (3.20) в (3.21) и наоборот. В процессе преобразования устанавливается условие непротиворечивости в виде безразмерного степенного комплекса (3.25) - (3.27), численное значение которого должно равняться единице.

В теории моделирования безразмерные степенные комплексы принято обозначать буквами **П** (π). К безразмерному виду, аналогичному (3.25) - (3.27) можно привести и сходственные уравнения (3.21) - (3.22)

$$\Pi_1 = a_1 x_1^2 / y_1 = 1,$$

$$\Pi_2 = a_2 x_2^2 / y_2 = 1.$$

Условие непротиворечивости (3.27) вытекает из простого соотношения

$$\Pi_1 / \Pi_2 = 1.$$

Безразмерные степенные комплексы Π_1, Π_2 называются ***критериями подобия сходственных функций*** (в нашем случае (3.20)-(3.22)).

Пример. Сходственные функции $y_1 = x_1^2$; $y_2 = 8x_2^2$ подобны, если $m_y = y_1/y_2 = 2, m_x = x_1/x_2 = 4$. Имеем $a_1 = 1, a_2 = 8$ и критерии подобия

$$\Pi_1 = x_1^2 / y_1,$$

$$\Pi_2 = 8x_2^2 / y_2.$$

Условие подобия $\Pi_1/\Pi_2 = \frac{1 \cdot x_1^2}{8x_2^2 y_1/y_2} = \frac{{m_x}^2}{8m_y} = 1$ выполняется, функции y_1 и y_2 подобны и для них справедлива зависимость на рис. 3.7а.

Вывод: для **подобия степенных комплексов необходимы и достаточны**:

- их сходственность;

- связь сходственных переменных масштабами;

- непротиворечивость (совместность) уравнений, выражающих сходственные степенные комплексы;

- непротиворечивость (совместность) уравнений, выражающих масштабы сходственных переменных.

Последнее условие означает, что масштабы не могут выбираться произвольно, а должны удовлетворять определенному масштабному уравнению вида (3.27).

Анализ совместности уравнений, выражающих сходственные степенные комплексы и масштабы, заключается в выводе масштабного уравнения и выяснении вопроса, удовлетворяют ли данному уравнению масштабы. Масштабное уравнение можно вывести двумя способами: с помощью преобразования одного сходственного уравнения в другое или с помощью критериев подобия. Все изложенное для простейших степенных комплексов (3.20) – (3.22) можно распространить на общий случай (3.19).

3.7 Подобие в общем случае

Пусть объекты описываются уравнениями (3.1) – (3.2): два объекта подобны, если

- они имеют сходственные математические описания:

$$F\left(y_1,\ x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

$$F\left(y_2,\ x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}\right) = 0, \qquad (3.2)$$

где $y_1 = y_1\left(t_{1j}\right)$; $x_{1i} = x_{1i}\left(t_{1j}\right)$; $D_{1j} = \frac{d}{dt_{1j}}$; $y_2 = y_2\left(t_{2j}\right)$; $x_{2i} = x_{2i}\left(t_{2j}\right)$; $D_{2j} = \frac{d}{dt_{2j}}$; $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$ и $\boldsymbol{x_{1i}}$, $\boldsymbol{x_{2i}}$ – соответственно неизвестные и заданные функции независимых переменных $\boldsymbol{t_{1j}}$ и $\boldsymbol{t_{2j}}$;

- сходственные переменные, содержащиеся в математических описаниях, связаны постоянными коэффициентами пропорциональности, которые называют масштабами (константами) подобия

$$m_y = y_1/y_2\,, m_{x_i} = x_{1i}/x_{2i}\,;\ m_{t_j} = t_{1j}/t_{2j}\ . \qquad (3.3)$$

При этом остаются в силе и три необходимых условия подобия. Как и ранее, масштабные уравнения можно вывести двумя способами.

Способ подстановки [1] основан на преобразовании одного уравнения в другое. Если система уравнений (3.1) – (3.3) непротиворечива, то каждое сходственное уравнение можно решить двумя путями: прямым и косвенным (схемы на рис. 3.10, аналогичные рис. 3.9).

Прямой путь определения неизвестной функции y_1 (рис. 3.4а) заключается в непосредственном решении уравнения (3.1), *косвенный* – в замене переменных уравнения (3.2) переменными уравнения (3.1) согласно (3.3) и решении уравнения

$$F\left(\frac{y_1}{m_y}, \frac{x_{1i}}{m_{x_i}}, \frac{t_{1j}}{m_{t_j}}, m_{t_j} D_{1j}, A_{2j}\right) = 0 \qquad (3.1^*)$$

Замена переменных y_2, x_{2i}, t_{2j} сходственными переменными y_1, x_{1i}, t_{1j} выполняется согласно соотношениям (3.3). С помощью тех же масштабов m_y, m_x, m_t осуществляется замена производных сходственных величин. Масштабы связывают все возможные значения y_1, x_{1i}, t_{1j} и соответствующие им значения y_2, x_{2i}, t_{2j}, в том числе и бесконечно малые приращения, т.е. дифференциалы

$$m_y = \frac{dy_1}{dy_2}; m_{x_i} = \frac{dx_{1i}}{dx_{2i}}; m_{t_j} = \frac{dt_{1j}}{dt_{2j}}.$$

$$\begin{tikzcd}
(3.1) \arrow[r] \arrow[d] & y_1 \\
(3.1^*) \arrow[r] & {y^*}_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(3.2) \arrow[r] \arrow[d] & y_2 \\
(3.2^*) \arrow[r] & {y^*}_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

а) б)

Рисунок 3.10 – Пути решения уравнений (3.1) и (3.2)

Для замены производной $D_{2j} y_2$ сходственной производной $D_{1j} y_1$ находим отношение

$$\frac{D_{1j} y_1}{D_{2j} y_2} = \frac{dy_1}{dt_{1j}} \Big/ \frac{dy_2}{dt_{2j}} = \frac{dy_1}{dy_2} \frac{dt_{2j}}{dt_{1j}} = \frac{m_y}{m_{t_j}}, \qquad (3.28)$$

откуда

$$D_{2j} y_2 = D_{1j} y_1 \, m_y / m_{t_j} \, . \qquad (3.29)$$

Эти же выражения можно получить проще. Так как, $dt_{2j} = dt_{1j} / m_{t_j}$, то

$$D_{2j} = \frac{d}{dt_{2j}} = \frac{d}{dt_{1j}} m_{t_j} = D_{1j} m_{t_j},$$

откуда

$$m_{t_j} = D_{2j} / D_{1j}, \qquad (3.30)$$

что позволяет рассматривать операторы D_{1j}, D_{2j} как сходственные величины, связанные масштабами

$$m_{D_j} = \frac{D_{1j}}{D_{2j}} = \frac{1}{m_{t_j}}.$$

В таком случае производную $D_{2j}y_2$ можно рассматривать как обычное произведение и заменять D_{2j} на D_{1j} и y_2 на y_1 раздельно с помощью масштабов m_{t_j} и m_y. При этом согласно (3.29) $D_{2j}y_2 = D_{1j}m_{t_j}y_1/m_y = D_{1j}y_1\, m_{t_j}/m_y$. Аналогично вторую производную $D^2{}_{2j}y_2$ можно заменять сходственной второй производной $D^2{}_{1j}y_1$

$$D^2{}_{2j}y_2 = D_{1j}^2 m_{t_j}^2\, y_1/m_y = D_{1j}^2\, y_1 m_{t_j}^2/m_y$$

и т.д. Все сказанное легко распространить на частные и смешанные производные.

Т.о., при замене переменных одного уравнения сходственными переменными другого в качестве переменных формально можно рассматривать любые операторы дифференцирования.

После замены переменных y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j} переменными y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j} уравнение (3.2) приводят к виду (3.1*), отличающееся от (3.1) только постоянными коэффициентами.

В случае подобия решения y_1 и $y^*{}_1$ уравнений (3.1) и (3.1*) тождественны $y_1 = y^*{}_1$.

Прямой путь определения неизвестной функции y_2 (рис. 3.4б) состоит в решении (3.2), косвенный – в замене переменных y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j} уравнения (3.1) переменными y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j} согласно (3.3), (3.30) и решении уравнения

$$F\left(m_y y_2, m_{x_i}x_{2i}, m_{t_j}t_{2j}, D_{2j}/m_{t_j}, A_{1s}\right) = 0 \qquad (3.2^*)$$

В случае подобия решения y_2 и $y^*{}_2$ уравнений (3.2) и (3.2*) тождественны: $y_2 = y^*{}_2$.

Пример. Даны сходственные уравнения

$$a_{11}x_{11}\sin a_{12}\, y_1 - a_{13}x_{12}^2 = 0 \qquad (3.31)$$

$$a_{21}x_{21}\sin a_{22}\, y_2 - a_{23}x_{22}^2 = 0 \qquad (3.32)$$

Три пары сходственных переменных связаны масштабами

$$m_y = y_1/y_2\,;\ m_{x_1} = x_{11}/x_{21}\,;\ m_{x_2} = x_{12}/x_{22}.$$

Прямое решение уравнения (3.31) имеет вид

$$y_1 = \frac{1}{a_{12}}\arcsin\frac{a_{13}x_{12}^2}{a_{11}x_{11}}.$$

Заменой переменных в (3.32) y_2, x_{21}, x_{22} переменными y_1, x_{11}, x_{12} находим косвенное решение уравнения (3.31) как решение уравнения

$$a_{21}\frac{x_{11}}{m_{x_1}}\sin a_{22}\frac{y_1}{m_y}-a_{23}\frac{x_{12}^2}{m^2{}_{x_2}}=0 \qquad (3.31^*)$$

в виде

$$y^*{}_1=\frac{m_y}{a_{22}}\arcsin\frac{a_{23}m_{x_1}x_{12}^2}{a_{21}m^2{}_{x_2}x_{11}}.$$

Для тождественности решений y_1 и $y^*{}_1$ необходимо выполнение условий

$$\frac{1}{a_{12}}=\frac{m_y}{a_{22}};\ \frac{a_{13}}{a_{11}}=\frac{a_{23}m_{x_1}}{a_{21}m^2{}_{x_2}}$$

или

$$\frac{m_y a_{12}}{a_{22}}=1;\ \frac{a_{13}a_{21}m^2{}_{x_2}}{a_{23}a_{11}m_{x_1}}=1, \qquad (3.33)$$

которые в данном случае представляют собой масштабные уравнения. Масштаб m_y определяется однозначно. Один из масштабов m_{x_1}, m_{x_2} можно выбрать произвольно.

Для выполнения условия $y_1=y^*{}_1$ можно не прибегать к аналитическому решению уравнений (3.1) и (3.1*), что не всегда возможно. для этого достаточно сделать уравнения (3.1) и (3.1*) равносильными, приравняв их сходственные коэффициенты. Однако в общем случае эти коэффициенты обладают различными размерностями. Поэтому необходимо предварительно преобразовать (рис. 3.4а) уравнение (3.1*) в уравнение

$$F\left(y_1,\ x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A^{**}{}_{1s}\right)=0 \qquad (3.1^{**})$$

так, чтобы размерности сходственных коэффициентов (3.1**) и (3.1) были одинаковы: $[A^{**}{}_{1s}]$ = $[A_{1s}]$. Условия равенства $y_1=y^*{}_1$ получаются в виде $A^{**}{}_{1s}$ = A_{1s}.

Пример. Для вывода условий равенства уравнения (3.37) в предыдущем примере умножим уравнение (3.37*) на $a_{11}m_{x_1}/a_{21}$:

$$a_{11}x_{11}\sin\frac{a_{23}}{m_y}y_1-\frac{a_{23}a_{11}m_{x_1}}{m_{x_2}^2a_{21}}x_{12}^2=0.$$

Размерности сходственных коэффициентов (3.37) и (3.37*) равны. Для тождественности решений y_1 и $y^*{}_1$ необходимо выполнить условия

$$a_{12}=a_{22}/m_y\,;\ a_{13}=a_{23}a_{11}m_{x_1}/m_{x_2}^2\,a_{21},$$

равносильные условиям (3.39).

Если в частном случае, размерности сходственных коэффициентов уравнений (3.37) и (3.37*) одинаковы, то приравнивая их, получаем

$$a_{11} = a_{21}/m_{x_1}, a_{12} = a_{22}/m_y, a_{13} = a_{23}/m_{x_2}^2.$$

Такая система уравнений определяет все три масштаба однозначно.

Пример. Даны сходственные уравнения

$$D_1y_1 + ay_1 = b_1D_1x_1 + b_0x_1 \tag{3.34}$$

$$D_2y_2 + \propto y_2 = \beta_1D_2x_2 + \beta_0x_2 \tag{3.35}$$

где

$$y_1 = y_1(t_1),\ x_1 = x_1(t_1), D_1 = \frac{d}{dt_1};$$

$$y_2 = y_2(t_2),\ x_2 = x_2(t_2), D_2 = \frac{d}{dt_2}.$$

Масштабы равны

$$m_y = y_1/y_2;\ m_x = x_1/x_2;\ m_t = t_1/t_2 = D_2/D_1.$$

Замена переменных в (3.41) дает

$$m_tD_1\frac{y_1}{m_y} + \propto \frac{y_1}{m_y} = \beta_1m_tD_1\frac{x_1}{m_x} + \beta_0\frac{x_1}{m_x} \tag{3.34*}$$

Так как сходственные постоянные коэффициенты в (3.34) и (3.34*) в общем случае различны по размерностям, то, умножив (3.34*) на m_y/m_t, получим

$$D_1y_1 + \frac{\propto}{m_t}y_1 = \frac{\beta_1m_y}{m_x}D_1x_1 + \frac{\beta_0m_y}{m_tm_x}x_1 \tag{3.34**}$$

Размерности сходственных постоянных коэффициентов уравнений (3.34) и (3.34**) одинаковы. Приравняв сходственные коэффициенты, получим систему масштабных уравнений

$$\frac{\propto}{am_t} = 1;\ \frac{\beta_1m_y}{b_1m_x} = 1;\ \frac{\beta_0m_y}{b_0m_tm_x} = 1. \tag{3.36}$$

Масштаб m_t определяется однозначно. Один из двух других масштабов m_x или m_y может быть выбран произвольно, если два последних уравнения совместны.

Переход от (3.34*) к (3.34**) означает приведение размерностей членов (3.34*) к размерностям членов (3.34). Уравнение размерностей может быть получено не только таким способом, но и, например, умножением (3.34*) на $am_y/\propto$. При этом

$$\frac{am_t}{\propto} D_1 y_1 + a y_1 = \frac{a\beta_1 m_y m_t}{\propto b_1 m_x} D_1 x_1 + \frac{a\beta_0 m_y}{\propto m_x} x_{1.} \qquad (3.34^{***})$$

Приравняв сходственные коэффициенты уравнений (3.34***) и (3.34), получим систему масштабных уравнений

$$\frac{am_t}{\propto} = 1;\ \frac{a\beta_1 m_y m_t}{\propto b_1 m_x} = 1;\ \frac{a\beta_0 m_y}{\propto b_0 m_x} = 1, \qquad (3.37)$$

отличную от системы (3.36), но легко преобразуемую в нее. Системы (3.36) и (3.37) равносильны.

Совершенно аналогично получают масштабные уравнения из условий тождественности (3.2) и (3.2*).

Таким образом, сущность способа подстановки состоит:

- замена переменных в одном из сходственных уравнений сходственными переменными второго уравнения с помощью масштабов;

- обеспечение тождественности промежуточного уравнения и второго сходственного уравнения;

- получение масштабных уравнений, как условия тождественности указанных двух уравнений.

Способ критериев подобия основан на представлении уравнений в безразмерной форме. Сходственные функции уравнений (3.1) и (3.2) представляются произведениями размерных степенных комплексов и безразмерных функций

$$F(y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}) = A_{1s} y_1^{\propto} x_{1i}^{\beta_i} t_{1j}^{\gamma_j} D_{1j}^{\delta_j} \Phi(y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}) = 0,$$

$$F(y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}) = A_{2s} y_2^{\propto} x_{2i}^{\beta_i} t_{2j}^{\gamma_j} D_{2j}^{\delta_j} \Phi(y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}) = 0.$$

После сокращения степенных комплексов уравнения (3.1) и (3.2) оказываются в безразмерной форме

$$\Phi(y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}) = 0 \qquad (3.1б)$$

$$\Phi(y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}) = 0, \qquad (3.2б)$$

где $[\Phi] = 1$. Под знаками безразмерных функций Φ величины $y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}$ и $y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}$ объединяются в безразмерные степенные комплексы – критерии подобия (см. выше)

$$\mathbf{\Pi}_{1r} = a_{1r} y_1^{\propto_r} x_{1i}^{\beta_{i_r}} t_{1j}^{\gamma_{j_r}} D_{1j}^{\delta_{j_r}}, \qquad (3.38)$$

$$\mathbf{\Pi}_{2r} = a_{2r} y_2^{\propto_r} x_{2i}^{\beta_{i_r}} t_{2j}^{\gamma_{j_r}} D_{2j}^{\delta_{j_r}}. \qquad (3.39)$$

Следует учесть, что это сокращенная запись критериев подобия. В развернутом виде выражение ***r***-критериев подобия более сложное

$$\mathbf{П}_r = a_r y^{\propto_r} x_1^{\beta_{1r}} \dots x_n^{\beta_{n_r}} t_1^{\gamma_{1r}} \dots t_m^{\gamma_{m_r}} D_1^{\delta_{1r}} \dots D_m^{\delta_{m_r}},$$

причем в общем случае постоянный множитель a_r – степенной комплекс, образованный постоянными коэффициентами A_s. При этом функции Φ уравнений (3.1б) и (3.2б) представляются функциями критериев подобия $\mathbf{П}_{1r}$ и $\mathbf{П}_{2r}$

$$\Phi\left(y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}\right) = \Psi(\mathbf{П}_{1r}),$$

$$\Phi\left(y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}\right) = \Psi(\mathbf{П}_{2r}).$$

В результате безразмерные уравнения (3.1б) и (3.2б) принимают критериальную форму

$$\Psi(\mathbf{П}_{1r}) = 0 \qquad (3.1к)$$

$$\Psi(\mathbf{П}_{2r}) = 0 \qquad (3.2к)$$

Заменив, согласно первому способу вывода масштабных уравнений переменные $y_1, x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}$ в скрытом виде содержащиеся в (3.1к), переменными $y_2, x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}$, получим

$$\mathbf{П}_{1r} = a_{1r}\left(m_y y_2\right)^{\propto_r} (m_{x_i} x_{2i})^{\beta_{i_r}} (m_{t_j} t_{2j})^{\gamma_{j_r}} \left(\frac{D_{2j}}{m_{t_j}}\right)^{\delta_{j_r}}$$

$$= a_{1r} m_y^{\propto_r} m_{x_i}^{\beta_{i_r}} m_{t_j}^{\gamma_{j_r}} m_{t_j}^{-\delta_{j_r}} \frac{\mathbf{П}_{2r}}{a_{2r}}.$$

Подставив это выражение в (3.1к), имеем

$$\Psi\left(\frac{a_{1r}}{a_{2r}} m_y^{\propto_r} m_{x_i}^{\beta_{i_r}} m_{t_j}^{\gamma_{j_r}} m_{t_j}^{-\delta_{j_r}} \mathbf{П}_{2r}\right) = 0. \qquad (3.2к^*)$$

В соответствии с первым способом, уравнения (3.2к) и (3.2к*) должны быть тождественны. Для этого необходимо выполнение условия

$$\frac{a_{1r}}{a_{2r}} m_y^{\propto_r} m_{x_i}^{\beta_{i_r}} m_{t_j}^{\gamma_{j_r}} m_{t_j}^{-\delta_{j_r}} = 1, r = 1,2, \dots, \qquad (3.40)$$

представляющего масштабное уравнение в общем виде.

На основании (3.3), (3.46) получаем

$$\frac{a_{1r} y_1^{\propto_r} x_{1i}^{\beta_{i_r}} t_{1j}^{\gamma_{j_r}} D_{1j}^{\delta_{j_r}}}{a_{2r} y_2^{\propto_r} x_{2i}^{\beta_{i_r}} t_{2j}^{\gamma_{j_r}} D_{2j}^{\delta_{j_r}}} = \frac{\mathbf{П}_{1r}}{\mathbf{П}_{2r}} = 1. \qquad (3.41)$$

Таким образом, в случае подобия уравнений (3.1) и (3.2) соответствующие им сходственные критерии подобия должны быть равны

$$\mathbf{П}_{1r} = \mathbf{П}_{2r}, r = 1,2, \dots, \qquad (3.42)$$

Пример. Пусть заданы уравнения (3.43), (3.44).

$$a_{11} x_{11} \sin a_{12} y_1 - a_{13} x_{12}^2 = 0 \qquad (3.43)$$

$$a_{21}x_{21}\sin a_{22}\,y_2 - a_{23}x_{22}^2 = 0 \qquad (3.44)$$

В безразмерной форме они имеют вид

$$\sin a_{12}\,y_1 - \frac{a_{13}x_{12}^2}{a_{11}x_{11}} = 0, \sin a_{22}\,y_2 - \frac{a_{23}x_{22}^2}{a_{21}x_{21}} = 0,$$

а в критериальной

$$\sin \mathbf{\Pi}_{11} - \mathbf{\Pi}_{12} = 0, \sin \mathbf{\Pi}_{21} - \mathbf{\Pi}_{22} = 0,$$

где

$$\mathbf{\Pi}_{11} = a_{12}y_1, \mathbf{\Pi}_{12} = \frac{a_{13}x_{12}^2}{a_{11}x_{11}};$$

$$\mathbf{\Pi}_{21} = a_{22}y_2, \mathbf{\Pi}_{22} = \frac{a_{23}x_{22}^2}{a_{21}x_{21}}.$$

Масштабные уравнения

$$\frac{\mathbf{\Pi}_{11}}{\mathbf{\Pi}_{21}} = \frac{a_{12}y_1}{a_{22}y_2} = \frac{a_{12}m_y}{a_{22}} = 1,$$

$$\frac{\mathbf{\Pi}_{21}}{\mathbf{\Pi}_{22}} = \frac{a_{13}x_{12}^2 a_{21}}{a_{11}a_{22}^2(x_{11}/x_{21})a_{23}} = \frac{a_{13}a_{22}m^2{}_{x_2}}{a_{23}a_{11}m_{x_1}} = 1$$

тождественны (3.41)

Таким образом, сущность способа критериев подобия состоит в следующем:

- сходственным уравнениям придается безразмерная форма;

- определяются критерии подобия;

- масштабные уравнения получаются приравниванием единице отношений сходственных критериев. Формы масштабных уравнений аналогичны формам соответствующих критериев подобия.

Способ подстановки отличается естественностью и наглядностью, но несколько сложен. Способ критериев подобия носит более формальный характер, но значительно проще в практическом применении.

3.8 Дополнительные условия подобия

До сих пор при рассмотрении двух объектов предполагалось, что каждое из сходственных уравнений, соответствующих этим объектам, имеет единственное решение. В таком случае сходственные уравнения полностью описывают объект.

Однако часто уравнение, предназначенное для описания объекта, имеет несколько решений. В этом случае для полного описания состояния объекта и его поведения одного уравнения недостаточно. Дело в том, что состояние и поведение реального физического объекта всегда однозначны. Поэтому, если соответствующее уравнение имеет несколько решений, требуется указать, какое из решений соответствует действительности. Условия, конкретизирующие одно решение из нескольких, называют **условиями однозначности**. Совершенно очевидно, что при подобии объектов условия однозначности решений сходственных уравнений должны находиться в определенном соответствии. Форма условий однозначности зависит от рода решений и может быть различной

Конечные уравнения. Пусть математические описания (3.1) и (3.2)

$$F\left(y_1,\ x_{1i}, t_{1j}, D_{1j}, A_{1s}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

$$F\left(y_2,\ x_{2i}, t_{2j}, D_{2j}, A_{2s}\right) = 0, \qquad (3.2)$$

представляют конечные уравнения и неизвестными в них являются функции $y_1 = y_1\left(t_{1j}\right), y_2 = y_2\left(t_{2j}\right)$. Пусть каждое из уравнений при заданных значениях независимых переменных t_{1j} и t_{2j} имеет два решения, что указывает на двузначность функций $y_1\left(t_{1j}\right)$ и $y_2\left(t_{2j}\right)$. При этом можно сказать, что первое уравнение определяет в неявной форме две однозначные функции $y_{11} = y_{11}\left(t_{1j}\right), y_{12} = y_{12}\left(t_{1j}\right)$, а второе – две однозначные функции $y_{21} = y_{21}\left(t_{2j}\right), y_{22} = y_{22}\left(t_{2j}\right)$.

Отдельные точки графиков функций $y_{11}\left(t_{1j}\right)$ и $y_{12}\left(t_{1j}\right)$, а также $y_{21}\left(t_{2j}\right)$ и $y_{22}\left(t_{2j}\right)$ могут совпадать (сходственные уравнения имеют при этом двукратные корни), но в целом $y_{11}\left(t_{1j}\right) \neq y_{12}\left(t_{1j}\right)$, $y_{21}\left(t_{2j}\right) \neq y_{22}\left(t_{2j}\right)$.

Пусть сходственными однозначными функциями являются $y_{11}\left(t_{1j}\right)$ и $y_{12}\left(t_{1j}\right)$, а также $y_{21}\left(t_{2j}\right)$ и $y_{22}\left(t_{2j}\right)$. В случае подобия рассматриваемых конечных уравнений при любых значениях t_{1j} и t_{2j}, связанных масштабом $m_{tj} = t_{1j}/t_{2j}$, масштаб $m_y = y_1/y_2$ связывает фактически только значения

сходственных однозначных функций, т.е.

$$m_y = y_{11}/y_{21} = y_{12}/y_{22}.$$

Равенство

$$m_y = y_{11}/y_{22} = y_{12}/y_{21}$$

может иметь место только в отдельных точках, при $y_{11} = y_{12}, y_{21} = y_{22}$.

Однозначное состояние или поведение первого объекта может определять либо функция $y_{11}\left(t_{1j}\right)$, либо функция $y_{12}\left(t_{1j}\right)$. Однозначность состояния и поведения второго объекта может определяться одной из функций $y_{21}(t_{2j})$ или $y_{22}(t_{2j})$.

В случае подобия объектов их однозначные состояния должны определяться соответствующими сходственными однозначными функциями $y_{11}(t_{1j})$ и $y_{12}(t_{1j})$ или $y_{21}(t_{2j})$ и $y_{22}(t_{2j})$. Если это условие не соблюдается, подобие объектов, очевидно, невозможно, несмотря на подобие соответствующих сходственных уравнений.

Для конкретизации одной из функций $y_{11}(t_{1j})$, $y_{12}(t_{1j})$ или $y_{21}(t_{2j})$, $y_{22}(t_{2j})$, вообще говоря, достаточно фиксировать по одной точке каждой из них. Однако для установления подобия или для обеспечения подобия объектов этого мало. Для правильного заключения о наличии или отсутствии подобия объектов, которым соответствуют сходственные конечные уравнения, имеющие два решения, необходимо фиксировать по две точки каждой конкретизируемой функции.

Дифференциальные уравнения. Пусть математические описания (3.1) и (3.2) представляют обыкновееные дифференциальные уравнения. При подобии объектов, описываемых сходственными обыкновенными дифференциальными уравнениями, соответствующие масштабы связывают не только t_1 , t_2, y_1, y_2, но и производные y'_1, y'_2, y''_1, y''_2, …

Дифференциальные уравнения в частных производных. Пусть математические описания (3.1) и (3.2) представляют дифференциальные уравнения в частных производных. В этом случае функции зависят от нескольких аргументов (обычно не более четырех). Для подобия объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, необходимо подобие начальных условий.

В самом общем случае **для подобия двух объектов необходимо и достаточно** выполнения пяти условий:

1) сходственность математических описаний;
2) связь сходственных переменных масштабами;
3) выбор масштабов согласно масштабным уравнениям;
4) сходственность условий однозначности решений сходственных уравнений, содержащихся в математических описаниях, и пропорциональность содержащихся в этих условиях сходственных переменных;

5) сходственность заданных функций, содержащихся в математических описаниях, и пропорциональность содержащихся в этих функциях сходственных переменных.

3.9 Методы моделирования

3.9.1 Регрессионный анализ

Проблема изучения взаимосвязей характеристик моделей (и, соответственно, оригиналов) является одной из важнейших задач моделирования и анализа. При проведении измерений параметров модели всегда присутствуют ошибки, существуют неучтенные факторы влияния и др., что позволяет рассматривать результаты измерений как выборку с определенным законом распределения случайных величин. Связь переменных, на которую накладываются воздействия случайных факторов, называется статистической связью. Наличие такой связи заключается в том, что изменение одной переменной приводит к изменению математического ожидания другой переменной. Если неизвестно, какая из двух переменных является независимой, а какая зависимой – переменные равноправны и имеет смысл говорить о статистической взаимосвязи корреляционного типа. Если две исследуемые переменные не равноправны (одна независимая x, а другая y – зависит от первой), можно оценивать уравнение регрессии вида $y = f(x)$. **Уравнение регрессии** – это формула статистической связи между переменными. Если формула линейна – речь идет о *линейной регрессии*, статистическая связь между двумя переменными называется *парной регрессией*, зависимость от нескольких переменных определяется как *множественная регрессия*.

Выбор формулы связи переменных называется спецификацией регрессии (например, $y = f(x) = a + bx$ линейная регрессия). Однако, до тех пор, пока не оценены количественные значения параметров a, b, не проверена надежность сделанных оценок, эта формула остается лишь гипотезой. Оценка значений параметров выбранной формулы статистической связи переменных называется *параметризацией уравнения регрессии*.

Парная линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Если имеется некоторая совокупность оценок переменных (результатов наблюдений, измерений), через нее можно всегда можно провести прямую линию, которая является наилучшей в определенном смысле среди всех прямых линий («ближайшей» к точкам наблюдений по их совокупности).

Для этого следует вначале определить понятие «близости» прямой к некоторому множеству точек на плоскости (меру близости). Меры такой близости могут быть различны, но, очевидно, должны быть связаны с расстоянием от точки наблюдения до рассматриваемой прямой линии.

В зависимости от меры рассматриваются **методы параметризации**:

- минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии значений $a + bx_i$ – *метод наименьших квадратов (МНК)*;

- минимум суммы абсолютных величин разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии значений $a + bx_i$ – критерий Колмогорова.

Выберем в качестве критерия близости минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии значений $(a + bx_i)$:

$$Q = \sum_i e_i^2 = \sum_i \big(y_i - (a + bx_i)\big)^2 \to min \tag{3.45}$$

Здесь считаем, что y_i, x_i – известные данные наблюдений, a и b - неизвестные параметры линии регрессии. Поскольку функция $\boldsymbol{Q}$ непрерывна, выпукла и ограничена снизу нулем, она имеет минимум. Для соответствующих точке этого минимума значений a и b могут быть найдены простые и удобные формулы. «Наилучшая» по МНК прямая линия всегда существует, но не всегда является достаточно хорошей.

Предположим, что связь между y и x линейна: $y = f(x) = \propto + \beta x$. Здесь имеется в виду связь между всеми возможными значениями величин y и x, т.е. для генеральной совокупности. Наличие случайных отклонений, вызванных воздействием на переменную y множества других, неучтенных в нашем уравнении факторов и ошибок измерения, приведет к тому, что связь наблюдаемых величин x_i, y_i приобретает вид $y_i = \propto + \beta x_i + \epsilon_i$ (где ϵ_i – случайные ошибки, отклонения, возмущения). Задача состоит в следующем: по имеющимся данным наблюдений $\{x_i\}, \{y_i\}$ оценить значения параметров $\propto$ и β, обеспечивающие минимум величины Q. Так как значения случайных отклонений в выборке неизвестны, и по наблюдениям x_i, y_i можно получить оценки параметров $\propto$ и β, которые сами являются случайными величинами, поскольку соответствуют случайной выборке. Пусть $\boldsymbol{a}$ – оценка параметра $\propto$, и $\boldsymbol{b}$ – оценка параметра β. Тогда оцененной уравнение регрессии будет иметь вид: $y_i = a + bx_i + e_i$, где e_i – наблюдаемые значения ошибок ϵ_i.

Для оценки параметров $\propto$ и β воспользуемся МНК, который предполагает поиск минимума по переменным $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. При использовании МНК к ошибкам ϵ_i предъявляются требования (условия Гаусса-Маркова):

1) величина ϵ_i является случайной переменной;
2) математическое ожидание ϵ_i равно нулю: $M(\epsilon_i) = 0$;
3) дисперсия ϵ_i постоянна: $D(\epsilon_i) = D(\epsilon_j) = \sigma^2$ для всех $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$;
4) значения ϵ_i независимы между собой, откуда:

$$cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = \begin{cases} 0, \text{при } i \neq j, \\ \sigma^2, \text{при } i = j \end{cases} \tag{3.46}$$

5) величины ϵ_i статистически независимы со значениями x_i.

Известно, что если условия 1) – 5) выполняются, то оценки обладают следующими свойствами:

- являются *несмещенными*, т.е. математическое ожидание оценки каждого параметра равно его истинному значению: $M(a) =\propto$, $M(b) = \beta$, что следует из равенства 0 математического ожидания ошибок – отсутствуют систематические ошибки в определении положения линии регрессии;

- оценки *состоятельны*, так как дисперсия оценок параметров при возрастании числа наблюдений стремится к нулю (если число измерений n достаточно велико, практически оценки параметров близки к истинным значениям);

- оценки *эффективны*, они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками данного параметра, линейными относительно величин y_i.

Перечисленные свойства не зависят от конкретного вида распределения величин ϵ_i (теорема Гаусса-Маркова), но обычно предполагают, что они распределены нормально $N(0, \sigma^2)$. Наиболее значимым является условие 5) - при его невыполнении могут нарушаться и другие условия.

Для того, чтобы функция (3.51) достигала минимума, необходимо равенство нулю ее частных производных:

$$\begin{cases} Q'_a = -2\sum_i (y_i - a - bx_i) = 0 \\ Q'_b = -2\sum_i (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sum_i y_i - na - b\sum_i x_i = 0 \quad (3.47) \\ \sum_i y_i x_i - a\sum_i x_i - b\sum_i x^2{}_i = 0 \ (3.48) \end{cases}$$

Если уравнение (3.53) разделить на $\boldsymbol{n}$, получим $\bar{y} = a + b\bar{x}$, где

$\bar{y} = \sum_i y_i/n; \bar{x} = \sum_i x_i/n$ - средние значения $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$. Таким образом, уравнение регрессии проходит через точку со средними значениями $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$. Подставив величину а из (3.47) в (3.48), получаем

$$\sum_i y_i x_i = \sum_i x_i(\bar{y} - b\bar{x}) + b\sum_i x^2{}_i = n\,\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x}) + b\sum_i x^2{}_i.$$

Откуда

$$b = \frac{\sum_i y_i x_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x^2{}_i - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}; \qquad (3.49)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}. \qquad (3.50)$$

Иначе можно записать, что $b = \frac{cov(x,y)}{D(x)} = r\frac{\sqrt{D(y)}}{\sqrt{D(x)}}$, где $\boldsymbol{r}$ – коэффициент корреляции $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$. Таким образом, коэффициент регрессии пропорционален показателю ковариации и коэффициенту корреляции $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$, а коэффициенты этой пропорциональности служат для соизмерения перечисленных разноразмерных величин. Оценки $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, очевидно, являются линейными относительно y_i (если x_i считать коэффициентами).

Можно легко рассчитать коэффициент парной регрессии, зная коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}$, и для этого нет необходимости решать систему уравнений.

3.9.2 Системы массового обслуживания

Существует большое число процессов, для которых характерна следующая общая структура (рис. 3.11): в совокупность пунктов (*система обслуживания*) поступают через некоторые промежутки времени объекты (*входящий поток*), которые подвергаются там соответствующим операциям (*обслуживание*) и затем покидают систему (*выходящий поток*), освобождая место для следующих объектов. Промежутки времени, через которые поступают объекты, и время обслуживания хотя и могут быть регулярными, но, как правило, носят случайный характер. При массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникать *очереди*.

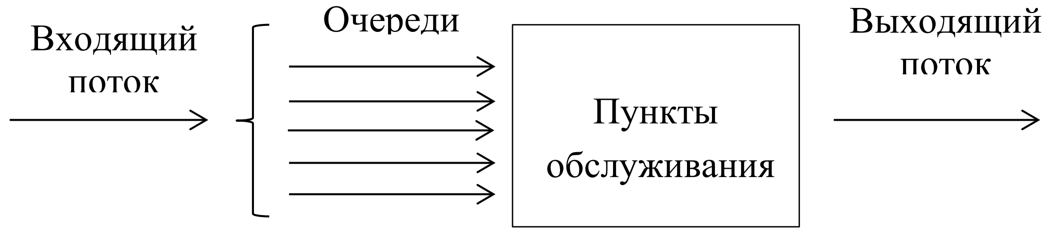


Рисунок 3.11 – Структура системы обслуживания

Процессы массового обслуживания типичны для связи, транспорта, культурно-бытовых мероприятий, производственных процессов и т.п. В любом случае *составными элементами процесса массового обслуживания* (системы массового обслуживания – СМО) могут являться:

- входящий поток;
- очередь;
- система пунктов обслуживания;
- выходящий поток.

Независимо от конкретной природы и характера объектов, поступающих в систему обслуживания, их называют *требованиями* (*заявками*). входящий поток требований рассматривается как последовательность событий, следующих через какие-то моменты времени. Распределение входящего потока в основном обусловливает и характер процесса массового обслуживания.

Структура очередей и поступление на них требований на обслуживание определяются как свойствами и возможностями, так и установленными правилами прохождения требований через эти системы. Требования могут выполняться в порядке поступления (операции на конвейере), с приоритетом, в случайном порядке, в порядке первого очередного поступления при освободившемся канале обслуживания и др. Очереди могут ограничиваться по длине (число находящихся заявок), по времени ожидания и т.п. Эти ограничения обусловлены либо возможностями СМО, либо поведением объектов и соответствующими правилами. В конечном счете, основной характеристикой очереди является *время ожидания*.

Система пунктов обслуживания может иметь различную организацию:

- с последующими, параллельными и комбинированными каналами, некоторые из которых могут быть специализированными;

- способность изменять свою организацию (структуру, специализацию и др.).

При занятости всех каналов поступающие требования могут получать отказ (*системы с отказами*), становиться в очередь (*системы с ожиданием*).

Процессы массового обслуживания изучаются с целью их рациональной организации (обеспечение наибольшей пропускной способности при возможно меньших затратах времени и материальных ресурсов) или выявление закономерностей тех явлений природы, для которых характерны подобные процессы.

Простейший поток. Рассмотрим поток однородных событий (требований), различающихся только моментами их появления. Такой поток можно изобразить последовательностью точек на оси времени (рис. 3.12).

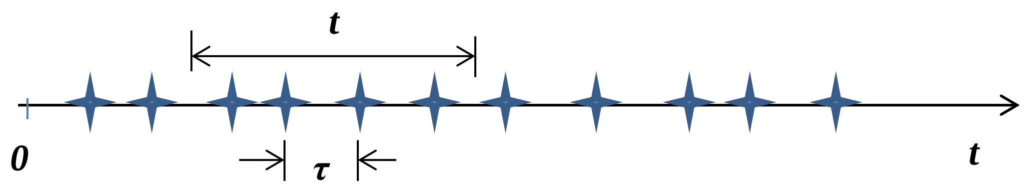


Рисунок 3.12 – Поток требований во времени

Входящий поток называют ***простейшим***, если вероятность поступления того или иного числа требований в течение интервала времени ***t*** зависит только от протяженности этого интервала и не зависит от его расположения на оси времени (*стационарность*), причем требования поступают поодиночке (*ординарность*) и независимо друг от друга (*отсутствие последействия*). Такие свойства значимы, так как в результате суммирования некоторого числа стационарных ординарных потоков с практически любым последействием получается поток, близкий к простейшему.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность поступления ***k*** событий за время ***t***. Если поток требований простейший, то вероятность случайного события, состоящего в том, что за время $t + \Delta t$ поступит точно ***n*** требований, можно представить как

$$P_n(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}\,(t) P_k(\Delta t).$$

(формула следует из пересечения несовместных событий поступления ***n-k*** событий за время ***t*** и ***k*** событий за время Δt для всех ***k***< ***n***).

Пусть Δt – настолько малый интервал времени, что в силу ординарности простейшего потока вероятность попадания в этот интервал больше одного требования пренебрежимо мала. Это значит, что при $\boldsymbol{k} > 1$ вероятности $P_k(\Delta t) = 0$, и, следователь, имеем

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t).$$

По условию стационарности вероятность поступления одиночного требования в интервале Δt не зависит от расположения этого интервала на оси времени и пропорциональна его длине. Поэтому можно считать что $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t$, где λ – коэффициент пропорциональности (смысл выясним позже). очевидно, вероятность отсутствия требований в интервале Δt выразится как $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t$. Таким образом, получаем:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$

или

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)].$$

Положив $\Delta t \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)].$$

где $\boldsymbol{n}>1$. При $\boldsymbol{n}=0$ первый член уравнения отсутствует, так как возможен единственный случай, соответствующий отсутствию требований как за время $\boldsymbol{t}$, так и в коротком интервале Δt. Поэтому

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t).$$

Решение этого уравнения при граничном условии $P_0(0) = 1$, есть $P_0(\Delta t) = e^{-\lambda t}$. При $\boldsymbol{n}=1$ имеем

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda[P_0(t) - P_1(t)] = \lambda\left[e^{-\lambda t} - P_1(t)\right]$$

решение которого при граничном условии $P_1(0) = 0$ имеет вид $P_1(\Delta t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Продолжая этот процесс, находим для плотности распределения числа требований за время $\boldsymbol{t}$ следующее выражение

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

что представляет собой *дискретное распределение Пуассона*, которое характеризует простейший поток.

Число требований в заданном интервале. Найдем математическое ожидание распределения Пуассона:

$$M(n)=\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\lambda t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}=\lambda t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}=\lambda t.$$

Полученная величина λt определяет среднее значение числа требований, поступивших за время ***t***. Отсюда ясно, что параметр λ представляет собой среднее число требований в единицу времени – *интенсивность* (*плотность*) *потока*. Среднее число требований $a=\lambda t$ за время ***t*** в силу стационарности простейшего потока не зависит от положения временного интервала, поэтому под ***t*** можно понимать и время, прошедшее с начала процесса.

Распределение Пуассона дает значение вероятности поступления за время ***t*** ровно ***n*** требований. В частности, вероятность того, что в интервале времени ***t*** не поступит ни одного требования равна $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, а вероятность поступления одного требования $P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$. Вероятность поступления за время ***t*** не более одного требования будет $P_0(t)+P_1(t)=(1+\lambda t)e^{-\lambda t}$. В общем случае вероятность того, что за время ***t*** поступит не более ***n*** требований, определяется функцией распределения $F(n,t)$, которая равна сумме вероятностей $P_k(t)$ при ***k≤n***, т.е.

$$F(n,t)=\sum_{k=0}^{n} P_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Вероятность поступления более n требований за время t равна дополнению $F(n,t)$ до 1 – т.е. $1-F(n,t)$.

Определение вероятностей $P_n(t)$ и их суммирование облегчается, если использовать приближенную формулу

$$R(n,a)=\sum_{k=0}^{n} P_k(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)^k}{k!}e^{-a}\approx \Phi\left(\frac{n+0{,}5-a}{\sqrt{a}}\right)+0{,}5,$$

где $a=\lambda t$ и Ф(***y***) – интеграл Лапласа, значения которого табулированы.

Функция $R(n,a)=R(n,\lambda t)$ представляет собой интегральную функцию распределения Пуассона, определяющую для простейшего потока вероятность поступления не менее ***n*** заявок за время ***t*** при интенсивности потока λ. Плотность распределения числа требований за время ***t***, т.е. вероятность поступления ровно ***n*** требований, можно выразить как

$$P_n(t)=P_n\left(\frac{a}{\lambda}\right)=\frac{a^n}{n!}e^{-a}= R(n,a)-R(n-1,a).$$

Дисперсия, характеризующая рассеивание числа требований в интервале t, для пуассоновского потока

$$D(n) = M(n^2) - [M(n)]^2 = \lambda t(\lambda t + 1) - (\lambda t)^2 = \lambda t,$$

т.е. такое же выражение, как и для математического ожидания. Это свойство можно использовать для решения вопроса о соответствии простейшему потоку некоторого потока требований (любой случайной величины), если известны ее статистические характеристики (определены опытным путем).

Интервал между двумя последовательными требованиями. вероятность того, что интервал между двумя последовательными требованиями превысит некоторую величину τ, равна вероятности отсутствия требований в этом интервале, т.е. $e^{-\lambda\tau}$. Дополнение этой величины до 1 дает функцию распределения интервалов между появлением двух последовательных требований:

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Дифференцируя, находим плотность распределения

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}.$$

При пуассоновском потоке закон распределения вероятностей для интервалов между двумя последовательными событиями является экспоненциальным с параметром $\lambda\tau$. Математическое ожидание и дисперсия интервала τ, распределенного по экспоненциальному закону, выражаются как

$$M(\tau) = \frac{1}{\lambda}; D(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, среднее время между двумя последовательными требованиями $\tau_{ср}$ обратно пропорционально интенсивности потока требований λ. Этой же величине равно и среднее квадратическое отклонение интервала τ от $\tau_{ср}$.

Важное свойство экспоненциального закона распределения состоит в том, что вероятность появления очередного требования по прошествии времени τ не зависит от момента появления предшествующего. Это свойство присуще только экспоненциальному закону и представляет собой следствие независимости поступления событий во времени (отсутствие последействия).

Время обслуживания и время ожидания. Производительность СМО зависит от числа каналов и их быстродействия. Время обслуживания одного требования чаще всего считают случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Экспоненциальный закон особенно хорошо описывает такие системы, которые сравнительно быстро обслуживают основную массу требований.

Итак, пусть время обслуживания ***t*** задано экспоненциальным законом с плотностью распределения $g(t) = \mu e^{-\mu t}, t > 0$. Среднее время обслуживания выражается математическим ожиданием, которое равно $\frac{1}{\mu}$. Таким образом, параметр μ представляет собой величину, обратную среднему времени обслуживания (*интенсивность обслуживания*). Дисперсия времени обслуживания равна $\frac{1}{\mu^2}$. Функция распределения

$$G(t) = \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} d\tau = 1 - e^{-\mu t}$$

представляет собой вероятность того, что обслуживание закончится за время ***t***, т.е. вероятность освобождения за это время канала обслуживания. Очевидно, что вероятность того, что за время ***t*** канал не освободится, равна $1 - G(t) = e^{-\mu t}$. Если в системе занято ***k*** каналов, то вероятность того, что ни один из них не освободится за время ***t***, равна $(e^{-\mu t})^k = e^{-k\mu t}$.

Время ожидания требования в очереди (если она существует) обычно также задается экспоненциальным законом с плотностью распределения $h(t) = \nu e^{-\nu t}$, где параметр ν – величина, обратная среднему времени ожидания. Функция распределения $H(t) = 1 - e^{-\nu t}$ представляет собой вероятность того, что время ожидания не превысит ***t***.

Марковские процессы. Процессы массового обслуживания являются дискретными процессами с конечным или счетным множеством состояний и непрерывным временем. Переход из одного состояния в другое происходит скачком в момент, когда наступает какое-то событие, вызывающее такой переход (поступление нового требования, начало или конец обслуживания, уход требования из очереди и т.д.).

Для процессов массового обслуживания с пуассоновским потоком требований и экспоненциальным распределением времени обслуживания характерно отсутствие последействия. Иначе говоря, будущее развитие зависит только от состояния в настоящий момент и не зависит от того, как происходило развитие в прошлом. Такие процессы называют *марковскими*. Марковский процесс описывается системой дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Колмогорова.

Моделирование процессов. Процесс можно представить как граф ***P***, компоненты которого [8]:

- вершины графа называются ***состояниями*** и изображают ситуации (классы ситуаций), в которых может находиться моделируемая система в различные моменты своего функционирования. Одно из состояний выделяется и называется ***начальным состоянием*** процесса ***P***;
- ребра графа ***P*** имеют метки, изображающие ***действия***, которые может исполнять моделируемая система;
- функционирование процесса ***P*** описывается переходами по ребрам графа ***P*** от одного состояния к другому. Функционирование начинается от начального состояния. Метка каждого ребра изображает действие процесса, исполняемое при переходе от состояния в начале ребра к состоянию в его конце.

3.9.3 Критерии эффективности

Исследовать систему – значит определить ту функцию, которую она должна выполнить (сформулировать цель), определить воздействующие на систему факторы и их интенсивность. Конструирование системы – это определение элементов, которые она должна содержать для достижения поставленной цели, и способы взаимного соединения этих элементов. Правило, в соответствии с которым оценивается степень достижения поставленной цели, называется **критерием эффективности**. В основе критерияев эффективности лежит система показателей, характеризующих качество функционирования системы.

Показатели эффективности – числовые характеристиках системы, с помощью которых можно оценить степень приспособленности системы к выполнению поставленных перед нею задач. Выбор показателей эффективности является заключительной стадией формулировки целей и задач системы. Рассмотрим некоторые общие, наиболее часто используемые показатели эффективности систем.

Производительность – используется для характеристики производственных процессов. Измеряется количеством изделий (продукции, результатов и т.п.), выпускаемых в течение определенного интервала времени. Производительность, отнесенная к одному производственному элементу (подразделение, человек, единица оборудования и др.), определяется как удельная производительность. Критерии на основе производительности предполагают максимизацию показателя (например, выбор совокупности факторов, обеспечивающих достижение максимальной производительности).

Себестоимость – объем затрат на производство продукции (изделий, результатов). Критерии на основе себестоимости предполагают ее снижение (например, экономия сырья, снижение износа оборудования, расхода энергии и др.).

Надежность оценивается при помощи специально выбранных функционалов - показателей надежности. На практике можно использовать несколько различных подходов к оценке надежности системы.

- показатели, учитывающие сам факт появления или отсутствия отказов в элементах системы (нет представления о влиянии отказов на конечный эффект функционирования системы). Такими показателями могут быть: среднее время безотказной работы системы (среднее время, в течение которого все элементы системы находятся в рабочем состоянии), вероятность безотказной работы системы в течение заданного интервала времени и др.;
- показатели снижения качества работы системы (изменение ее эффективности). В этом случае оценивается абсолютная величина разности выбранного функционала эффективности системы и функционала эффективности идеальной системы, элементы которой абсолютно надежны. Если разность мала – отказы элементов слабо влияют на эффективность системы. В этом случае вряд ли целесообразны какие-либо чрезвычайные меры повышения надежности – полученные результаты могут не оправдать затрат. В противоположном случае – необходимо принимать меры по повышению надежности (например, резервирование наиболее значимых с точки зрения отказов элементов).

Очевидно, что для расчета показателей надежности системы, помимо характеристик интенсивности отказов элементов, необходимо также задать характеристики, описывающие затраты времени на восстановление их работоспособности.

Помехозащищенность также может быть оценена сравнением функционала эффективности в условиях действия помех с заданными характеристиками и эффективности в нормальных условиях (когда помехи отсутствуют). Иногда пользуются относительным показателем помехозащищенности, в качестве которого используют отношение величины изменения функционала эффективности к величине какой-либо характеристики помехи.

Качество управления также можно оценивать путем сравнения значений функционалов эффективности, однако поскольку эффективность идеальной системы управления, как правило, невозможно оценить, сравнивают функционалы для различных вариантов управления. Наилучшим принимается вариант, обеспечивающий максимум функционала.

Устойчивость системы – способность ее сохранять требуемые свойства в условиях действия возмущений. Это предполагает сравнение функционалов эффективности для различных условий функционирования. Система обладает требуемыми свойствами, когда выбранные показатели находятся в заданных пределах. Существенным для оценки устойчивости является представление о том – сохраняют ли показатели качества системы свои значения при наличии возмущений.

Расчет показателей эффективности системы представляет собой весьма сложную задачу, которая требует привлечения специальных математических методов. Для того, чтобы показатель эффективности достаточно полно характеризовал качество работы системы, он должен учитывать все основные особенности и свойства системы, а также условия ее функционирования и взаимодействия с внешней средой. Другими словами, показатель эффективности определяется процессом функционирования системы, элементами этого процесса. Каждому элементу процесса функционирования системы можно поставить в соответствие соответствующее значение показателя эффективности (действительное число). Поэтому можно говорить об *отображении множества процессов функционирования системы в множество действительных чисел (значений показателя эффективности), заключенных внутри некоторого интервала (область определения показателя).* Показатель эффективности можно считать функционалом, заданным на множестве процессов функционирования системы.

Влияние случайных факторов может приводить к тому, что функционалы оказываются случайными величинами, что требует использования в качестве показателей средних значений соответствующих функционалов (среднее значение количества изделий, средняя себестоимость продукции и др.). Иногда в качестве показателей используют вероятности некоторых случайных событий. В этом случае можно использовать функционал, принимающий два значения: 1 – событие наступило, 0 – событие не наступило. Вероятность события будет равна среднему значению соответствующего функционала.

3.10 Обобщенное представление математических моделей

Математическая модель – это описание протекания процессов (функционирования, движения и др.), описание состояния, изменения системы на языке алгоритмических действий с математическими формулами и логических переходов.

Понятия действий с формулами и логических операций полезно дополнить процедурами, которые неявно присутствуют при работе с любой формулой:

- процедура запоминания элемента;
- вызов элемента;
- подстановка элемента в нужное место;
- операция «следует за…» в упорядоченной совокупности;
- операция сравнения и идентификации совпадения элементов и некоторые другие;
- работа с таблицами, графиками, номограммами;
- выбор из совокупности процедур и элементов – операции предпочтения, частичной упорядоченности, включения, идентификации принадлежности и т.д.;
- логические переходы в схеме из вербально описываемых элементов (операций) – можно считать математической моделью последовательность действий человека (технология).

Основное отличие математических моделей состоит в их вариативности – кодирование одним знаковым описанием большого количество конкретных вариантов поведения системы. В них возможен дедуктивный вывод свойств, они отличаются компактной записью и удобством работы, возможностью изучения в форме, абстрагированной от конкретного содержания.

Деление моделей на вербальные, натурные и знаковые в определенной степени условно – существуют и смешанные (вербальные и знаковые). можно утверждать, что любая знаковая модель сопровождается описанием с помощью знаков (символов, слов).

Все типы моделей перед их применением к конкретной системе необходимо наполнить информацией – содержание используемых символов, макетов, понятий. Для математических моделей – это численные значения физических величин, параметров, конкретные виды функций и операторов, определенные последовательности действий и графовые структуры. Модель без наполнения информацией для конкретной системы называют ***общей (теоретической, абстрактной, системной***), наполненную информацией модель принято называть ***конкретной***.

Изучение абстрактных математических моделей широко распространено (наборы формул, системы уравнений, статистические описания, аппроксимирующие представления и др.). Сведения, полученные при их исследовании, можно использовать для широкого круга конкретных задач.

Наполнение модели информацией (превращение абстрактной модели в конкретную) не всегда прост и зависит от однородности и объема информации. Этот процесс требует исследования понятий хранения, выдачи и подготовки информации к непосредственному использованию. Возникло новое научное направление, ориентированное на ЭВМ – управление базами данных и знаний. Данными принято называть числовой и фактографический (словесный…) материал, который сам по себе не несет смысловой нагрузки. В противовес определяют знания смысловой материал (программные средства, методики, указания, описания моделей). Соответственно формируются базы данных – непосредственное хранение данных, и базы знаний – хранение данных с указанием способов и форм их использования.

Рассмотрим несколько **типовых вариантов формализованной записи модели**, которые традиционно используются в системном анализе.

Обозначим:

- набор входных воздействий (входов) системы – $\boldsymbol{x = (X_1, X_2, \ldots, X_n)}$, и всю их допустимую совокупность $x \in \bar{X}$;

- набор выходных воздействий (выходов) системы – $\boldsymbol{y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)}$, и всю их допустимую совокупность $y \in \bar{Y}$;

- набор параметров, характеризующих свойства системы, постоянные во все время рассмотрения, и влияющих на выходные воздействия системы – $\boldsymbol{a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)}$, и всю их допустимую совокупность $a \in \bar{A}$;

- набор параметров, характеризующих свойства системы, изменяющихся во время рассмотрения (состояния системы) - $\boldsymbol{z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_l)}$, и всю их допустимую совокупность $z \in \bar{Z}$;

- независимый параметр (параметры) процесса в системе – $\boldsymbol{t}$ и всю допустимую совокупность их - $t \in \bar{T}$;

- правило ***S*** (функция, оператор) определения параметров состояния системы по входам, постоянным параметрам и параметру процесса ***z = S(x, a, t).*** Эта запись означает нахождение параметров по этому правилу (а не о величине ***z***);

- правило ***V*** (функция, оператор) определения выходных характеристик системы по входам, постоянным параметрам, параметру процесса и параметрам состояния системы ***y = V (x, a, t, z)***;

- правило $\bar{V}$ (функция, оператор) определения выходных характеристик системы по входам, постоянным параметрам и параметру процесса ***y*** = $\bar{V}$ ***(x, a, t).*** Указанное правило может быть получено подстановкой правила ***S*** в правило ***V***, что дает исключение из него параметров состояния.

На основе введенных обозначений, параметров и правил модель может быть записана как кортеж (множество упорядоченных совокупностей элементов):

$$\sum: \{x, y, z, a, t, S, V, \bar{V}\}, \qquad (3.51)$$

$$x \in \bar{X},\ y \in \bar{Y},\ a \in \bar{A},\ z \in \bar{Z},\ t \in \bar{T}.$$

Вербальная математическая модель (на примере модели двигателя внутреннего сгорания):

- *входы (внешние воздействия)*: своевременная подача в камеру сгорания газовой смеси определенного состава, внешний момент (нагрузка) в точке вывода мощности;

- *выход*: мощность двигателя;

- *неименные параметры системы*: объем камеры сгорания, число и расположение цилиндров, степень сжатия; размеры, массы и жесткость поршней, шатунов, коленвала, маховика и других частей силового механизма;

- *параметры процесса*: время или угол поворота коленвала;

- *параметры состояния*: температура и давление в камере сгорания, скорости (ускорения) движущихся частей, силы трения в двигателе;

- *правило S* (уравнения состояния): термодинамические уравнения, описывающие процесс сгорания газовой смеси, и механические уравнения, описывающие движения частей силового механизма;

- *правило V*: запись мощности двигателя в виде функции от скоростей движения частей силового механизма и внешнего момента – она равна произведению угловой скорости коленвала и внешнего момента;

- *правило* $\bar{V}$: запись мощности в виде функции от скорости подачи газовой смеси, ее состава и внешнего момента (нагрузки).

Математическая (классическая) модель. На примере системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} + Az = f(t),$$

решаемую для различных начальных условий и различных правых частей:

- *входы*: начальные условия, вектор правых частей $f(t)$, значение $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_1}$, до которого необходимо интегрировать систему;

- *выход*: значение $z(t_1) = z_1$;

- *неизменные параметры системы*: матрица параметров A;

- *параметры состояния*: вектор $\boldsymbol{z}$;

- *параметр процесса* – $\boldsymbol{t}$;

- *правило* S: решение дифференциального уравнения в зависимости от начальных условий, констант, правых частей и аргумента - $z = z[t_0, z_0, A, f(t), t]$;

- *правило* V: подстановка в решение дифференциального уравнения значения $\boldsymbol{t_1}$: $z_1 = z|_{t=t_1}$;

- *правило* $\bar{V}$: зависимость $z = z[t_0, z_0, A, f(t), t_1]$.

Информационная математическая модель (на примере модели длительности переработки человеком текста в резюме):

- *входы (внешние воздействия)*: объем текста, численная оценка его сложности;

- *выход*: длительность $\boldsymbol{\tau}$ составления резюме;

- *неименные параметры системы*: будут соответствовать способностям данного человека – скорость осмысленного чтения текста и число повторных чтений в зависимости от его сложности, усредненное число переделок резюме;

- *параметры процесса*: определяют объем проделанной работы на данный момент $\boldsymbol{t}$ – объем изученного текста, объем составленной части резюме, оставшееся число переделок резюме;

- *параметры состояния*: стадия работы или время;

- *правило* S (уравнения состояния): зависимость объема проделанной работы от объема и сложности текста, способностей человека, времени;

- *правило* V: зависимость величины $\boldsymbol{\tau}$ от объема проделанной работы;

- *правило* $\bar{V}$: зависимость величины $\boldsymbol{\tau}$ от объема текста, его сложности и способностей данного человека.

Проанализируем общее представление математической модели (3.51) и приведенные примеры с точки зрения универсальности (применимости для различных моделей).

Очевидно, что количество составляющих может быть различным, но минимальное количество (модель «черного ящика») –

$$\sum: \{x, y, \bar{V}\}.$$

Введение в рассмотрение «внутренностей черного ящика» приводит к параметрам системы $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$, а типичное наличие процессов в системе – к параметрам состояния и процесса: $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{t}$. На основе наличия процессов формулируются и правила S, $\bar{V}$. Другими составляющим кортежа в конкретной модели могут быть:

- входные случайные воздействия (часть входов x);

- характеристики структуры системы в отличие от характеристик элементов (выделены в качестве параметров $\boldsymbol{a}$), некоторые свободные параметры модели, все множество значений которых должно быть учтено при оценке выходов (специфические операции), характеристики управления и др.;

- некоторые свободные параметры модели;

- множество значений и процедур, которое должно быть учтено при расчете выходов (например, взятие максимумов, интегрирование и др.);

- управление.

При незначительных изменениях постановки задачи происходит переход величин из одной составляющей кортежа в другую. Например, некоторую мало изменяющуюся величину в системе, можно отнести и к параметрам системы $\boldsymbol{a}$ (сделав условно постоянной), и к параметрам состояния.

Общие свойства модели. Рассмотрим, как отражаются в записи (3.51) основные общие свойства системы.

Линейность – обычно определяется как линейная (нелинейная) зависимость от входов операторов S, (линейность или нелинейность параметров состояния) или $\bar{V}$ (линейность или нелинейность модели в целом). Линейность может являться как естественным, хорошо соответствующим природе, так и искусственным (вводимым для целей упрощения) свойством модели.

Примечание. Понятие линейности – зависимость между несколькими математическими объектами (функциями, векторами и т. п.), при которой один из них может быть выражен суммой остальных, взятых с постоянными коэффициентами. (в виде линейной комбинации): соотношение вида

$$C_{11}u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n = 0, (*)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ — числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля, а $u_1, u_2, ..., u_n$ — те или иные математические объекты, для которых определены операции сложения и умножения на число. В соотношение (*) объекты $u_1, u_2, ..., u_n$ входят в 1-й степени, т. е. линейно, поэтому описываемая этим соотношением зависимость между ними называется линейной. Знак равенства в формуле (*) может иметь различный смысл и в каждом конкретном случае должен быть разъяснён. Понятие Л. з. употребляется во многих разделах математики. Так, можно говорить о Л. з. между векторами, между функциями от одного или нескольких переменных, между элементами линейного пространства и т. д. Если между объектами $u_1, u_2, ..., u_n$ имеется Л. з., то говорят, что эти объекты линейно зависимы, в противном случае их называется линейно независимыми. Если объекты $u_1, u_2, ..., u_n$ линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных:

$$u_1 = \alpha_1u_1 + ... + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_{i+1}u_{i+1} + ... + \alpha_nu_n.$$

Непрерывность (***дискретность***) – выражается в структуре множеств (совокупностей), которым принадлежат параметры состояния, параметр процесса и выходы системы. Таким образом, дискретность множеств $\bar{Z}, \bar{T}, \bar{Y}$ ведет к модели, называемой дискретной, а их непрерывность – к модели с непрерывными свойствами. Дискретность входов (импульсные внешние воздействия, ступенчатость воздействий и др.) в общем случае не ведет к дискретности модели в целом. Важной характеристикой дискретной модели является конечность или бесконечность числа состояний системы и числа значений выходных характеристик. В первом случае модель называется дискретно конечной. Дискретность модели также может быть как естественным условием (система скачкообразно меняет свое состояние и выходные свойства), так и искусственно внесенной особенностью (замена непрерывной математической функции на набор ее значений в фиксированных точках).

Детерминированность (***стохастичность***). Если в модели среди величин x, y, z, a имеются случайные (определяемые некоторыми вероятностными характеристиками), то модель называется стохастической (вероятностной, случайной). В этом случае и все результаты, полученные при рассмотрении модели, имеют стохастический характер и должны быть соответственно интерпретированы с использованием *системного принципа неопределенности*.

В соответствие с этим принципом мы можем иметь дело и с системой, в которой нам не все известно или понятно. Это может быть система с невыясненной структурой, с непредсказуемым ходом процессов, со значительной вероятностью отказов в работе элементов, с неизвестными внешними воздействиями и др. Частным случаем неопределенность выступает *случайность* – ситуация, когда вид события известен, но оно может наступить, либо не наступить. На основе этого определения вводится *полное поле событий* - такое множество событий, про которые известно, что одно из них наступит обязательно.

Для оценки неопределенности существует несколько способов, основанных на информации определенного вида:

- можно оценивать «крайние» (наихудшие, наилучшие в определенном смысле) возможные ситуации. В этом случае мы оцениваем граничные ситуации и, соответственно, граничное поведение системы и на основе этих оценок делаем выводы о поведении системы вообще. Такой метод получил название *метод гарантированного результата* (*оценки*);

- по информации о вероятностных характеристиках случайностей (математическому ожиданию, дисперсии, другим оценкам) можно определить вероятностные характеристики выходов в системе. При этом мы получает сведения лишь об усредненных характеристиках совокупности однотипных систем;

- за счет дублирования и других приемов оказывается возможным из «ненадежных» элементов составлять достаточно «надежные» части системы. Математическая оценка эффективности такого приема также основана на теории вероятностей (*теория надежности*).

С точки зрения практики граница между детерминированными и стохастическими моделями достаточно условная. Любой размер можно определить не как точное, а как усредненное значение (математическое ожидание) параметра. Удобный практический прием состоит в том, при малых отклонениях от фиксированных значений модель считается детерминированной, а отклонения результата исследуются методами оценок или анализа ее чувствительности. При значительных же отклонениях применяются методы стохастического анализа.

Стационарность (***нестационарность***). Рассмотрим понятие стационарности некоторого правила (процесса). Пусть в рассматриваемом правиле присутствует параметр процесса, которым для удобства будем считать время. Примем все внешние условия применения этого правила одинаковыми, но в первом случае мы применяем правило в момент t_0, а во втором – в момент ($t_0 + \theta$). Вопрос – будет ли результат применения правила одинаковым? Ответ на этот вопрос и определяет стационарность: если результат одинаков - правило (процесс) считается стационарным, а если различен – нестационарным. Если все правила в модели стационарны, то стационарной называется и сама модель. Чаще всего стационарность выражается в неизменности во времени некоторых физических величин: стационарным является поток жидкости с постоянной скоростью, стационарна механическая система, в которой силы зависят только от координат и не зависят от времени.

Для отражения стационарности в формальной записи рассмотрим расширенный вид правила S, в которое введена зависимость от начальных условий процесса t_0, z_0 и зависимость входов от параметра t:

$$z = S[x(t), a, t, t_0, z_0].$$

Тогда для стационарного процесса имеет место равенство

$$S[x(t_0 + \theta), a, t + \theta, t_0 + \theta, z_0] = S[x(t), a, t, t_t, z_0].$$

Аналогично можно определить стационарность правил $V, \bar{V}$:

$$V[x(t_0 + \theta), a, t + \theta, t_0 + \theta, z_0] = V[x(t), a, t, t_t, z_0].$$

$$\bar{V}[x(t_0 + \theta), a, t + \theta, t_0 + \theta] = ,\bar{V}[x(t), a, t, t_t].$$

Вид составляющих кортежа (3.30). Простейшим будет случай, когда входы, выходы и параметры a в системе – это числа, а правило $\bar{V}$ - математическая функция. Широко распространена ситуация, когда входы и выходы есть функция параметров процесса. Правила $S, V, \bar{V}$ тогда являются либо, либо операторами и функционалами. Например, функциями от параметров состояния могут быть и те параметры состояния, которые мы определили как постоянные.

Конечность (***бесконечность***) числа входов, выходов, параметров состояния, постоянных параметров системы. В теории такие задачи рассматриваются, однако на практике работают лишь с моделями включающими конечное число составляющих.

Модели с управлением. Расширим вид модели (3.30), включив в нее управление. Управление – универсальный термин в смысле огромного многообразия его возможных реализаций. Системный подход рассматривает ***управление*** как целенаправленный процесс воздействия субъекта на объект, ориентированный на удовлетворение целей субъекта управления (потребностей заинтересованных групп) и систем большего масштаба (например, общества в целом). Управление приводит к целенаправленным изменениям в системе, основанным на существующих объективных факторах и в условиях ограниченности доступных ресурсов (результат управления - целенаправленное развитие системы).

В моделях в качестве ***формализованного представления управления*** можно выбирать:

- математические модели: числа, функции, алгоритмы, графовые структуры и др.;

- в моделях технических систем: силы, геометрические размеры, сигналы, физические величины и т.п.;

- в экономических моделях: размеры финансирования, материальные ресурсы и сроки их поставки, расстановку кадров и др.;

- в моделях социальных систем: приказы, советы, действия, влияющие на общественное мнение, организационные решения и др.

Системный подход к управлению требует определения (в строгом смысле - однозначного):

1) того, чем мы распоряжаемся (границы объекта управления);
2) пределы выбора управляющих воздействий;
3) характера влияния управляющих воздействий данного типа на объект (процесс) управления;
4) возможность достижения поставленной цели в вышеперечисленных условиях.

Отрицательный ответ на последний вопрос приводит к необходимости:

расширения пределов, в которых осуществляется управления, выбираются управляющие воздействия;

введение новых управляющих воздействий (способов управления);

изменения структуры системы;

пересмотра цели управления.

Рассматривая управляемый процесс (правило перехода, изменения системы), введем правило $\boldsymbol{S^g}$, которое позволяет выбором управления $\boldsymbol{g}$ из некоторой фиксированной совокупности $\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$) достигать значения параметра состояния $\boldsymbol{z_G}$, которое, в свою очередь, обеспечивает получение управляющих выходных воздействий $\boldsymbol{f}$ в виде $\boldsymbol{f_G}$, соответствующем выполнению цели $\boldsymbol{G}$. Формализованная запись кортежа управляемой модели примет вид:

$$\sum: \{x, y, f_G, z, a, g, t, S^g, V, \bar{V}^g\}, \tag{3.51*}$$

$$x \in \bar{X}, y \in \bar{Y}, a \in \bar{A}, g \in G, z \in \bar{Z}, t \in \bar{T}.$$

Составляющая $\boldsymbol{g}$ указывает на величины, объекты и др., которыми мы можем распоряжаться (воздействовать на них) для достижения цели $\boldsymbol{G}$. В этом смысле $\boldsymbol{f_G}$ можно понимать как собственно цель управления $\boldsymbol{G}$, записанная в виде требований к выходам модели системы.

Если мы хотим преобразовать неуправляемую систему в управляемую, то следует выделить составляющие кортежа (3.51), подлежащие управлению:

- входы $x \in \bar{X}$. Часть из них может стать управляемыми, выбираемыми, контролируемыми (например, возможность выбора части сил, действующих на систему, посылка управляющих сигналов, допущение альтернативный решений и т.п.);

- неизменные параметры системы $a \in \bar{A}$. Это особенно типично для процесса проектирования – мы получаем возможность выбирать размеры тел, массы, материалы и тем самым создавать систему с нужными свойствами. В числе управлений, выделяемых из параметров a, могут быть и такие которые описывают структуру системы – их использование будет означать изменение структуры с целью достижения заданных свойств системы. Выбор структуры – весьма актуальная, но слабо формализуемая задача. Как правило, она решается эвристическими методами: задается структура, а затем выбираются (оптимизируются) ее параметры.

Общее описание модели системы в форме кортежей (3.51) и (3.51*) позволит отнести различные величины, объекты, понятия к компонентам системы, рассмотреть возможность введения управления и перестройки модели. Это позволит эффективно строить операторы $S, V, \bar{V}$, выявлять избыточность или недостаточность величин или параметров модели, учитывать ранее не принимавшиеся во внимание обстоятельства, оценивать адекватность модели реальной системе.

4 ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Физическая модель – это материальная функциональная модель, которая может быть аналогичной или подобной оригиналу. Физическая модель воспроизводит основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта (системы, явления). Основными ***разновидностями физических моделей*** являются:

- натурные – реальные исследуемые системы, которые являются макетами или опытными образцами. Такие модели имеют полную адекватность с оригиналом (реальный вариант, материальная копия оригинала), что обеспечивает высокую точность и достоверность результатов моделирования;

- квазинатурные – совокупность натурных и математических моделей. Такие модели используются в случаях, когда математическая модель части системы должна исследоваться должна исследоваться во взаимодействии с остальными частями, но их еще не существует, либо их включение в модель затруднено или дорого;

- масштабные – системы той же физической природы, что и оригинал, но отличающиеся от него размерами. В основе таких моделей лежит математический аппарат теории подобия (геометрическое подобие) и соответствующих масштабов их параметров;

- аналоговые – основаны на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (математические выражения, логические схемы и др.). В качестве таких моделей используются механические, гидравлические, электрические, электронные и др. системы, в которых изменение параметров являются аналогами физических величин другой природы (например, математическое уравнение колебаний маятника и переменного тока).

Применение подобной физической модели предпочтительно вследствие возможности строгого пересчета данных экспериментального исследования модели в соответствующие данные оригинала. Однако при этом часто возникает новое весьма существенное затруднение, вызываемое отсутствием математического описания оригинала, а значит, и математического описания физической функционально-геометрической модели, что делает невозможным установление критериев подобия и масштабов по соответствующим сходственным уравнениям.

Вследствие пяти условий подобия объектов (см. р.3) может создаться впечатление, что подобное моделирование возможно только тогда, когда известны математические описания оригинала и модели. В действительности подобное моделирование осуществимо при определенных условиях и при отсутствии математического описания оригинала и модели.

Условия подобия.

6) сходственность математических описаний;

7) связь сходственных переменных масштабами;

8) выбор масштабов согласно масштабным уравнениям;

9) сходственность условий однозначности решений сходственных уравнений, содержащихся в математических описаниях, и пропорциональность содержащихся в этих условиях сходственных переменных;

10) сходственность заданных функций, содержащихся в математических описаниях, и пропорциональность содержащихся в этих функциях сходственных переменных.

Пример. Представим себе, что исследованию подлежит явление прохождения электрического тока через последовательно соединенные резистор и конденсатор под действием постоянного напряжения (рис. 4.1а)

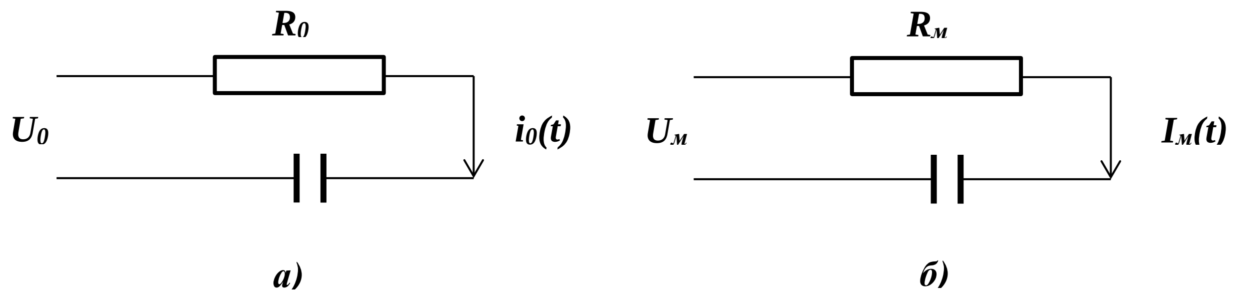


Рисунок 4.1 – Физически однородные оригинал (***а***) и модель (***б***)

Допустим, что получить уравнение, описывающее оригинал, мы не умеем, нужных для натурного эксперимента источника напряжения $\boldsymbol{U_0}$, резистора с сопротивлением $\boldsymbol{R_0}$ и конденсатора с емкостью $\boldsymbol{C_0}$ у нас нет. Однако мы располагает физически однородным с оригиналом другим объектом – моделью (рис. 4.1б).

Математические описания этих двух различных, но физически однородных объектов неизвестны, но есть уверенность в том, что эти описания сходственны.

Таким образом, первое условие подобия может быть обеспечено физической однородностью оригинала и модели. В более сложных случаях может потребоваться геометрическое подобие.

Не зная математических описаний оригинала и модели, мы можем перечислить все сходственные величины, фигурирующие в них. Это токи ($\boldsymbol{i_0}$ и $\boldsymbol{i_м}$), напряжения ($\boldsymbol{U_0}$ и $\boldsymbol{U_м}$), сопротивления ($\boldsymbol{R_0, R_м}$), емкости ($\boldsymbol{C_0, C_м}$) и время ($\boldsymbol{t_0}$ для оригинала, $\boldsymbol{t_м}$ для модели). Располагая этими величинами, можно ввести масштабы $\boldsymbol{m_i, m_u, m_R, m_C, m_t}$. Таким образом, второе условие подобия – связь сходственных величин масштабами, достигается установлением полного перечня величин, фигурирующих в математических описаниях оригинала и модели.

Интересующая нас зависимость $\boldsymbol{i_0} = \boldsymbol{i_0}(\boldsymbol{t_0})$ при прочих равных условиях определяется начальным значением тока $\boldsymbol{i_0}(0) = 0$. Это условие однозначности решения дифференциального уравнения, описывающего оригинал. Начальное условие для модели должно быть подобным $\boldsymbol{i_м}(0) = \boldsymbol{i_0}(0)/\boldsymbol{m_i} = 0$. Таким образом, четвертое условие подобия – подобие условий однозначности – обеспечивается физической однородностью оригинала и модели. В сложных условиях может потребоваться геометрическое подобие.

Искомый закон изменения тока $\boldsymbol{i_0}(\boldsymbol{t_0})$ зависит от формы напряжения $\boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{t_0})$. Фор напряжения модели $\boldsymbol{u_м}(\boldsymbol{t_м})$ должна быть подобным: $\boldsymbol{u_м}(\boldsymbol{t_м}) = \boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{m_t}\, \boldsymbol{t_м})/\ \boldsymbol{m_u}$. Таким образом, пятое условие подобия – подобие известных функций – легко осуществляется, если известны масштабы.

Остается открытым вопрос выполнения третьего условия подобия – выбора масштабов соответственно масштабным уравнениям.

Модельный эксперимент предопределяет последующий перенос полученных результатов на оригинал. В зависимости от характера модели, подвергаемой исследованию, модельный эксперимент может быть реальным или мысленным, логическим или материальным. При постановке и уточнении порядка выполнения исследований мысленный эксперимент всегда предшествует реальному.

В общем случае изучение материальных объектов заключается в установлении необходимых опытных фактов и составлении уравнений, описывающих объекты, т.е. математических моделей. Наличие таких моделей позволяет исследовать объект путем решения соответствующих уравнений при различных условиях (логический эксперимент).

В ходе исследования встречаются самые разнообразные трудности. основными из них являются:

- трудность (практическая невозможность) опытного исследования натуры;
- сложность натуры и трудность составления ее математического описания;
- сложность математического описания натуры и затруднительность решения соответствующих уравнений.

Если затруднительно решение известных уравнений, описывающих материальный объект, пользуются экспериментальным исследованием его математической материальной подобной или соответственной модели, реализуемой с помощью ЭВМ. Сущность материального формального математического подобного моделирования заключается в следующем. Некоторая задача имеет соответствующее математическое описание. По виду этого описания создается или подбирается материальный объект – модель с аналогичным математическим описанием, представляющее некоторое устройство с входами и выходами. Математическая аналогия превращается в подобие, при котором имеет место пропорциональность между математическими величинами, содержащимися в описании задачи, и сходственными физическими (машинными) величинами описания материальной модели. Входные физические величины имитируют исходные данные рассматриваемой задачи, выходные физические величины – ее решение. Используемое устройство представляет при этом материальную математически подобную модель поставленной задачи, т.е. логического объекта.

Если математическое описание задачи представляет расчетную модель некоторого материального объекта – оригинала, то используемое устройство является материальной функциональной подобной ему моделью. Если уравнения, описывающие материальный объект, неизвестны, можно подвергнуть его экспериментальному исследованию в натуре. Если экспериментальное исследование данного материального объекта в натуре неосуществимо, прибегают к экспериментальному исследованию его физической модели.

Основная проблема экспериментального исследования физической модели – идентификация (опытное отождествление) модели с объектом - оригиналом.

В основе современных многочисленных методов идентификации модели с оригиналом лежит идея мысленного ***эксперимента с «черным ящиком»*** (Н. Винер). В предельном (теоретическом) случае «черный ящик» представляет собой некую систему, о структуре и внутренних свойствах которой неизвестно решительно ничего. Зато входы, т.е. внешние факторы, воздействующие на этот объект, и выходы, представляющие собой реакции на входные воздействия, доступны для наблюдений (измерений) в течение неограниченного времени. Задача заключается в том, чтобы по наблюдаемым данным о входах и выходах выявить внутренние свойства объекта или, иными словами, построить модель. Решение задачи допускает применение нескольких стратегий.

Осуществляется ***активный эксперимент***. На вход подаются специальные сформированные тестовые сигналы, характер и последовательность которых определена заранее разработанным планом. Преимущество: за счет оптимального планирования эксперимента необходимая информация о свойствах и характеристиках объекта получается при минимальном объеме первичных экспериментальных данных и соответственно при минимальной трудоемкости опытных работ. Но цена за это достаточно высока: объект выводится из его естественного состояния (или режима функционирования), что не всегда возможно.

Осуществляется ***пассивный эксперимент***. Объект функционирует в своем естественном режиме, но при этом организуются систематические измерения и регистрация значений его входных и выходных переменных. Информацию получают ту же, но необходимый объем данных существенно, на 2-3 порядка больше, чем в первом случае.

На практике при построении идентифицируемых моделей часто целесообразна ***смешанная стратегия эксперимента***. По тем входным переменным конкретного объекта, которые это допускают (по условиям безопасности, техническим, экономическим соображениям и пр.), проводится активный эксперимент. Его результаты дополняют данными пассивного эксперимента, охватывающего все прочие значимые переменные. «Черный ящик» - теоретически граничный случай. На деле есть объем исходной информации. На практике приходится иметь дело с «серым», отчасти прозрачным ящиком. Поэтому различают три основных класса постановки задачи идентификации объекта:

1. Для сложных и слабо изученных объектов системного характера достоверные *исходные данные о внутренних свойствах и структурных особенностях исчезающе малы, почти отсутствуют*. Поэтому задача идентификации, казалось бы, должна включать в себя с одной стороны, определение зависимостей, связывающих входы и выходы (обобщенного оператора), с другой определение внутренней структуры объекта. В такой постановке задача не разрешима даже теоретически. Непосредственным результатом идентификации является только определение зависимостей входы-выходы, причем не в параметрической форме – в виде таблиц или кривых. Для того, чтобы говорить о структуре модели, необходимо перейти к параметрической форме их представлений. Однако, как известно, однозначной связи между функциональной зависимостью и порождающей эту зависимость математической структурой не существует. Каждую непараметрическую зависимость вход-выход можно аппроксимировать различными способами и соответственно построить ряд практически равноценных моделей, характеризующихся собственной структурой, собственным набором параметров и их значений. Основанием для предпочтения той или иной параметрической модели могут быть только данные, внешние по отношению к процессу идентификации, например, основанные на теоретических соображениях. Если таких данных нет, то в рассматриваемой ситуации мы получаем чисто функциональную или имитационную модель, которая воспроизводит с тем или иным приближением характеристики объекта.

2. Второй класс задач идентификации характеризуется тем, *что априорные данные о структуре моделируемого объекта, в принципе имеются*. Однако, какой вклад в характеристики объекта или его модели вносит тот или иной компонент, заранее не известно и это надлежит определить на основе эксперимента наряду со значением соответствующих параметров. Типичный пример – исследование влияния на характеристики динамической системы, описанной в классе стационарных линейных моделей, старших членов соответствующих дифференциальных уравнений ради того, чтобы исключить малые, практически незначимые переменные, и снизив порядок уравнений, упростить модель. Задачи этого класса, связанные с уточнением структуры и оценивания параметров, часто встречаются на практике и характерны для объектов и процессов средней сложности, в частности технологических.

3. Третий класс задач связан с относительно простыми и хорошо изученными объектами, структура которых известна точно и речь идет только о том, чтобы *по экспериментальным данным оценить значения всех или некоторых входящих в исследуемую структуру параметров (параметрическая идентификация)*. Очевидно, что модели данного класса тесно смыкаются с требующими экспериментального уточнения параметров аналитическими моделями и четкой границы между ними не существует. Это наиболее массовый класс задач.

Независимо от характера решаемой на основе идентификации задачи, построение модели базируется на результатах измерений соответствующих величин переменных. С этим связаны два существенных обстоятельства:

во-первых, эксперимент должен быть обеспечен необходимыми средствами измерения надлежащей точности (датчики, измерительные преобразователи, средства регистрации);

во-вторых, измерительный комплекс со всеми его компонентами требует метрологического обеспечения, т.е. градуировки, аттестации и периодичности проверки.

Реальные свойства подавляющего большинства сложных объектов, а также неизбежные случайные погрешности измерений, лежащих в основе идентификации, придают последней статистический характер, что влечет за собой необходимость получения больших объемов первичных экспериментальных данных с их последующей обработкой. Поэтому на практике построение моделей путем идентификации неизбежно связано с использованием информационно-вычислительной техники как при получении первичных данных (автоматизация эксперимента), так и для их обработки и использования.

Подобное моделирование осуществимо при отсутствии математического описания оригинала и модели в виде физического моделирования, если имеется способ определения в этих условиях масштабных уравнений.

Физическое подобное моделирование – это замещение материального оригинала физической подобной моделью, которая представляет собой материальную функционально подобную модель, физически однородная с оригиналом [1]. Результаты исследования физически подобной модели переносятся на оригинал с помощью безразмерных масштабов.

Обеспечения подобия оригинала и модели требует выполнения пяти условий (см. лекцию 3). Если математические описания оригинала и модели известны, обеспечение условий подобия достигается без особых затруднений. Если математические описания оригинала и модели неизвестны, то затруднительность получения масштабных уравнений устраняется с помощью условных критериев подобия, получаемых путем анализа размерностей.

5 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

По определению Норберга Винера «… все системы суть информационные системы, а также системы с обратной связью» [9].

5.1 Общие понятия о представлении системы

Представление объекта моделирования как системы имеет фундаментальное значение для понимания процессов и явлений в окружающем мире как беспредельном разнообразии взаимосвязанных систем.

Системы связаны между собой по входам, выходам, сигналам управления. Выход системы любого уровня служит входом для другой системы, которая в свою очередь обеспечивает вход следующей системы и т.д. Для формализации системы необходимо ее исследовать:

- определить ту функцию, которую она должна выполнить (сформулировать цель);
- определить воздействующие на систему факторы;
- определить интенсивность выделенных факторов.

Конструирование модели системы – это определение элементов, которые она должна содержать для достижения поставленной цели, и способы взаимного соединения этих элементов, а также отображение определенной (релевантную - значимую для целей заинтересованного лица) группы свойств системы (углубление описания – детализация модели). Поэтому для различных задач субъекта управления (с учетом его интересов) требуется выбирать соответствующую модель системы, применимость которой соответствует новым условиям деятельности.

Наиболее общее представление о системе состоит в выявлении зависимости «воздействие - результат» (функция $\bar{V}$). Воздействие подается на вход системы (объекта), результат фиксируется на выходе. Выражение зависимости между состоянием входа X и состоянием выхода Y известно как переходная функция (R-преобразование – модель системы в форме «черного ящика»)

$$Y= R\,(X),$$

где R – оператор преобразования.

Наиболее распространенные формы моделей систем относятся к математическим, функциональным, морфологическим и информационным способам представления систем.

Математическая модель системы предполагает задание *R*-преобразования алгебраическим, логическим, дифференциальным, интегро-дифференциальным скалярным, векторным, матричным оператором, отображающим результаты математического моделирования *R*-преобразования. Математическая модель формируются на основе расчетных и соответственных методов.

Расчетные модели выражают свойства и отношения (связи) системы с помощью математических представлений – формул, уравнений, графиков, таблиц, операторов, алгоритмов и т.д.

В *соответственных моделях* переменные величины связаны с соответствующими переменными системы определенными математическими зависимостями, пропорциями (*модели подобия*), логикой, материальным соответствием.

В зависимости от непрерывности представления математические модели могут быть *аналоговыми* (непрерывными), *цифровыми* (дискретными), *комбинированными* (аналогово-цифровыми). Поэтому для представления системы могут использоваться:

физически аналогичные модели – материальная модель, физически однородная с оригиналом, свойства которой переносятся на оригинал на основе умозаключения об аналогии (сходство объектов по некоторым признакам, имеющим качественный, количественный или смешанный характер);

формально подобные модели – материальная модель, физически разнородная с оригиналом, свойства и отношения которой переносятся на оригинал на основании подобия (полная аналогия при наличии пропорциональности между сходственными переменными, характеристиками системы, неизменно сохраняющаяся при всех возможных значениях этих переменных);

цифровые модели системы – реализуемые на ЭВМ как материальные функциональные математически подобные цифровые модели оригинала. Они позволяют представить процесс функционирования системы в виде последовательной смены состояний во времени, каждое из которых определяет конкретные (дискретные) значения некоторых физических величин. В основе цифровых моделей лежит понятие *алгоритма* – точно определенного правила выполнения расчетных операций над числами, последовательность которых составляет общий процесс преобразования исходных данных в результат решения соответствующей задачи. Алгоритм может быть представлен в трех основных формах:

аналитической – выражение в виде явной функции соответствующих аргументов или в виде рекуррентной формулы;

словесной – описание на естественном языке, обстоятельная инструкция для лица, решающего задачу;

структурной – описание в виде структурной схемы, состоящей в виде отдельных блоков, соединенных определенными связями. Каждый блок соответствует определенной операции над числами.

На ранних этапах развития науки R-преобразование понималось только как однозначная детерминированная функция, однако в современном представлении она получила вероятностное толкование, что позволяет рассматривать детерминированные и стохастические функциональные описания системы (и соответствующие R-преобразования).

Функциональное описание системы отражает основные результаты ее существования, место, которое она занимает среди других объектов в окружающем мире, отношение к другим системам и объектам. Это соответствует целенаправленности человеческой деятельности: сталкиваясь с новым объектом (системой), мы, прежде всего, интересуемся его функцией – способностью реализовать определенные виды деятельности (технологии) для преобразования входных материальных, энергетических и информационных потоков в конечные результирующие объекты и потоки. Система может:

- просто существовать;
- служить областью обитания другой системы;
- обслуживает систему более высокого порядка;
- является контрольной для некоего класса систем;
- служит средством или материалом для создания более совершенной системы и т.д.

Если конечный результат детерминирован для данного состояния входа – можно говорить о детерминированной функциональной модели системы, если нет – функциональная модель является вероятностной (стохастической).

Случайность исхода может определяться тем, что взаимодействие может происходить:

- в любой момент времени и в диапазоне (множестве моментов) времени;
- при разнообразных состояниях объектов (подсистем и элементов);
- при различных механизмах взаимодействия (связи, технологии).

Случайность становится объективной, что зависит от независимости событий и, соответственно, исходов. Каждый исход повторяется настолько часто, насколько часто совпадают исходные условия, т.е. зависят от закона распределения вероятностей для множества событий.

Система может быть однофункциональной или многофункциональной. В зависимости от степени воздействия на внешнюю среду и характера взаимодействия с другими системами ***функции можно распределить по возрастающим рангам***:

- пассивное существование, материал для других систем;
- обслуживание системы более высокого порядка;
- противостояние другим системам, среде (выживание);
- поглощение (экспансия) других систем и среды;
- преобразование других систем и среды.

Во многом функция системы зависит от точки зрения того, кто ее оценивает (свойство субъективизма). Еще более разнообразна оценка функции организационно-технической системы с участием человека.

Функциональное описание иерархичной системы (R-преобразование) может принимать вид числового функционала, характеризующего внутренние процессы, либо качественного функционала (например, упорядочение, лучше – хуже). Пример такого функционального описания системы представлен на рисунке 5.1.

Обычно функция систем выполняется, если параметры системы и процессы ограничены определенными пределами, вне которых система разрушается, либо радикально меняет свои свойства.

Функционал, количественно или качественно описывающий результативность деятельности (действия) системы, называют ***функционалом эффективности***. Если функционал эффективности больше некоего условного порога, то считается, что функция выполняется, если меньше – нет. Введение такого правила принятия решения о результатах выполнения функции представляет собой выбор ***критерия эффективности*** функционирования системы (подсистемы).

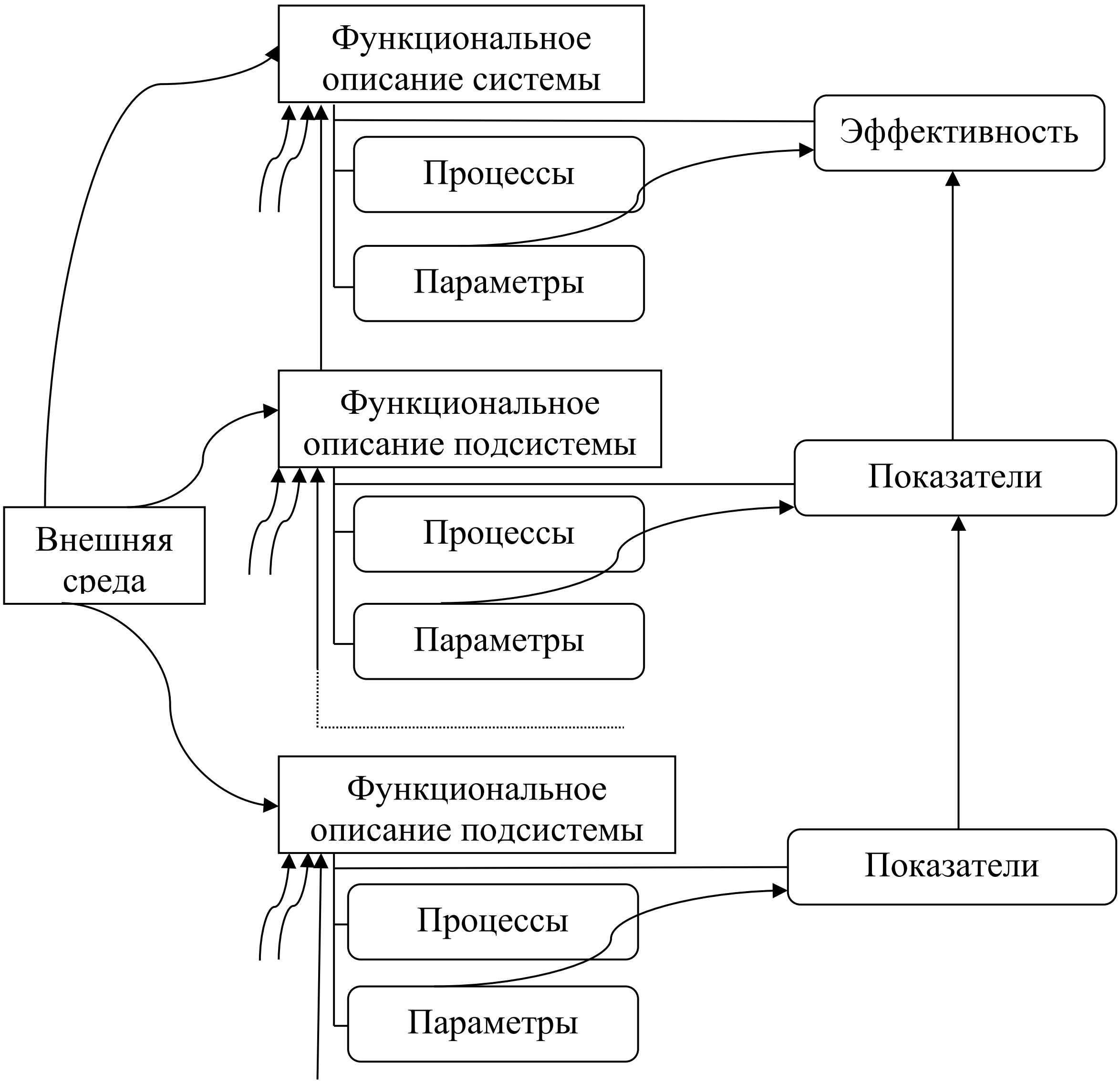


Рисунок 5.1 – Иерархическая схема функционального описания системы

Функциональное описание системы можно задать в виде функционала:

$$\mathbf{S_{Ф} = \{\mathit{T, X, C, Z, Y, S, V}\},}$$

где: ***T*** - множество моментов времени;

X – множество мгновенных значений входных воздействий;

C – множество допустимых входных воздействий;

Z – множество состояний системы;

Y – множество значений выходных величин;

$\boldsymbol{S}$ – переходная функция состояния;

$\boldsymbol{V}$ – выходное отображение.

Рациональный путь функционального описания состоит в применении такой многоуровневой иерархии описаний, при которой описание более высокого уровня будет зависеть от обобщенных и факторизованных переменных низшего уровня, что позволит организовать связи между свойствами взаимодействующих со средой элементов (подсистемами низшего уровня) и эффективностью системы.

Функциональное описание системы должно отражать следующие принципиальные характеристики сложных систем:

модель функционирования системы – это модель, предсказывающая поведение, изменение состояний системы во времени;

состояние – множество существенных свойств, которыми система обладает в данный момент времени;

внешняя среда – множество элементов, систем, которые находятся за границами системы, но оказывают влияние на изменение состояния системы;

внутренняя среда включает все подсистемы, элементы и связи системы.

Модель системы, построенная по результатам измерения внешних характеристик или на основании знания устройства системы, получила название морфологической модели или описания системы. Наиболее известный пример такого описания – представления системы в виде «черного ящика». На основании принципиальной схемы прибора можно составить R-преобразование в виде переходной функции. В таком случае морфологическое описание – это принципиальная схема.

Морфологическое описание системы формируется на основе знания устройства системы – ее подсистем и элементом, связей между ними. В результате морфологического описания возникает понятие *структуры системы*. Оно не может быть исчерпывающим – глубина описания, уровень детализации определяются назначением описания. Морфологическое описание иерархично – конкретизация морфологии дается на стольких уровнях, на скольких требуется для создания представления об основных (релевантных) свойствах системы (рис. 5.2).

Изучение морфологии начинается с ***элементного состава***. Под элементом в данном случае понимается подсистема, внутрь которой описание не проникает. Элементный состав может быть:

гомогенным - содержит однотипные элементы. Однотипность не означает полной идентичности и определяет только близость основных свойств. Гомогенности, как правило, сопутствует избыточность и наличие скрытых возможностей, дополнительных, неиспользованных ресурсов;

*гетерогенны*м - содержит разнотипные элементы. Гетерогенные элементы специализированы, они экономичны и могут быть эффективными в узком диапазоне внешних условий;

смешанным.

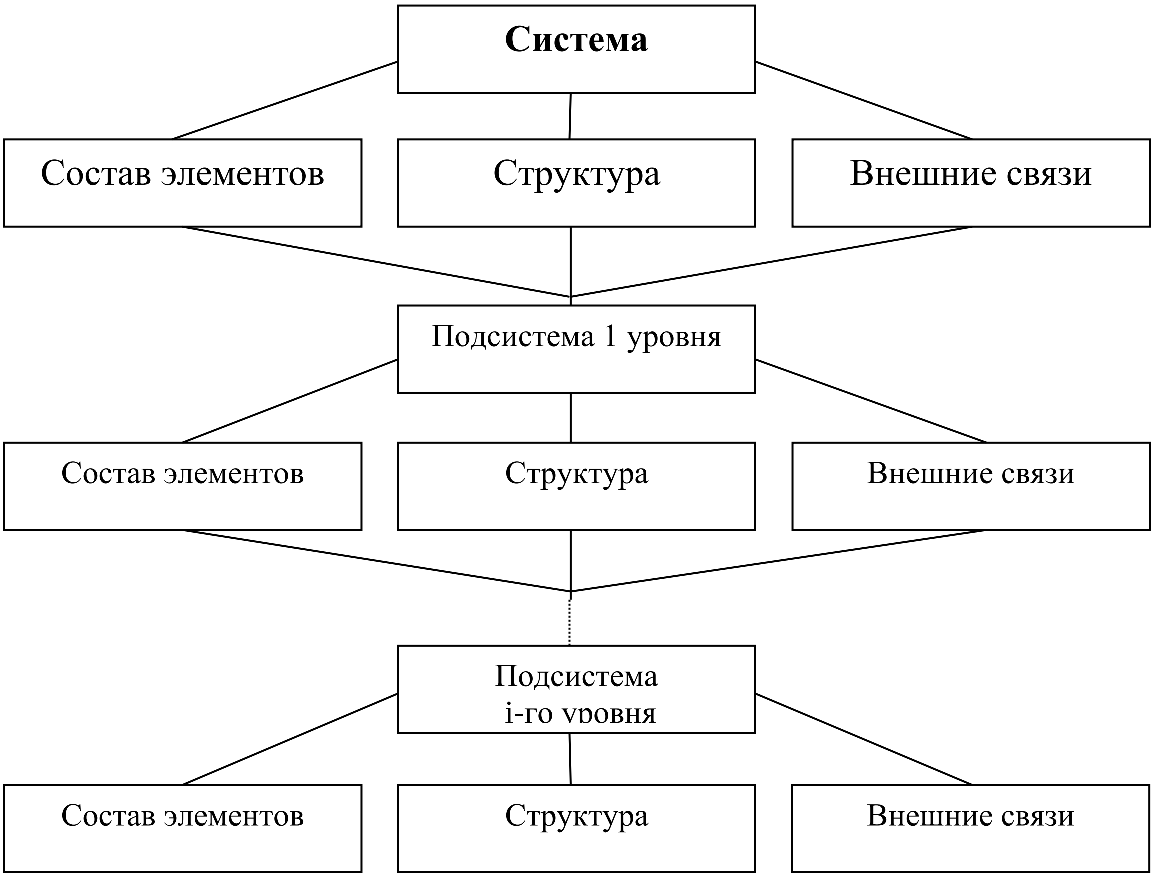


Рисунок 5.2 – Иерархия морфологического описания системы

Важный признак морфологии – ***назначение (свойства) элементов***. Выделяют информационные, энергетические и вещественные (материальные) элементы. Они могут быть взаимосвязаны, что требует определения превалирующего свойства, правила взаимосвязи (например, передача информации требует энергии, передача энергии невозможна без информации).

Информационные элементы предназначены для переноса и преобразования информации.

Перенос информации предполагает преодоление пространства и/или времени, разделяющие объекты. Для преодоления пространства при информационной связи необходимо перемещать материю, энергию в пространстве: электромагнитные волны, акустические возмущения, макромолекулы, документы и др. Для преодоления времени необходимо сохранять во времени состояния материальных объектов: магнитных дисков с файлами, ДНК, книг в библиотеке, мыслей и т.п. Обычно движение в пространстве сопровождается движением во времени, но конструкции устройств могут быть различными. Для преодоления пространства создаются линии связи, а для преодоления времени – библиотеки, базы данных.

Преобразование информации может состоять в изменении энергии, вида носителя, в изменении способа кодирования, в сжатии информации (сокращении избыточности) и принятии решений (распознавание, выбор поведения).

Следует различать обратимые и необратимые преобразования информации. Обратимые – не связаны с потерей (созданием) информации. Накопление информации (запоминание) является обратимым преобразованием в том случае, если не происходит потерь информации в процессе хранения. Принятие решения всегда связано с необратимым преобразованием информации. Эффективность выполнения информационной функции определяется вносимыми искажениями и потерями информации.

Функции *энергетических элементов* связаны с переносом и преобразованием энергии с целью – обеспечить необходимую системе энергию в той форме, в которой она может потребляться другими элементами. Для энергетических элементов большое значение имеет коэффициент полезного действия, который и определяет эффективность элемента.

Преобразование энергии состоит в изменении параметров энергетического потока. Поток входной энергии может поступать извне (из среды), либо от других элементов системы. Выходной энергетический поток направлен в другие системы (в среду) для их преобразования или сохранения определенных условий (например, температуры). Процесс преобразования энергии нуждается в информации, которая может быть сосредоточена в энергетическом элементе, может изменяться (пополняться) за счет поступления информационных сигналов от других элементов системы.

Вещественные элементы предназначены для передачи материала, изменения свойств материала.

Элементы, преобразующие вещество, нуждаются в энергии и информации. То и другое может содержаться в самом вещественном элементе, поступать от других элементов системы или из среды. Преобразование вещества может быть механическим, химическим, физическим, биологическим и т.д. В сложных системах преобразование вещества носит смешанный характер, кроме того, вещество может использоваться для создания энергии. Вещество можно использовать и как носитель энергии и информации.

Особую функцию исполняют *нейтральные (неопределенные) элементы*, для которых трудно (невозможно) предусмотреть, предсказать результаты преобразования вещества, энергии и информации.

Морфологические свойства системы существенно зависят от ***характера связей*** (см. выше). В первую очередь следует выделить *информационные, энергетические и вещественные* связи, как соответствующие свойства элементов системы. Качество связи определяется ее пропускной способностью и надежностью. *Нейтральные связи* не связаны с функциональной деятельностью системы, непредсказуемы или случайны. Вместе с тем, нейтральные связи могут сыграть определенную роль при адаптации, служить исходным ресурсом для формирования прямых и обратных связей, резервом. В определенных условиях возможно преобразование связей (прямых в обратные или нейтральные и т.д.).

Структурные свойства системы определяются характером и устойчивостью отношения между компонентами:

- по характеру отношений между элементами: многосвязные, иерархические и смешанные;

- пространственное расположение компонентов системы (пространственная локализация);

- устойчивость – неизменность отношений. Наиболее устойчивые - детерминированные структуры: отношения неизменны, либо меняются по некоторому закону. Если отношения между компонентами описываются вероятностными законами – вероятностная структура. Существуют хаотические структуры – компоненты вступают в отношения непредсказуемым образом. Возможны и смешанные структуры;

- действия внутренних сил, свойств компонентов и связей – детерминизм имеет определенные уровни совершенства: низкий уровень – полная неизменяемость, более высокий – включение и выключение определенных компонентов на определенных условиях, еще более высокие – наращивание структуры в определенном направлении, создание компонентов нового типа и т.д.

Композиционные свойства систем определяются способом объединения компонентов и элементов в подсистемы:

- эффекторные подсистемы – способные преобразовывать воздействие и воздействовать веществом или энергией на другие подсистемы и системы, на среду;

- рецепторные подсистемы – способные преобразовывать внешние воздействия в информационные сигналы, передавать и переносить информацию;

- рефлексивные – способные воспроизводить внутри себя процессы на информационном уровне, генерировать информацию;

- неопределенные подсистемы – свойства их не могут быть определены.

Композиция систем, не содержащих до элементного уровня подсистем с выраженными свойствами, называется слабой. Композиция систем, содержащих подсистемы с выраженными свойствами, называется соответственно - эффекторной, рецепторной, рефлексивной, смешанной. Композиция систем, включающих подсистемы всех трех видов называется полной.

Морфологическое описание можно представить в виде функционала, содержащего конечные множества:

$$\boldsymbol{S_M} = \left\{\sum, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{K}\right\},$$

где $\sum = \{\sum_{\boldsymbol{i}}\}$ – множество элементов и их свойств.

- состав: гомогенный, гетерогенный, смешанный, неопределенный.

- свойства элементов: информационные, энергетические, информационно-энергетические, вещественно-энергетические, неопределенные (нейтральные).

$\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{Q_j}\}$ – множество связей.

- назначение связей: информационные, вещественные, энергетические.

- характер связей: прямые, обратные, нейтральные.

$\boldsymbol{\sigma}$ – структура.

- устойчивость структуры: детерминированная, вероятностная, хаотическая.

- построения: иерархические, многосвязные, смешанные, преобразующиеся.

$\boldsymbol{K}$ – композиция: слабые, с эффекторными подсистемами, с рецепторными подсистемами, с рефлексивными подсистемами, полные, неопределенные.

Морфологическое описание, как и функциональное, строится по иерархическому (многоуровневому) принципу путем последовательной декомпозиции подсистем. Уровни декомпозиции системы и уровни иерархии функционального и морфологического описаний должны совпадать.

Морфологические свойства структуры характеризуются временем установления связи между элементами и пропускной способностью связи. Для решения некоторых задач целесообразно ввести метрику в структурном пространстве. Можно показать, что множество элементов структуры образует нормальное топологическое пространство (критерии Александрова - Урысона). Следовательно, оно метризуемо [7].

Определим расстояние $\boldsymbol{\rho}$ между элементами $\sum_1, \sum_2$ $\boldsymbol{S}$-системы как кратчайший путь по структуре. Путь есть число элементов между $\sum_1, \sum_2$. Если $\sum_1, \sum_2$ связаны непосредственно, то кратчайший путь равен $\varphi(\sum_1, \sum_2)$, если не связаны, то путь между ними бесконечен. Длину пути введем при помощи функционала:

$$\boldsymbol{d}^{(\boldsymbol{l})}_{\sum_1, \sum_2} = \Phi[\boldsymbol{\varphi}(\textstyle\sum_1, \sum_2), \boldsymbol{l}(\sum_1, \sum_2)].$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ – неотрицательная функция, зависящая от элементов $\sum_1, \sum_2$;

$\boldsymbol{l}$ – линия связи между $\sum_1, \sum_2$.

Определить $\boldsymbol{\rho}$ нужно так, чтобы выполнялась аксиома треугольника

$$\boldsymbol{\rho}(\textstyle\sum_1, \sum_2) \leq \boldsymbol{\rho}(\sum_1, \sum_3) + \boldsymbol{\rho}(\sum_2, \sum_3).$$

Остальные аксиомы метризации очевидны (аксиома тождества: $\boldsymbol{\rho}(\sum_1, \sum_2) = 0$ при $\sum_1 = \sum_2$; аксиома симметрии: $\boldsymbol{\rho}(\sum_1, \sum_2) = \boldsymbol{\rho}(\sum_2, \sum_1)$).

Следовательно,

$$\Phi[\varphi(\textstyle\sum_1, \sum_2), l(\sum_1, \sum_2)]$$
$$\leq \Phi[\varphi(\textstyle\sum_1, \sum_3), l(\sum_1, \sum_3)] + \Phi[\varphi(\sum_2, \sum_3), l(\sum_2, \sum_3)]$$

Вид функционала Ф и пути $\boldsymbol{l}$ (при котором $d_{\sum_1,\sum_2}^{(l)}$ переходит в $\boldsymbol{\rho}(\sum_1, \sum_2)$) определяется содержанием задачи, для решения которой производится метризация. Примеры таких задач:

4) при однотипных элементах на пути (передача информации, энергии или вещества)

$$\boldsymbol{\rho}(\textstyle\sum_1, \sum_2) = inf_{l\subset V}\left(\sum_{i=1}^{n_l}\varphi_i\right) = inf_{l\subset V}n_l\varphi.$$

где n_l – число элементов на пути l; φ_i – время выполнения $\boldsymbol{i}$ –м элементом функции связи;

2) при одновременном (параллельном) выполнении связи на всех возможных путях

$$\boldsymbol{\rho}(\textstyle\sum_1, \sum_2) = \left[\sum_{l=1}^{k_l}\left(\sum_{i=1}^{n_l}\varphi_i\right)^{-1}\right]^{-1},$$

где k_l – число возможных путей связи между $\sum_1, \sum_2$;

3) при одинаковой скорости осуществления функций связи $\boldsymbol{v}$ для всех элементов

$$\boldsymbol{\rho}(\textstyle\sum_1, \sum_2) = inf_{l\subset V}\frac{\boldsymbol{n_l}(\sum_1,\sum_2)}{\boldsymbol{v}};$$

4) при скорости осуществления функций связи $\boldsymbol{v_l}$ для $\boldsymbol{l}$-го пути

$$\boldsymbol{\rho}(\textstyle\sum_1, \sum_2) = sup_{l\subset V}\,\boldsymbol{v_l}(\sum_1, \sum_2).$$

Пространство, метрика которого определяется функциональной метрикой системы, а топология – морфологией системы, принято называть собственным функциональным пространством системы. В собственном функциональном пространстве системы описание системы может быть составлено наиболее полно, точно и достоверно.

Сложные системы предполагают наличие моделей, для которых сложно формализовать *R*-преобразование. Это модели хаотические, слабоорганизованные, слабоструктурированные, неустойчивые, обычно недолговечные, в которых сталкиваются множества независимых событий, не имеющих устойчивых распределений вероятностей, обладающих большим и нестабильным весом, изменяющимися параметрами, отображающие такой уровень знания систем, при котором невозможно составление устойчивых морфологического или функционального описаний. Для таких систем применимо лишь информационное описание.

Информационное описание системы должно давать представление об организации системы (связи в системе предназначены для передачи информации). Оно определяет зависимость морфологических и функциональных свойств системы от качества и количества внутренней и внешней информации [10].

Информационная модель есть организованная в соответствии с определенным порядком совокупность взаимосвязанных правил, содержащих информацию о состоянии и функционировании системы и внешней среды. Она является для субъекта (потребителя модели) своеобразным имитатором, отражающим все существенно важные для управления свойства оригинала. Информационная модель является источником информации, на основе которого субъект формирует образ реальной обстановки, производит анализ и оценку сложившейся ситуации, планирует управляющие воздействия, принимает решения, обеспечивающие правильную работу системы и выполнение возложенных на нее задач, а также наблюдает и оценивает результаты их реализации.

В соответствии с принятым определением под информационной моделью понимается функциональный гомоморфный перенос (отображение) части внешнего мира (оригинала) на систему понятий (изображений, визуализированных картин, символов, знаков и т. п.). Это отображение не является взаимно-однозначным, т. е. изоморфным, однако оно сохраняет связи, которые существуют между элементами внешнего мира (свойственны оригиналу). Последнее свойство позволяет информационной модели быть не только описательной, но и предсказательной. В соответствии с таким определением существенными компонентами информационной модели являются:

1. Понятия (термины, знаки, символы).
2. Постулаты (аксиомы или законы).
3. Правила трансформации (правила вычисления).
4. Правила соответствия, отображения, которые позволяют сравнивать результаты вычислений с экспериментальными или практическими результатами.

Приведенные четыре общих положения могут характеризовать информационные модели-теории, а также очень простые модели. Распространены также и операционные определения информационной модели.

Система является информационной операционной моделью, если она способна отвечать на вопросы о внешнем мире. Важным достоинством операционного определения является то, что оно включает в себя не только модели-теории, но и кибернетические системы, реализованные с помощью ЭВМ.

В соответствии с общепринятым положением о том, что слишком абстрактная модель бесплодна, а слишком детальная вводит в заблуждение, объем информации, включенной в модель, и правила ее организации должны соответствовать задачам и способам управления.

Физически информационная модель реализуется с помощью разнообразных средств отображения информации.

Наиболее существенной особенностью использования информационной модели человеком является необходимость соотнесения сведений, получаемых посредством приборов, экранов, мнемосхем, табло и т. п., как между собой, так и с реальными управляемыми объектами. На процедурах соотнесения этих сведений строится вся деятельность субъекта. Отсюда понятно, что построение адекватной информационной модели является одной из важнейших задач конструирования оригинала в целом.

В работе по созданию информационных моделей, предшествующей выбору технических средств ее реализации, т. е. средств отображения информации, необходимо руководствоваться следующими эргономическими требованиями:

— по содержанию: информационные модели должны адекватно отображать элементы оригинала, рабочие процессы, окружающую среду и состояние самой моделируемой системы;

— по количеству информации: информационные модели должны обеспечивать оптимальный информационный баланс и не приводить к таким нежелательным явлениям, как дефицит или излишек информации;

— по форме и композиции: информационные модели должны соответствовать задачам трудового процесса и возможностям человека по приему, анализу, оценке информации и осуществлению управляющих воздействий.

Понятие «информация» является достаточно сложным и зависит от области использования:

1) совокупность каких-либо сведений, знаний о чем-либо;
2) сведения, являющиеся объектом хранения, передачи и переработки;
3) совокупность количественных данных (цифры, графики и т.п.), используемые при сборе и обработке каких-либо сведений;

4) сведения (сигналы) об окружающем мире, которые воспринимают организмы в процессе жизнедеятельности:

- в биологии – совокупность химически закодированных сигналов, передающиеся от одного живого объекта (клетки, ткани) другому в процессе развития особи;

- в математике, кибернетике – количественная мера устранения энтропии (неопределенности), мера организации системы;

- в философии – свойство материальных объектов и процессов сохранять и порождать определенное состояние, которое в различных вещественно-энергетических формах может быть передано от одного объекта другому, степень, мера организованности объекта (системы).

Определения трактуют информацию как сведения, данные, сообщения, сигналы, подлежащие передаче, приему, обработке, хранению и отражающие реальную действительность или результаты интеллектуальной деятельности человека (шенноновская информации). В этом смысле информация – отображение в некотором пространстве символов (отображающая информация), которую можно измерить (например, в двоичных единицах).

Во всех определениях, кроме последнего, информации рассматривается как объединяющая категория, которую можно объяснить через более простые категории. В последнем определении информация – изначальная, неопределенная категория, которую нужно изучать через ее свойства, т.е. информация материальна (как вещество и энергия), проявляется в тенденции (свойстве) материи к организации, выражает способность организованной материи к предопределению своих состояний (связывает пространственные свойства материи с временными).

Физически информация определяет предсказуемость поведения и свойств объекта во времени: чем выше уровень организации (больше информации), тем менее подвержен объект действию среды (поведение предсказуемо). В этом смысле организованность, упорядоченность системы – способность предопределять свою перспективу, свое будущее.

Функциональные процессы в системе тесно связаны с информационными. Источником информации для функционирования системы является внутренний ресурс и среда, а носителем – вещество (морфологическая информация) и энергия (носитель сигнала). Восприятие и использование информации из среды также требует внутренней (априорной) информации.

Информацию также можно определить как конечное, частично упорядоченное множество элементов определенной природы, для которого существуют генератор (источник) и интерпретатор (получатель) [10]. Информационные связи нужны для реализации причинно-следственных связей, отношений между состояниями разделенных пространством и/или временем объектов. В таком случае источник (генератор) информации должен осуществлять гомоморфное отображение множества своих состояний в множество информационных элементов. Особенностью реализации этих гомоморфизмов является то, что прообразы и образы их должны быть различной физической природы: электромагнитный сигнал – текст (звук) – мысленные образ как биологический процесс.

Информация может состоять из одного единственного элемента, например, символ на клавиатуре. В таких случаях проблемы порядка информации не возникает. В многоэлементной информации возникает множество проблем, как технических, так и теоретических.

Конечный набор правил упорядочения элементов в информации называют *синтаксисом*. Множество всех конечных множеств, удовлетворяющих фиксированному синтаксису, называют *языком с данным синтаксисом*. Информационная связь между объектами, разделенными пространством и/или временем возможна только в том случае, если источник и приемник информации пользуются одним и тем же синтаксисом, т.е. одним и тем же языком.

Генерация и интерпретация информации всегда осуществляется методами анализа и синтеза. Анализ принятой информации в интерпретаторе имеет целью распознать ее скрытую структуру и по этой структуре синтезировать действие или информацию другой структуры. Генератор информации анализирует прообраз информации и по результатам анализа синтезирует скрытую структуру информации. Правила, которыми пользуются интерпретатор при распознавании скрытой структуры и генератор при синтезе скрытой структуры, и есть синтаксис языка, элементом которого является информация. Он фиксирован только конструкциями интерпретатора и генератора.

Внешняя информация может рассматриваться на двух уровнях: по отношению к системе и по отношению к человеку.

Человек воспринимает внешнюю образную и семантическую информацию, поступающую от рецепторов, благодаря понятийному и категорийному аппарату, выработанному ранее в процессе формирования личного опыта: «Запах может напоминать нам весь цветок, но только если он был нам ранее известен». Общественное мнение формируется на основании обобщенных наблюдений и укоренившихся представлений отдельных людей и групп.

Для системы внешняя информация оценивается применительно к целевым установкам (системе целей). Так, например, информация может быть рассмотрена с точки зрения возможностей или угроз развитию системы.

Внутренняя информация определяет развитие, целенаправленность и деятельность системы. Она может изменяться во времени, накапливаясь или разрушаясь. Для внутренней информации системы можно ввести меру ценности, как способность повысить эффективность решения поставленной задачи (достижение цели).

Информационное описание определяет зависимость морфологических и функциональных свойств системы от качества и количества внутренней (о себе самой и среде) и внешней (поступающей из среды) информации. Поэтому детерминированная система (действует в строгом соответствии с заложенной программой) теряет способность к действию, как только этот способ перестает соответствовать условиям (среде). Целенаправленная система, выбирая способ действия в зависимости от среды, сохраняет неизменной цель.

Связь между функциональным и информационным описаниями отражает эффективность и энтропию: закон изменения эффективности во времени отражает энтропийные свойства. Связь между морфологическим и информационным описанием отражает изменение морфологических свойств во времени.

Описание систем и взаимодействие между ними требует понимания и количественного критерия оценки «близости», «сходства», «родства» и «различия». Для этого используются три **класса сходства систем:**

идентичность - предполагает полное совпадение всех свойств систем (выявленных и используемых для описания;

эквивалентность - требует совпадения конечного набора свойств, эквивалентность в определенном смысле, по выбранным признакам;

толерантность - достигается при наличии не менее одного общего свойства систем.

Исходным пунктом определения сходства является морфологическое описание, которое влияет на функциональное описание, но не наоборот (идентичные функциональные системы могут иметь различную морфологию – получить одинаковые результаты можно различными способами). Информационное описание определяет возможную точность оценки сходства систем – чем больше энтропия системы, тем менее совершенна оценка.

Использование различных подходов описания систем предполагает их развитие – существование во времени и целенаправленное совершенствование свойств. Особенно значимыми для управления развитием являются организационно-технические системы.

Анализ системы предполагает развитие знаний о системе от общего к частному – от свойств системы в целом к свойствам подсистем и элементов с учетом внутренних и внешних связей, отношений. В соответствии с рассмотренными способами представления систем анализ должен быть структурным, функциональным и информационным.

5.2 Языки представления систем

Блок-схемы. Типовой элемент блок-схемы (элементарный блок) представляет (рис. 5.3) собой какую-либо область, процесс или устройство. Элементарный блок имеет один вход, один выход и функциональную связь (передаточную функцию) между ними.

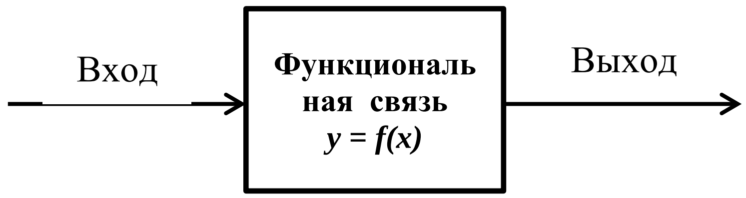


Рисунок 5.3 – Блок-схема элементарного процесса

Блок обычно изображает какое-либо преобразование (функцию). изменение передаточной функции одного блока не должно влиять на передаточные функции других блоков.

Блок может иметь более одного входа – в этом случае в функциональное соотношение между входами и выходами необходимо включить процедуры: сложения и умножения на постоянный коэффициент (линейная зависимость), умножения входных сигналов (нелинейная зависимость).

Блок может иметь более одного выхода – если выходы не тождественны, передаточная функция становится сложной, и логично разделить такой блок на более простые.

Наряду с главными входами и выходами могут быть вспомогательные входы и выходы, например, энергопитание или нежелательные побочные продукты (результаты). Их либо включают (значимы для конечного результата), либо не включают в блок-схему (можно пренебречь влиянием).

Общая проблема выделения элементарных блоков совпадает с проблемой декомпозиции (разделения) системы на подсистемы (элементы).

На рис. 5.4 приведен пример типичной блок-схемы производственного процесса, которая показывает последовательность операций преобразования материала для изготовления определенного предмета. Следует отметить общность такого способа отображения системы: она показывает в логическом порядке (технология) элементарные процессы, которые необходимо осуществить. Она может отображать поток деталей или другие материальные потоки.

На рис. 5.5 отображена блок-схема супергетеродинного приемника. Здесь отдельные блоки изображают различные части реального устройства, хотя они могут представлять схему процессов трансформации сигнала. Такой подход интересен для проектирования устройства, т.к. каждый блок может отображать один или несколько элементов, отдельный проектный отдел организации, один метод или один период времени.

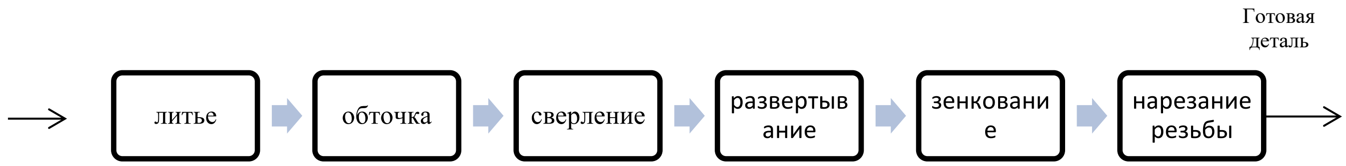


Рисунок 5.4 – Типичная блок-схема производственного процесса

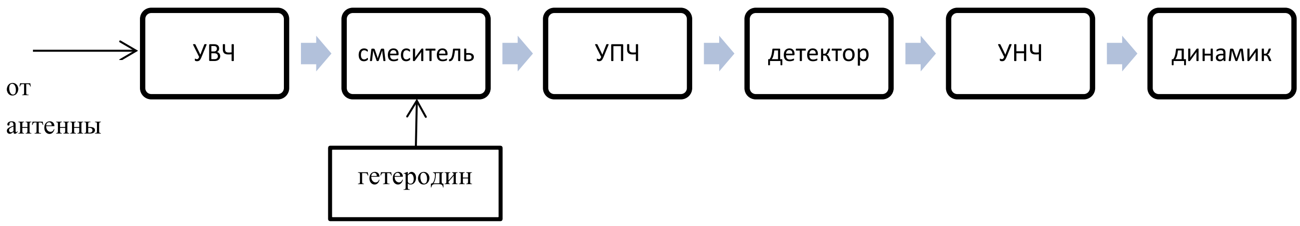


Рисунок 5.5 – Блок-схема супергетеродинного приемника

На рис. 5.6 представлена блок-схема корпорации – организационной системы, в которой отражены схема принятия и реализации решений.

На практике задачу синтеза-анализа блок-схем разбивают на меньшие задачи. Графическая модель предоставляет удобный язык для работы с блоками. Определяют входы, выходы и передаточные функции отдельных блоков. У исследователя имеется каталог заранее проанализированных простых функциональных блоков, из которого он выбирает нужные для системы. Следует отметить, что процессы анализа и синтеза системы неразделимы.

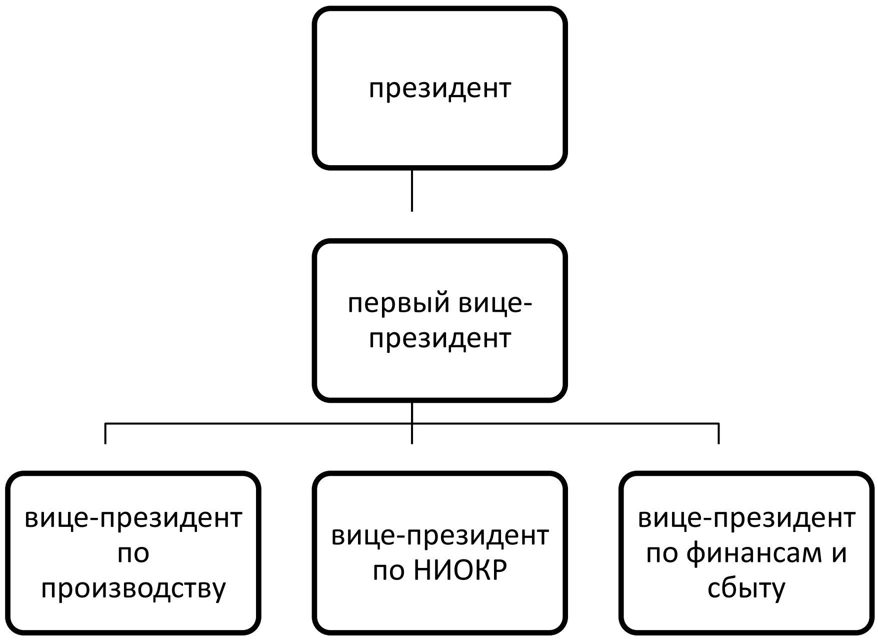


Рисунок 5.6 – Организационная схема

Функциональное моделирование. Из всех приемов моделирования наиболее значимым является моделирование функций (действий). Для решения этой задачи разработано множество методов функционального анализа и синтеза, которые формализуются, в том числе, в форме блок-схем.

Процесс функционального моделирования выбранного объекта для достижения заданных целей включает последовательность операций:

- определение граничных условий моделирования;

- определение желательных входов и выходов;

- составление подробного перечня функций (операций), которые должны выполняться;

- выбранные функции связываются (синтезируются) в модель системы, показывающую основные логические и временные связи. На данном этапе основное требование к модели – осуществимость: комбинация связей должна работать;

- анализ модели относительно технических характеристик аппаратуры, реализующей функции, оптимизация их. Здесь возможна перестановка функций, формирование новых комбинаций и т.п.

Функциональное моделирование позволяет сосредоточиться на способах достижения поставленных целей, а не ограничиваться на обсуждении достоинств и недостатков аппаратуры. Кроме того, появляется возможность задавать требования к новым технологиям и техническим решениям.

Основные требования к функциональным моделям:

минимизация входов и выходов, числа взаимодействий (связей),

учет пространственного положения элементов системы.

Представление функций (действий). Рассматривая систему с деятельностной точки зрения – как инструмент для достижения поставленной цели (целей), можно исходить из того, что процесс функционирования системы может быть разделен на некоторые элементарные акты – назовем их *процедурами*.

Очевидно, что процедуры должны быть определенным образом связаны друг с другом: необходимо определить их порядок, передачу информации, условия начала и окончания выполнения и др. Исполнение совокупности процедур приводит к тому результату, который каждая отдельная процедура обеспечить не может. Таким образом, в наличии признаки системы, в которой в качестве отдельных элементов выступают процедуры (действия, функции).

Это означает, что процесс функционирования системы (достижения поставленной цели, получения конечного результата) может рассматриваться как некоторая система процедур, обладающая признаками системы: внутренняя организованность, структура, иерархия, управление. Такая система относится к классу целенаправленных и для нее справедливы и другие общие свойства систем (эмерджентность, делимость, открытость, эквифинальность, гомеостаз).

В системе процедур можно выделить некоторые группы (модули, подсистемы), обладающие определенной целостностью и относительной независимостью – назовем их *операциями*. Иерархия и разномасштабность операций позволяет получить гибкий инструмент исследования функций (действий). Например, иерархию операций для некоторой задачи можно представить, как показано на рис. 5.7.

Общим представлением процедур и операций является понимание, что все они представляют собой *действия* (*функции*), а функциональная модель системы – представляет собой систему действий для достижения поставленной цели.

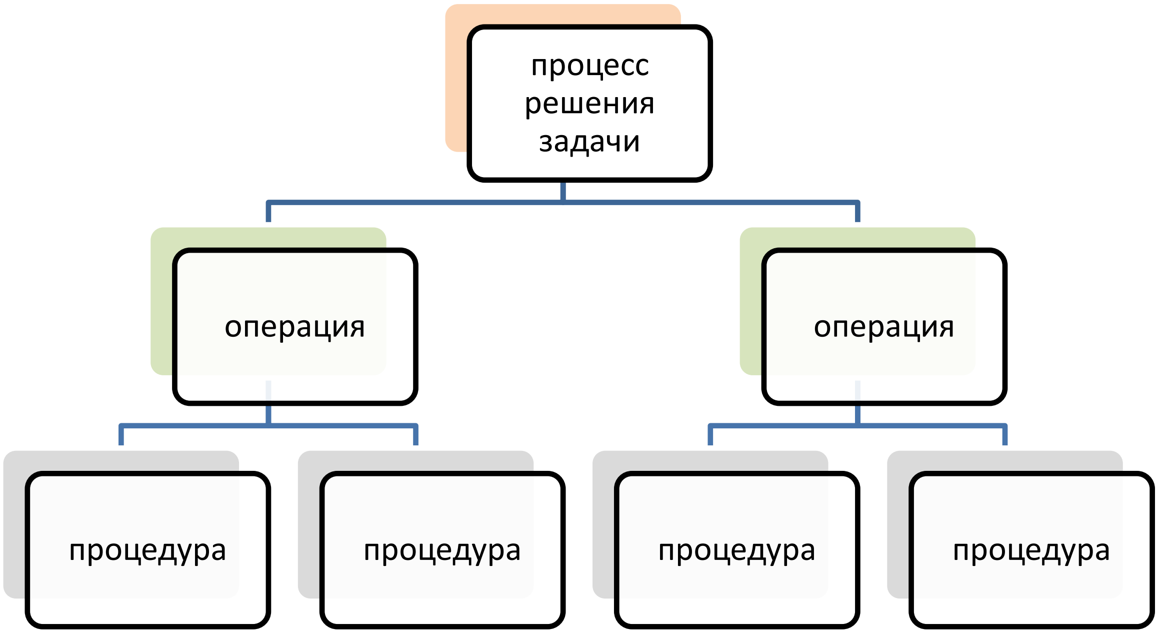


Рисунок 5.7 – Пример иерархии операций в системе

Формализованная функциональная модель системы тогда имеет вид:

$$R:\langle\{M\},\{f\},\{G\}\rangle,$$

где $\{M\}$ – множество действий, для достижения цели системы;

$\{f\}$ – множество связей между действиями;

$\{G\}$ – цель функционирования системы (множество решаемых задач для достижения цели).

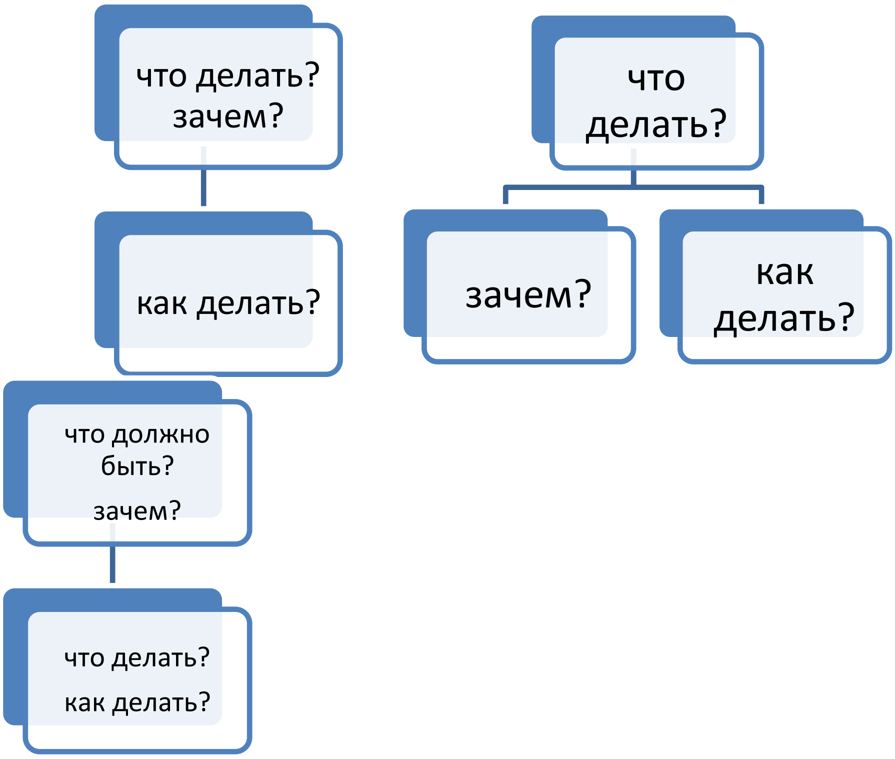
Любое действие имеет несколько характеристик, которые можно представить в форме вопросов:

- цель действия – «Зачем?», «Какой результат следует получить?»;
- описание действия – «Что делать?»;
- способ выполнения – «Как делать?».

При формировании функциональной модели системы используют несколько типовых способов организации действий (рис. 5.8).

Первый из способов рассматривает вопросы «Зачем?» и «Что делать?» совместно (ускоренное решение задачи), второй – ориентирован на то, что вообще можно сделать, зачем и как, а третий – наиболее логичен при организации действий.

Рассмотренные вопросы не являются единственными, но составляют основу управленческого решения. В решении кроме того рассматриваются вопросы: «Кто?» (исполнитель), «Когда?» (время решения задачи), «Где?» (пространственные аспекты), «Какие ресурсы требуются?».



а) б) в)

Рисунок 5.8 – Типовые способы организации действий

При моделировании системы действий существует ряд исключений.

1) ограничиваемся только вопросом «Как?». Таким способом можно решать задачи в соответствие с инструкцией, если она достаточно точная, и мы уверены, что инструкция подходит для решения задачи. Это стандартные, хорошо известные задачи (формализованные процессы) – управление транспортным средством, использование программ для ЭВМ и др.;

2) организация действий на основе перебора, пренебрегая вопросом «Зачем?». Примеры – поиск неисправностей (пока не найдем), выпуск товаров мелкими партиями для изучения спроса, последовательное использование различных программных средств для решения одной задачи и др.;

3) пренебрежение анализом того, как реализуется действие (пренебрежение вопросом «Как?»). Такое действие представляет собой абстрактную схему, неконструктивный подход, оторванный от практики.

Такие действия характерны для сложных задач, для которых способ решения неизвестен или требует дополнительных исследований.

Локальные цели. В этом случае мы имеем дело с тремя уровнями организации решения. Причем для сложных систем переход ко второй стадии решения требует выделения системы локальных целей – понимая, что достижение главной цели может обеспечиваться реализацией некоторых более простых целей (задач).

Систему локальных целей принято создавать сверху (по иерархии). декомпозиция целей должна сопровождаться их согласованием, чтобы выполненные вместе они привели к достижению глобальной цели. согласование целей основывается на связях между ними. Наиболее распространенная схема организации действий показана на рис. 5.9.

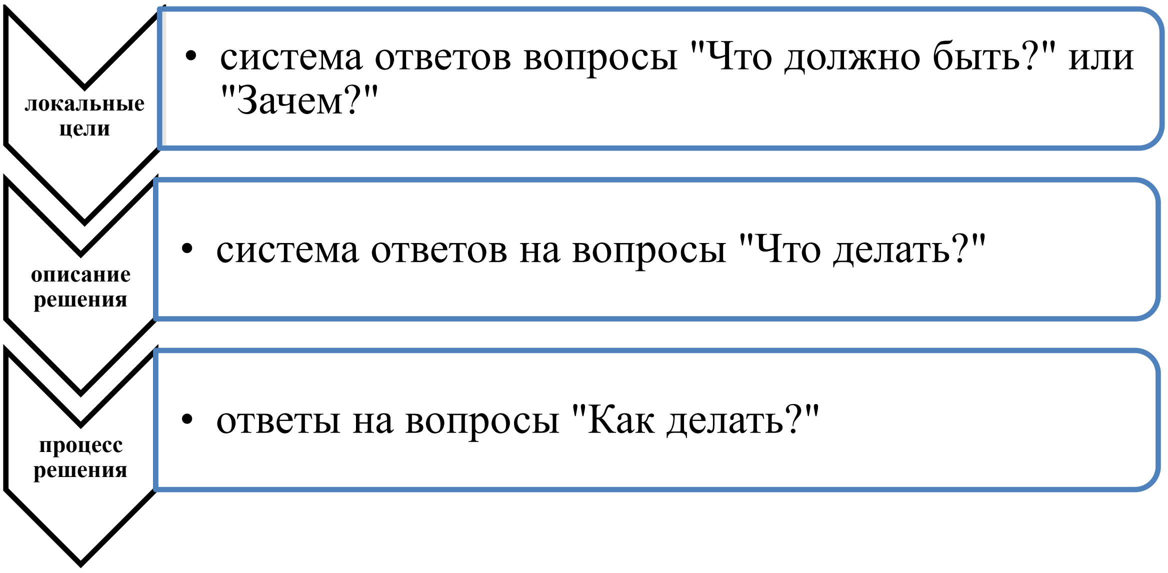
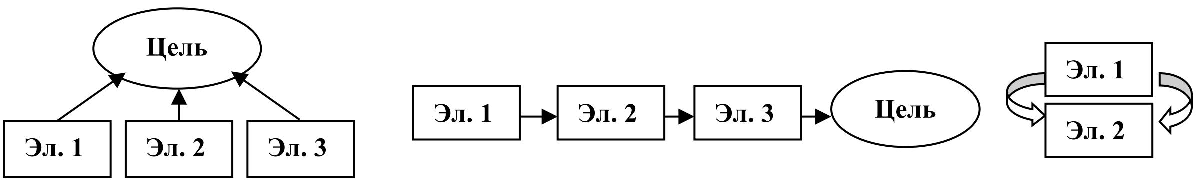


Рисунок 5.9 – Типичный вариант организации действий

Очевидно, что выделение и согласование локальных целей требует определения характера взаимозависимости между ними. В общем виде предполагается, что системы целевых установок для каждой системы обладает уникальными характеристиками, однако в управлении существуют некоторые типовые формы взаимозависимостей (рисунок 5.10).



а) номинальная; б) последовательная; с) обоюдная

Рисунок 5.10 – Типовые взаимозависимости

1. *Номинальная взаимозависимость* – локальные цели соотносятся с элементами организации, которые вносят вклад в общее дело (достижение общей цели), но непосредственно между собой не связаны. Степень координации в этом случае минимальная и осуществляется стандартными методами, которые непосредственно людей не затрагивают (выбор общей цели, продукта деятельности).

2. *Последовательная взаимозависимость* – по принципу «предыдущий - последующий». Данная связь может быть организована по времени, по результатам деятельности, по технологии и др. При этом последующие локальные цели элементов зависят от предыдущих. Требуется более тесная координация (наиболее распространенная форма - планирование).

3. *Обоюдная взаимозависимость* - возникает в случае, когда локальные цели оказывают влияние друг на друга (результаты деятельности одного подразделения становятся факторами производства другого и наоборот). Основной метод координации в этом случае представляет собой взаимное регулирование (отдельными или групповыми координаторами).

Недостатки метода блок-схем:

- *взаимодействие блоков*. При формировании блок-схемы делают предположение, что внутреннее содержание блока не испытывает воздействия внешней среды (нет влияния характеристик одного блока на другой). В реальных системах это не получается (например, блок на выходе – нагрузка для предыдущего блока);

- *сокрытие функций*. Внутри блоков могут быть скрыты важные функции, которые в процессе моделирования не нашли отражения, но значимы для понимания процесса функционирования системы;

- *обратимость и необратимость*. Например, для пассивных элементов можно поменять входы с выходами, а для активных – нет (передаточная функция в обратном направлении будет другой).

Графы. Теория графов предоставляет в распоряжение инженера удобный аппарат для *моделирования структурных свойств систем и отношений между объектами разнообразной природы* [11]. Граф определяется заданием двух множеств:

множество ***X*** – множество *вершин графа*, которые принято отображать в виде точек плоскости или пространства;

множество ***U*** – множество пар элементов из ***X*.** Каждый элемент множества ***U*** указывает пару вершин, между которыми существует *связь*.

Связь может отображаться линией, соединяющей соответствующие вершины графа. При таком отображении требуется, чтобы линия проходила только через те вершины, которые она соединяет, и чтобы разные линии могли пересекаться только в вершинах.

Если в парах, составляющих множество ***U*,** указывается, какая вершина идет первой (направление связи), такие элементы множества ***U*** принято называть *дугами графа* (***X*, *U***), а сам граф - *ориентированным*. Если ориентация не указана, то элементы ***U*** называются ребрами, а граф (***X*, *U***) - *неориентированным* графом (просто графом).

Элемент ***U***, указывающий на связь вершины с ней самой, называется *петлей*. Петле в множестве ***U*** соответствует пара, в которой одна вершина повторена дважды. В множестве ***U*** могут несколько раз встречаться одинаковые пары. Это означает, что между данными вершинами графа существует несколько связей.

Граф (***X*, *U***) называется *конечным*, если множества ***X*** и ***U*** состоят из конечного числа элементов. В противном случае граф (***X*, *U***) называется *бесконечным*. Для практических задач большее значение имеет теория конечных графов. На рис. 5.11 представлен граф, у которого $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4}\}$, $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{(a_1a_2), (a_1a_3), (a_3a_2), (a_2a_4), (a_3a_4), (a_1a_1), (a_1a_2)}\}$ с ориентированными ребрами.

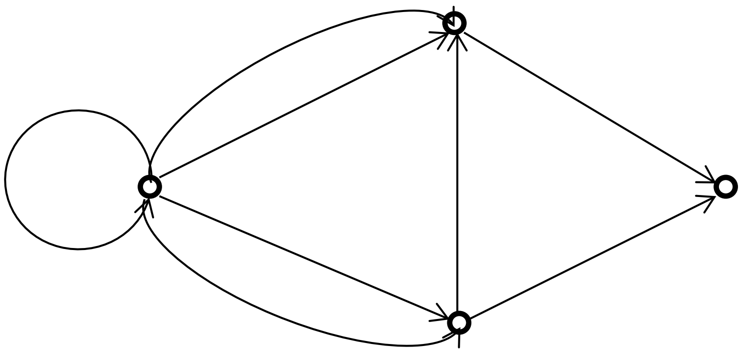
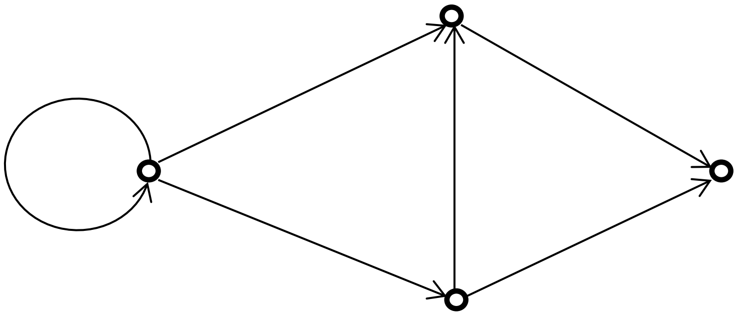


Рисунок 5.11 – Пример представления графа

Задание графа прямым перечислением элементов множеств ***X*** и ***U*** достаточно громоздкое. Поэтому для задания графов прибегают к матрицам:

- *матрица смежности* $\boldsymbol{P_{n\times n}}$, где n – число вершин графа, определяется соотношениями: $\boldsymbol{p_{ij}} = 1$, если между вершинами с соответствующими номерами существует связь, идущая от вершины $\boldsymbol{i}$ к вершине $\boldsymbol{j}$.

В противном случае $\boldsymbol{p_{ij}}$ = 0 (рисунок 5.12). Граф восстанавливается по матрице смежности лишь тогда, когда каждая дуга или петля входит в множество $\boldsymbol{U}$ не более одного раза;



$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{cc} a_{ij} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

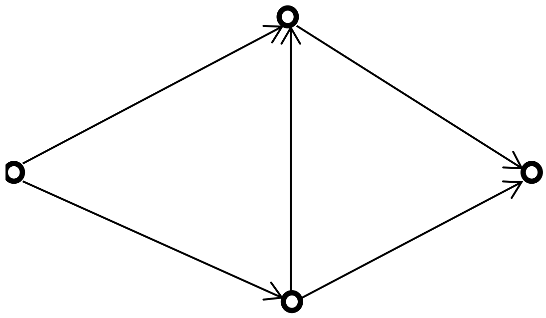
Рисунок 5.12 – Матрица смежности

- *матрица инциденций* $\boldsymbol{Q_{n \times m}}$, где $\boldsymbol{n}$ – число вершин графа, $\boldsymbol{m}$ – число элементов множества $\boldsymbol{U}$, определяется соотношениями: $\boldsymbol{q_{ij}}$ = 1, если дуга с номером $\boldsymbol{i}$ представляют собой связь, идущую от вершины с номером $\boldsymbol{i}$;

$\boldsymbol{q_{ij}}$ = -1, если дуга с номером $\boldsymbol{j}$ представляет собой связь, входящую в вершину с номером $\boldsymbol{i}$ (рис. 5.13). В остальных случаях $\boldsymbol{q_{ij}}$ = 0. Граф восстанавливается по матрице инциденций лишь в том случае, когда каждая дуга входит в граф не более одного раза (петли не входят в граф).

Примерами моделирования систем методом графов могут быть (кроме моделей структур): модели экономических систем, модели потоков в сети, модели сигналов и др.

Модели математической экономики. Назовем *путем* в графе (***X, U***) последовательность дуг (ребер) таких, что конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей.



$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{cc} a_{ij} & \begin{array}{ccccc} a_1a_2 & a_1a_3 & a_3a_2 & a_2a_4 & a_3a_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рисунок 5.13 – Матрица инциденций

Гамильтоновым путем называется замкнутый путь, обходящий все вершины графа. Задача состоит в построении гамильтонова пути, а если каждой дуге присвоено число, называемое сложностью прохода по данной дуге, то обычно требуется найти гамильтонов путь минимальной суммарной сложности. Эта задача известна как задача о коммивояжера и имеет множество применений.

Потоковые модели. *Сетью* называется конечный граф, в котором одна вершина не имеет входных групп (*начальная вершина*) и одна вершина не имеет исходящих дуг (*конечная вершина*). Каждой дуге $\boldsymbol{u_k}$ сети сопоставляется положительное число $\boldsymbol{c_k}$ – *пропускная способность дуги*. Набор чисел ($\boldsymbol{\varphi_1}$, $\boldsymbol{\varphi_2,\ldots,}$ $\boldsymbol{\varphi_m}$), где $\boldsymbol{m}$ – число графе, называется *потоком в сети*, а число $\boldsymbol{\varphi_i}$ - *величиной потока по дуге* $\boldsymbol{u_i}$, если

1) $0 \leq \boldsymbol{\varphi_i} \leq \boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{m}$.
2) сумма $\boldsymbol{\varphi_i}$ по дугам, выходящим из вершины, за исключением начальной и конечной вершин.

Многие задачи сводятся к построению потока с наибольшей величиной – максимального потока. Такая задача решается известным алгоритмами Форда-Фалкерсона, Эдмондса-Карпа, Диница и др. К задаче построения максимального потока приводится, например, транспортная задача: требуется перевезти из начальной вершины сети в конечную груз по дугам сети за минимальное время. При этом в каждый момент времени по дуге $\boldsymbol{u_k}$ нельзя перевозить груза больше, чем $\boldsymbol{c_k}$.

Сетевое планирование и управление (СПУ) представляет совокупность методов исследования операций, основанное на использовании сетевых моделей комплексов (проектов, разработок и др.). В общем виде понятие комплекса определяет процесс достижения некоторой цели, представляемый в виде конечного частично упорядоченного множества операций (работ). Формальное отображение комплексов ориентированными конечными связными графами, на которых заданы количественные параметры, составляет основу СПУ [11, 12]. Аппарат СПУ предназначен для решения двух основных проблем:

- формирование календарного плана реализации комплекса;
- принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана.

Основой СПУ является построение структурной сети комплекса, определяющей с требуемой степенью детализации состав операций комплекса и логические взаимосвязи между ними во времени. Графическое изображение наиболее широко распространенной разновидности сетевых моделей, называемых каноническими (конъюнктивными) сетевыми моделями в прямой форме, приведено на рисунке 5.14.

В канонической модели вершина графа отображает вещественные результаты выполнения входящих в нее операций (работ) и одновременно определяет необходимые и достаточные условия возможности начала выходящих из нее операций. Такая содержательная интерпретация вершин сетевой модели, изображаемых на сетевом графе, различным графическими символами (окружности, квадраты, треугольники и др.) получила название *событий*.

Дуги графа сетевой модели отображают *операции*, трактуемые как:

реальные процессы, на выполнение которых затрачиваются ресурсы и время;

процессы, на выполнение которых требуется только время;

логические взаимосвязи, не потребляющие ни ресурсов, ни времени, но играющие принципиальную роль для адекватного представления структуры комплекса (системы). Такие операции называют *фиктивными*.

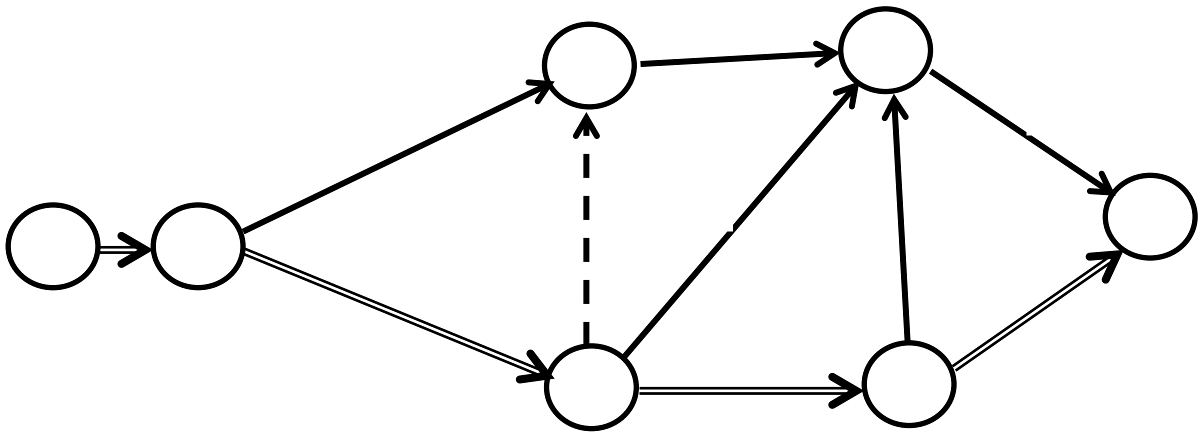


Рисунок 5.14 – Каноническая сетевая модель СПУ

Таким образом, сетевая модель состоит из элементов двух типов, любая непрерывная последовательность которых образует *путь*. Длина пути определяется суммой длин (продолжительностей) входящих в него операций (числа возле дуг). Путь максимальной длины (двойная линия), связывающий начальное и конечное события сети, называется *критическим*. Все операции, не принадлежащие критическому пути, можно сдвигать во времени в пределах их резервов, не увеличивая при этом общей продолжительности реализации комплекса. Это обстоятельство широко используется при управлении.

Сетевая модель может быть определена и соответствующими матрицами (смежности, инциденций и др.), таблицами и системами неравенств.

На базе аппарата СПУ строятся модели систем организационного управления, АСУ, которые могут иметь функциональный характер, показывать алгоритмы управления, взаимодействия субъектов и объектов управления, направления координации и коммуникаций.

Граф сигнала – это графическая модель системы, в которой изображают переменные (узлы) системы, а направленные ветви между узлами – функциональные связи между переменными [13]. Простейший граф сигналов показан на рис. 5.15.

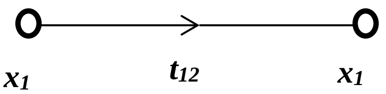


Рисунок 5.15 – Простейший граф сигналов

Узлы x_1 и x_2 изображают две системные переменные (например, входная и выходная). Направленная ветвь между ними t_{12} изображает передачу от узла ***1*** к узлу ***2***. Термин «передача» означает отношение выходной переменной к входной – это то же самое, что передаточная функция в теории блок-схем (оператор, функция: запись $x_2 = t_{12}\ x_1$ соответствует $x_2 = f(x_1)$ на рисунке 5.15). Причем граф сигналов может показывать как аналитические, так и причинно-следственные связи.

На размерности разных узлов сигналов не налагается никаких ограничений. Передачи должны иметь надлежащие размерности для согласования (например, x_1 измеряется в амперах, x_2 - в вольтах, тогда t_{12} - в омах). Если обе переменные выражаются в одних единицах, то передача должна быть безразмерной.

Правила построения графов сигналов. Граф сигналов есть просто топологический способ записи системы уравнений. Основой построения сигнального графа являются узлы переменных. Обычно их изображают первыми, а затем формируют передачи согласно следующим правилам:

1) сигнал течет по ветви в направлении стрелки;

2) сигнал, протекающий по ветви, умножается на передачу ветви;

3) значение переменной в узле равно сумме всех сигналов, входящих в узел;

4) значение переменной в узле поступает в каждую ветвь, выходящую из узла;

5) по соглашению, ни одна ветвь не входит во входной узел и ни одна ветвь не выходит из выходного узла. Это приводит к необходимости чертить искусственные (дополнительные) дублирующие узлы как входы и выходы.

Граф сигналов полезен во многих случаях, даже когда он только выявляет структуру системы без каких-либо количественных оценок (число контуров обратной связи и др.). Граф сигналов можно использовать для определения точной меры сложности замкнутой системы, оценки изоморфизма (подобия) между физически замкнутыми системами и системами социально-экономическими и др.

В некоторых случаях граф сигналов может составить:

целевую систему – сеть связи в пространственном (географическом) представлении (дерево целей, рисков, логико-вероятностные модели и др.);

конечный продукт – как результат взаимодействия нескольких субъектов (технологическая карта) и др.

5.3 Процесс моделирования системы

В общем виде формирование модели системы (исследовательское планирование) может быть итогом системных исследований или же прямо начинается с исследования объекта, если цели исследователя достаточно очевидны. Во всех случаях процесс включает определенные взаимосвязанные операции, представленные на рисунке 5.16 [13]:

Уяснение задачи представляет собой выделение, детализацию и связывание друг с другом факторов, характеризующих систему и ее окружение. Так как задача представляет внешнее выражение некоторой неудовлетворенной потребности (нужды), то, прежде всего, необходимо найти – в чем собственно потребность состоит. Это означает сбор и анализ данных, описывающих рабочие условия, требования заказчика, экономические соображения, политику фирмы – возможные входы и выходы системы и т.д.

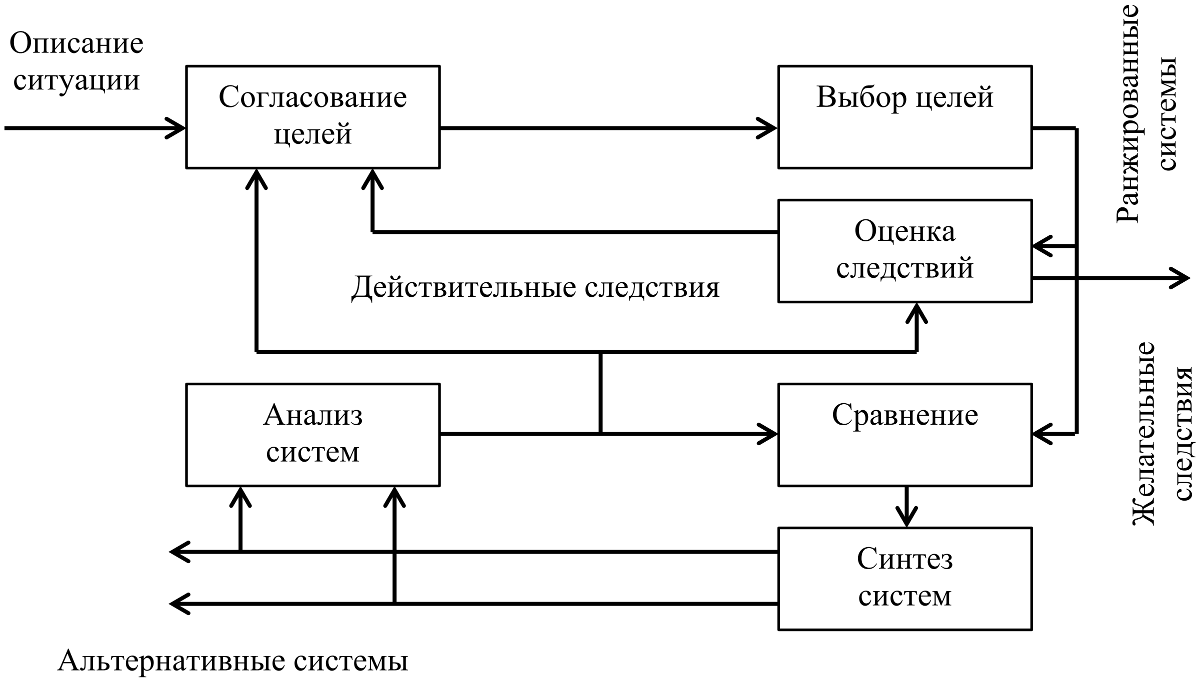


Рисунок 5.16 – Процесс моделирования системы

Выбор целей есть логическое завершение уяснения задачи. Выбранные цели направляют поиск альтернатив, подсказывают способы анализа найденного и дают критерии для выбора оптимальной системы.

Цели дают логические основания для синтеза системы (формирования модели). Блок-схема изображает функцию синтеза и создаваемые ею альтернативы. Эти альтернативы затем анализируются, и найденные действительные следствия сравниваются с желательными. При несходствах необходимы более энергичные усилия для сближения двух множеств. Функции синтеза, анализа и сравнения содержат элементы еще одной петли обратной связи.

Синтез систем включает перечисление или изобретение альтернативных систем, способных осуществить наши цели. Каждая альтернатива должна развиваться достаточно подробно, чтобы допускать оценку с точки зрения целей и принятие решений о ее относительных достоинствах для возможной разработки.

Анализ систем означает выведение следствий из всего списка гипотетических систем (моделей систем). Эти выводы касаются работы системы, стоимости, качества, рынка и др.

Результаты анализа могут использоваться двояко. Во-первых, они оцениваются согласно критерию решения. Оценка ранжирует альтернативные системы, располагает их в ряд по способности приближения к целям. Если оптимальная система (наилучшая по выбранному критерию) достаточно хороша, то весь процесс завершается. Во-вторых, предположим, что выбранная система недостаточно хороша. Тогда надо синтезировать лучшие системы, либо согласовывать первоначальные цели. Действительные следствия (результаты), выведенные из анализа, дают основания для суждения о том, какие цели согласовывать (пересматривать).

Выбор наилучшего решения включает оценку выполненных анализов и сравнение этих оценок с целями, для того, чтобы выбрать наименьшее возможное подмножество альтернативных систем, заслуживающее дальнейшего рассмотрения.

Представление результатов – последняя операционная фаза. Здесь может формироваться формальный отчет, включающий один из выводов:

- данная система решит задачу (задачи);
- необходима исследовательская разработка некоторых альтернатив, прежде, чем можно прийти к правильному заключению;
- в настоящее время дальнейшая работа неоправданная.

Операция принятия решения о выборе модели основана на определении и сравнении двух моделей: идеальной системы и оптимальной (рациональной) системы.

Идеальная система есть модель потребной системы в представлении исследователя, она заключает в себе высшую степень функционально желательного и обладает характеристиками, которые он хотел бы получить. Представление (видение) исследователя очерчено его *знанием* того, осуществимо физически и экономически, оттенено его *ожиданием* того, что станет осуществимо в будущем, и окрашено желанием того, что он хочет осуществить. поэтому модель идеальной системы вполне описывается множеством *желательных следствий (результатов)* – другими словами, *целей моделирования*. Это множество выражает функциональный смысл предполагаемого применения системы, ее физические, экономические и социальные цели (например, вес, стоимость, безопасность). Сюда же входят допустимые погрешности и уровни риска.

Рациональная система есть одна из ряда альтернативных систем, которые можно построить при данных физических, экономических и социальных ограничениях (***оптимальная*** – наилучшая из них в смысле принятого критерия). Она вполне описывается тем множеством действительных (реальных) следствий (результатов), которые менее всего отличаются от желательных следствий (результатов).

В соответствии с рис. 5.16 три функции: согласование целей, выбор целей и оценка следствий – содержат три главных элемента петли обратной связи. Сначала, за отсутствием целей, согласовывать нечего, поэтому описание ситуации ведет прямо к функции выбора целей. При первом обходе петли эта функция выбирает цели для идеальной системы. Функция согласования целей состоит в согласовании целей для идеальной системы с условиями задачи. Оценка следствий (результатов), желательных и действительных, означает определение ценности следствий (результатов) в соответствии с выбранным критерием решения.

Критерий решения есть функция, которую мы хотим максимизировать. Это – правило, указывающее, как комбинировать между собой следствия (результаты) при выборе оптимальной системы. Критерий должен учитывать ценности исследователя (потребителя) и неопределённости.

Если цели идеальной системы непримиримы, то мы вынуждены либо оставить процесс моделирования, либо изобрести новые альтернативы. Если же согласование возможно, то процесс синтеза, анализа и сравнения повторяется.

Согласование имеет несколько форм:

1) некоторые цели могут быть отброшены совсем, как нереальные (например, цель нечаянно нарушает законы природы – вечный двигатель!);

2) анализ может указать новые цели, которых не было в первоначальном множестве (например, частные цели, относящиеся к подсистемам). В этом случая новые цели надо добавить к старым;

3) функция согласования разрешает конфликты между целями, оказавшимися при анализе несовместимыми (например, высокое качество и низкая стоимость – можно выбрать компромисс).

Две упомянутые петли обратной связи соединены между собой таким образом, что они образуют третью петлю, которая работает последовательно или параллельно с ними, формируя окончательный стабилизированный выход. Иными словами предложенная схема моделирования обладает адаптивными свойствами.

5.3.1 Уяснение задачи

Эта функция осуществляется при помощи операций, носящих различные названия: обзор систем, характеристика ситуации, сбор данных, исследование окружения, внешнее проектирование системы и др. С точки зрения моделирования систем можно определить эту функцию как *наблюдение*: преобразование неопределенной ситуации в набор фактических данных, необходимых для постановки предварительных целей и анализа систем.

Всякому исследованию предшествует некоторая неопределенность ситуации, неуверенность, неясность. Тот, кто решает задачу, находится в ситуации, в которой он имеет какую-то смутную цель, хочет чего-то достичь или удовлетворить какую-то потребность и испытывает сомнение относительно того, как добиться желаемого. Т.е. неопределенность – это функция о ситуации и самого исследователя.

Исследование начинается, когда индивид вступает во взаимодействие со своим окружением – возникает проблема, требующая решения. Цель исследователя – выбрать надлежащий образ действия среди тех альтернатив, которые он надеется найти в ходе моделирования.

Признание ситуации проблематичной продвигает решение задачи не очень далеко. Исследователь пытается сформулировать задачу или уяснить ее. Если задача ранее не решалась, ее нельзя сформулировать точно, но достаточно пробной формулировки.

Вспомним изречение: «хорошо поставленная задача уже наполовину решена!». Неправильно понять задачу – направить дальнейшее исследование по ложному пути. Без задачи остается только слепое нащупывание результата. Постановка задачи позволяет концертировать усилия и ресурсы в определенном направлении.

Формулировка задачи может содержать искомые решения: следует разыскать такие элементы ситуации, которые являются определенными. Это условия задачи, с которыми следует считаться в любом предложенном решении.

Уяснение задачи – творческий процесс, но существует несколько **принципов и методов**, его облегчающих.

Число возможных решений возрастает вместе с общностью и широтой формулировки и убывает с ростом ограничений и запретов в ней. Разработка модели системы может осуществляться на основе некоторых методов.

Исследование потребностей клиента (конечного потребителя системы) для планирования систем, которые будут представлять наибольший интерес. При планировании исследования потребностей следует выяснить:

чего хотят конечные потребители результатов моделирования систем;

какие частные потребности вытекают из потенциальных общих нужд клиента.

Ответ на поставленные вопросы предполагает несколько типовых вариантов решений (целей моделирования).

Расширение и обновление функции. Расширить функцию значит заставить систему делать больше, чем она делала раньше, или исполнять функции, которых она до этого не исполняла. Например, переход к цветному телевизионному сигналу, электрические одеяла, радиобудильник – известные примеры новых функций в известных потребительских продуктах.

Улучшение технических характеристик системы – сделать ее более долговечной, более надежной, более легкой в эксплуатации и ремонте, способной удовлетворять более высоким стандартам или более безопасной. Например, повышение быстродействия вычислительной техники, использование новых методов накопления информации.

Снижение стоимости не требует объяснения. Дефицит ресурсов всегда предполагает борьбу за сокращение расходов и снижение себестоимости продукции. Например, использование более дешевых материалов, внедрение более эффективных методов производства (повышение производительности труда).

Улучшение внешних качеств предполагает сделать продукт (услугу) более привлекательной для покупателя, изменив их вид, форму, упаковку или увеличив удобство. Например, изменение формы автомобильного кузова.

Исследование окружения в поисках новых идей, теорий, методов, материалов и устройств, чтобы предложить способы использования их в новых системах. Исследование окружения имеет целью понять и описать окружение и предсказать его краткосрочное (тактические решения, оперативное управление) и долгосрочное (стратегические решения, стратегическое управление) будущее.

В окружении возникают потребности в новых системах, здесь определяются и ограничения их использования (граничные условия). Кроме того, окружение влияет на используемые ресурсы, необходимые для разработок. Исследование окружения предполагает оценку взаимодействия исследуемой системы с внешними системами. По этому признаку можно разделить окружение на дальнее (оказывает влияние, но наша система на него влиять не может) и ближнее (оказывает влияние, но возможно воздействие).

По способам воздействия выделяют:

- *физическое и техническое окружение* – существующие системы и методы взаимодействия с ними, принятые технические стандарты, состояние технологии и природное окружение (возможности), переходящие факторы (ранее принятые и реализованные решения);

- *экономическое окружение* – организация и ее характеристики (структура, кадры, политика, решения государства, характер и результативность операций) и др.;

- *социальное окружение* – характер взаимодействия между существующими или предполагаемыми системами и людьми – макроскопические (уровень организации и более общей системы – государство, союз государств) и уровень отдельной человеческой личности.

Вес факторов и их содержание зависит от потребности, которую мы пытаемся удовлетворить.

Критериями существенности служат выявленные потребности. Иными словами, хорошие идеи о том, что нужно, помогают выделить факторы окружения и ранжировать их в порядке важности. Такой подход позволяет сосредоточиться на важнейших факторах, оставляя другие для дальнейших исследований.

Однако, ограничение области факторов может привести к дилемме: область важнейших факторов может оказаться достаточно широкой, а недостаток широты представляет распространенную ошибку при моделировании. Поэтому при моделировании и выявлении существенных факторов большое внимание следует уделять изучению окружения.

Метод входов и выходов предполагает исследование входов (исходная информация, принятые заранее решения). Общая процедура управления предполагает технический характер – расследуется взаимосвязь входов и выходов системы, что ограничивает заинтересованность субъектов управления.

Моделирование предполагает определенную схему.

Перечисление всех входов и выходов в отдельных списках. Входы и выходы можно группировать по признаку – несут ли они информацию, энергию или материалы. Такая группировка полезна тем, что позволяет использовать для характеристики элементов соответствующие разделы знаний.

Описать полностью каждый элемент (техническое описание входа, выхода). Если входом является поток информации, то нам необходимо знать его источник, его начало, продолжительность и конец, его язык (код), его информационное содержание, скорость и избыточность. Важны также и физические свойства – если информация поступает в электрической форме, то нам необходимо знать форму сигнала во времени, положение на оси частот и т.д.

Эти входы затем анализируются для определения числа их видов и интенсивности каждого вида. Если существует только один вид входа, то система будет очень простой. При наличии более чем одного вида входов система будет сложнее, так как она должна различать каждый вид. Например, когда мы говорим по телефону, один вид входа посылается при снятии трубки (сигнал вызова), другой при наборе номера (импульсы набора), третий – при возвращении трубки на место (сигнал отбоя). Система различает входы благодаря учету последовательности событий – входы уплотнены во времени.

Если сигналы (потоки материи) распространяются по различным каналам (например, движение транспорта по различным магистралям) – входы уплотнены в пространстве.

В информационных системах распространено частотное уплотнение. При таком построении системы каждый канал занимает определенную полосу частот.

Таким образом, можно сделать вывод, что существует множество методов уплотнения входов.

Попытаться связать множество входов со множеством выходов, используя соответствующие передаточные функции.

Ожидание конкретных заявок на разработку новых методов или систем (ожидание, когда не накопится достаточно идей о новом продукте). Такие проекты будут влиять (как фактор окружения) на поиск новых идей, являются результатами потребностей клиента. Основной недостаток такого подхода – разрыв во времени между появлением замысла и удовлетворением потребности. Метод ожидания часто исключает разумное планирование - когда потребность очевидна выход – разработка системы любой ценой, что делает метод наиболее дорогостоящим.

5.3.2 Выбор целей и их измерение

Функция выбора целей имеет двойственную природу. С одной стороны, речь идет просто о составлении более или менее формального определения нужной физической системы. Перечисляются желательные входы и выходы и все другие граничные условия и, далее, потребности, которые система должна удовлетворить.

С другой стороны, суждение о том, что нужно (потребно, желательно) предполагает наличие определенной системы ценностей, которая включает идеальную систему и критерии решения (выбора), а также принципы измерения ценностей (целей).

Выбор целей. Каждой физической системе сопутствует своя уникальная система ценностей, которая должна служить основой для целеполагания. Однако некоторые виды оценок встречаются достаточно часто.

Прибыль, измеряемая в денежных единицах, важна почти во всех промышленных разработках. Способ ее определения меняется для различных систем (например, для периодов - краткосрочная, долгосрочная).

Рынок (объем реализации), в единицах продукции за единицу времени. В коммерческом смысле – это один из факторов прибыли.

Стоимость в денежных единицах важна как фактор прибыли и рынка, как критерий экономической осуществимости проекта. Может оцениваться себестоимость или годовые затраты, затраты на весь срок службы системы.

Качество имеет объективный и субъективной характер. Объективное качество измеряется в физических единицах (параметры системы). Субъективное качество характеризует степень удовлетворения потребностей клиента. Совмещение понятий возможно путем введения нормативов (стандартов) качества.

Технические характеристики (показатели) означают по существу то же, что и объективное качество. Большинство их зависит от вида системы.

Цели, затрагивающие конкурентов, характерны для большинства коммерческих и военных разработок. Они могут включать захват или удержание сегмента рынка, ослабление конкурента. Эффективность оружия определяется степенью поражения объектов, снижению потенциала противника.

Совместимость с уже существующими системами – важна во многих ситуациях, особенно в отраслях с высокими капиталовложениями и сложной техникой. Создание принципиально новых систем требует введения дополнительных целей и определение переходного периода поэтапного ввода системы в эксплуатацию.

Приспособляемость (гибкость, адаптивность) означает легкость, с какой система может изменяться в изменяющемся окружении. Идея эта включает также легкость преобразования системы для новых или множественных применений.

Стойкость (сопротивление моральному старению) – важна как общесистемная цель, но ее трудно измерить и контролировать.

Простота (изящество) как системная цель имеет сильную субъективную окраску. В искусственных системах более значимыми являются такие цели как надежность и стоимость.

Безопасность часто выступает как цель, но она связана с проблемой ценности и сложна для измерения (например, ценность потерянной жизни).

Цели во времени охватывают календарные планы, сроки моделирования, создание опытных образцов, испытаний и др. Время почти всегда одна из главных величин в системе ценностей, особенно в состязательной ситуации. Кроме того время взаимодействует почти со всеми рассмотренными факторами.

Выбор целей должен завершаться их ***оптимизацией***. Оптимизировать систему целей – означает совершить несколько известных операций для получения лучшей (наилучшей) системы относительно критериев системы более высокого уровня. Существует определенная процедура:

1) изложить цели в формализованном виде (на бумаге или др.). Проверить их на нейтральность и отсутствие пристрастия по отношению к внешним системам;

2) выделить последовательные средства и цели (причинные цепи). При наличии нескольких таких цепей – распределите их по уровням значимости (иерархия целей), определите цели одного уровня и координатные оси системы ценностей (приоритетность реализации);

3) проверить согласования целей по уровням – согласование относительного значения каждого подмножества целей;

4) проверить непротиворечивость целей на одном уровне. Наличие противоречивых целей требует выработку компромиссов или оценку заменимости целей;

5) сделать множество целей полным (рассмотреть все возможные варианты поведения системы);

6) построить шкалы измерения целей и определить наивысшие уровни измерения для каждой цели. На основе системы измерений целей ранжировать их по важности;

7) проверить цели на их физическую, экономическую и социальную осуществимость. Формализовать ограничивающие факторы;

8) учесть риск и неопределенность, выбрать надлежащий критерий решения;

9) отделить логические вопросы от фактических для разрешения конфликта ценностей ЛПР;

10) разрешение конфликта ценностей.

Риск и неопределенность при целеполагании. Принятие решений в условиях измеримой неопределенности (риска) позволяет вводить вероятностные оценки неопределенности. Риск заключается в возможных ошибках при оценке степени вероятности наступления условий (событий). Колебания переменных факторов решения могут быть предугаданы (выполнены оценки вероятности). В таких случаях кроме опыта и интуиции могут быть использованы некоторые вероятностные оценки будущих условий и событий.

Для **экономических решений** принято использовать понятие риска как вероятность возникновения потерь в результате реализации принятых решений. Существуют внешние и внутренние причины возникновения риска, порожденные внешними условиями и внутренними факторами деятельности предприятия. Наиболее часто экономические риски возникают по следующим причинам:

- разнообразие потребительских вкусов приводит к быстрому изменению рыночной конъюнктуры и усилению конкуренции. Для сохранения положения на рынке производителям необходимо постоянно обновлять свою продукцию. Но выход на рынок с новым товаром всегда содержит повышенный риск из-за возможного отсутствия спроса на незнакомую продукцию;

- наибольший риск связан с достижением планируемого объема прибыли. Сложность осуществления более прибыльных проектов обычно выше, чем небольших, что увеличивает риск их реализации. Тем самым прибыль как экономическая категория объективно порождает риск;

- нередко возникает противоречие между управленческим персоналом, стремящимся к риску, и исполнителями, склонными к стабильности и не желающими или не умеющими работать в условиях постоянно высокого риска.

Технические риски, как правило, связаны с надежностью элементов техносферы. Выражает вероятность реализации опасностей, связанных с эксплуатацией технических систем и механизмов, технологических процессов, строительством и эксплуатацией зданий и сооружений и т.п.

Федеральным законом «О техническом регулировании» [14] введено следующее понятие безопасности процессов производства и продукции: состояние, при котором отсутствует недопустимый риск, связанный с причинением вреда жизни и здоровью граждан, имуществу физических или юридических лиц, окружающей среде и т.д. Т.е. фактический уровень риска не превышает допустимого. Идентификация опасностей, оценка, регулирование и контроль риска предусмотрены в ГОСТ Р 12.0.006 — 2002 [15]. Концепция приемлемого технического риска стала альтернативой концепции абсолютной безопасности (безаварийной эксплуатации), не оправдавшей себя. За основу в новом подходе положен эмпирический факт, что никакая деятельность не может быть полностью безопасной. Отправной точкой при таком подходе становится понятие риска, связанного с данной технологией, и уровня приемлемого риска, обусловленного экономическими и социальными факторами.

В таблице 5.1 приведена классификация источников и факторов технического риска.

Таблица 5.1 – Источники и факторы технического риска

Источники технического риска	***Факторы технического риска***
Окружающая природная среда	Опасные природные явления и катаклизмы, выход характеристик условий за допустимые пределы
Объекты техносферы	Аварии, нерегламентированная деятельность, транспортные аварии и др.
Общество	Низкий уровень НИОКР, военные и социальные конфликты, противоправные действия, уровень подготовки специалистов и др.
Человеческий фактор	Ошибочные и несанкционированные действия персонала, качество персонала

Происшествие происходит тогда, когда появляется полный набор условий (факторов) его возникновения. Каждое условие рассматривается как опасная ситуация, предпосылка к происшествию. Чем больше возникло опасных ситуаций, тем выше риск. Вероятность возникновения происшествия является функцией вероятности наступления предпосылок к нему и признаков опасности.

В зависимости от масштаба последствий различают:

- *инцидент* — событие, в результате которого возникает или может возникнуть несчастный случай – нежелательное событие, приводящее к смерти, ухудшению здоровья, травмам или другим потерям. Инцидент, в результате которого не возникают ухудшение здоровья, травмы, ущербы или иные потери, рассматривается как «промах». Применительно к опасным производственным объектам под инцидентом понимают отказ или повреждение технических устройств, применяемых на таком объекте, отклонение от режима технологического процесса, нарушение положений нормативных правовых документов, устанавливающих правила ведения работ на объекте;

- *аварией* обычно считается происшествие, в результате которого повреждена или разрушена техника, без гибели людей. Это опасное техногенное явление, произошедшее по конструктивным, производственным, технологическим или эксплуатационным причинам либо в результате внешних воздействий, заключающееся в повреждении, выходе из строя, разрушении технических устройств или сооружений, сопровождающееся нарушением производственного процесса или функционирования системы и связанное с угрозой для жизни и здоровья людей, материальными потерями, нарушениями окружающей среды.

- крупная авария, повлекшая за собой человеческие жертвы, значительный материальный ущерб и другие тяжелые последствия, считается *катастрофой*.

В результате аварий и катастроф с потенциально опасными объектами формируются негативные факторы для персонала, населения прилегающих территорий, окружающей природной среды, присущие рассматриваемому объекту. Взаимодействие негативных факторов с различными объектами приводит к ущербу. Угроза причинения ущерба некоторому объекту в пространственном аспекте имеет место в том случае, когда при реализации опасного явления он может оказаться в зоне действия его негативных факторов.

Анализ технического риска проводится в несколько этапов, предполагающих формирование соответствующих формализованных характеристик и моделей:

логическая причинная цепь предпосылок происшествия - логико-вероятностная модель развития рисковой ситуации, предполагает оценки частот инициирующих событий, аварийных ситуаций, сценарии развития аварии от типовых инициирующих событий до различных нежелательных исходов и т.п.;

модель собственно аварии – выявление и исследование негативных факторов происшествия, и степень их воздействия на внутреннюю и внешнюю среду объекта - модели оценки аварийных нагрузок на объекты, модели формирования и выхода за пределы объекта негативных факторов, модели воздействия негативных факторов на объекты и др.;

модели процессов распространения негативных, поражающих факторов;

модели трансформации негативных факторов при распространении в среде и при взаимодействии с объектами – модели взаимодействия негативных факторов с внешними объектами, модели расчета общего ущерба для исследуемых ОТС и др.

Оценка технического риска может быть проведена по формуле:

$$R_{\text{т}} = \frac{\Delta T(t)}{T_f},$$

где $\Delta T(t)$ – число реализованных опасностей за время t;

T_f – число идентичных технических систем и объектов, подверженных общему фактору риска f.

Приемлемый технический риск – это риск, который допустим и обоснован, исходя из социально-экономических соображений – ради возможной выгоды общество готово пойти на этот риск. Нормирование риска, установление приемлемого уровня проводят в различных формах:

- для риска аварий – в виде предельно допустимой вероятности аварии в год на определенную наработку технической системы;

- для риска воздействия негативных факторов на людей – предельно допустимая вероятность воздействия на 1 чел. в год;

- для социальных последствий – предельные уровни последствий для персонала и населения.

Исходя из приемлемого риска, устанавливают технические требования по безопасности к конструкции, а также требования по устойчивости к опасным техногенным явлениям, таким как удары, ударная волна, термические нагрузки, а также и природным явлениям - ветровая нагрузка, сейсмостойкость.

Предельно-допустимый уровень технического риска для России, учитывая уровень ее социально-экономического развития, обычно рекомендуют принимать в диапазоне от 10^{-4} для функционирующих объектов до 10^{-5} для вновь строящихся объектов в год [16].

Возможные риски **в зависимости от места возникновения** (например, для предприятия) условно можно разделить на две большие группы (табл. 5.2) – внешние и внутренние [17]. Категории внешнего риска по своей сути не зависят от предприятия, однако имеют непосредственную связь с деятельностью последнего (ближняя внешняя среда).

Категории внутреннего риска, как следует из определения, формируются по центрам образования затрат, и могут также быть частично обусловлены внешними причинами.

Понятие риска включает в себя, по крайней мере, три элемента:

неопределенность события - возможно не единственное развитие событий;

потери - хотя бы один исход должен быть нежелательным. Потеря - непреднамеренный рост издержек в результате реализации опасности;

небезразличность - риск должен задевать определенного человека или организацию, которые стремились бы не допустить нежелательное для них развитие событий.

Анализ уровней риска можно проводить на основе графического представления (кривая риска – зависимость вероятности потерь от их величины, рис. 5.17). Величина риска оценивается вероятностью потерь (чем она выше, тем больше риск) и величина потерь (чем она больше, тем опаснее риск).

Анализ риска включает: идентификацию факторов риска и неопределенности, оценку их влияния на ожидаемые последствия решения, разработку мероприятий по снижению риска, анализ и мониторинг эффективности проводимых мероприятий и корректировка (при необходимости).

Таблица 5.1 – Классификация рисков на предприятии

Признаки	*Характеристики рисков*	
Фактор возникновения	***Политические риски***	Возникают в результате изменения политической обстановки, влияющей на предпринимательскую деятельность (закрытие границ, запрет на вывоз товаров в другие страны, военные действия и др.)
	Экономические (коммерческие) риски	Обусловлены неблагоприятными изменениями в экономике страны или организации (изменение конъюнктуры рынка, несбалансированная ликвидность, изменение управления и др.)
Характер учета	***Внешние риски***	**Внешнеэкономический риск.** Возникает в процессе взаимодействия с зарубежными партнерами по бизнесу и может быть вызван внутренними причинами партнера: остановка производства, резкий рост или падение цен из-за изменения затрат на производство и т.п. **Риск изменения рыночной обстановки** - двухсторонний. С одной стороны, это - участие предприятия в формировании рыночной конъюнктуры цен, а с другой - взаимоотношения предприятия с поставщиками оборудования, сырья, полуфабрикатов, покупателями готовой продукции **Природно-климатический риск.** Влияет на предприятие через технологию производства (ее требования) или результаты производства, связанные с необходимостью компенсации ущерба, нанесенного природной среде **Информационный риск** связан с неправильной организацией информационных потоков внутри предприятия, ошибочным или недостоверным сведениям, как поступившим на предприятие, так и вышедшим за его пределы по разным причинам **Научно-технический риск**, как правило, связан с инновационной деятельностью предприятия, с приобретением им патентов, лицензий, новой техники и технологий **Нормативно-правовой риск** - внутренний в части приказов, решений, нормативов, распоряжений, издаваемых внутри организации
	Внутренние риски	**Транспортный риск**. Является частично внешним, если предприятие пользуется услугами сторонних транспортных организаций **Снабженческий риск**. Становится внешним, когда

		возникает по вине поставщиков материальных ресурсов и оборудования при невыполнении сроков, объемов, ассортимента, цены или качества поставляемых ресурсов **Производственные риски** **Риски этапа хранения готовой продукции** **Сбытовой риск**. Возникает за пределами производственной фирмы при отказе покупателя от продукции не по вине ее производителя. В этой части он относится к категории внешнего риска **Управленческие риски**
	Факторы производства	**Труд**. Можно детализировать по категориям персонала, его половозрастным группам, квалификации, стажу работы и другим признакам **Средства труда**. Средства труда для выявления рисков можно рассматривать не только в общепринятой детализации - по их видам, что имеет большое значение для расчета ущерба от его возникновения, - но и в разрезе их возрастного состава, степени износа и годности. Такое деление средств труда на группы облегчает определение возможности и вероятности возникновения внутреннего риска предприятия **Предметы труда**. Целесообразно анализировать по видам, по отнесению на конкретные виды продукции, по величине расхода в различных структурных подразделениях предприятия, по причине образования потерь и т.д.
Характер последствий	***Чистые риски***	Связаны с получением результатов решения
	Спекулятивные риски	Связаны с потерей выгоды от принятых решений
Время возникновения	***Ретроспективные риски***	Решения, основанные на предыдущем опыте (состоявшихся решениях)
	Текущие риски	Связаны с оценкой текущей ситуации
	Перспективные риски	Связаны с качеством прогнозирования ситуации

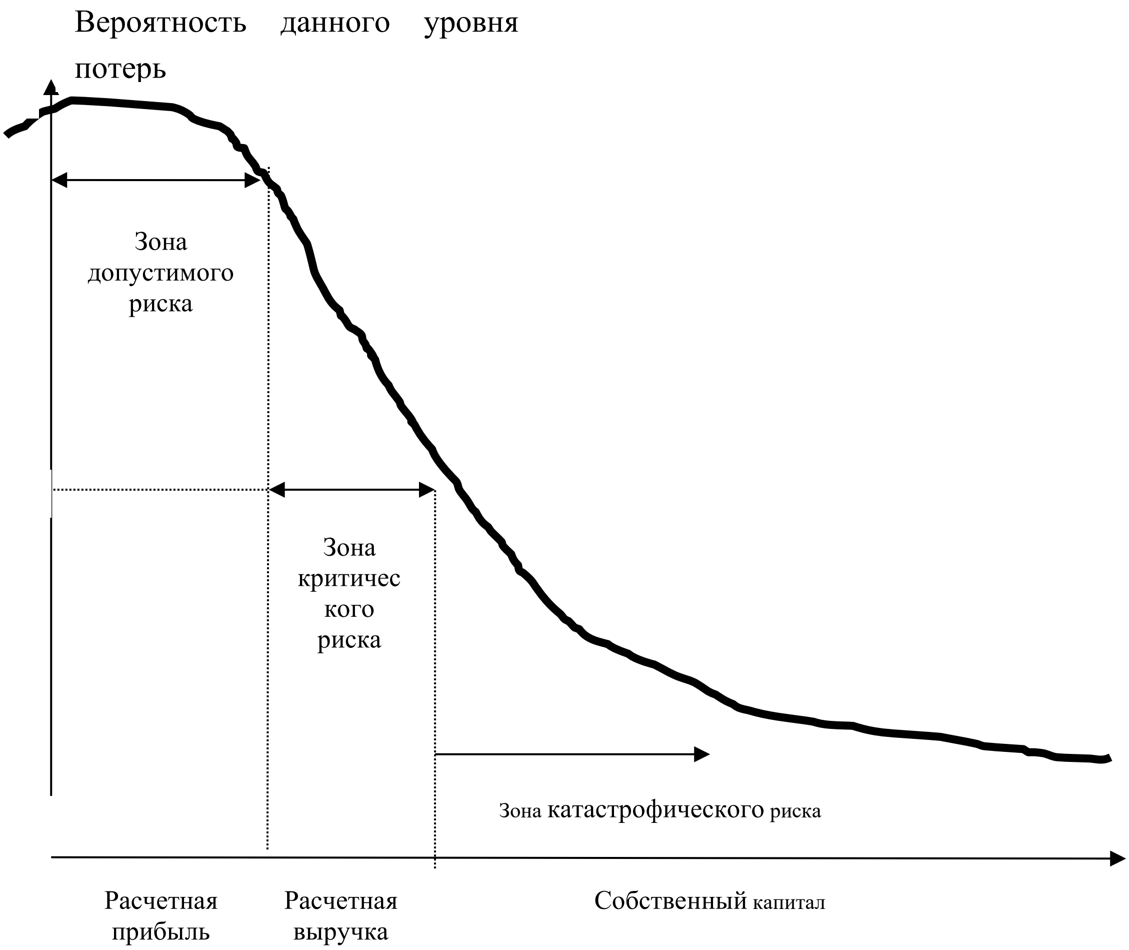


Рисунок 5.17 – Кривая риска

Количественная оценка факторов риска предусматривает исследование возможных потерь и соответствующих издержек для их предотвращения. Издержки, возникающие в результате риска, можно отнести к трем категориям:

1) материальные ценности;

2) экономические и социальные упущения в результате эффекта излишнего уклонения от потенциальных потерь и неполучения потенциальных выгод из-за неучастия в сферах деятельности и проектах необоснованно (интуитивно) оцененных как высокорисковые;

3) расходы (ресурсы), затрачиваемые на управление рисками (себестоимость управления рисками).

Все три категории издержек могут быть существенно снижены за счет правильного использования средств управления рисками - должна быть создана система, которая будет систематически снижать потери по всем категориям для организации.

Снижение себестоимости рисков включает в себя:

- уменьшение случайных потерь, которые не возмещаются страхованием или из других источников;
- уменьшение страховых премий и других платежей за использование резервов и страховых фондов;
- сокращение расходов на превентивные мероприятия по снижению или предотвращению случайных потерь;
- уменьшение административных расходов на систему управления рисками.

Риск может быть объектом сделок. Если состояние неопределенности уменьшает благосостояние не расположенных к риску агентов, они готовы заплатить тем экономическим агентам, которые возьмут на себя риск. В этом заключается основа страхового контракта.

При решении задач управления принято решать проблему риска путем страхования, что определяется двумя критериями.

Случайный характер потерь (событие, приводящее к потерям, не должно быть предопределенным или преднамеренно подстроенным). Например, можно застраховать дом, стоящий в лесу, от лесного пожара. Однако, если хозяин дома сам подожжет свой дом с целью его уничтожить, или, если лесной пожар уже начался, то дом застраховать нельзя.

Финансовый характер потерь (потери должны быть измеримы и возместимы деньгами). Существуют риски, не соответствующие этому критерию.

Для ***страхования рисков*** используются стандартные условия:

персонального риска - возможность материальных и/или эмоциональных потерь, которые может понести личность: смерть, травма, потеря трудоспособности, болезнь, безработица и др.;

имущественного риска - возможность материальных потерь в результате повреждения, разрушения или хищения того или иного имущества, принадлежащего человеку или организации;

риска ответственности - возможность экономических потерь в результате того, что человек или организация будут в законном порядке признаны виновными в нанесении ущерба другим лицам и организациям. В этом случае виновник обязан и будет принужден судебным исполнителем возместить финансовые последствия этого ущерба;

риска несоответствия - возможность того, что продукция или услуга фирмы не соответствует стандарту или договору. Неустойки, моральный и материальный ущерб, проистекающие из этого, можно застраховать.

Запуск любого бизнеса - это риск. Предприниматель должен детально знать все участки и этапы своего бизнеса: управление, маркетинг, контрактинг, персонал, обслуживание и обновление оборудования, все разветвления в возможностях применения и развития производимой продукции или услуг. И одна из главных задач, особенно вначале, - хорошо осознавать совокупность рисков, характерных для каждого участка и этапа.

Решения в условиях неопределенности. Ситуация неопределенности характеризуется тем, что вероятность наступления результатов решений или событий в принципе неизмерима (не может быть установлена). Условия неопределенности, имеющие место при любых видах деятельности обусловлены тем, что системы в процессе своего функционирования испытывают влияние целого ряда причин. Последние различаются:

- *по времени возникновения неопределённости* (ретроспективные, текущие и перспективные). Необходимость учёта фактора времени при оценке эффективности принимаемых решений обусловлена тем, что как эффект, так и затраты могут быть распределены во времени. Равные по величине затраты, по-разному распределённые во времени, обеспечивают неодинаковый полезный результат того или иного вида (технологический, экономический, социальный, политический и т.д.);

- *по факторам возникновения неопределённости* (технологические, экономические, политические, природные). Каждый вид неопределенности характеризуется некоторой последовательностью факторов, исследование которых позволяет снизить влияние неопределенности на качество управленческих решений. Например, природная неопределенность описывается совокупностью факторов, среди которых могут быть: климатические, погодные условия, различного рода помехи (атмосферные, электромагнитные и другие);

- *влиянием внешней среды*.

- *наличием конфликтных ситуаций*, в качестве которых могут быть: стратегия и тактика лиц, участвующих в том или ином конкурсе, тендере, аукционе; действия конкурентов, ценовая политика монополистов, олигополистов и т.п. Особенную группу составляют задачи, в которых рассматриваются проблемы несовпадающих интересов и многокритериального выбора оптимальных решений в условиях неопределённости.

Наличие неопределённостей значительно усложняет процесс выбора оптимальных решений и может привести к непредсказуемым результатам. На практике при проведении экономического анализа во многих случаях пытаются не замечать имеющуюся неопределённость и действуют (принимают решение) на основе детерминированных моделей. Иначе говоря, предполагается, что факторы, влияющие на принимаемые решения, известны точно. На самом деле, действительность часто не соответствует таким представлениям. Поэтому политика выбора эффективных решений без учёта неконтролируемых факторов во многих случаях приводит к значительным потерям экономического, социального и иного содержания

Неопределенности следует рассматривать как явление и как процесс. Такое разделение позволяет применить разные методики для уменьшения общей неопределенности в деятельности руководителя.

Как явление неопределенность — это набор нечетких или размытых ситуаций, взаимоисключающей или недостаточной информации. Как процесс неопределенность - это деятельность некомпетентного работника, принимающего ошибочные решения. В практике управления неопределенность используется как единое целое, в котором явление создается процессом, а процесс формирует явление.

В зависимости от источника возникновения неопределенности разделяются на две группы: объективные и субъективные. Объективные не зависят от субъекта, разрабатывающих или реализующих управленческие решения, при этом источник неопределенности оценивается как внешний. Субъективные возникают из-за профессиональных ошибок, упущений, несогласованности субъектов внутри организации. Субъективные неопределенности составляют основную часть суммарных неопределенностей, поэтому специалисту нужно научиться снижать субъективные неопределенности – управлять ими.

Неопределенность проявляется в параметрах информации на всех стадиях ее обработки и трудно измерима. Обычно ее оценивают качественно (пороговым способом - больше/меньше, или сравнительным – выше/ниже). Редко она оценивается в процентах. Специальные организационные приемы позволяют значительно снизить уровень неопределенности.

В случаях, когда нет ни объективных, ни субъективных оценок вероятностей исходов, экономисты предлагают два *критерия выбора*. Первый требует выбора такой линии поведения, которая даже в самом худшем варианте даст результат, который будет наилучшим из всех неблагоприятных исходов, – такое поведение называют *стратегией максимина*. Второй означает выбор варианта, который способен дать при наилучшем стечении обстоятельств максимальный результат (*оптимистическая стратегия*).

Виды неопределенности существенно зависят от уровня управления: [16]

- на низшем уровне наиболее часто встречающиеся неопределенности носят стохастический характер. Здесь действуют типичные механизмы случайности – ошибки измерения, поломок, отказы и др. Основные источники информации – слухи и сведения, полученные из СМИ;

- на среднем уровне управления более характерна так называемая «природная неопределенность», источник возникновения которой возможные конфликтные ситуации (поведенческая неопределенность). Руководители среднего уровня действуют, в основном, опираясь на текущую внутриорганизационную информацию, слухи, интуицию и личный опыт. Значимую роль играет информация из официальных источников, справочников, нормативных документов, должностных инструкций. Такой подход сковывает личную инициативу, увеличивает роль внешних мнений;

- на высшем уровне управления преобладает неопределенность, возникающая из-за большого количества влияющих факторов, учесть которые не представляется возможным. Кроме того релевантные факторы нивелируют влияние друг друга на последствия решения. Значимым на высшем уровне остаются и поведенческие факторы неопределенности. Руководители высшего уровня предпочитают доверять объективным научным данным, а также личным наблюдениям и опыту.

Разработка управленческих решений не есть однократный волевой акт руководителя. Решение сложных проблем требует анализа проблем, исследования последствий различных альтернатив и, как правило, ограничено временем и ресурсами.

Методы измерения ценностей (целей). Эффективность управленческого решения разделяется по уровням его разработки и реализации, охватом людей, организаций. Поэтому следует рассматривать как эффективность разработки решения, так и эффективность реализации решения (в соответствии с подпроцессами разработки решения). Оценивая эффективность решения правильно приводить две оценки [18]:

априорную (теоретическую) – составляет основу для выбора варианта решения для реализации;

апостериорную (фактическую) – определяет направленности управленческих операций по результатам реализации решения.

Объективные факторы эффективности решения включают качество ресурсов организации (ЛПР) и качество внешних условий. Субъективные факторы – характеризуют личность ЛПР (рассудительность, инициатива, опыт, профессионализм и др.) или качество коллегиального органа управления (процедуры, интересы, лимит времени и др.).

Принципы и методы оценки полезности решения В основе понятия полезности лежит *потребность* – несоответствие между субъективным представлением ЛПР о желаемом и действительным состоянием системы. Такую оценку ЛПР выносит для себя перед ответственным моментом – принятием решения о том, какую из альтернатив в операции предпочесть. Именно эта оценка и является рациональной основой для осмысленного выбора. С этой точки зрения ***эффективность решения*** *– это степень соответствия ожидаемого уровня полезного эффекта для ЛПР от проведения операции желаемому (идеальному в представлении ЛПР) уровню полезности*. Суждение об эффективности решения может быть вынесено различными способами. Например, в качественной шкале оно может принимать несколько градаций: положительный эффект (полезно), нулевой эффект (безразлично), отрицательный эффект (вредно). При этом второй стороной выступают совокупные затраты, понесенные для получения полезного эффекта, представляющие собой экономическую оценку или «цену альтернативы». Таким образом, каждая альтернатива характеризуется как минимум двумя оценками: уровнем полезности и ценой (величиной затрат).

И тогда мы вновь убеждаемся, что принять решение – значит сделать обоснованный выбор среди имеющихся альтернатив, т.е. предпочесть определенную альтернативу. Предпочтение – это вполне субъективное мнение конкретного человека, выраженное для вполне определенной цели и во вполне объективных условиях. Нет предпочтений без субъекта. Нет предпочтений безотносительно целей. Нет предпочтений без конкретизации условий достижения цели. Нет субъектов или объектов хороших или плохих в каком-то абсолютном смысле слова. Поэтому справедлива аксиома теории принятия решений: «Каждое решение может считаться наилучшим только для конкретной задачи, только в конкретных условиях и только для конкретного ЛПР».

Первым шагом на пути решения поставленной задачи будет ***выявление и измерение предпочтений ЛПР***. С этой целью ЛПР предлагают по определенным правилам сравнить элементы множества объектов решения. В результате от ЛПР можно получить систему суждений – так называемую систему предпочтений ЛПР. Ее можно воспринимать как систему его личных психологических установок, заставляющих его в ситуациях выбора совершать тот или иной определенный поступок. Типовые поступки:

- уверенный выбор только одного из объектов среди множества, так как ЛПР считает именно этот объект лучшим по сравнению со всеми другими;

- уверенный выбор нескольких объектов среди представленных, причем все выбранные объекты ЛПР считает «одинаковыми», т.е. не обладающими преимуществами друг перед другом и одновременно лучшими по сравнению со всеми остальными, невыбранными объектами.

Предпочтения как первопричина поступков – результат сложной психической деятельности человека. При формировании предпочтения сознание человека ориентируется на объективные и субъективные факторы, как эмоциональные, так и рациональные их компоненты. Ранее мы рассмотрели объективные факторы и основные методы их анализа. Остановимся на некоторых субъективных факторах.

Рациональная (открытая) компонента системы предпочтений формируется как система условных рефлексов в процессе жизни индивида. На нее влияют образование, опыт, окружение, специфика профессиональной деятельности. Эта составляющая предпочтений более «молода», быстро меняется под влиянием окружающей среды. Поэтому она более индивидуальна и специфична для людей каждого конкретного социального статуса. Подобных фрагментов психической деятельности обычно совсем немного, и индивид признает их открыто, подчеркивая тем самым свою индивидуальность. И, хотя влияние таких элементов, как правило, ничтожно мало, именно они придают решениям индивида своеобразие в силу особенностей, присущих конкретной личности.

Эмоциональная компонента системы предпочтений более «старая». Она сформировалась как результат работы головного мозга человека. Ее истоки в нравственных, моральных, религиозных, этических традициях, чувствах и потребностях того народа, той расы, к которой принадлежит индивид, поэтому они оказываются наиболее устойчивыми и «влиятельными». Индивид не в силах управлять механизмами психической деятельности. Это самые мощные, но и самые незаметные факторы предпочтений.

Таким образом, именно «тайные» и «открытые» особенности являются отпечатком социальной среды, в которой достаточное время пребывает индивид.

Будем полагать, что ЛПР может сравнить между собой любые два элемента из множества предъявленных объектов ($d_i, d_j \in D$), и имеет место один из трех альтернативных вариантов суждения (полнота предпочтения):

- элемент d_i предпочтительнее элемента d_j;
- оба предъявленных элемента одинаково предпочтительны;
- элемент d_j предпочтительнее элемента d_i.

Кроме того, идеальные предпочтения ЛПР на предъявленном множестве элементов должны обладать свойством направленности (транзитивности).

Существование целей требует представления о системе ценностей. В экономике используются три тесно взаимосвязанных понятия ценности, базирующиеся на оценках стоимости:

- меновая ценность (меновая стоимость);
- потребительская ценность (потребительская стоимость);
- расчетная ценность (расчетная стоимость).

Меновая (*рыночная*) ценность блага выражается количеством других благ, на которые можно обменять единицу данного блага. Это количество удобно записывать в виде менового отношения. Одна из рыночных ценностей блага есть его денежная цена. Ввиду того, что прямой обмен благ происходит редко, она служит общим знаменателем ценностей. Использование денег в качестве ценового эквивалента усложняется неустойчивостью денежной единицы. Цивилизованный мир признает, что постоянные единицы для измерения времени, веса, длины и других величин абсолютно необходимы для прогресса науки, техники и промышленности.

Но лишь немногие, помимо экономистов, представляют себе в полной мере последствия изменчивости денежной единицы.

Под *потребительской ценностью* понимается индивидуальная субъективная полезность. Это – значение, которое индивид придает вещи сравнительно с другими вещами по отношению к своим личным желаниям и потребностям.

Очевидно, рыночная ценность совершенно отлична от потребительской. Оценка полезности берет начало в вопросе: будет ли данное распределение ресурсов удовлетворять спрос в большей мере, чем какое-либо альтернативное распределение? Так как экономическая теория ценности отвергает абсолютные ценности и допускает лишь относительные, то максимальная полезность означает «наилучшее в данных обстоятельствах». Такому максимуму присваивается самое высокое значение по шкале полезности. Меньшие значения присваиваются тем распределениям, которые либо поглощают больше ресурсов для данного удовлетворения, либо приносят меньше удовлетворения для данных ресурсов.

Расчетная ценность есть предположение о рыночной ценности, по которой можно купить или продать предмет. Или же это предположение о возможной индивидуальной полезности при выборе между различными благами. Оценка товаров при обложении налогом или при обмене есть расчет возможной цены. Сметные калькуляции, используемые для предсказания издержек производства товара, также суть подобные расчеты. Из этого видно, что расчетные ценности не имеют существенной связи с какой-либо теорией экономической ценности.

И рыночные ценности и полезности – понятия эмпирические. И поэтому, они обладают значительной определенностью по сравнению с другими видами ценностей.

Рыночные ценности измеряются по шкале отношений. Порядковая шкала (со слабым упорядочением) остается базисом для измерения полезности. Ни шкала рыночной ценности, ни шкала полезности неустойчивы во времени. Обе обнаруживают случайные колебания и долговременные тенденции, причем их долговременные тенденции часто кореллируют между собой.

Главное различие между рыночной ценностью и полезностью заключаются в том, что первая выражает общепризнанную систему ценностей (исключая случаи монополии), а вторая – нет. Иными словами, *рыночная ценность есть межличностное понятие о ценности*, поскольку все люди применяют один и тот же эмпирический метод для ее нахождения. Вследствие этого *рыночные ценности передаваемы* (*трансферабельны*): можно отдать свой дом, и его рыночная ценность от этого нисколько не изменится. Напротив, *потребительские ценности непередаваемы* (*нетрансферабельны*): даже отдав дом, нельзя отдать удовольствие от обладания им.

Оказывается, что рыночные ценности имеют больше технически желаемых свойств, нежели любая другая система ценностей. Поэтому рыночная оценка распространяется на такие неколичественные понятия, как лояльность служащего, престиж фирмы, торговая марка. Пока не изобретут лучшей системы ценностей, тенденция эта будет, несомненно, усиливаться.

Ввиду универсальности рыночных ценностей можно выделить типовые количественные критерии, характерные для производственного предприятия. Поскольку потребительские полезности имеют индивидуальный характер, для их оценки можно рассмотреть лишь некоторые практические рекомендации.

Можно предложить множество процедур выявления предпочтений. Каждая из них обладает определенными характеристиками качества такими, как точность, надежность, оперативность, сложность получения и др. Рассмотрим некоторые наиболее распространенные приемы (в порядке возрастания точности измерения предпочтений и сложности получения результата).

Сортировка. ЛПР должно разделить элементы множества объектов на некоторые предложенные классы. Например, сценарии благоприятные и неблагоприятные. Сортировка требует от ЛПР незначительной сосредоточенности, но высокой профессиональной подготовленности, так как объекты сравниваются по совокупности свойств. Поэтому оценки могут оказаться не вполне надежными. Сортировка дает результаты в номинальной (классификационной) шкале.

Попарное сравнение. Сравнительно простой способ выявления элементарных предпочтений. Чаще всего при попарном сравнении ограничиваются простой констатацией того, что один из элементов предпочтительнее другого или объекты равноценны. В этом случае попарное сравнение есть измерение в номинальной шкале (например, 1 – предпочтение первого элемента над вторым, 0 – непредпочтительность, 0,5 – равноценность элементов). В общем случае попарное сравнение не дает полного упорядочения элементов, поэтому иногда, когда можно выявить степень предпочтения, используют порядковые или близкие к интервальным шкалы.

Ранжирование. Это способ выражения предпочтений, заключающийся в расположении предъявленных элементов в порядке возрастания (прямое ранжирование) или убывания (обратное ранжирование) их предпочтительности. При ранжировании каждому элементу в упорядоченном ряду приписывают натуральное число, называемое рангом элемента. Таким образом, при прямом ранжировании более предпочтительному элементу будет приписано меньшее натуральное число, а при обратном – большее. Для упрощения процедуры иногда допускают нестрогое ранжирование. В этом случае несколько элементов могут занимать одинаковое место в ранжировке по предпочтительности, и им будет приписан одинаковый ранг. Ранжирование – это измерение в порядковой шкале.

Элементарные суждения в виде результатов попарного сравнения, сортировки и ранжирования выражаются всегда в качественных шкалах.

Балльное оценивание. Заключается в том, что каждому элементу из множества предъявленных ставят в соответствие число (балл), характеризующее меру его предпочтительности перед другими. Оценивание рекомендуется проводить тогда, когда предпочтительность элемента устанавливается по строгим правилам, не допускающим неоднозначности.

Любая оптимизационная задача формирования системы предпочтений предполагает заданной целевую функцию – количественный показатель качества заданных альтернатив выбора [11]. В качестве такого показателя обычно выступает какая-нибудь общепринятая шкала физических или экономических измерений.

Достаточно адекватное описание цели одной шкалой измерений возможно, когда управляемый объект сравнительно однороден, и его связи с другими объектами можно не учитывать. Расширение модели путем включения существенных связей, как правило, усложняет цели управления настолько, что их требуется синтезировать по многим показателям качества альтернатив выбора, что возможно либо на основе обнаруженной взаимозаменяемости показателей, либо методом экспертных оценок.

Если множество альтернатив удовлетворяет некоторым требованиям, по ним можно построить функцию полезности и принять ее в качестве целевой функции. Использование соответствующих количественных шкал измерений приводит к векторной задаче оптимизации: «максимизировать вектор-функцию $\boldsymbol{F(x)=(f_1(x), \ldots, fn(x))}$ по $\boldsymbol{x \in M}$». Математически эта задача не имеет смысла, так как векторный максимум не определен. Его смысл определяется в итоге неформального анализа и для различных задач может быть различным. Выбор для оптимизации одного критерия $\boldsymbol{f_i(x)}$ определяется как субоптимизация.

В практике управления используется несколько видов векторной оптимизации – наиболее распространенные: оптимум по Парето, метод уступок, метод штрафных функций, равновесие по Нэшу.

Оптимальность по Парето относительно векторного критерия означает, что решение не может быть улучшено ни по одному критерию $\boldsymbol{f_i(x)}$ без ухудшения по какому-либо другому из них. При определенных условиях отыскание оптимума по Парето может сводиться к обычной задаче максимизации взвешенной суммы частных критериев.

Метод уступок состоит в выделении главного показателя $\boldsymbol{f_i(x)}$ и фиксировании допустимых отклонений $\boldsymbol{\Delta_j}$ от оптимумов для остальных критериев $\boldsymbol{f_j(x),\ j \neq i}$. Тогда задача превращается в обычную задачу оптимизации по критерию с дополнительными ограничениями.

Когда введение дополнительных жестких ограничений не имеет смысла, используется *система штрафных функций* $\boldsymbol{\varphi_j}$, монотонно зависящих от $\boldsymbol{\Delta_j}$. В этом случае задача сводится к поиску решения, минимизирующего сумму штрафов.

Отличительной чертой целенаправленной системы является характер целей ее подсистем $\boldsymbol{f_i(x)}$. Если в системе управление централизовано, то оптимальным решением в целом будет некоторый оптимум по Парето. При децентрализованном управлении (различия в целевых функциях) реализуемым можно считать лишь *равновесие по Нэшу*, которое при фиксированных действиях партнеров дает максимум каждой подсистеме. Такое равновесие хуже для системы в целом, чем оптимум по Парето.

Более общей целью системы является ее *выживание* – принадлежность состояния системы некоторому заданному множеству возможных состояний при всех возможных изменениях окружающей среды. Так как изменения среды обычно стохастические, то возникает оптимизационная задача максимизировать вероятность выживания. содержательный анализ системы позволяет с требуемой степенью адекватности выделить существенные факторы, определяющие выживание системы, и по ним построить векторную задачу оптимизации.

Методы измерения показателей эффективности. Экономические цели в принципе измеримы. Другие цели (включающие психологические, этические, экологические и др. ценности) менее поддаются измерению. Поэтому для решения задачи соизмеримости различных ценностей необходимо уяснить роль измерений.

Измерение можно определить как акт присвоения определенной меры (знака) вещам (предметам или событиям) согласно некоторой системе правил. В случае установления взаимно – однозначного соответствия (совпадение структуры и функций) объекта измерения и меры говорят об изоморфизме шкал измерений. В случае соответствия объекта измерения и меры однозначного лишь в одну сторону – реализуется гомоморфное отношение подобия.

Для измерения важны три свойства: *тождество, ранговый порядок и аддитивность*. Они могут быть выражены следующими аксиомами [18]:

- **тождество**:

1) либо $A = B$, либо $A \neq B$ (тождество - различие);

2) если $A = B$, то $B = A$ (симметрия);

3) если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$;

- **ранговый порядок**:

4) если $A > B$, то $B < A$ (упорядочивание);

5) если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$ (транзитивность);

- **аддитивность**:

6) если $A = P$ и $B > 0$, то $A + B > P$;

7) $A + B = B + A$;

8) если $A = P$ и $B = Q$, то $A + B = P + Q$;

9) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Эти аксиомы позволяют выделить четыре уровня измерения: *шкалы наименований, порядка, интервалов и отношений*. Чем выше уровень шкалы, тем больше статистических и математических действий можно выполнять над полученными при измерении величинами. Выбор шкалы измерений проистекает из известного принципа Оккама (бритва «Оккама»): «Не умножайте сущности без необходимости!». Нет необходимости излишне тратить время и другие ресурсы на проведение сложных измерений, если требуется сделать выводы, которые легко проистекают из сравнения результатов измерений в менее совершенных шкалах.

Шкалы наименований. Логическая основа содержится в аксиомах 1, 2, 3. построить шкалу наименований значит просто использовать совокупность элементов (идентификаторов) как название или классификацию.

Аксиома 1 гласит, что два элемента либо тождественны, либо различны. Свойство тождества используется для порождения бесконечного набора различных названий, когда каждый отдельный предмет должен иметь различимое обозначение. Присваиваемый идентификатор – это просто легкий способ распознавать различия.

Шкалы наименований, по существу, качественны, однако они допускают некоторые статистические операции: можно сосчитать число индивидов каждого класса и определить частоты; можно найти наиболее многочисленный класс.

Шкалы порядка (ранговые). Усиление шкалы наименований связано с появлением способа сравнивать два предмета по одному общему признаку (свойству, цели). Порядковые шкалы позволяют путем сравнения результатов измерений установить, что один объект лучше, важнее, предпочтительнее другого или ему равноценен. Упорядочивающее отношение (аксиома 4) асимметрично. Если сравнить, таким образом, каждую пару вещей в длинном перечне и если каждая тройка вещей обнаруживает транзитивность (аксиома 5), то можно построить *шкалу простого порядка*.

Если использовать в аксиомах отношения «≥ ≤», т.е. более слабые условия предпочтения, можно построить *шкалы слабого и частичного порядка*.

Шкалы порядка допускают те же статистические операции, что и шкалы наименований (получение частот и мод). Кроме того, ранговый порядок позволяет вычислять моменты более высокого порядка (медианы, коэффициенты корреляции и т.п.). Элементы на шкалах порядка не обязательно располагаются равномерно по шкале. Поэтому арифметические и все другие статистические операции, кроме перечисленных выше, исключаются.

Шкалы интервалов. Такие шкалы, иначе называемые равномерными, применяются для отображения величины различия между характеристиками объектов. Для этого необходимо стандартизировать единицу предпочтения. Поэтому отношение одного измерения к другому меняется вместе с типом используемой шкалы (как следствие выбора стандартной единицы и нулевой точки). Сложение величин на шкале не имеет смысла, ибо сумма изменяется в зависимости от положения нуля.

Шкалы интервалов не обладают свойством аддитивности (аксиомы 6 - 9). Это значит, что к ним не нельзя применять ни одно из основных арифметических действий. Если, однако, выбран произвольный нуль, то разности на таких шкалах могут рассматриваться как абсолютные величины, обладающие свойством аддитивности.

Все статистические операции, имеющие смысл для шкал наименований и порядка, имеют смысл и для шкал интервалов. Кроме того, применимы процедуры для отыскания математического ожидания, коэффициента асимметрии и смешанных моментов.

Шкалы отношений. Шкала отношений имеет все свойства других шкал плюс свойство аддитивности. Изменение шкалы не изменяет отношения одного измерения к другому. Иначе говоря, шкала величины y подвергается лишь преобразованию $y = cx$, где c – любой ненулевой скаляр. Нуль шкалы – «естественен». Все физические величины измеряются по шкалам отношений.

Для шкал отношений допустимы все арифметические и статистические операции.

Шкалы наименований и порядка относятся к качественным шкалам. Шкалы интервалов и отношений – количественные шкалы, которые позволяют устанавливать количественные соотношения между объектами.

Преобразование шкал. Допустимое преобразование шкалы можно представить как функцию, однозначно преобразующую значения одной шкалы в значения другой. Допустимым оно будет в том смысле, что для ЛПР безразлично, измерять ли объекты в той или иной шкале, если выводы из измерения для практики принятия решений будут одними и теми же.

Шкалы наименований позволяют использовать практически любые функции преобразований и, поэтому являются наименее совершенными.

Порядковые шкалы допускают использование любого монотонного преобразования. Это может быть прибавление константы, взятие логарифма, возведение в квадрат, извлечение положительного квадратного корня и т.д.

Интервальные шкалы допускают кроме того линейные преобразования вида $y = ax + b$ $(a \neq b)$.

Шкалы отношений допускаю лишь преобразование масштаба вида $y = ax$ $(a \neq 0)$.

ПРАКТИКУМ

Задание 1

АВС-анализ. В основе метода лежит закон В. Парето – 80% значимости факторов приходится на 20% из них («закон 80-20»), поэтому именно этим 20% следует уделить приоритетное внимание. Для этого все факторы делят на три группы:

- группа А – наиболее значимые (80% веса). Они заслуживают повышенного внимания и контроля;

- группа В – факторы средней важности (15% веса, или 80% оставшихся). Они требуют внимания изредка;

- группа С – малозначимые факторы (5% веса). Им не стоит уделять много сил и времени.

Для выделения групп строится две диаграммы – распределение факторов по уровню влияния и кумулятивная кривая (накопление уровня влияния факторов). С помощью последней проводится разделение факторов на группы А, В, С.

Пример: выбор материалов для производства (табл.)

Таблица

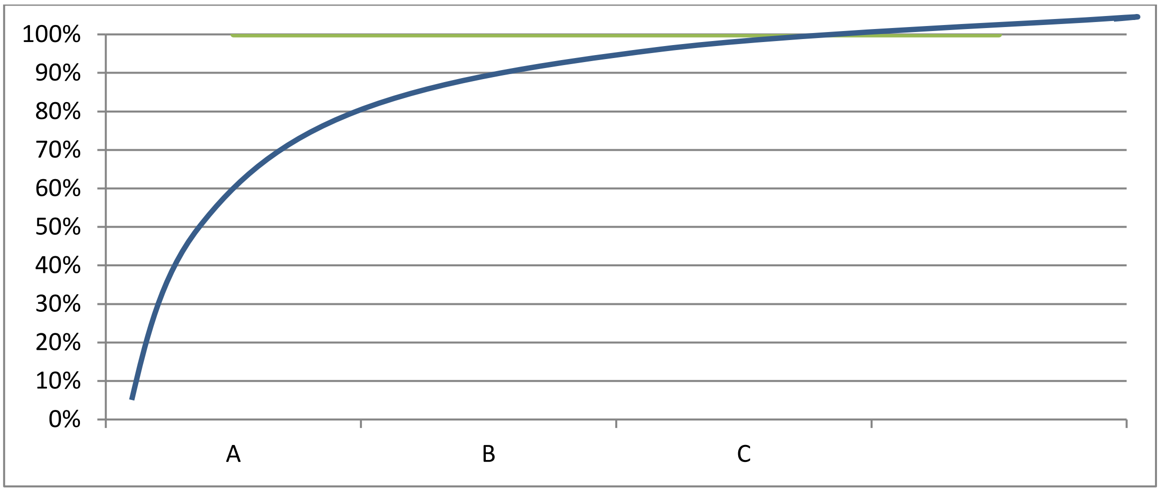
Наименование материала	*Цена 1т, тыс. руб.*	*Масса, т*	*Стоимость, тыс. руб.*
A	1000	12	12000
B	2000	250	500000
C	560	5	2800
D	68	13	884
E	190	5400	1026000
F	40	320	12800
G	45	460	20700
H	600	4000	2400000
I	860	300	258000
J	700	350	245000
K	2100	135	283500
L	2500	140	350000
M	3500	4	14000
N	430	380	163400
O	135	18	2430
P	140	540	75600
Итого			5367114

Для применения метода ABC следует:

1) Расположить все характеристики материалов в порядке убывания стоимости;

2) Оценить нарастающим потоком долю каждого вида материала в общей стоимости;

3) Построить график прироста стоимости



Задание 2

Диаграмма Исикавы. Она представляет так называемый «рыбий скелет» проблемы. Принято выше оси располагать экзогенные (внешние) факторы, которые организация не может устранить самостоятельно, но должна учитывать при выборе решений. Ниже оси располагают эндогенные (внутренние) факторы, на которые организация может повлиять. Поэтому вариант решения формируется на основе устранения (минимизации) эндогенных факторов, а экзогенные выступают в качестве ограничений.

Задание 3

«Личный герб и девиз». Девиз и герб являются такими символами, которые предоставляют возможность человеку в предельно лаконичной форме отразить жизненную философию и свое кредо. Это один из способов заставить человека задуматься, сформулировать, описать и представить другим главнейшие стержни своих мировоззренческих позиций.

Последовательность формирования личного девиза и герба.

Дать ответ на вопрос «Кто я?»

Ответить на данный вопрос вы должны десятью разными словами или словосочетаниями (самодиагностика). Подчеркните первые три ответа (наиболее значимые по вашему мнению). Каждый из этих ответов наиболее точно отражает вашу самохарактеристику. Для каждого ответа может быть предложен символ или слово, воплощающие в форме знака внутреннее содержание характеристики.

Предложить девиз и герб

Развитие темы предполагает ответ на вопрос: есть ли среди вас кто-нибудь, принадлежащий к древним и знатным родам, имеющим свой девиз и герб? Если да – вам повезло, можно положиться на предков, если нет – считайте себя родоначальником, вы должны предложить своим потомкам ориентир, принципы деятельности. В идеале человек, разобравшийся в символике вашего герба и прочитавший ваш девиз, смог бы четко понять, с кем имеет дело.

Форма герба предполагает разделение всей поверхности на четыре поля: три в верхней половине и одно в нижней (рис.).

Рисунок. Схема полей герба

Левая часть (1) – мои главные достижения в жизни. Средняя часть (2) – как я себя воспринимаю, правая часть (3) – моя главная цель в жизни. Нижняя часть (4) – мой главный девиз в жизни.

В процессе формирования герба и девиза можно вспомнить тех людей, которые сыграли в вашей жизни значимую роль, их принципы и ценности, посоветоваться с вашими друзьями.

Формирование группы с общим символом или девизом

Гербы предлагаются для обсуждения. Каждый выбирает те гербы, символы и девизы, которые содержат похожие символы, девизы. В этом случае может быть предложен общий для группы символ, девиз, признак, ее объединяющий. Формирование общего символа или девиза может и не быть связанным с представленными гербами. Переход на более высокую ступень абстрагирование предполагает возможность или создания нового герба, либо предложения нового обобщающего символа.

4. Обсуждение результатов

Задание 4

«Мой портрет глазами группы». Цель работы: формирование взаимодействия и системы обратной связи в группе.

Организация работы. Из состава группы выбирается (по желанию) натурщик для формирования портрета.

Все остальные участники группы становятся художниками. Каждый из них на отдельном листе бумаги в течение 10 – 15 минут пытается создать портрет натурщика в духе психологического реализма. Это значит, что не обязательно стараться нарисовать глаза, нос, рот и другие части тела натурщика. Мы все должны создать психологический портрет человека, сидящего перед нами. Для этого можно использовать любые метафорические изобразительные средства – основной принцип: «Я его так вижу!». Это может быть цепочка ассоциаций, конкретный образ, отражающий что-то важное в натурщике (предмет, узор, орнамент, цвет и др.).

До окончания упражнения разговаривать и обсуждать процесс не разрешается.

Обсуждение портретов. Каждый художник передает свой портрет натурщику с комментариями.

Натурщик группирует портреты по своим признакам (выделив в них что-то, по его мнению, общее). Возле каждой пачки собираются их авторы. Задача: определить, что общего нашел натурщик в портретах и попытаться составить обобщенный образ на основе портретов из группы. Время 10 – 15 мин.

После завершения работы один из членов группы представляет обобщенные портреты с комментариями. Натурщик комментирует, насколько портреты совпадают с его личными представлениями о своей личности.

Задание 5

Все во всем – тест Гилфорда. Человеку предлагается реальный предмет как объект моделирования (фото, рисунок, название и др.) с целью определить его предназначение – цель моделирования по аналогии (предназначение). Задача испытуемого заключается в подборе самых разнообразных, неожиданных возможностей использования данного предмета не по его прямому назначению. Чем больше вариантов будет предложено, чем более нестандартными они будут, тем выше креативность человека, проходящего тест.

Варианты организации.

Группа рассаживается в круг. В процессе игры нельзя:

- возвращаться к уже прозвучавшим идеям (нужно фиксировать их);

- пропустивший ход – не давший своего предложения – выбывает из борьбы (м.б. после 2-3 штрафных баллов).

Группа делится на две подгруппы. Они соревнуются по количеству предложений

Примеры объектов для моделирования:

- мыльница;
- ножницы;
- зонтик;
- ложка;
- зеркало;
- нож;
- подсвечник;
- утюг;
- пуговица;
- канцелярская скрепка;
- банан.

Задание 6

Поиск аналогий.

Найти максимум свойств, качеств, объединяющих:

- солнце и электричку;
- зебру и матрац;
- осень и балет;
- мужчину и кофе;
- авторучку и ракету;
- любовь и Интернет;

Перефразировать следующие предложения, т.е. высказать идею другими словами и как можно ближе к оригинальному тексту:

- любви все возрасты покорны;
- не было бы счастья, да несчастье помогло;
- я так хочу, чтобы лето не кончалось.

Задание 7

Формула личности (математическая модель). Мы сталкиваемся с формулами в математике, физике, химии… попробуем описать себя, свои принципы, свой характер, взгляды на мир в виде формулы (знаковая модель). Вы можете предложить свои символы и условные обозначения, а можете использовать знакомые знаки (равенства, умножения, деления, скобок, сложения, вычитания, интеграла, бесконечности и т.д.).

Пример: учены в Англии открыли формулу счастья:

Счастье = P + 5xE + 3xH,

где P – личностная характеристика (мировоззрение, способность адаптироваться к новым условиям, переносить невзгоды);

E – это бытие (состояние здоровья, финансовая стабильность, дружба и др.);

H – индекс высших стандартов (самоуважение, амбиции, чувство юмора).

План семинара 1

1. Понятие модели
2. Частные задачи моделирования
3. Классификация моделей в соответствии с законом функционирования
4. Классификация моделей на основании преобразования свойств
5. Логические модели, пример
6. Материальные модели, пример
7. Образные модели, пример
8. Знаковые модели, пример
9. Функциональные модели, пример
10. Геометрические модели, пример
11. Математические модели, пример
12. Понятие системы
13. Обобщенная модель системы
14. Сопряжение моделей систем
15. Пространство сигналов (состояний), пример
16. Переходные процессы в системе, пример
17. Сложность системы
18. Управление системой – процесс

19. Управление системой – управленческая деятельность
20. Модель системы с управлением
21. Целевые функции, пример
22. Критерии достижения цели, пример
23. Обратная связь
24. Типы управления
25. Эффективность системы, пример
26. Устойчивость системы, пример
27. Запас устойчивости системы, пример
28. Надежность системы, пример
29. Модель самоорганизующейся системы, пример

План семинара 2

1. Условное моделирование – основные понятия и требования к моделям
2. Описание физических величин
3. Основные и производные физические величины
4. Степенной комплекс и его связь с размерностями физических величин
5. Понятие аналогии, умозаключение по аналогии
6. Аналогия математическая
7. Идеальное моделирование: примеры
8. Классификация математических моделей по уровням
9. Классификация математических моделей по характеру отображаемых свойств объекта
10. Классификация математических моделей по способу представления свойств объекта
11. Классификация математических моделей по форме представления свойств объекта
12. Основные этапы процесса математического моделирования
13. Содержательное описание процесса (системы)
14. Формализованная схема процесса (системы)
15. Использование математической модели
16. Математическая модель элемента системы: детерминистские и стохастические модели
17. Математическая модель взаимодействия элементов системы

18. Механизм обмена сигналами
19. Математическое подобие
20. Геометрическое подобие
21. Типовая запись математической модели системы
22. Вербальное, математическое и информационное представление математической модели системы
23. Общие свойства математической модели: линейность
24. Общие свойства математической модели: непрерывность (дискретность)
25. Общие свойства математической модели: детерминированность (стохастичность)
26. Общие свойства математической модели: стационарность
27. Модели с управлением
28. Преобразование неуправляемой модели в управляемую

Литература

1. Конспект лекций
2. Истомин Е.П., Соколов А.Г., Колычев В.В. Исследование систем управления: - учебник, ООО Андреевский изд. дом, 2013
3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. Изд. Наука, 1966
4. Губанов В.А. и др. Введение в системный анализ: уч. пособие, изд. ЛГУ, 1988
5. Дмитриев А.К., Мальцев П.А. Основы теории построения и контроля сложных систем.- Л. Энергоатомиздат.- 1988
6. Холл А.Д. Опыт методологии для системотехники /пер. с англ.- М., Сов. Радио, 1975

Задание на контрольную работу

1\. Дайте определение и приведите пример модели

№№ вар.	***Вид модели***
1	Логическая
2	Материальная
3	Образная
4	Знаковая
5	Образно-знаковая

6	Функциональная
7	Геометрическая
8	Функционально-геометрическая
9	Физическая
10	Формальная
11	Условная
12	Аналогичная
13	Математическая
14	Расчетная
15	Соответственная
16	Подобная
17	Аналоговая
18	Цифровая
19	Аналогово-цифровая
20	Символическая

2. Дайте определение системы и постройте обобщенную модель системы с управлением и обратной связью на примере объекта из списка

№№ вар.	***Объект для моделирования***
1	Студент группы
2	Сотрудник предприятия
3	Член семьи
4	Преподаватель кафедры
5	Пассажир метро
6	Пассажир такси
7	Постовой полицейский
8	Продавец магазина
9	Домашняя собака
10	Автомобиль
11	Телевизор
12	Магнитола
13	Утюг
14	Паяльник
15	Стационарный компьютер

16	Ноутбук
17	Планшетник
18	Телефон
19	Диван
20	Электрический чайник

3. Определите сходственность функций из списка

№№ вар.	*Функция 1*	*Функция 2*
1	$2z = x\cos 6y$	$u = 3v\cos 5w$
2	$4r = 6s\cos(5t + 11)$	$q = 8p\cos(9l + 2)$
3	$5g + 8c = 6g\,\mathrm{tg}(4 + 8t)$	$4q - 6b = q\,\mathrm{tg}(6t + 20)$
4	$\mathrm{y} = b_1 + b_2y_1 \ln b_3\, y_2$	$\mathrm{z} = c_2z_1 \ln b_3\, z_2 + c_1$
5	$\mathrm{g} = -b_2g_1 \ln e_3\, g_2 + b_1$	$\mathrm{x} = b_1c - b_2x_1 \ln b_3\, x_2$
6	$(8a + 5)r = 6\cos(10t - 1)$	$4s = \cos(4t + 11)$
7	$x = (5a + 8)x\cos(5t + 11)$	$4r = 6r\cos(8t + 7)$
8	$\mathrm{y} = c_1 + c_2y_1 \ln c_3\, y_2$	$g + a_1 = a_2g_1 \ln a_3\, g_2$
9	$z = (8 - 13c)z\,\mathrm{tg}(2b - 6t)$	$5g = 6g\,\mathrm{tg}(4 + 8t)$
10	$\mathrm{y} = b_1 + b_2y_1 \ln b_3\, y_2$	$6\mathrm{z} = a_2z_1 \ln a_3\, z_2 + a_1$
11	$\mathrm{y} = b_1 + b_2y_1 \ln b_3\, y_2$	$x = a_1 + a_2x_1 \ln a_3x_2$
12	$r = 25b\sec 5r$	$(3 + 15c)x = 5a\sec(8 - 11x)$
13	$12z = \sin^{-1}(2z - 5)$	$(2 + 4b)x = (4b + 2)\sin^{-1}($
14	$12 + g = b\,\mathrm{arc\,tg}(t - 5)$	$x = 6a\,\mathrm{arc\,tg}(2t + 5)$
15	$g + 8 = (1 + 16b)g\,\mathrm{tg}\,7t$	$5g + c = g\,\mathrm{tg}(4 - t)$
16	$\mathrm{y} = b_1 + b_2y_1 \ln b_3\, y_2$	$6\mathrm{a}_1\mathrm{z} = a_2z_1 \ln a_3\, z_2$
17	$4s = \cos(4t + 11)$	$(1 - 5a)x = 2b\cos 6t$
18	$g = 6a\,\mathrm{arc\,tg}(2t - 5)$	$5g + 8 = 6b\mathrm{arc\,tg}\,18t$
19	$z = (4\mathrm{a} + 7)\cos(7 - t)$	$9s = \cos(t + 1)$
20	$\mathrm{y} = b_1 + b_2y_1 \ln b_3\, y_2$	$(1 + 2a_1)x = a_2x_1 \ln a\, x_2$

4. Дайте определение и приведите пример математической модели

№№ вар.	*Вид модели*
1	Модель микроуровня
2	Модель макроуровня
3	Модель метауровня
4	Структурная модель

5	Сетевая модель
6	Иерархическая модель
7	Функциональная модель
8	Аналитическая модель
9	Алгоритмическая модель
10	Имитационная модель
11	Численная модель
12	Теоретическая модель
13	Эмпирическая модель
14	Логическая модель
15	Теоретико-множественная модель
16	Модель на основе теории графов
17	Вербальная модель
18	Информационная модель
19	Структурная модель
20	Численная модель

5. Для задания п. 2 сформулируйте математическую модель в вербальной форме

Методические указания по выполнению задания.

1. Задание включает: титульный лист (название, номер варианта, подпись автора), текст с ответами на поставленные вопросы
2. Выбор номера варианта соответствует номеру по списку группы
3. Срок сдачи контрольной работы – по объявленному графику
4. После проверки для каждой контрольной работы будут определены вопросы для защиты. Отвечать на вопросы (защищать КР) – на экзамене (второй вопрос билета)
5. Если студент не сдал КР – не будет допущен к сдаче экзамена. Для групп специальности ИБ – условие сдачи КР является основанием для получения зачета

Вопросы экзамена

1. Понятие модели
2. Логические модели, пример
3. Материальные модели, пример
4. Образные модели, пример

5. Знаковые модели, пример
6. Функциональные модели, пример
7. Геометрические модели, пример
8. Математические модели, пример
9. Понятие системы
10. Обобщенная модель системы
11. Пространство сигналов (состояний), пример
12. Переходные процессы в системе, пример
13. Сложность системы
14. Управление системой – процесс
15. Управление системой – управленческая деятельность
16. Модель системы с управлением
17. Критерии достижения цели, пример
18. Обратная связь
19. Типы управления
20. Эффективность системы, пример
21. Устойчивость системы, пример
22. Надежность системы, пример
23. Модель самоорганизующейся системы, пример
24. Условное моделирование – основные понятия и требования к моделям
25. Описание физических величин. Основные и производные физические величины
26. Степенной комплекс и его связь с размерностями физических величин
27. Понятие аналогии, умозаключение по аналогии
28. Аналогия математическая
29. Идеальное моделирование: примеры
30. Классификация математических моделей по уровням
31. Классификация математических моделей по характеру отображаемых свойств объекта
32. Классификация математических моделей по способу представления свойств объекта
33. Классификация математических моделей по форме представления свойств объекта
34. Содержательное описание процесса (системы)

35. Формализованная схема процесса (системы)
36. Использование математической модели
37. Математическая модель элемента системы: детерминистские и стохастические модели
38. Математическая модель взаимодействия элементов системы. Механизм обмена сигналами
39. Математическое подобие
40. Геометрическое подобие
41. Типовая запись математической модели системы
42. Вербальное, математическое и информационное представление математической модели системы
43. Общие свойства математической модели: линейность
44. Общие свойства математической модели: непрерывность (дискретность)
45. Общие свойства математической модели: детерминированность (стохастичность)
46. Общие свойства математической модели: стационарность
47. Физическая модель
48. Модельный эксперимент
49. Характеристика процесса моделирования системы
50. Типовые цели моделирования систем, согласование целей
51. Метод входов и выходов, характеристики потоков
52. Язык блок-схем, достоинства и недостатки
53. Функциональное моделирование, иерархия операций в системе
54. Морфологическое описание системы
55. Свойства элементов морфологической модели системы
56. Информационное описание системы, основные компоненты
57. Функциональное моделирование, типовые способы организации действий
58. Типовые взаимозависимости
59. Графы как инструменты моделирования
60. Сетевое планирование и управление
61. Графы сигналов
62. Процесс моделирования системы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989.- 224 с.

2. Кобелев Н.Б. Особенности имитационного моделирования сложных экономических систем: Учебное пособие. – Дело, 2003.- 336 с.

3. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. – М.: Изд. «Советское радио», 1973, 440 с.

4. Истомин Е.П., Колычев В.В., Соколов А.Г. Исследование систем управления.- учебник. – ООО «Андреевский изд. дом», СПб, 2013, 306 с.

5. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М., 1997.

6. История математики/ под ред. А.П. Юшкевича. – т. 1. – М.: Наука, 1970.- 350 с.

7. Математическая энциклопедия /под ред. И.М. Виноградова, т. 3: изд. Советская энциклопедия, 1982

8. Миронов А.М. Теория процессов/ http://www.wfmc.org/standards/docs/better_math_better_processes.pdf

9. Н.Винер Кибернетика, 2 изд. М., «Сов. Радио», 1968

10. Истомин Е.П., Соколов А.Г., Слесарева Л.С. Управление информационными системами: фирма, корпорация, деловая сеть- учебник. – ООО «Андреевский изд. дом», СПб, 2012, 198 с.

11. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.- изд. 2-е, «Техника», 1977, 768 с.

12. Системы сетевого планирования и управления/ пер. с англ. изд. «Мир», М.: 1965, 146 с.

13. Холл А.Д. Опыт методологии для системотехники/ пер. с англ. под ред. Г.Н. Поварова. М.: «Сов. радио», 1975, 448 с.

14. Федеральный закон «О техническом регулировании» от 27.12.2002 г. № 184-ФЗ

15. ГОСТ Р 12.0.006 — 2002 Система стандартов безопасности труда. Общие требования к системе управления охраной труда в организации

16. «Разработка методических основ геоинформационного управления рисками развития рекреационных приморских территорий», отчет о НИР, РГГМУ, 2013

17. «Разработка основ методологии геоинформационного управления объектами и территориями», отчет о НИР, РГГМУ, 2014

18. Истомин Е.П., Соколов А.Г. Управленческие решения. - учебник, изд. 2-е. – ООО «Андреевский изд. дом», СПб, 2012, 245 с.

Оглавление: