Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
федеральное бюджетное государственное
образовательное учреждение
высшего образования
"Российский государственный
гидрометеорологический университет"

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
“Теоретическая механика”

Специальность: 17.03.01 – Корабельное вооружение

Курс III

Санкт-Петербург
РГГМУ
2020

Одобрено методической комиссией факультета информационных технологий РГГМУ

УДК 531.01(076.6)
ББК 22.21я73

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины “Теоретическая механика”. Даются основные теоретические сведения, примеры решения типичных задач и их физическое обоснование. Приводится рекомендуемая литература.

Составитель: В. В. Петрова, канд. физ.-мат. наук, доц., РГГМУ.

Ответственный редактор:
Рецензент: Бровкина Е. А., ст. преподаватель, РГГМУ.

Введение.

Теоретическая механика является наукой, в которой изучаются перемещения тел (механическое движение) и условия равновесия тел. Она служит базой другим разделам механики – теории упругости, сопротивления материалов, теории пластичности и т.д.

В основе теоретической механики, как и всякой науки, лежат представления и абстракции, отражающие главные черты изучаемых явлений. *Сила* – количественная мера механического воздействия между физическими объектами. Она характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т.е. является вектором. *Материальная точка* – тело, размерами которого в данных условиях задачи можно пренебречь. *Абсолютно твердое тело* – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механика ставит перед собой две основные задачи.

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения – законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.
2. Отыскание общих механических свойств, т.е. общих теорем или принципов, присущих любой системе, независимо от

конкретного рода взаимодействий между телами системы.

Первую задачу изучает *кинематика* – раздел механики, исследующий движение точек и тел безотносительно к причинам, его вызывающим (возникла из астрономии). Вторую задачу изучает *динамика*; в этом разделе рассматривается движение материальных точек и тел в зависимости от причин движения (возникла из развития промышленности, мореплавания, военного дела). Статика изучает равновесие сил, приложенных к твердым телам, и способы сложения сил (самый старый раздел механики, возник из строительства).

1. Кинематика. Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат.

Положение точки относительно ортогональной декартовой системы координат $Oxyz$ задается тремя числами x, y, z, которые можно рассматривать как проекции радиус – вектора $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \vec{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}.$$

Если положение точки задается с помощью радиус – вектора:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

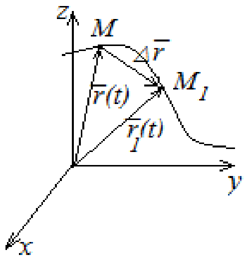
то это *векторный способ задания движения точки*. Если же изменение положения точки с течением времени задается с помощью зависимости координат от времени

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \qquad (1.1)$$

то это *координатный способ задания движения точки*. Функции f_1, f_2, f_3, очевидно, должны быть однозначными. Мы будем считать их по крайней мере дважды дифференцируемыми. Уравнение (1.1) можно рассматривать как параметрическую форму некоторой пространственной кривой. Функции f_1, f_2, f_3 называются *законами движения точки*.

Траектория точки – это геометрическое место последовательных положений движущейся точки в данной системе отсчета.

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в положение M_1.



Тогда $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ - *средняя скорость* за промежуток времени Δt. А *скорость* точки в данный момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

(точкой сверху в теоретической механике обозначают производную по времени). Поскольку радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, то производную по времени можно вычислить как производную сложной функции следующим образом

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}.$$

Таким образом, получаем формулы для проекций вектора скорости на оси координат

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}.$$

А модуль вектора скорости, соответственно, вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогично, для ускорения точки в данный момент времени

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Закон движения точки задан в виде

$$x = a\cos\omega t\,, \qquad y = b\sin\omega t\,, \qquad z = 0,$$

где a, b, ω – константы. Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение.

Решение. Для нахождения траектории из уравнений движения необходимо исключить время t. Поскольку

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}, \qquad \sin \omega t = \frac{y}{b},$$

то по основному тригонометрическому тождеству

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

и в качестве траектории получаем уравнение эллипса. Для определения скорости и ускорения вычисляем первые и вторые производные от координат.

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t\,, \qquad \dot{y} = b\omega \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t\,, \qquad \ddot{y} = -b\omega^2 \sin \omega t.$$

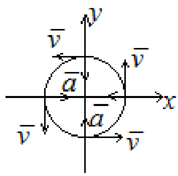
Таким образом,

$$v_x = -\frac{a}{b}\omega y, \qquad v_y = \frac{b}{a}\omega x,$$

$$a_x = -\omega^2 x, \qquad a_y = -\omega^2 y,$$

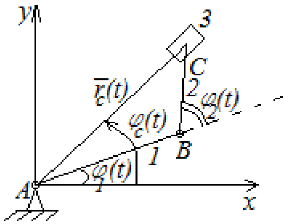
$$v = \omega\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}, a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если $a = b = R$,точка движется по окружности со скоростью $v = \omega R$ и ускорением $a = \omega^2 R$.



Задача 2. Плоский механизм манипулятора, состоящий из стержней 1, 2 и схвата 3, переносит груз из одного положения в другое по траектории, определяемой полярными координатами центра схвата $r_C = r_C(t), \varphi_C = \varphi_C(t)$. Найти

законы изменения углов φ_1, φ_2, отрабатываемых соответствующими приводами, для выполнения заданной программы. Длины стержней l_1, l_2.



Решение.

Пусть $|AB| = l_1, |BC| = l_2$.Рассмотрим ΔABC. По теореме косинусов

$$r_C^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\pi - \varphi_2),$$

$$\cos(\pi - \varphi_2) = -\cos(\varphi_2) = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_C^2}{2l_1 l_2},$$

$$\varphi_2 = \arccos\frac{r_C^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}.$$

Для определения φ_1 используем равенство

$$l_2^2 = r_C^2 + l_1^2 - 2l_1 r_C \cos(\varphi_C - \varphi_1),$$

$$\cos(\varphi_C - \varphi_1) = \frac{r_C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r_C},$$

$$\varphi_1 = \varphi_C - \arccos\frac{r_C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r_C}.$$

2. Естественный способ задания движения точки.

Формулы предыдущей лекции, выражающие скорость и ускорение в декартовых координатах, очень просты. Это объясняется тем, что оси декартовых координат ортогональны и постоянны по направлению. Их недостатком является, во-первых, то, что из них непосредственно не видно, как скорость и ускорение связаны с траекторией, а во-вторых, они зависят от расположения кривой в пространстве $Oxyz$.

Существует другой способ задания движения. Некоторую точку O на траектории примем за начало отсчета некоторой *дуговой координаты* s. Необходимо также задать положительное направление отсчета этой координаты. Задание траектории точки, т.е. $\vec{r}(s)$ и закона движения по ней $s = f(t)$ называется *естественным способом задания движения*. При этом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Вектор $\Delta \vec{r} / \Delta s$ направлен по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания дуговой координаты. Так как $|\Delta \vec{r}|$ и $|\Delta s|$ являются эквивалентными бесконечно малыми, то

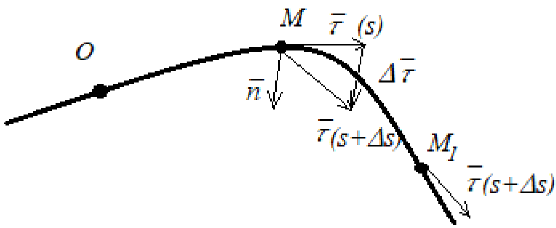
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- *единичный касательный вектор*. В этом случае формула для скорости дает

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}. \qquad (2.1)$$

Аналогичным образом, если продифференцировать формулу (2.1), получим формулу для ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\vec{\tau}(s+\Delta s) - \vec{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = K \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – *вектор нормали* к траектории в точке M единичной длины. Поскольку мы не можем гарантировать, что $|d\vec{\tau}/dt| = 1$, вектор $\vec{n}$ умножен на некоторую константу K. K называют *кривизной кривой*. Обычно вводят также величину

$$\rho = \frac{1}{K},$$

которую называют *радиусом кривизны*. Геометрический смысл кривизны кривой: при $K \neq 0$ траектория движения в окрестности рассматриваемой точки может быть аппроксимирована дугой окружности радиуса ρ. При $K = 0$ радиус кривизны $\rho = \infty$ и точка движется по окружности бесконечного радиуса, т.е. по прямой.

Таким образом, в приведенных обозначениях формула для ускорения имеет вид

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

и вектор ускорения имеет две составляющие: по касательной к кривой и по нормали к кривой. Итак, мы имеем два орта: вектор $\vec{\tau}$ и вектор $\vec{n}$. Третий орт $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ называется *вектором бинормали*. Эти три орта образуют так называемый *трехгранник Френе*. Через вектора $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ проходит *соприкасающаяся плоскость*, через $\vec{n}$, $\vec{b}$ - *нормальная плоскость*, через $\vec{b}$, $\vec{\tau}$ - *спрямляющая плоскость*. Трехгранник Френе отличается от обычной декартовой системы координат тем, что он движется вместе с рассматриваемой точкой по траектории с течением времени.

Итак, для скорости и ускорения можем записать следующие формулы для их проекций на естественные оси координат

$$v_\tau = \dot{s}, \qquad v_n = v_b = 0,$$

$a_\tau = \ddot{s}$ - *касательное ускорение*,

$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ – *нормальное ускорение*,

$$a_b = 0.$$

Пусть нам заданы скорость и ускорение в декартовых координатах. Запишем формулы для перехода к естественной системе координат. Единичный касательный вектор можно найти с помощью вектора скорости

$$\vec{\tau} = \pm \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

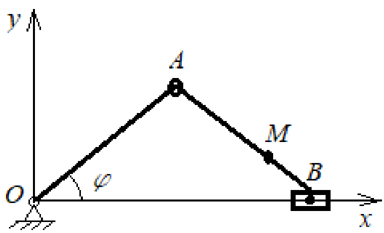
Знак «плюс» ставится, если вектор скорости направлен в сторону возрастания дуговой координаты, а знак «минус» в противоположном случае. Далее можно найти касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны.

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau}, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{a_n}}{|\vec{a}_n|}, \ \rho = \frac{v^2}{a_n}. \qquad (2.3)$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Найти траекторию точки M кривошипно-ползунного механизма, если $|OA| = |AB| = l$, $|MB| = l/3$, $\varphi = \omega t$, а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.



Решение. Из приведенного рисунка очевидно, что координаты точки M

$$x = l\cos\varphi + \frac{2}{3} l\cos\varphi = \frac{5}{3} l\cos\varphi$$

$$= \frac{5}{3} l\cos\omega t,$$

$$y = \frac{l}{3}\sin\varphi = \frac{l}{3}\sin\omega t.$$

Таким образом, можно выразить

$$\cos\omega t = \frac{3x}{5l}, \quad \sin\omega t = \frac{3y}{l}.$$

А используя основное тригонометрическое тождество, можем записать уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{5l/3}\right)^2 + \left(\frac{y}{l/3}\right)^2 = 1,$$

которая является эллипсом с центром в начале координат.

Составляющие скоростей и ускорений можем вычислить с помощью дифференцирования.

$$v_x = \dot{x} = -\frac{5}{3}l\omega\sin\omega t\,,$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{l}{3}\omega\cos\omega t,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega\sin\omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega\cos\omega t)^2}$$

$$= \frac{l\omega}{3}\sqrt{24(\sin\omega t)^2 + 1}.$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{5}{3}l\omega^2\cos\omega t\,,$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{l}{3}\omega^2\sin\omega t,$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega^2 \cos\omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega^2 \sin\omega t)^2}$$
$$= \frac{\omega^2 l}{3}\sqrt{24(\cos\omega t)^2 + 1}.$$
При $\varphi = 0$, очевидно
$$v_x = 0, \qquad v_y = v = \frac{\omega l}{3}, \qquad a_x = -\frac{5}{3}l\omega^2,$$
$$a_y = 0.$$
Далее, используя формулы (2.3), можем найти касательное и нормальное ускорение.
$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{a_x \cdot v_x + a_y \cdot v_y}{v} = 0,$$
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a = \frac{5\omega^2 l}{3}.$$
А зная нормальное ускорение, можем определить и радиус кривизны.
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{l^2\omega^2}{9}\frac{3}{5\omega^2 l} = \frac{l}{15}.$$
Задача 2. Точка движется по окружности радиуса 1 метр по закону $s = t^2 - t$ (s – в метрах, t – в секундах). Определить момент времени, когда касательное ускорение точки равно ее нормальному ускорению.

Решение. Вычислим касательное и нормальное ускорения.
$$v_\tau = \dot{s} = 2t - 1, a_\tau = \ddot{s} = 2,$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4t^2 - 4t + 1}{1} = 4t^2 - 4t + 1.$$
Приравняв касательное и нормальное ускорения, получим квадратное уравнение
$$4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

положительный корень которого $t = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ секунд.

3. Частные случаи движения точки.

Частные случаи движения точки – это *равномерное* и *равнопеременное* движение. При равномерном движении скорость постоянна, т.е. $v_\tau = const$. При естественном способе задания уравнение движения имеет вид

$$s = s_0 + v_\tau t,$$

а при координатном способе задания движения необходимо в общем случае записать три уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Скорость при естественном способе задания $v = \dot{s} = v_\tau$, а при координатном способе задания движения, очевидно, для скорости можно записать

$$v_x = \dot{x} = a, \;\; v_y = \dot{y} = b, \;\; v_z = \dot{z} = c,$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = v_\tau.$$

Ускорение при равномерном движении равно нулю.

При равнопеременном движении касательное ускорение точки постоянно и в естественных координатах пройденный путь задается формулой

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

а декартовы координаты точки, соответственно, задаются следующим образом

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + \dfrac{a_2 t^2}{2}, \\ y = y_0 + b_1 t + \dfrac{b_2 t^2}{2}, \\ z = z_0 + c_1 t + \dfrac{c_2 t^2}{2}. \end{cases}$$

Тогда для скорости точки в этих двух координатных системах, соответственно, можем записать

$$v = \dot{s} = v_0 + a_\tau t,$$

$$v_x = \dot{x} = a_1 + a_2 t, \qquad v_y = b_1 + b_2 t,$$

$$v_z = c_1 + c_2 t.$$

Если $a_\tau > 0$, то движение называется *равноускоренным*, если $a_\tau < 0$, то *равнозамедленным*. Ускорение при равнопеременном движении в декартовых координатах, очевидно, будет

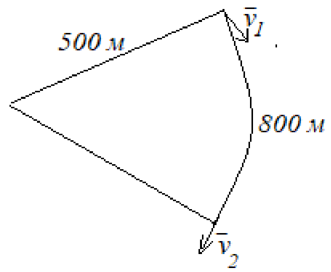
$$a_x = \dot{v}_x = a_2, \qquad a_y = \dot{v}_y = b_2,$$

$$a_z = \dot{v}_z = c_2,$$

$$a = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Поезд движется равнозамедленно по дуге окружности радиуса *R*=500 м и проходит путь *s*=800 м, имея начальную скорость 15 м/с и конечную 5 м/с. Определить полное ускорение в начале и в конце дуги и время движения по этой дуге.



Решение. Поскольку движение равнозамедленное, то $a_\tau < 0$ и можем записать формулы для пути и скорости как систему уравнений.

$$\begin{cases} s = v_0 t - \dfrac{a_\tau t^2}{2}, \\ v = v_0 - a_\tau t. \end{cases}$$

Подставив известные нам величины, получим

$$\begin{cases} 800 = 15t - \dfrac{a_\tau t^2}{2}, \\ 5 = 15 - a_\tau t. \end{cases}$$

Решение этой системы: $t = 8\ c, a_\tau = 0{,}125$ м/с. Касательное ускорение в начале и конце дуги одинаково (по определению равнозамедленного движения), так что осталось определить нормальное. А оно в начале и конце пути разное, определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

Таким образом,

$$a_n^{(1)} = \frac{15^2}{500} = 0{,}45\ \text{м/с}^2, a_n^{(2)} = \frac{5^2}{500} = 0{,}05\ \text{м/с}^2.$$

И можем вычислить полное ускорение в начале и конце пути

$$a^{(1)} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}45^2} = 0{,}467\,\text{м/с}^2,$$

$$a^{(2)} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}05^2} = 0{,}136\,\text{м/с}^2.$$

Задача 2. Точка движется по окружности радиуса R по закону

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} w t^2.$$

Чему равна величина ускорения точки? Когда эта величина станет равной w и сколько оборотов сделает точка к этому моменту?

Решение. Вычислим касательное и нормальное ускорение точки.

$$\dot{s} = v_0 - wt, \qquad a_\tau = \ddot{s} = -w, \qquad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{(v_0 - wt)^2}{R}.$$

Тогда для полного ускорения можно записать формулу

$$a = \sqrt{w^2 + \frac{1}{R^2}(v_0 - wt)^2}.$$

Очевидно, что $a = w$ при $t = {}^{v_0}/_{w}$. Путь, пройденный точкой к этому моменту времени, можно вычислить следующим образом

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{w} - \frac{1}{2} w \frac{v_0^2}{w^2} = \frac{v_0^2}{2w}.$$

Для того, чтобы получить число оборотов точки, разделим пройденный путь на длину одного оборота, что и даст нам требуемый ответ.

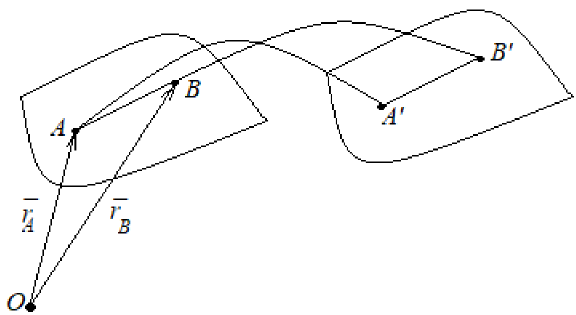
$$N = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi w R}.$$

4. Кинематика твердого тела. Поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению. Для поступательного движения можно доказать следующее утверждение.

Теорема. При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения точек тела одинаковы.

Доказательство.



Из приведенного рисунка очевидно, что $\overrightarrow{r_B}(t) = \overrightarrow{r_A}(t) + \overrightarrow{AB}$ для любого t, причем $\overrightarrow{AB}$ – постоянный вектор. Дифференцируя это равенство по времени, получим

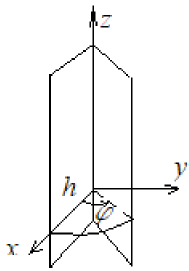
$$\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}, \qquad \frac{d^2\overrightarrow{r_B}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{r_A}}{dt^2}.$$

А это и означает, что скорости и ускорения любых двух точек тела одинаковы. Теорема доказана.

Таким образом, для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек. Уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ z_A = z_A(t). \end{cases}$$

При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси* точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, а остальные описывают окружности с центрами, лежащими на оси вращения.



Дуговая координата любой точки, движущейся по окружности, определяется формулой

$$s = s_0 + h\varphi,$$

где s_0 – начальное значение дуговой координаты, h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения, φ – угол поворота твердого тела вокруг оси в радианах.

Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ называется *уравнением вращения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела. Это вектор $\vec{\omega}$, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. По абсолютной величине $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. Единицы измерения: рад/с.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости. Это вектор $\vec{\varepsilon}$, совпадающий по направлению с направлением угловой скорости, если вращение ускоренное, и направленный прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное. По модулю $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Единицы измерения: $\text{рад}/\text{с}^2$.

Если $\omega = const,$ то вращение называется *равномерным* и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Если $\varepsilon = const,$ то вращение называется *равнопеременным* (*равноускоренным* или *равнозамедленным*) и происходит согласно уравнениям

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Если же нас интересуют обычные, линейные скорость и ускорение вращающегося твердого тела, то для них выводятся приведенные ниже формулы.

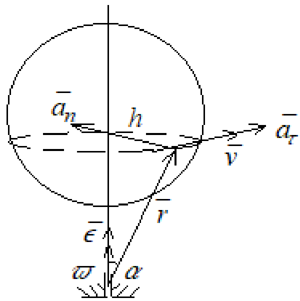
$$v_\tau = \dot{s} = \frac{d}{dt}(s_0 + h\varphi) = h\dot{\varphi} = \omega h,$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{\omega} h = \varepsilon h,$$

$$a_n = \frac{v^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Касательное и нормальное ускорения при вращающемся движении называются также *вращательным* и *центростремительным*.



Из приведенного рисунка видно, что модуль скорости $v = \omega h = \omega r \sin\alpha$ совпадает с модулем векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Направление скорости тоже совпадает с направлением этого векторного произведения. Поэтому

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (4.1)$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*. Исходя из нее, можем записать для ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \qquad (4.2)$$

Таким образом, получается, что

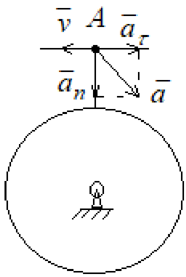
$$\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \overrightarrow{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Вал с присоединенными к нему пластинами вращается в подшипниках согласно уравнению

$$\varphi = k \ln\left(1 + \frac{\omega_0 t}{k}\right),$$

где k, ω_0 – постоянные коэффициенты. Определить угловую скорость и угловое ускорение вала. Найти скорость и ускорение центра пластины A, отстоящего на расстояние R от оси вращения.



Решение. Угловую скорость и угловое ускорение вала можно найти, дифференцируя уравнение вращения.

$$\omega = \dot{\varphi} = k \frac{1}{1 + \frac{\omega_0 t}{k}} \cdot \frac{\omega_0}{k} = \frac{\omega_0 k}{k + \omega_0 t},$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{\omega_0 k}{(k + \omega_0 t)^2} \omega_0 = -\frac{\omega_0^2 k}{(k + \omega_0 t)^2}.$$

А с помощью приведенных выше в лекции формул можем найти линейную скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорение.

$$v_\tau = \omega h = \omega R = \frac{\omega_0 k R}{k + \omega_0 t},$$

$$a_\tau = \varepsilon R = -\frac{\omega_0^2 k R}{(k + \omega_0 t)^2}, a_n = \omega^2 R = \frac{\omega_0^2 k^2 R}{(k + \omega_0 t)^2},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 k^2 R^2}{(k + \omega_0 t)^4} + \frac{\omega_0^4 k^4 R^2}{(k + \omega_0 t)^4}} = \frac{\omega_0^2 k R}{(k + \omega_0 t)^2}\sqrt{1 + k^2}.$$

Задача 2. Маховое колесо радиуса *R=2 м* вращается равноускоренно из состояния покоя; через *t=10 с* точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью v *=100 м/с*. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента *t=15 с*.

Решение. Поскольку колесо вращается равноускоренно, его угловое ускорение одинаково во все моменты времени. Сопоставляя формулы $v = \omega R$, $\omega = \varepsilon t$, получим

$$\frac{v}{R} = \varepsilon t.$$

Отсюда легко вычислить

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5\,\text{м/с}^2.$$

Тогда для момента времени *t=15 с*

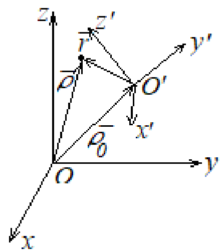
$$\omega = \varepsilon t = 5 \cdot 15 = 75\,\text{рад/с},$$

$$v = \omega R = 75 \cdot 2 = 150\,\text{м/с},$$

$$a_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10\,\text{м/с}^2, \qquad a_n = \omega^2 R = 75^2 \cdot 2 = 11250\,\text{м/с}^2.$$

5. Углы Эйлера.

Введем в рассмотрение две системы координат: неподвижную $Oxyz$ и подвижную (движущуюся вместе с твердым телом) $O'x'y'z'$.



Очевидно, что $\vec{\rho} = \overrightarrow{\rho_0} + \vec{r}$, поэтому можем записать

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k} + x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}.$$

Введем таблицу направляющих косинусов для ортов двух систем координат.

	$\overrightarrow{\imath'}$	$\overrightarrow{\jmath'}$	$\overrightarrow{k'}$
$\vec{\imath}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\vec{\jmath}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\vec{k}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Тогда, умножая уравнение скалярно на $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, получим

$$x = x_0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$
$$y = y_0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$
$$z = z_0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.$$

Можно и наоборот, выразить x', y', z' через x, y, z.

$$x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.$$

$$x' = a_{11}(x - x_0) + a_{21}(y - y_0) + a_{31}(z - z_0),$$
$$y' = a_{12}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{32}(z - z_0),$$
$$z' = a_{13}(x - x_0) + a_{23}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0).$$

Таким образом, можно записать любой вектор в разных осях координат.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a'_x\vec{i'} + a'_y\vec{j'} + a'_z\vec{k'}$$

и выразить одни его координаты через другие. Точно так же можно поступить и с ортами.

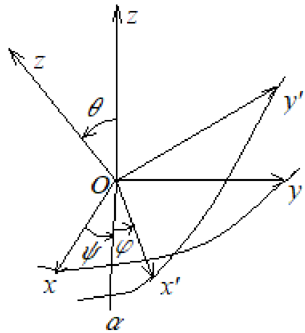
$$\vec{i} = a_{11}\vec{i'} + a_{12}\vec{j'} + a_{13}\vec{k'},$$
$$\vec{j} = a_{21}\vec{i'} + a_{22}\vec{j'} + a_{23}\vec{k'},$$
$$\vec{k} = a_{31}\vec{i'} + a_{32}\vec{j'} + a_{33}\vec{k'}.$$

Однако не все направляющие косинусы оказываются независимыми, на них можно наложить условия. Поскольку $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, то необходимо выполнение равенств

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0,$$
$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0,$$
$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

Из начальной постановки задачи следует, что для задания движения точки М в неподвижной системе координат надо знать: три координаты полюса $O'(x_0, y_0, z_0)$ и девять направляющих косинусов. Но на косинусы накладываются шесть условий, поэтому нам достаточно задать только три косинуса и выразить через них остальные.

Вместо трех направляющих косинусов в механике обычно задают три угла, которые называются *углами Эйлера*.



Угол φ называется *углом собственного вращения*, ψ – *угол прецессии*, θ – *угол нутации*. Если меняется только угол φ, то происходит вращение вокруг оси Oz', поэтому ось z' называется *осью собственного вращения*. Если меняется только угол ψ – вращение вокруг оси Oz (*ось прецессии*). Если же меняется только угол θ – вращение вокруг оси $O\alpha$, которая получается при пересечении координатных плоскостей Oxy и $Ox'y'$(*ось нутации*).

Можно вывести формулы, выражающие направляющие косинусы через углы Эйлера.

$$a_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$a_{12} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$a_{13} = \sin\psi\sin\theta,$$
$$a_{21} = \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$a_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$
$$a_{23} == -\sin\theta\cos\psi,$$
$$a_{31} = \sin\varphi\sin\theta\,, \qquad a_{32} = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$a_{33} = \cos\theta.$$

Тогда формулы для преобразования координат можно записать в более компактном матричном виде.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A(\varphi, \psi, \theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Формула для обратного преобразования, соответственно, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1}(\varphi, \psi, \theta)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

6. Сложное движение точки.

Пусть даны две системы отсчета: неподвижная $Oxyz$ и подвижная $Ox'y'z'$ (см. рисунок параграфа 5).

Движение точки M относительно системы $Ox'y'z'$ называется *относительным* (скорость и ускорение этого движения обозначают $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{a_r}$), а относительно $Oxyz$ – *абсолютным* (со скоростями $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{a_a}$). Движение системы $Ox'y'z'$ в системе $Oxyz$ называется *переносным* движением (его скорость и ускорение обозначают $\overrightarrow{v_e}$, $\overrightarrow{a_e}$). Движение точки M называют еще *сложным* движением, т.к. оно является суммой относительного и переносного движений.

Пусть нам надо определить скорость и ускорение. Проще всего это сделать для переносного движения, которое может быть поступательным и вращательным (см. формулы (4.1), (4.2)).

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},$$

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_e}$$
$$= \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}),$$

где $\overrightarrow{\omega_e}$ – угловая скорость поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, $\vec{\varepsilon} = \dot{\overrightarrow{\omega_e}}$ - угловое ускорение.

Займемся теперь вычислением скорости и ускорения абсолютного движения. Очевидно, что

$$\overrightarrow{v_a} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\overrightarrow{\rho_0}} + \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_0} + \dot{\vec{r}}.$$

Поскольку $\vec{r} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}$, то

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}'\overrightarrow{i'} + \dot{y}'\overrightarrow{j'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'} + x'\dot{\overrightarrow{i'}} + y'\dot{\overrightarrow{j'}} + z'\dot{\overrightarrow{k'}}$$
$$= \overrightarrow{v_r} + x'\dot{\overrightarrow{i'}} + y'\dot{\overrightarrow{j'}} + z'\dot{\overrightarrow{k'}}.$$

Можно вывести формулы, в соответствии с которыми

$$\dot{\overrightarrow{i'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{i'}, \qquad \dot{\overrightarrow{j'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{j'},$$
$$\dot{\overrightarrow{k'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{k'}.$$

Тогда

$$\dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \left(x' \cdot \overrightarrow{i'} + y' \cdot \overrightarrow{j'} + z' \cdot \overrightarrow{k'}\right)$$
$$= \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}$$

и можем записать

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}. \tag{6.1}$$

Последнее равенство носит название *теоремы сложения скоростей*.

Формулу, аналогичную формуле для радиус-вектора $\vec{r}$, можно вывести и для любого вектора $\vec{a}$, изучаемого в двух системах координат. Если $\vec{a} = a_x{}'\vec{\imath'} + a_y{}'\vec{\jmath'} + a_z{}'\vec{k'}$, то

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a_x}{}'\vec{\imath'} + \dot{a_y}{}'\vec{\jmath'} + \dot{a_z}{}'\vec{k'} + a_x{}'\dot{\vec{\imath'}} + a_y{}'\dot{\vec{\jmath'}} + a_z{}'\dot{\vec{k'}} = \dot{a_x}{}'\vec{\imath'} + \dot{a_y}{}'\vec{\jmath'} + \dot{a_z}{}'\vec{k'} + \vec{\omega_e} \times \vec{a}.$$

В сокращенном виде это можно записать

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega_e} \times \vec{a},$$

где ${d\vec{a}}/{dt}$ – *полная* или *абсолютная производная по времени*, т.е. производная в неподвижной системе координат, ${d'\vec{a}}/{dt}$ – *локальная* или *относительная производная по времени*, т.е. производная в подвижной системе координат. Введя такие обозначения, можем записать для абсолютного ускорения следующее.

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v_e} + \vec{v_r}).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{v_r}) = \\ = \frac{d\overrightarrow{v_0}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\omega_e}}{dt} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ + \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},,$$

$$\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d'\overrightarrow{v_r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r},$$

то подставляя эти выражения в формулу для ускорения, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}) + \overrightarrow{a_r} \\ + 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r}.$$

Первые три слагаемых в правой части формулы представляют собой переносное ускорение, а последнее слагаемое обозначают $\overrightarrow{a_c}$ и называют *ускорением Кориолиса*. Таким образом, мы получаем *теорему сложения ускорений*

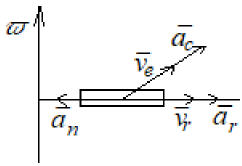
$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}. \qquad (6.2)$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Горизонтально расположенный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, укрепленной на столе и проходящей через один из концов стержня. По стержню движется небольшая муфта. Её скорость относительно стержня меняется по закону

$$\vec{v} = b\vec{r},$$

где $b = const$, $\vec{r}$ - радиус-вектор, характеризующий расстояние от муфты до оси вращения. Найти скорость и ускорение муфты относительно стола в зависимости от r.



Решение. Согласно условию задачи, относительная и переносная скорости могут быть выражены следующим образом

$$v_r = br, \qquad v_e = \omega r.$$

Из рисунка легко заметить, что векторы этих скоростей перпендикулярны друг другу, поэтому складываются они по теореме Пифагора.

$$v_a = \sqrt{b^2 r^2 + \omega^2 r^2} = r\sqrt{b^2 + \omega^2}.$$

Что же касается ускорения, то относительное движение муфты – это просто движение по прямой, так что относительное ускорение является просто производной от относительной скорости.

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = b\frac{dr}{dt} = bv_r = b^2 r.$$

Для переносного ускорения, строго говоря, нужно писать $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}}$, но в нашей задаче $a_{e\tau} = 0$, т.к. вращение равномерное и угловое ускорение равно нулю. Для переносного центростремительного ускорения можем записать формулу

$$a_{en} = \omega^2 r.$$

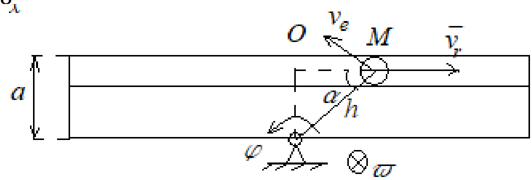
Поскольку ускорение Кориолиса $\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r}$, то можем вычислить его длину по правилам векторной алгебры

$$a_c = 2\omega v_r \sin\frac{\pi}{2} = 2\omega br.$$

Если нанести на рисунок эти три вектора, то окажется что относительное и переносное ускорения лежат на одной прямой и направлены в разные стороны, а ускорение Кориолиса перпендикулярно им обоим. Складывая их по правилам векторной алгебры, получим выражение для абсолютного ускорения муфты.

$$\begin{aligned} a_a = \sqrt{(a_r - a_n)^2 + a_c^2} \\ &= \sqrt{(b^2 r - \omega^2 r)^2 + 4\omega^2 b^2 r^2} \\ &= r\sqrt{b^4 + 2\omega^2 b^2 + \omega^4} \\ &= (b^2 + \omega^2) r. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти абсолютные скорость и ускорение точки *M* в момент *t=2 с*, если в начальный момент времени точка находилась в положении *O*, $s = OM = 12\sin\frac{\pi t}{8}$, *a=6 см*, $\varphi = 0.2t - 0.3t^2$.



Решение. Определим сначала положение точки в нужный нам момент времени.

$$s|_{t=2} = 12\sin\frac{\pi}{4} = 6\sqrt{2} \text{ см}.$$

Из заданного уравнения движения точки M легко определить относительную скорость

$$v_r = \dot{s} = 12\cos\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{8},$$

$$v_r|_{t=2} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\ \text{см/с}.$$

Переносная же скорость определяется по формуле $v_e = \omega h,$ в которой предварительно надо вычислить каждый из множителей.

$$\omega = \dot{\varphi} = 0.2 - 0.6t,$$

$$\omega|_{t=2} = 0.2 - 1.2 = -1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Знак угловой скорости показывает, что она направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Расстояние h определяется по теореме Пифагора.

$$h = \sqrt{a^2 + s^2} = \sqrt{36 + 36.2} = 6\sqrt{3}\ \text{см}.$$

Таким образом, $v_e = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Осталось сложить относительную и переносную скорость для вычисления абсолютной скорости. Согласно чертежу, относительная и переносная скорости складываются по теореме косинусов, т.к. угол между ними $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$
$$= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \sin\alpha}$$
$$= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \frac{a}{h}}$$
$$= 8{,}894\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Перейдем теперь к вычислению ускорений. Относительное ускорение легко определить из уравнения движения.

$$a_r = \ddot{s} = -\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\frac{t}{8},$$

$$a_r|_{t=2} = -3\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32}.$$

Для переносного ускорения можем записать $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}}$, каждое из слагаемых нужно считать отдельно по своей формуле.

$$a_{e\tau} = \varepsilon h, \qquad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = -0{,}6,$$

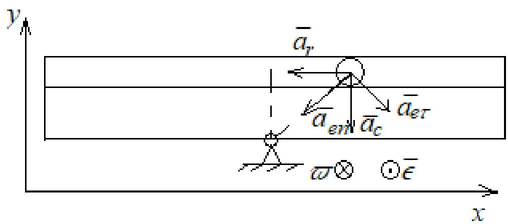
$$a_{e\tau} = 0.6\cdot 6\sqrt{3} = 3{,}6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_{en} = \omega^2 h = 1\cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вычислим теперь величину ускорения Кориолиса.

$$a_c = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}, \overrightarrow{v_r}) = 2\cdot 1\cdot\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\cdot 1$$
$$= \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}} + \overrightarrow{a_c}$. Нанесем вектора на рисунок и для простоты вычислений спроектируем на оси координат.



$$a_{ax} = -a_r + a_{e\tau}\sin\alpha - a_{en}\cos\alpha$$
$$= -a_r + a_{e\tau}\frac{a}{h} - a_{en}\frac{s}{h}$$
$$= -6{,}194\ \text{см/с}^2,$$
$$a_{ay} = -a_{e\tau}\cos\alpha - a_{en}\sin\alpha - a_c$$
$$= -17{,}755\ \text{см/с}^2.$$

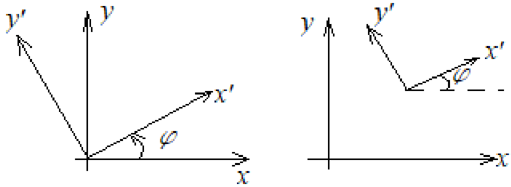
Тогда величина абсолютного ускорения вычисляется по теореме Пифагора.

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 18{,}804\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

7. Плоско-параллельное движение твердого тела. Скорости точек тела при плоско-параллельном движении.

Плоским движением твердого тела называется такое его движение, при котором расстояния от точек этого тела до некоторой заданной плоскости остаются постоянными. Значит, вектор скорости точек должен быть параллелен плоскости, а вектор угловой скорости перпендикулярен ей.

Пусть движение происходит параллельно плоскости Oxy. Тогда подвижную систему координат обозначим $Ox'y'$. Оси Oz и Oz' параллельны.



Выразим направляющие косинусы.

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi,$$

$$a_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi, \qquad a_{22} = \cos\varphi,$$

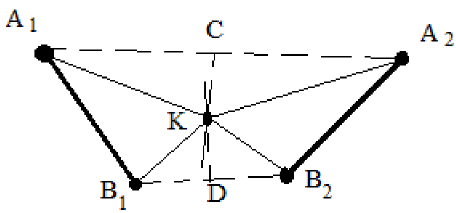
$$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0, \qquad a_{33} = 1.$$

Таким образом, можно выразить координаты

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi. \end{cases} \tag{7.2}$$

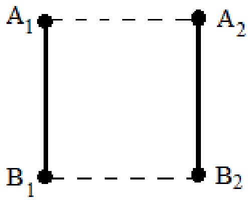
Следовательно, движение тела определено, если заданы функции $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Эти уравнения зададут движение плоской фигуры, а чтобы получить движение твердого тела, нужно добавить еще постоянную координату z.



Рассмотрим положение некоторого отрезка A_1B_1. После поворота он стал отрезком A_2B_2. С и D – середины A_1A_2 и B_1B_2. Проведем к ним перпендикуляры. Они пересекутся в точке К. Очевидно, что $KA_1 = KA_2$, $KB_1 = KB_2$. Так как $A_1B_1 = A_2B_2$ по условию, то

$$\Delta KA_1B_1 = \Delta KA_2B_2.$$

Точка K называется *центром конечного вращения*, потому что мы повернули отрезок A_1B_1 вокруг этого центра. Другое его название: *мгновенный центр скоростей* (его скорость в данный момент равна нулю). При поступательном движении считается, что центр конечного вращения находится на бесконечно удаленном расстоянии.



Всякое плоско-параллельное движение можно представить себе как последовательность поворотов на бесконечно малые углы вокруг центров конечного вращения.

Если речь идет о плоско-параллельном движении тела, а не фигуры, то вместо центра вращения следует говорить *ось вращения* (или *мгновенная ось вращения*). Она проходит через точку K

перпендикулярно плоскости, параллельно которой происходит движение.

Рассмотрим скорости тела при плоско-параллельном движении. В подвижной системе координат $\vec{\rho} = \overrightarrow{\rho_0} + \vec{r}$, поэтому

$$\vec{v} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\overrightarrow{\rho_0}} + \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Угловая скорость имеет координаты $\vec{\omega}(0, 0, \omega)$, так что

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i'} & \overrightarrow{j'} & \overrightarrow{k'} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\dot{\varphi} y' \overrightarrow{i'} + \dot{\varphi} x' \overrightarrow{j'}.$$

Начальная скорость $\overrightarrow{v_0}(\dot{x_0},\ \dot{y_0},\ 0)$, но это в неподвижной системе координат. Чтобы перейти в подвижную систему координат, воспользуемся формулами перевода (7.2).

$$v'_{0x} = \dot{x_0} \cos\varphi - \dot{y_0} \sin\varphi,$$
$$v'_{0y} = \dot{x_0} \sin\varphi + \dot{y_0} \cos\varphi,$$
$$v'_{0z} = 0.$$

Таким образом, в подвижной системе координат

$$\begin{cases} v'_x = \dot{x_0} \cos\varphi - \dot{y_0} \sin\varphi - \dot{\varphi} y', \\ v'_y = \dot{x_0} \sin\varphi + \dot{y_0} \cos\varphi + \dot{\varphi} x', \\ v'_z = 0. \end{cases}$$

В неподвижной системе координат $\vec{r} = \vec{\rho} - \overrightarrow{\rho_0}$, поэтому $\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\rho} - \overrightarrow{\rho_0})$. Координаты начальной скорости в неподвижной системе координат приведены выше, так что осталось вычислить только второе слагаемое.

$$\vec{\omega} \times (\vec{\rho} - \overrightarrow{\rho_0}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}$$
$$= -\dot{\varphi}(y - y_0)\vec{i} + \dot{\varphi}(x - x_0)\vec{j}.$$

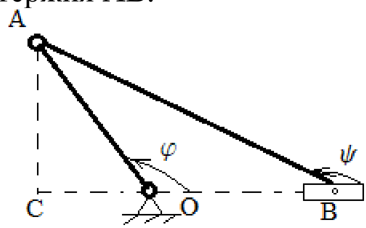
Следовательно, в неподвижной системе координат

$$\begin{cases} v_x = \dot{x_0} - \dot{\varphi}(y - y_0), \\ v_y = \dot{y_0} + \dot{\varphi}(x - x_0), \\ v_z = 0. \end{cases}$$

Эти формулы показывают, что плоско-параллельное движение можно представить как сумму двух движений: поступательного и вращательного.

Примеры решения задач.

Задача 1. Стержень ОА движется с постоянной угловой скоростью ω_1. Длина стержня $|OA| = r,\ |AB| = l$, задан также угол φ. Найти угловую скорость и ускорение стержня АВ.



Решение. По определению угловая скорость стержня АВ $\omega_2 = \dot{\psi}$. Необходимо выразить угол ψ через угол φ. Из рисунка видно, что

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi = \frac{|AC|}{r}, \quad \sin(\pi - \psi) = \sin\psi = \frac{|AC|}{l},$$

а значит

$$r\sin\varphi = l\sin\psi.$$

Продифференцируем это равенство по времени. Тогда

$$r\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = l\cos\psi \cdot \dot{\psi}. \quad (7.3)$$

$$\dot{\psi} = \omega_2 = \frac{r\cos\varphi}{l\cos\psi}\omega_1.$$

Поскольку $\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$, то по формулам тригонометрии $\cos\psi = -\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}(\sin\varphi)^2}$ (знак минус ставим потому, что угол ψ очевидно тупой). В таком случае

$$\omega_2 = \dot{\psi} = -\frac{\omega_1 r\cos\varphi}{l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}(\sin\varphi)^2}} = -\frac{\omega_1\cos\varphi}{\sqrt{\frac{l^2}{r^2} - (\sin\varphi)^2}}.$$

Для нахождения углового ускорения продифференцируем равенство (7.3) второй раз. Тогда получим

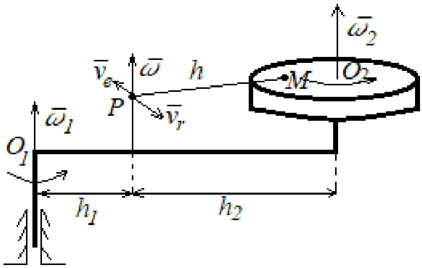
$$-r\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi\,\ddot{\varphi} = -l\sin\psi\,\dot{\psi}^2 + l\cos\psi\,\ddot{\psi}.$$

Очевидно, что $\dot{\varphi}^2 = \omega_1^2$, а $\ddot{\varphi} = 0$, так как стержень ОА движется с постоянной угловой скоростью. Таким образом, из этого уравнения, используя полученные ранее соотношения, можем выразить угловое ускорение.

$$\ddot{\psi} = \varepsilon_2 = \frac{l \sin\psi\, \dot{\psi}^2 - r \sin\varphi\, \omega_1^2}{l \cos\psi},$$

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \frac{r \sin\varphi\, (\cos\varphi)^2 \dfrac{1}{\dfrac{l^2}{r^2} - (\sin\varphi)^2} - r \sin\varphi}{-l\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}(\sin\varphi)^2}}.$$

Задача 2 (сложение вращений вокруг параллельных осей). Пусть некоторый диск участвует в двух вращениях в одном направлении (см. рисунок).



Т. к. это плоское движение, то должна существовать мгновенная ось вращения, параллельная осям составных вращений. Тогда для любой точки M $v_M = \omega h$. Для нахождения оси рассмотрим точку P, жестко связанную с телом и лежащую между осями так, что

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Тогда $\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ по теореме сложения скоростей. Если вращение со скоростью ω_2

считать относительным, а со скоростью ω_1 переносным, то

$$v_P = \omega_1 h_1 - \omega_2 h_2 = \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} h_1 - h_2\right)$$

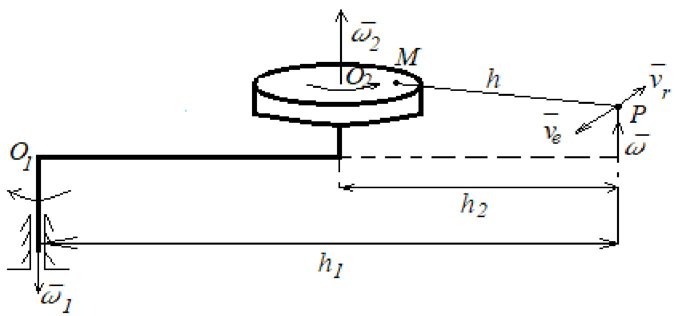
$$= \omega_2 \left(\frac{h_2}{h_1} h_1 - h_2\right) = 0.$$

Т. е. через точку P проходит мгновенная ось вращения. Тогда скорость точки O_2 $v_{O_2} = \omega h_2$ и $v_{O_2} = \omega_1(h_1 + h_2)$, следовательно

$$\omega h_2 = \omega_1(h_1 + h_2),$$

$$\omega = \omega_1 \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) = \omega_1 \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \omega_1 + \omega_2.$$

Пусть теперь вращение происходит в разные стороны, причем $\omega_1 < \omega_2$.



Точка P делит расстояние между осями внешним образом в том же отношении

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Тогда

$$v_P = \omega_1 h_1 - \omega_2 h_2 = 0.$$

$$v_{O_2} = \omega h_2 = \omega_1(h_1 - h_2),$$

$$\omega = \omega_1 \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) = \omega_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right) = \omega_2 - \omega_1.$$

Когда $\omega_1 = \omega_2$, мы имеем так называемую *пару вращений*. Результирующее движение тела в этом случае поступательное, скорости всех точек тела одинаковы и определяются по формуле Эйлера

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_{O_2}} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

8. Ускорения точек тела при плоско-параллельном движении.

Как известно из физики, ускорение любой точки тела является производной от ее скорости. В нашем случае

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v_0 +} \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$
$$= \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Разложим вектор ускорения по осям подвижной и неподвижной системы координат. В подвижной системе координат, очевидно, $\overrightarrow{a_0} = a'_{0x}\overrightarrow{i'} + a'_{0y}\overrightarrow{j'} + a'_{0z}\overrightarrow{k'}$, где по формуле (7.2)

$$a'_{0x} = \ddot{x_0} \cos\varphi - \ddot{y_0} \sin\varphi\,,$$
$$a'_{0y} = \ddot{x_0} \sin\varphi + \ddot{y_0} \cos\varphi\,,$$
$$a'_{0z} = 0.$$

Второе слагаемое (с угловым ускорением) тоже нетрудно вычислить.

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i'} & \overrightarrow{j'} & \overrightarrow{k'} \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\ddot{\varphi} y' \overrightarrow{i'} + \ddot{\varphi} x' \overrightarrow{j'}.$$

Для вычисления $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ воспользуемся формулой векторной алгебры $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$. В нашем случае

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot \omega^2.$$

Легко установить, что $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \dot{\varphi} z'$, $\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \dot{\varphi}^2 z' \overrightarrow{k'}$, $\vec{r}\omega^2 = \dot{\varphi}^2 x' \overrightarrow{i'} + \dot{\varphi}^2 y' \overrightarrow{j'} + \dot{\varphi}^2 z' \overrightarrow{k'}$. Таким образом,

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\dot{\varphi}^2 x' \overrightarrow{i'} - \dot{\varphi}^2 y' \overrightarrow{j'} + (\dot{\varphi}^2 z' - \dot{\varphi}^2 z') \overrightarrow{k'}.$$

Собирая формулы вместе, получим

$$a'_x = \ddot{x}_0 \cos\varphi - \ddot{y}_0 \sin\varphi - \ddot{\varphi} y' - \dot{\varphi}^2 x',$$
$$a'_y = \ddot{x}_0 \sin\varphi + \ddot{y}_0 \cos\varphi + \ddot{\varphi} x' - \dot{\varphi}^2 y',$$
$$a'_z = 0.$$

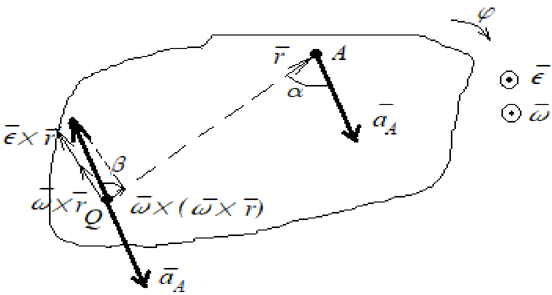
В неподвижной системе координат та же векторная формула раскладывается по-другому. Прежде всего, ускорение полюса $\overrightarrow{a_0}(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, 0)$,

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times (\vec{\rho} - \overrightarrow{\rho_0}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = -\ddot{\varphi}(y - y_0)\vec{i} + \ddot{\varphi}(x - x_0)\vec{j}.$$

Кроме того, $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \dot{\varphi}(z - z_0)$, $\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \dot{\varphi}^2 (z - z_0)\vec{k}$, $\vec{r}\omega^2 = \dot{\varphi}^2(x - x_0)\vec{i} + \dot{\varphi}^2(y - y_0)\vec{j} + \dot{\varphi}^2(z - z_0)\vec{k}$. Аналогичным образом собирая все формулы вместе, получим,

$$a_x = \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi}(y - y_0) - \dot{\varphi}^2(x - x_0),$$
$$a_y = \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi}(x - x_0) - \dot{\varphi}^2(y - y_0),$$
$$a_z = \dot{\varphi}^2(z - z_0) - \dot{\varphi}^2(z - z_0) = 0.$$
Таким образом, если заданы $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, мы можем определить ускорение любой точки тела в подвижной и неподвижной системах координат.

При любом непоступательном движении тела существует точка, ускорение которой в данный момент движения равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*.



Пусть A – некоторая точка твердого тела, имеющая ускорение $\overrightarrow{a_A}$. Проведем луч из точки A под углом α к направлению вектора ускорения, откладывая его в сторону вращения, если оно ускоренное. При этом
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$
На этом луче выберем точку Q на расстоянии

$$|QA| = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Определим ускорение точки Q. Согласно формуле для ускорения

$$\overrightarrow{a_Q} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \qquad \vec{r} = \overrightarrow{QA}.$$

По правилам векторной алгебры можем вычислить модули второго и третьего слагаемых в правой части формулы.

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon \cdot |QA|,$$

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 \cdot |QA|.$$

Из рисунка видно, что

$$\left|\vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right)\right| = \sqrt{\varepsilon^2 |QA|^2 + \omega^4 |QA|^2} = |QA|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

Легко также определить угол β.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}|}{|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})|} = \frac{\varepsilon \cdot |QA|}{\omega^2 \cdot |QA|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Значит, $\beta = \alpha$, вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ равен по модулю вектору $\overrightarrow{a_A}$ и противоположен ему по направлению. Ускорение точки Q, таким образом, равно нулю.

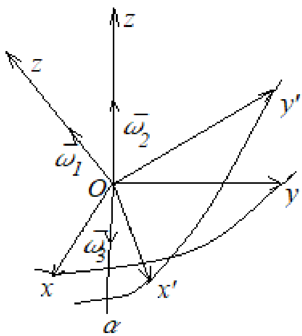
Если принять мгновенный центр ускорений за полюс, то при плоском движении ускорение любой точки можно найти как ускорение во вращательном движении вокруг этого центра.

9. Сферическое движение твердого тела.
Общий случай движения твердого тела.

Сферическим называют такое движение твердого тела, при котором одна из точек тела во все время движения остается неподвижной. Если задан закон изменения углов Эйлера от времени

$$\varphi = \varphi(t), \qquad \psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t),$$

то сферическое движение можно рассматривать как три одновременно происходящих движения вокруг осей прецессии, нутации и собственного вращения. Их угловые скорости $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $\omega_2 = \dot{\psi}$, $\omega_3 = \dot{\theta}$.



Скорость любой точки твердого тела определяется по той же формуле $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} + \overrightarrow{\omega_3},$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases}$$

Мгновенная ось вращения – геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Поскольку это означает, что $\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$, то вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ должен быть параллелен радиус-векторам $\vec{r}$ точек этой оси. Из аналитической геометрии известно, что тогда

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z},$$

а это уравнение прямой в пространстве.

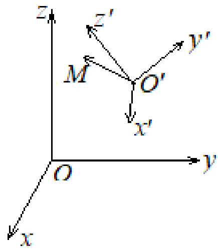
Ускорения точек твердого тела вычисляются по той же формуле, что и для вращения тела вокруг неподвижной оси. Разница в том, что вектор $\vec{\omega}$ имеет другой смысл.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Рассмотрим теперь общий случай движения твердого тела, когда меняются со временем три координаты полюса O' и три угла Эйлера.

$$x_0 = x_0(t), \qquad y_0 = y_0(t), \qquad z_0 = z_0(t),$$
$$\varphi = \varphi(t), \qquad \psi = \psi(t), \qquad \theta = \theta(t).$$

Теорема. Скорость любой точки твердого тела в общем случае его движения равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в сферическом движении вокруг полюса.



Доказательство. По теореме сложения скоростей

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}.$$

Но $\overrightarrow{v_r} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$, а $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_{O'}}$ и является скоростью полюса. Таким образом,

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$$

и теорема доказана.

Следует отметить, что угловая скорость имеет три координаты, разные в разных системах: $\vec{\omega}\left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$ в подвижной системе координат, $\vec{\omega}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)$ в неподвижной системе координат.

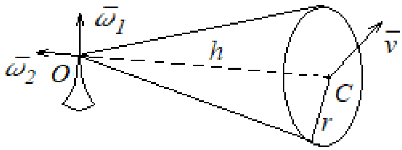
Ускорение твердого тела так же вычисляется по обычной формуле

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v_{O'}}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \overrightarrow{a_{O'}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v},$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{a_{O'}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Т. е. ускорение любой точки твердого тела в общем случае его движения равно геометрической сумме трех ускорений: ускорения полюса, касательного и нормального ускорений.

Примеры решения задач.

Задача. Круглый конус с радиусом основания r и высотой h катится без скольжения по поверхности стола. Вершина конуса закреплена шарнирно в точке O на уровне точки C – центра основания конуса. Точка C движется с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найти угловую скорость $\vec{\omega}$ относительно стола, а также угловое ускорение.



Решение. Из рисунка очевидно, что $\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2}$. С одной стороны, точка C совершает вращение вокруг точки O, поэтому

$$v = \omega_1 h, \qquad \omega_1 = v/h.$$

С другой стороны, конус вращается вокруг своей оси, поэтому

$$v = \omega_2 r, \qquad \omega_2 = v/r.$$

Можно легко определить угол между $\overrightarrow{\omega_1}$ и $\overrightarrow{\omega_2}$.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v}{h} \cdot \frac{r}{v} = \frac{r}{h}.$$

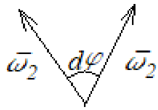
Таким образом, вектор $\vec{\omega}$ по направлению совпадает с образующей конуса. В этом случае

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = v\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Перейдем теперь к угловому ускорению. Очевидно, что

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2}) = \frac{d\overrightarrow{\omega_2}}{dt},$$

поскольку вектор $\overrightarrow{\omega_1}$ имеет постоянное направление. Но, с другой стороны, скорость поворота вектора $\overrightarrow{\omega_2}$ вокруг точки O зависит как раз от величины $\overrightarrow{\omega_1}$. Это можно записать следующим образом



$$d\omega_2 = \omega_2 d\varphi = \omega_2 \cdot \omega_1 dt,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_2 \cdot \omega_1 = \frac{v^2}{rh}.$$

10. Основные законы динамики. Уравнения движения материальной точки.

В кинематике речь в основном шла о движении геометрических объектов, теперь перейдем к рассмотрению движения материальных тел. Основной характеристикой тел является их *масса*. Единица измерения: *кг*. Величина $\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ определяет *среднюю плотность тела*, если Δm - его масса, а ΔV – объем. Тогда *плотность тела в точке* вычисляется с помощью предела.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Величина $\rho = \rho(x, y, z)$. Если $\rho = const$, то тело называется *однородным*. Единица измерения плотности: $\text{кг}/\text{м}^3$.

Пусть тело движется поступательно со скоростью $\vec{v}$. Если его масса m, то $m\vec{v}$ - *количество движения* тела. Это векторная величина, совпадающая по направлению со скоростью. Единица измерения: $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

Характер движения тела зависит еще и от внешних условий. Эти условия, заставляющие тело изменять свое движение, называются силами. Ввести в механику силы мы можем только с помощью некоторых положений, каковыми являются законы Ньютона.

Первый закон Ньютона (закон инерции): если на тело не действуют силы, то оно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Этот закон позволяет определить, когда на тело действует сила.

Второй закон Ньютона (об ускорении и силе): сила является векторной величиной, совпадающей по направлению с ускорением и при этом равная произведению массы тела на ускорение.

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Если на тело действует несколько сил, то $\vec{F}$ - их геометрическая сумма. Второй закон позволяет вычислять силы. Сила характеризуется точкой приложения, модулем и направлением.

Третий закон Ньютона (о действии и противодействии): источником силы $\vec{F}$, действующей на тело массы m, служит некоторое другое тело массы m_1, на которое действует сила $\overrightarrow{F_1}$, равная по модулю, но противоположная по направлению силе $\vec{F}$.

$$\overrightarrow{F_1} = -\vec{F}.$$

Силу $\vec{F}$ называют *действием*, а $\overrightarrow{F_1}$ - *противодействием*. Этот закон позволяет определить источник каждой силы. Ведь если тело движется, то подразумевается, что около него находятся и другие тела. Если бы тело было одно, то не было бы оснований считать, что оно движется.

Основное уравнение динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ называют еще *уравнением движения* точки в векторной форме. Оно эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям движения. В декартовой системе координат эти уравнения записываются в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z, \end{cases}$$

а при естественном способе задания (см. (2.2)) необходимо записать:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_s, \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases}$$

Сила, действующая на частицу, может зависеть от времени, положения частицы и ее скорости: $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. *Прямая задача динамики* состоит в том, чтобы по данному закону движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ найти силу $\vec{F}$. Эта задача решается просто: надо продифференцировать $\vec{r}$ два раза и подставить в уравнение динамики. *Обратная задача динамики*: известной является сила $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$ и начальные условия $\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0}$ в момент времени t_0; требуется найти $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этой задаче требуется решать дифференциальные уравнения движения.

Пусть систему дифференциальных уравнений движения нам удалось заменить равносильной

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \\ \frac{d}{dt}\varphi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \\ \frac{d}{dt}\varphi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \end{cases}$$

Тогда эту систему легко проинтегрировать и получить следующее

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_1, \\ \varphi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_2, \\ \varphi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_3, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 - константы. Это так называемые *первые интегралы* дифференциальных уравнений движения.

Допустим далее, что систему первых интегралов мы тоже можем свести к равносильной:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vartheta_1(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\vartheta_2(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\vartheta_3(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = 0, \end{cases}$$

а затем тоже проинтегрировать ее.

$$\begin{cases} \vartheta_1(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = C_4, \\ \vartheta_2(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = C_5, \\ \vartheta_3(t,x,y,z,C_1,C_2,C_3) = C_6, \end{cases}$$

где C_4, C_5, C_6 - константы. Это *вторые интегралы* дифференциальных уравнений движения, которые не содержат скоростей. Они определяют функции x, y, z

$$\begin{cases} x = x(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6), \\ y = y(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6), \\ z = z(t,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6), \end{cases}$$

которые являются *общим решением* дифференциальных уравнений движения. Чтобы найти *частное решение*, надо воспользоваться начальными условиями

$$x_0 = x(t_0,C_1,\cdots C_6), \quad v_{0x} = \dot{x}(t_0,C_1,\cdots C_6),$$
$$y_0 = y(t_0,C_1,\cdots C_6), \quad v_{0y} = \dot{y}(t_0,C_1,\cdots C_6),$$
$$z_0 = z(t_0,C_1,\cdots C_6), \quad v_{0z} = \dot{z}(t_0,C_1,\cdots C_6)$$

и вычислить с их помощью все произвольные постоянные.

Таким образом решение задачи об определении движения по заданной силе и начальным данным приводится к нахождению некоторого частного решения уравнений движения.

11. Примеры решения основных задач динамики.

Рассмотрим простейший случай прямолинейного движения частицы вдоль оси *Ox*. Т.е. уравнение траектории имеет вид

$$\begin{cases} y = const, \\ z = const \end{cases}$$

и, следовательно, необходимо положить $F_y = 0, F_z = 0$. Но этого условия недостаточно, т.к. дифференциальные уравнения $\ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0$ имеют решения

$$y = at + \alpha, \qquad z = bt + \beta,$$

где

$$y|_{t=t_0} = a = \dot{y_0}\ , \ z|_{t=t_0} = b = \dot{z_0}\ .$$

Следовательно, траектория частицы будет прямолинейной, если сила, приложенная к ней, имеет постоянное направление и начальная скорость параллельна этому направлению. В виде формул это можно записать

$$\begin{cases} F_y = 0, F_z = 0, \\ \dot{y_0} = 0, \dot{z_0} = 0. \end{cases}$$

Тогда в проекции на ось *Ox* основное уравнение динамики имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad F_x = F_x(t, x, \dot{x}).$$

Рассмотрим некоторые случаи решения этого уравнения.

1. *Движение под действием силы, зависящей лишь от времени*. Если $F_x = F_x(t)$, то уравнение решается простым интегрированием. Пример: *прямолинейное движение весомой частицы*. Если ось *Ox* направить вертикально вниз, то

$$m\ddot{x} = mg, \qquad \ddot{x} = g.$$

Проинтегрируем это уравнение первый раз и найдем произвольную постоянную из начальных условий.

$$\dot{x} = gt + C_1, \qquad v_0 = gt_0 + C_1,$$
$$C_1 = v_0 - gt_0.$$

Подставив произвольную постоянную в дифференциальное уравнение, можем записать

$$\dot{x} = g(t - t_0) + v_0.$$

Проинтегрировав это уравнение второй раз и найдя произвольную постоянную, получим уравнение прямолинейного движения частицы под действием силы тяжести.

$$x = v_0 t + \frac{g(t - t_0)^2}{2} + C_2,$$
$$x_0 = v_0 t_0 + C_2, \qquad C_2 = x_0 - v_0 t_0,$$
$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Если $v_0 > 0$, то с самого начала движения частица падает вниз, если же $v_0 < 0$, то до некоторого момента времени она движется вверх, достигает максимальной высоты и затем падает вниз.

2. *Движение под действием силы, зависящей лишь от положения частицы*. Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} = f(x).$$

Чаще всего это уравнение решается как уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Но есть и другой способ:

умножение обеих частей равенства на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда получим

$$\dot{x}\ddot{x}dt = f(x)dx$$

и можем в левой чисти равенства произвести внесение под знак дифференциала и затем проинтегрировать уравнение.

$$\dot{x}d(\dot{x}) = f(x)dx,$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \int f(x)dx = \varphi(x) + C,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\varphi(x) + C}.$$

Далее применяется метод разделения переменных.

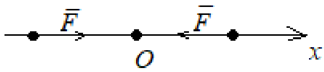
Пример: *прямолинейное движение частицы под действием силы притяжения к неподвижному центру прямо пропорционально расстоянию*. Если коэффициент пропорциональности принять равным k^2m, то модуль силы притяжения к неподвижному центру можно записать в виде

$$F = k^2mr,$$

где r – расстояние от частицы до начала координат, т.е. до центра притяжения. В проекции на ось Ox $F_x = \pm k^2mx$, а поскольку угол между силой притяжения и осью равен π, получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = -k^2mx$$

или $\ddot{x} + k^2x = 0$.



Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, как известно, получается из решения квадратного характеристического уравнения. В нашем случае

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Тогда $\dot{x}(t) = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$. Пусть при $t=0$ $x = x_0$ $v = v_0$. Тогда, подставляя начальные условия в формулы для координаты и скорости, получим

$$x_0 = C_1, \qquad v_0 = C_2 k.$$

И, следовательно, $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/k$. Таким образом,

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Это решение можно записать в другом виде, если положить $C_1 = A \sin \alpha$, $C_2 = A \cos \alpha$. В таком случае

$$x(t) = A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt$$
$$= A \sin(kt + \alpha).$$

Мы получили уравнение *простых гармонических колебаний*. При такой форме записи *A* – *амплитуда* колебаний, *α*- *начальная фаза* колебаний, *k* – *циклическая* или *круговая частота*.

3. *Движение под действием силы, зависящей лишь от скорости частицы*. Пусть

$$m\ddot{x} = f(\dot{x}).$$

Тогда можно разделить переменные и проинтегрировать уравнение первый раз.

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}),$$

$$\frac{m}{f(\dot{x})}d\dot{x} = dt, \qquad \varphi(\dot{x}) = t + C_1.$$

Если это уравнение удастся разрешить и записать в виде $\dot{x} = \vartheta(t + C_1)$, то можно еще раз разделить переменные и проинтегрировать второй раз.

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta(t + C_1), \qquad dx = \vartheta(t + C_1)dt,$$

$$x = \int \vartheta(t + C_1)dt = \sigma(t + C_1) + C_2.$$

Если же этот способ не годится (нельзя выразить $\dot{x}$), то можно решить дифференциальное уравнение с помощью домножения на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда тоже можно провести разделение переменных и интегрирование.

$$m\dot{x}\ddot{x}dt = f(\dot{x})dx,$$

$$\frac{m\dot{x}d(\dot{x})}{f(\dot{x})} = dx, \qquad \delta(\dot{x}) = x + C_3.$$

Допустим, в полученном уравнении удастся выразить $\dot{x}$. Тогда можно проинтегрировать вторично.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \mu(x + C_3), \qquad \frac{dx}{\mu(x + C_3)} = dt,$$

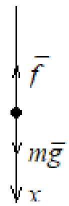
$$\Omega(x + C_3) = t + C_4.$$

Если же и этим способом не удается выразить $\dot{x}$, то можно использовать оба способа и из полученных половинок решений составить систему

$$\begin{cases}\varphi(\dot{x}) = t + C_{1,}\\ \delta(\dot{x}) = x + C_3.\end{cases}$$

В этой системе уравнения дополняют друг друга, т.к. первое описывает зависимость скорости от времени, а второе – от координаты.

Пример: *прямолинейное движение весомой частицы в среде, сопротивляющейся пропорционально первой степени скорости*. Пусть на падающую частицу, помимо силы тяжести, действует еще сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности k^2m. Тогда, если ось *Ox* направить вниз, дифференциальное уравнение движения запишется следующим образом:



$$m\ddot{x} = mg - k^2m\dot{x}.$$

Его легко можно решить с помощью разделения переменных.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g - k^2\dot{x}, \frac{d\dot{x}}{g - k^2\dot{x}} = dt,$$

$$-\frac{1}{k^2}\ln|g - k^2\dot{x}| = t + C_1,$$

$$g - k^2\dot{x} = C_1e^{-k^2t}.$$

Пусть при $t=0$ $v = v_0$. Тогда $C_1 = g - k^2v_0$ и можем записать

$$g - k^2\dot{x} = (g - k^2 v_0)e^{-k^2 t}.$$

Выразим скорость и снова разделим переменные.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{k^2} - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t},$$

$$dx = \left[\frac{g}{k^2} - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t}\right]dt,$$

$$x = \frac{g}{k^2}t - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)e^{-k^2 t} + C_2.$$

Если при $t=0$ $x = x_0$, то легко вычислить, что $C_2 = x_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)$, и таким образом получим ответ

$$x = x_0 + \frac{g}{k^2}t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)\left(e^{-k^2 t} - 1\right).$$

Итоговый результат показывает, что движение частицы асимптотически приближается к равномерному со скоростью g/k^2, на зависящей от начальных условий.

12. Колебания при сопротивлении среды. Вынужденные колебания без сопротивления.

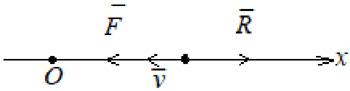
Пусть материальная точка массы m движется под действием силы притяжения к неподвижному центру O

$$\vec{F} = -k^2 m\vec{r},$$

испытывая при этом силу сопротивления

$$\vec{R} = -2mn\vec{v},$$

где n – некоторый коэффициент пропорциональности. Проведем ось x через неподвижный центр и начальное положение точки. Тогда второй закон Ньютона в проекции на ось Ox будет иметь вид



$$m\ddot{x} = -k^2 mx - 2mn\dot{x}$$

или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$ Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4k^2}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Если $n<k$ (случай малого сопротивления), то корни характеристического уравнения комплексные: $\lambda_{1,2} == -n \pm \sqrt{k^2 - n^2}i$. Решение дифференциального уравнения в этом случае запишется в виде

$$x(t) = e^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t\right)$$

или

$$x(t) = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha\right).$$

Множитель e^{-nt} показывает, что амплитуда колебаний со временем уменьшается. Такие колебания называются *затухающими*. Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}},$$

где T – период свободных колебаний без сопротивления. Если $n \ll k$, то сопротивление практически не влияет на период колебаний.

Определим максимальное отклонение точки от положения равновесия для двух моментов времени, отличающихся на период T_1.

$$x_{max}(t_1) = Ae^{-nt_1},$$

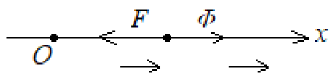
$$x_{max}(t_1 + T_1) = Ae^{-n(t_1+T_1)}$$

$$= e^{-nT_1}x_{max}(t_1).$$

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-nT_1}$, который называется *декрементом* затухающих колебаний. Величина $|\ln q| = nT_1$ называется *логарифмическим декрементом*, а n – *коэффициентом затухания*.

Рассмотрим теперь задачу, когда на точку, помимо силы притяжения к неподвижному центру, действует еще внешняя сила $\Phi = mh\sin pt$. Тогда дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x будет иметь вид:

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin pt.$$



Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Оно неоднородное, поэтому его решение состоит из двух слагаемых: общего решения и частного решения. Для нахождения общего решения составляем и решаем характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 + k^2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm ki.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$x_{\text{общ}}(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \alpha)$$

и описывает свободные колебания точки. Частное решение дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x_{\text{ч}} = a \cos pt + b \sin pt.$$

Если подставить эту формулу в неоднородное дифференциальное уравнение, вычислить производные и приравнять соответствующие коэффициенты, то получим, что $x_{\text{ч}} = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$. Следовательно, полное решение дифференциального уравнения запишется следующим образом

$$x(t) = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Легко видеть, что это решение имеет смысл при $k \neq p$. В противном случае частное решение дифференциального уравнения придется искать в виде

$$x_{\text{ч}} = t(a \cos pt + b \sin pt), \qquad p = k.$$

Если определить неизвестные коэффициенты, то окончательное решение будет

$$x(t) = A\sin(kt+\alpha) - \frac{h}{2k}t\cos kt.$$

Возникает явление *резонанса*, которое характеризуется возрастанием амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний.

13. Криволинейное движение материальной точки. Траектории искусственных спутников Земли.

Пусть равнодействующая сил, действующих на частицу, такова, что

$$F_x = f_1(t, x, \dot{x}), \qquad F_y = f_2(t, y, \dot{y}),$$
$$F_z = f_3(t, z, \dot{z}).$$

Тогда

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_1(t, x, \dot{x}), \\ m\ddot{y} = f_2(t, y, \dot{y}), \\ m\ddot{z} = f_3(t, z, \dot{z}) \end{cases}$$

и каждое уравнение можно решать в отдельности.

Рассмотрим задачу о притяжении частицы неподвижным центром прямо пропорционально расстоянию, т.е. $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор. Тогда система дифференциальных уравнений движения имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k^2 x, \\ \ddot{y} = -k^2 y, \\ \ddot{z} = -k^2 z. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений было решено ранее в параграфе 11 (пункт 2). Остальные решаются аналогично, так что сразу можем записать ответ.

$$\begin{cases} x = x_0 \cos kt + \dfrac{v_{0x}}{k} \sin kt\,, \\ y = y_0 \cos kt + \dfrac{v_{0y}}{k} \sin kt\,, \\ z = z_0 \cos kt + \dfrac{v_{0z}}{k} \sin kt\,. \end{cases}$$

Направим ось *Ox* так, чтобы она проходила через начальное положение частицы. Тогда $y_0 = z_0 = 0$. Кроме того, проведем плоскость *Oxy* через направление начальной скорости, так что $\dot{z}_0 = 0$. Подстановка этих начальных данных в решение системы дифференциальных уравнений движения дает нам следующее

$$\begin{cases} x = x_0 \cos kt + \dfrac{v_{0x}}{k} \sin kt\,, \\ y = \dfrac{v_{0y}}{k} \sin kt\,, \\ z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, траектория движения частицы под действием силы притяжения к неподвижному центру – это плоская кривая. Из приведенных выше уравнений можно выразить

$$\sin kt = \frac{ky}{v_{0y}},$$

$$\cos kt = \frac{1}{x_0}\left(x - \frac{v_{0x}}{k} \cdot \frac{ky}{v_{0y}}\right).$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, можем записать уравнение траектории в плоскости *Oxy*.

$$\frac{k^2}{v_{0y}^2}y^2 + \frac{1}{x_0^2}\left(x - \frac{v_{0x}}{v_{0y}}y\right)^2 = 1.$$

Это уравнение кривой второго порядка. Чтобы было очевидно, что это за кривая, положим $v_{0x} = 0$. Тогда получим

$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{v_{0y}^2/k^2} = 1$ - уравнение эллипса.

Таким образом, искусственные спутники Земли, как частицы, притягивающиеся к неподвижному центру, движутся вокруг Земли по эллиптическим траекториям.

14. Относительное движение материальной точки.

Ранее была разобрана задача о сложном движении точки. Мы определяли абсолютное движение, если известно относительное и переносное. Но можно непосредственно определить относительное движение.

$$m\overrightarrow{a_a} = \vec{F}, \qquad \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c},$$

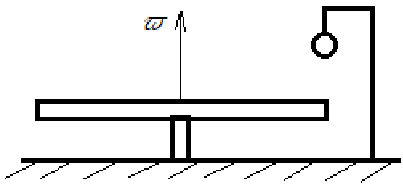
$$m\overrightarrow{a_r} = \vec{F} + (-m\overrightarrow{a_e}) + (-m\overrightarrow{a_c}).$$

Это *основное уравнение динамики относительного движения*. $(-m\overrightarrow{a_e})$ - *переносная сила инерции*, $(-m\overrightarrow{a_c})$ - *кориолисова сила инерции*. Обе силы инерции направлены противоположно соответствующим ускорениям.

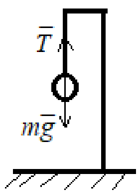
Если подвижная система координат совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение, то $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_c} = 0$ и $m\overrightarrow{a_r} = \vec{F}$. Системы отсчета, для которых это справедливо, называются *инерциальными*, а для которых несправедливо – *неинерциальными*.

Примеры решения задач.

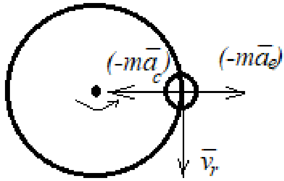
Задача 1. На поверхности стола находится горизонтальный диск, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Над диском висит шарик массой m. Рассмотреть поведение этого шарика в системе отсчета, связанной со столом (она предполагается инерциальной), и в системе, связанной с вращающимся с диском.



Решение. В системе отсчета, связанной со столом, шарик покоится.



В системе отсчета, связанной с диском



$$m\overrightarrow{a_r} = m\vec{g} + \vec{T} + (-m\overrightarrow{a_c}) + (-m\overrightarrow{a_e}).$$

Если записать это равенство в виде проекций, то получим следующее

$$ma_r = 2m\omega v_r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \overrightarrow{v_r}}\right) - m\omega^2 r,$$

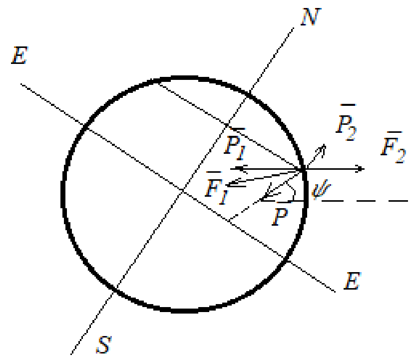
т.к. $a_e = \omega^2 r$ – центростремительное ускорение, $v_r = \omega r$. Таким образом

$$ma_r = 2m\omega^2 r - m\omega^2 r = m\omega^2 r,$$

$$a_r = \omega^2 r$$

и в системе отсчета, связанной с диском, шарик движется с ускорением, равным $\omega^2 r$.

Задача 2. Рассмотрим задачу о движении частицы по отношению к вращающейся Земле. Пусть неподвижная система координат связана с Солнцем, а подвижная с Землей. Определим, какие силы действуют на частицу.



На приведенном рисунке $\overrightarrow{F_1}$ - сила притяжения Земли. Она направлена приблизительно к центру Земли и является равнодействующей всех сил притяжения, с которыми действуют все точки земного шара. $\overrightarrow{F_2}$ - сила притяжения к Солнцу. Она направлена по прямой, соединяющей Солнце и Землю. По модулю

$$F_2 = k\frac{m \cdot m_c}{d^2},$$

где m – масса частицы, m_c - масса Солнца, d – расстояние от Земли до Солнца, k – гравитационная постоянная. $\overrightarrow{P_1}$ - сила инерции от вращения Земли вокруг Солнца. Можно вычислить, что

$$\overrightarrow{P_1} = m\overrightarrow{a_{\text{вр}}}, \qquad a_{\text{вр}} = \frac{F_2}{m} = k\frac{m_c}{d^2}.$$

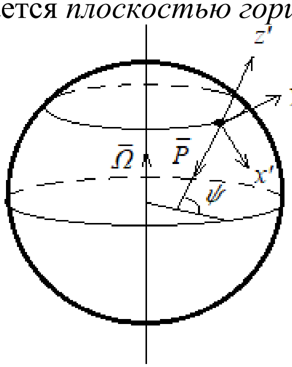
Таким образом, $P_1 = k\frac{mm_c}{d^2}$ и $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$.

Сила $\overrightarrow{P_2}$ является силой инерции от вращения Земли вокруг своей оси. Таким образом,

$$\overrightarrow{P_2} = m\overrightarrow{a_{\text{ц}}}, \qquad a_{\text{ц}} = r\Omega^2,$$

где $\Omega = 0.0000729$ рад/с – угловая скорость вращения Земли, r – расстояние от частицы до оси вращения. Вектор $\vec{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{P_2}$ называют силой тяжести, а вектор $\vec{g} = \vec{P}/m$ – ускорением силы тяжести.

Прямая, служащая основанием силы тяжести, называется *отвесной* или *вертикальной*, угол ψ - *географическая широта* места наблюдения. Плоскость, перпендикулярная отвесу и проходящая через точку его пересечения с поверхностью Земли, называется *плоскостью горизонта*.



Запишем уравнение относительного движения точки относительно Земли, учитывая кориолисову силу инерции.

$$m\overrightarrow{a_r} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_r},$$

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_r}.$$

Проинтегрируем один раз по времени. Тогда можем записать следующее равенство

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r} + \overrightarrow{v_{r0}},$$

где $\overrightarrow{v_{r0}}$ - начальная скорость. Дальнейшее интегрирование затруднено, поэтому воспользуемся следующим приемом. Найденное выражение для $\overrightarrow{v_r}$ подставим в уравнение относительного движения.

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \left(\vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r} + \overrightarrow{v_{r0}}\right),$$

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{g}t + 4\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) - 2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{r0}}.$$

Поскольку угловая скорость вращения Земли очень мала, то третье слагаемое в правой части приведенной формулы можно считать равным нулю. Если этим слагаемым пренебречь, то оставшуюся формулу можно проинтегрировать по времени два раза.

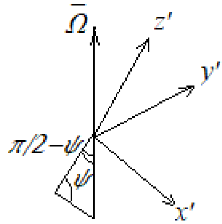
$$\overrightarrow{v_r} = \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{g}\frac{t^2}{2} - 2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{r0}}t + \overrightarrow{v_{r0}},$$

$$\vec{r} = \vec{g}\frac{t^2}{2} - \vec{\Omega} \times \vec{g}\frac{t^3}{3} - 2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{r0}}\frac{t^2}{2} + \overrightarrow{v_{r0}}t + \overrightarrow{r_0}.$$

Начальное положение $\overrightarrow{r_0} = 0$, т.к. точка в начальный момент времени находится в начале координат. Полученное векторное выражение запишем в проекциях. Поскольку вектора имеют координаты $\vec{\Omega}(-\Omega\cos\psi, 0, \Omega\sin\psi)$, $\vec{g}(0,0,-g)$, $\overrightarrow{v_{r0}}\left(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}\right)$, то можно вычислить по правилам векторной алгебры:

$$\vec{\Omega} \times \vec{g} = (0, -\Omega\, g\cos\psi, 0),$$

$$\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{r0}} = \left(-\Omega\, v_{y0}\sin\psi,\ \Omega\, v_{x0}\sin\psi + \Omega\, v_{z0}\cos\psi,\ -\Omega\, v_{y0}\cos\psi\right).$$



Если обозначить координаты радиус-вектора $\vec{r}(x', y', z')$, то для них можем записать следующие выражения.

$$\begin{cases} x' = -\Omega\, v_{0y} \sin\psi \cdot t^2 + v_{x0} t, \\ y' = \dfrac{\Omega g \cos\psi}{3} t^3 - \\ -\Omega\,(v_{0x} \sin\psi + v_{0z} \cos\psi) t^2 + v_{0y} t, \\ z' = \left(-\dfrac{g}{2} + \Omega\, v_{0y} \cos\psi\right) t^2 + v_{0z} t. \end{cases}$$

Следовательно, траектория частицы в общем случае не является плоской кривой. Если частица падает с нулевой начальной скоростью, то

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = \dfrac{\Omega\, g \cos\psi}{3} t^3, \\ z' = -\dfrac{g}{2} t^2. \end{cases}$$

Таким образом, движение происходит в плоскости, перпендикулярной меридиану. Частица падает не вертикально вниз, а отклоняется к востоку, т.к. $y'>0$. Если частица брошена вертикально вверх, то $v_{0x} = v_{0y} = 0, v_{0z} > 0$. Тогда для координат радиус-вектора справедливы равенства

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = \dfrac{\Omega\, g \cos\psi}{3} t^3 - \Omega\, v_{0z} \cos\psi \cdot t^2, \\ z' = -\dfrac{g}{2} t^2 + v_{0z} t. \end{cases}$$

Значит, движение опять происходит в плоскости, перпендикулярной меридиану. Когда точка прекратила движение вверх, то $\dot{z}' = -gt + v_{0z} = 0$, а следовательно $t = v_{0z}/g$. Если подставить этот момент времени в среднюю формулу системы, то получим

$$y' = \frac{\Omega\, g \cos\psi}{3} \cdot \frac{v_{0z}^3}{g^3} - \Omega\, v_{0z} \cos\psi \frac{v_{0z}^2}{g^2} = -\frac{2}{3} \frac{\Omega \cos\psi \cdot v_{0z}^3}{g^2}.$$

Таким образом точка отклоняется к западу, т.к. $y'<0$. Когда она окончит движение, то $z' = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0z} t = 0$, т.е. $t = 2v_{0z}/g$. В этом случае

$$y' = \frac{\Omega\, g \cos\psi}{3} \cdot \frac{8v_{0z}^3}{g^3} - \Omega\, v_{0z} \cos\psi \frac{4v_{0z}^2}{g^2} = -\frac{4}{3} \frac{\Omega \cos\psi \cdot v_{0z}^3}{g^2}.$$

Получается, что по окончании движения частица еще больше отклоняется к западу.

15. Механическая система.

Собрание материальных частиц в конечном или бесконечно большом числе называется *механической системой*, если движение каждой из частиц зависит от движения остальных. Когда частицы системы в любой момент времени могут занимать произвольное положение и иметь произвольные скорости, система называется *свободной*. В этом случае движение частицы свободной системы связано с движением остальных только потому, что приложенная к телу сила зависит от положения или скорости других частиц системы. Пример: три частицы, которые притягиваются друг к другу по закону Ньютона, составляют свободную механическую систему.

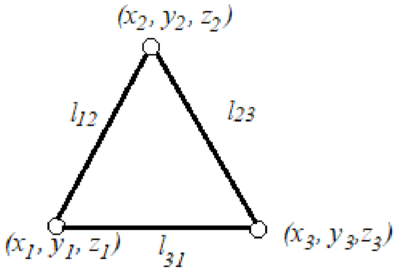
Если частицы системы не могут иметь произвольную скорость и занимать произвольное положение, система называется *несвободной*. Условия, налагаемые на движение частиц, называются *связями* этой системы. Тогда координаты и скорости частиц должны удовлетворять уравнениям или неравенствам, которые задают связи. Всякое положение системы, для которого координаты и скорости удовлетворяют уравнениям, называется *возможным для данного момента* t.

Примеры. 1. Точка может двигаться только по поверхности сферы радиуса R. Тогда её координаты (x, y, z) должны всегда удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

2. Рассмотрим три точки, соединенные между собой жесткими стержнями. Тогда, поскольку расстояния

между точками не могут изменяться, их координаты должны удовлетворять трем уравнениям связи



$$f_1 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - l_{23}^2 = 0,$$
$$f_2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - l_{31}^2 = 0,$$
$$f_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_{12}^2 = 0.$$

3. Система состоит из n точек, движущихся в плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Тогда координаты всех точек во все время движения должны удовлетворять уравнению плоскости:

$$f_i = ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Если на n точек наложено m связей, то *3n-m* называется *числом степеней свободы* системы. Примеры: свободная материальная точка имеет три степени свободы; две степени свободы, если она остается на плоскости или заданной поверхности (наложена одна связь); одну степень свободы, если она передвигается по прямой или кривой (наложены две связи). Две точки, соединенные стержнем, имеют пять степеней свободы ($n=2,\ m=1$). Три точки, соединенные стержнями – шесть степеней свободы ($n=3,\ m=3$).

Рассмотрим силы, действующие на некоторую точку k механической системы. Обычно их разделяют на два вида: $\overrightarrow{F_k^{(e)}}$ – *внешняя сила*, с которой на точку действуют тела, не входящие в систему; $\overrightarrow{F_k^{(\iota)}}$ – *внутренняя сила*, действующая со стороны других частиц системы. $\overrightarrow{F_k^{(e)}} + \overrightarrow{F_k^{(\iota)}} = \overrightarrow{F_k}$ – равнодействующая сила.

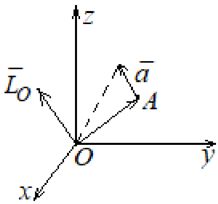
Кроме того, на точку действуют связи. Их можно изобразить как некоторую систему сил $\overrightarrow{R_k}$, которые называют *реакциями связи*. Тогда уравнения движения несвободной системы имеют вид

$$m_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{R_k}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Если предположить, что сила $\overrightarrow{R_k}$ известна, то движение несвободной точки должно совпасть с движением свободной точки под действием сил $\overrightarrow{F_k}$, $\overrightarrow{R_k}$. В этом состоит содержание *принципа освобождаемости*.

16. Момент вектора.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ с координатами (a_x, a_y, a_z), находящийся в точке $A(x_A, y_A, z_A)$. *Моментом вектора* $\vec{a}$ *относительно точки O (полюса)* называется



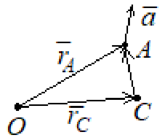
$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r_A} \times \vec{a} = \overrightarrow{OA} \times \vec{a}.$$

Или в координатном виде

$$\overrightarrow{L_O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(r_{Ay}a_z - r_{Az}a_y\right)\vec{i} + \left(r_{Az}a_x - r_{Ax}a_z\right)\vec{j} + \left(r_{Ax}a_y - r_{Ay}a_x\right)\vec{k}.$$

Если же момент нужно вычислить относительно точки $C(x_C, y_C, z_C)$, то



$$\overrightarrow{L_C} = \overrightarrow{CA} \times \vec{a} = (\vec{r_A} - \vec{r_C}) \times \vec{a}.$$

Или

$$\overrightarrow{L_C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Выведем формулу, связывающую моменты относительно двух полюсов. Очевидно, что

$$\overrightarrow{L_C} = (\vec{r_A} - \vec{r_C}) \times \vec{a} = \vec{r_A} \times \vec{a} - \vec{r_C} \times \vec{a} = \overrightarrow{L_O} - \vec{r_C} \times \vec{a}.$$

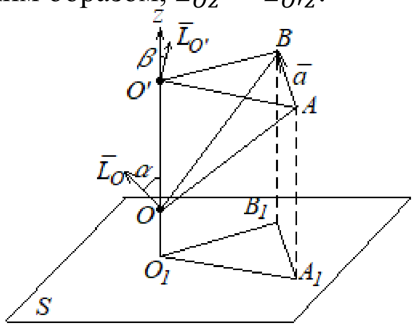
Рассмотрим теперь моменты вектора $\vec{a}$ относительно полюсов O и O', лежащих на одной оси z. Покажем, что проекции этих моментов на ось z одинаковы $(L_{Oz} = L_{O'z})$. Проведем плоскость S перпендикулярно оси z. Пусть $\alpha = \left(\widehat{L_O, Oz}\right)$. Тогда, учитывая, что векторное произведение – это площадь параллелограмма, получим

$$L_{Oz} = |\vec{r} \times \vec{a}| \cos\alpha = 2S_{\Delta OAB} \cos\alpha$$
$$= 2S_{\Delta O_1 A_1 B_1}.$$

Аналогичным образом, если $\beta = \left(\widehat{L_{O'}, Oz}\right)$, можно вычислить

$$L_{O'z} = 2S_{\Delta O'AB} \cos\beta = 2S_{\Delta O_1 A_1 B_1}.$$

И, таким образом, $L_{Oz} = L_{O'z}$.



Моментом вектора $\vec{a}$ относительно оси l называется проекция на эту ось момента данного вектора относительно любой точки O оси. В частности, моментом вектора $\vec{a}$ относительно координатных осей являются проекции на эти оси момента вектора относительно начала координат.

$$L_x = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ a_y & a_z \end{vmatrix}, \qquad L_y = \begin{vmatrix} z_A & x_A \\ a_z & a_x \end{vmatrix},$$
$$L_z = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ a_x & a_y \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вместо того, чтобы задавать вектор $\vec{a}$ (скользящий) двумя свободными векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{r_A}$, можно задать его свободными векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{L_O}$. Однако эти величины не являются независимыми, т.к.

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{L_O} = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{r_A} \times \vec{a}) = 0$$

или в координатном виде

$$a_x L_{Ox} + a_y L_{Oy} + a_z L_{Oz} = 0.$$

Рассмотрим теперь систему скользящих векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots, \overrightarrow{a_n}$. Тогда вектор $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}$ называется *главным вектором системы*, а $\overrightarrow{L_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_{Oi}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{a_i}$ – *главным моментом системы*. При смене полюса главный момент системы будет, разумеется, меняться.

$$\overrightarrow{L_{Ci}} = \overrightarrow{L_{Oi}} - \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{a_i}, \qquad \overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{L_C} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_{Ci}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_{Oi}} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{a_i}$$

$$= \overrightarrow{L_O} - \overrightarrow{r_C} \times \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}$$

$$= \overrightarrow{L_O} - \overrightarrow{r_C} \times \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{L_C} = \overrightarrow{L_O} - \overrightarrow{OC} \times \vec{a}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{L_C} = \overrightarrow{L_O}$ только если $\overrightarrow{OC} \times \vec{a} = 0$, т.е. $\overrightarrow{OC} \| \vec{a}$. Значит, геометрическим местом полюсов с равными главными моментами служит прямая, параллельная главному вектору системы.

17. Теорема об изменении количества движения.

Как известно, второй закон Ньютона имеет вид $m\vec{a} = \vec{F}$. Если предположить, что у материальной точки m=*const*, то можем записать

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

и таким образом

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Это и есть *теорема об изменении количества движения для материальной точки*. В координатном виде это векторное равенство даст нам систему из трех скалярных равенств.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \end{cases}$$

Можно записать этот закон в другой форме, если сначала домножить на dt ($d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$), а потом проинтегрировать по времени от некоторого начального момента до конечного. Тогда получим

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt.$$

Правая часть этого равенства называется *импульсом силы* за промежуток времени $(t_0,\ t)$. Таким образом равенство показывает, что изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно импульсу силы за этот промежуток времени.

Замкнутой системой частиц называют систему, на которую не действуют никакие посторонние тела (или их воздействие пренебрежимо мало). Согласно теореме, импульс системы может меняться только под действием внешних сил. Отсюда вытекает *закон сохранения импульса*: импульс замкнутой системы частиц остается постоянным, т.е. не меняется с течением времени.

$$m\vec{v} = const.$$

Закон изменения количества движения механической системы. Для каждой частицы механической системы второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{F_k^{(e)}} + \overrightarrow{F_k^{(i)}} + \overrightarrow{R_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\overrightarrow{F_k^{(e)}}$ – внешние силы, действующие на частицу, $\overrightarrow{F_k^{(i)}}$ – внутренние силы, $\overrightarrow{R_k}$ – реакции связи. Просуммируем это равенство по всем частицам системы.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^{(e)}} + \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^{(i)}} + \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{R_k}.$$

Тогда левую часть равенства можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{a_k} = \sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\overrightarrow{v_k}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{v_k}\right),$$

а в правой части равенства $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k^{(i)}} = 0$ по третьему закону Ньютона, $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k^{(e)}} = \overrightarrow{F^{(e)}}$ – равнодействующая внешних сил, $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{R_k} = \vec{R}$ – равнодействующая реакций связи. Следовательно, закон изменения количества движения механической системы запишется следующим образом

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{v_k}\right) = \overrightarrow{F^{(e)}} + \vec{R}.$$

Аналогично предыдущему, закон можно записать в интегральной форме, если считать, что $\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{v_k} = m\vec{v}$.

$$d(m\vec{v}) = \overrightarrow{F^{(e)}}dt + \vec{R}dt,$$

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F^{(e)}}dt + \int_{t_0}^{t} \vec{R}dt.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Человек массы m_1 находится на узком плоту массы m_2, который покоится на поверхности озера. Человек совершил перемещение $\Delta r'$ и остановился. Сопротивление воды пренебрежимо мало. Найти соответствующее перемещение Δr_2 плота относительно берега.

Решение. Человек и плот – замкнутая система, поэтому суммарный импульс не меняется и равен нулю.

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = 0,$$

где $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ - скорости человека и плота относительно берега. Но по теореме сложения скоростей

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v'},$$

где $\overrightarrow{v'}$ - скорость человека относительно плота. Т.к. все скорости направлены по одной прямой, можем записать систему уравнений без векторов.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \\ v_1 = v_2 + v'. \end{cases}$$

Из первого уравнения, таким образом, $v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$ и подставляя во второе уравнение получим

$$-\frac{m_2}{m_1} v_2 = v_2 + v', \qquad v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v'.$$

Следовательно,

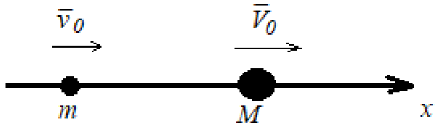
$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{dr'}{dt},$$

а поскольку $dr_2 \cong \Delta r_2,\ dr' \cong \Delta r'$, то

$$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta r'.$$

Отсюда видно, что перемещение плота Δr_2 не зависит от траектории движения человека.

Задача 2 (понятие об ударе). Рассмотрим задачу, когда две материальные точки массами m и M движутся со скоростями $\overrightarrow{v_0}$ и $\overrightarrow{V_0}$, сталкиваются и получают после соударения скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$. Надо найти скорости точек после взаимодействия.



Решение. Как бы ни происходил удар – упруго или неупруго –всегда верен третий закон Ньютона. Т.е.

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt,$$

$$M\vec{V} - M\overrightarrow{V_0} = -\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt,$$

где $\vec{F}$- сила соударения. Или (т.к. взаимодействие происходит по одной прямой, знак вектора можно опустить)

$$mv - mv_0 + MV - MV_0 = 0,$$

$$mv + MV = mv_0 + MV_0.$$

Для полного решения задачи нам нужно еще одно уравнение. Будем считать удар *абсолютно упругим*, при котором

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{MV_0^2}{2},$$

$$m(v^2 - v_0^2) = -M(V^2 - V_0^2).$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} m(v^2 - v_0^2) = -M(V^2 - V_0^2), \\ m(v - v_0) = -M(V - V_0). \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\begin{cases} v + v_0 = V + V_0, \\ m(v - v_0) = -M(V - V_0). \end{cases}$$

Теперь уже легко решить эту систему линейных уравнений. Ее решением являются следующие выражения

$$\begin{cases} v = \dfrac{m - M}{m + M} v_0 + \dfrac{2M}{m + M} V_0, \\ V = \dfrac{2m}{m + M} v_0 + \dfrac{M - m}{m + M} V_0. \end{cases}$$

Для двух равных масс (m=M) получим

$$v = V_0, \qquad V = v_0,$$

т.е. точки при взаимодействии обмениваются скоростями (столкновение бильярдных шаров). С другой стороны, если $m \ll M,$ то

$$v = -v_0 + 2V_0 = V_0 - (v_0 - V_0),$$
$$V = V_0.$$

Т.е. большая масса после соударения сохраняет скорость почти неизменной, а меньшая масса следует за большей со скоростью, отличающейся от последней на величину первоначальной относительной скорости обеих масс.

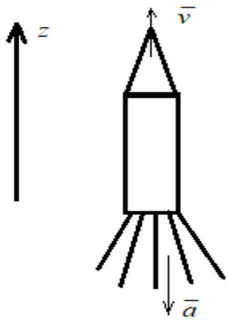
Рассмотрим еще случай абсолютно неупругого удара, т.е. считаем, что после соударения обе массы движутся вместе (v=V). Тогда

$$(m + M)V = mv_0 + MV_0,$$
$$v = V = \frac{mv_0 + MV_0}{m + M}.$$

Задача 3 (понятие о реактивном движении). Рассмотрим задачу о вертикальном полете ракеты. Пусть скорость истечения пороховых газов относительно ракеты $\vec{a}$ и масса вытекающих в секунду газов постоянна с течением времени. Движение совершается без трения с постоянной силой тяжести g. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. Надо составить зависимость высоты подъема от времени и определить высоту через t=10, 30, 50 секунд. Масса вытекающего топлива $\mu = \frac{1}{100} m_0$, $a = 2000\,\text{м/с}$.

Решение. Теорема об изменении импульса в данном случае выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt}(mv) - \mu a = -mg.$$



Кроме того, необходимо учесть, что масса ракеты меняется в течение полета из-за отработанного топлива.

$$\frac{dm}{dt} = -\mu$$

- уравнение для изменения массы. Проинтегрируем сначала это уравнение, считая, что в начальный момент времени масса ракеты была m_0. Тогда, очевидно, решением уравнения изменения массы будет следующая функция

$$m = m_0 - \mu t.$$

Подставив полученную функцию в уравнение изменения импульса, получим

$$\frac{d}{dt}\big((m_0-\mu t)v\big)-\mu a=-(m_0-\mu t)g.$$

Дифференцирование произведения даст нам в конце концов следующее дифференциальное уравнение

$$(m_0-\mu t)\frac{dv}{dt}-\mu v=\mu gt-m_0g+\mu a.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его методом вариаций произвольной постоянной. Для этого сначала отбросим правую часть и решим другое дифференциальное уравнение.

$$(m_0-\mu t)\frac{dv}{dt}=\mu v.$$

Оно решается методом разделения переменных.

$$\frac{dv}{v}=\frac{\mu dt}{m_0-\mu t},$$

$$\ln v=-\ln|m_0-\mu t|+\ln C\,,$$

$$v=\frac{C}{m_0-\mu t}.$$

Теперь, согласно методу вариаций произвольной постоянной, считаем постоянную C не константой, а неизвестной нам функцией от времени. Тогда

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\dot{C}(m_0-\mu t)+\mu C}{(m_0-\mu t)^2}$$

$$=\frac{\dot{C}}{m_0-\mu t}+\frac{\mu C}{(m_0-\mu t)^2}.$$

Подставив это выражение в исходное дифференциальное уравнение, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для C.

$$(m_0 - \mu t)\left(\frac{\dot{C}}{m_0 - \mu t} + \frac{\mu C}{(m_0 - \mu t)^2}\right) - \mu \frac{C}{m_0 - \mu t} = \mu g t - m_0 g + \mu a,$$

$$\frac{dC}{dt} = \mu g t - m_0 g + \mu a,$$

$$C = \mu g \frac{t^2}{2} - (m_0 g - \mu a)t + C_1.$$

Таким образом,

$$v = \frac{\mu g \frac{t^2}{2} - (m_0 g - \mu a)t + C_1}{m_0 - \mu t}.$$

Поскольку начальная скорость равна нулю, легко установить, что $C_1 = 0$. Если подставить в полученную формулу выражение для массы вытекающего топлива, скорость истечения пороховых газов и положить ускорение свободного падения равным 10 м/с^2,то

$$v = \frac{\frac{1}{100} m_0 \cdot 10 \frac{t^2}{2} - 10 m_0 t + \frac{1}{100} m_0 2000 t}{m_0 - \frac{1}{100} m_0 t} = \frac{5t^2 + 1000t}{-t + 100}.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5t^2 + 1000t}{-t + 100} = -5t - 1500 + \frac{150000}{-t + 100}.$$

$$z = -5\frac{t^2}{2} - 1500t - 150000\ln|100 - t| + C_2.$$

В начальный момент времени высота равна нулю, поэтому $C_2 = 150000 \ln 100$. И таким образом, окончательная формула для высоты

$$z = -\frac{5}{2}t^2 - 1500t - 150000 \ln\left|\frac{100}{100 - t}\right|.$$

Подставляя в нее вместо t 10, 30 и 50, вычислим нужные нам высоты.

z=553,7 м, *z*=6271,2 м=6,27 км,
z=22722,1 м=22,72 км.

18. Движение центра масс механической системы.

Ранее уже был рассмотрен закон об изменении импульса механической системы.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{v_k}\right) = \overrightarrow{F^{(e)}} + \vec{R}.$$

Введем в рассмотрение величину

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{r_k}}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\overrightarrow{r_k},$$

где *M* – масса всей системы. Вектор $\overrightarrow{r_C}$ примем за радиус-вектор некоторой точки *C*. Эта точка называется *центром масс* или *центром инерции* системы. С помощью этого понятия можно по-другому выразить суммарный импульс механической системы.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{v_k} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{r_k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(M\overrightarrow{r_C}) = M\frac{d\overrightarrow{r_C}}{dt} = M\overrightarrow{v_C}.$$

Таким образом, закон об изменении импульса механической системы может быть записан в виде

$$M\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{F^{(e)}} + \vec{R}.$$

Это *теорема о движении центра масс* механической системы. Если по какой-то причине $\overrightarrow{F^{(e)}} + \vec{R} = 0$, то

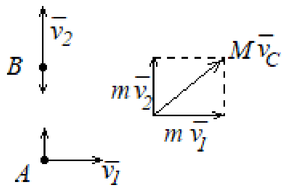
$$\overrightarrow{v_C} = const.$$

Это *закон сохранения движения центра масс*.

Примеры решения задач.

Задача 1. Две свободные материальные точки *A* и *B* с массами m_1, m_2 притягиваются по закону Ньютона. В начальный момент точка *B* имеет скорость v_2, направленную по *AB*, а точка *A* – скорость v_1, перпендикулярную к *AB*. Определить скорость центра масс этих точек.

Решение.



По определению скорости центра масс

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{v_C} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}.$$

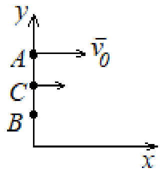
Согласно условию задачи (см. рисунок) импульсы двух точек системы складываются по теореме Пифагора. Поэтому

$$(m_1 + m_2)^2 v_C^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2,$$

$$v_C = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2. Две тяжелые свободные точки A и B с равными массами находятся в начальный момент на одной вертикали. Точке A сообщена начальная горизонтальная скорость v_0, начальная скорость точки B равна нулю. Определить траекторию центра масс этих точек и проекции v_x, v_y его скорости.

Решение. По определению можем вычислить начальное положение и начальную скорость центра масс.



$$\overrightarrow{r_{C0}} = \frac{1}{2m}(m\overrightarrow{r_A} + m\overrightarrow{r_B}) = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}}{2},$$

$$\overrightarrow{v_{C0}} = \frac{1}{2m}(m\overrightarrow{v_0} + 0) = \frac{\overrightarrow{v_0}}{2}.$$

Т. е. центр масс находится посредине между A и B, его скорость $v_0/2$. Поскольку кроме силы тяжести на точки ничего не действует, закон об изменении импульса механической системы имеет вид

$$2m\overrightarrow{a_C} = 2m\vec{g}.$$

Или в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_C = 0, \\ 2m\ddot{y}_C = -2mg, \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}_C = 0, \\ \ddot{y}_C = -g. \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнения системы один раз по времени, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x}_{C0} = v_0/2\,, \\ \dot{y}_C = -gt + \dot{y}_{C0} = -gt. \end{cases}$$

Таким образом, $v_x = v_0/2$, $v_y = -gt$. Если же проинтегрировать еще раз по времени, то получим уравнения движения центра масс.

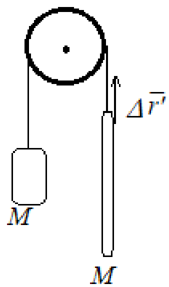
$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{2}v_0 t + x_{C0} = \frac{1}{2}v_0 t, \\ y_C = -g\frac{t^2}{2} + y_{C0}. \end{cases}$$

Чтобы записать уравнение траектории, нужно из первого уравнения движения выразить переменную t и подставить во второе уравнение.

$$t = \frac{2x_C}{v_0}, \qquad y_C = -\frac{g}{2}\left(\frac{2x_C}{v_0}\right)^2 + y_{C0}.$$

Следовательно, уравнение траектории $y_C - y_{C0} = -\frac{2g}{v_0^2}x_C^2$ – парабола.

Задача 3. Через блок перекинут шнур, на одном конце которого находится лестница с человеком, а на другом конце – уравновешивающий груз массы M. Человек, масса которого m, совершил вверх перемещение $\Delta r'$ относительно лестницы и остановился. Пренебрегая массой блока и шнура, найти перемещение центра масс этой системы.



Решение. В системе отсчета, связанной с осью блока

$$2M\vec{r_C} = M\vec{r_1} + (M-m)\vec{r_2} + m\vec{r_3},$$

где $\vec{r_1}$ – радиус-вектор груза, $\vec{r_2}$ – радиус-вектор центра масс лестницы, $\vec{r_3}$ – радиус-вектор центра масс человека. Очевидно, что

$$\Delta\vec{r_C} = \frac{1}{2M}\left(M\Delta\vec{r_1} + (M-m)\Delta\vec{r_2} + m\Delta\vec{r_3}\right).$$

Поскольку $\Delta r_1 = -\Delta r_2$, $\Delta r_3 = \Delta r_2 + \Delta r'$, то легко вычислить, что

$$\Delta r_C = \frac{m}{2M}\Delta r'.$$

Перемещение центра масс всей системы совпадает по направлению с перемещением человека относительно лестницы и полученный результат не зависит от характера движения человека.

19. Кинетический момент материальной точки и механической системы.

Введем новую величину $\vec{r} \times m\vec{v}$ – момент количества движения материальной точки относительно начала координат или её кинетический момент. Если продифференцировать его по времени, получим следующую закономерность:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$
$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F},$$

поскольку векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, а по второму закону Ньютона $m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Это так называемый *закон изменения кинетического момента*. Для механической системы тоже можно вывести такой закон. Для каждой частицы механической системы второй закон Ньютона имеет вид

$$m_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{R_k}, \qquad k = 1, 2, \dots n.$$

Умножим правую и левую часть равенства векторно на $\overrightarrow{r_k}$ – радиус-вектор частицы. Тогда

$$\overrightarrow{r_k} \times m_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{R_k}.$$

Левую часть равенства можно преобразовать

$$\overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{r_k} \times \frac{d}{dt}(m_k \overrightarrow{v_k})$$
$$= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k}).$$
$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k}) = \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{R_k}.$$

Если теперь просуммировать по всем частицам механической системы, то $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k}$ будет её общим кинетическим моментом. Введем также обозначения

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{F_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{L_{Ok}^{(i)}} + \overrightarrow{L_{Ok}^{(e)}}\right) = \overrightarrow{L_O^{(e)}}$$

- главный момент внешних сил, т.к. сумма моментов внутренних сил равна нулю;

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{R_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{H_{Ok}} = \overrightarrow{H_O}$$

- главный момент реакций связи. Таким образом получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k}\right) = \overrightarrow{L_O^{(e)}} + \overrightarrow{H_O}.$$

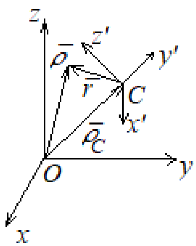
Это *закон изменения кинетического момента механической системы*. Если по какой-то причине $\overrightarrow{L_O^{(e)}} + \overrightarrow{H_O} = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k} = const.$$

Это *закон сохранения кинетического момента*.

Интересно заметить, что закон изменения кинетического момента будет верен и для относительного движения механической системы вокруг центра масс. Введем неподвижную и подвижную системы координат, причем начало подвижной системы координат находится в центре масс (см. рисунок). Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_k}\times m_k\overrightarrow{v_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_k}\times\overrightarrow{F_k}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_k}\times\overrightarrow{R_k}.$$



Поскольку $\overrightarrow{\rho_k}=\overrightarrow{\rho_C}+\overrightarrow{r_k}$, равенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times m_k\overrightarrow{v_k}\right)+\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times m_k\overrightarrow{v_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times\overrightarrow{F_k}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{F_k} + \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times\overrightarrow{R_k}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{R_k}.$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части равенства.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times m_k\overrightarrow{v_k}\right)=$$

$$=\overrightarrow{v_C}\times\sum_{k=1}^{n}m_k\overrightarrow{v_k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times m_k\overrightarrow{a_k}=$$

$$=\overrightarrow{v_C}\times M\overrightarrow{v_C}$$

$$+\overrightarrow{\rho_C}\times\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{F_k}+\overrightarrow{R_k}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times\overrightarrow{F_k}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\rho_C}\times\overrightarrow{R_k}.$$

Если подставить это равенство в закон изменения кинетического момента и сократить подобные слагаемые, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times m_k\overrightarrow{v_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{F_k}+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{R_k}.$$

Рассмотрим теперь абсолютную скорость в левой части равенства. По теореме сложения скоростей ее можно представить в виде суммы:

$$\overrightarrow{v_k}=\overrightarrow{v_C}+\overrightarrow{v_k^{(r)}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_C} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k^{(r)}} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{r_k}\right) \times \overrightarrow{v_C} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k^{(r)}}.$$

Но в первом слагаемом правой части равенства $\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{r_k} = M\overrightarrow{r_C} = 0$, т.к. центр масс мы изначально выбрали в качестве начала подвижной системы координат. Таким образом, окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{v_k^{(r)}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{R_k} = \overrightarrow{L_C^{(e)}} + \overrightarrow{H_C}.$$

Это уже другой закон изменения момента в системе относительных осей $Cx'y'z'$. Может случиться, что закон сохранения кинетического момента будет соблюдаться в относительном движении и не соблюдаться в абсолютном.

20. Кинетический момент относительно оси вращения для твердого тела.

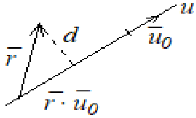
Твердое тело – это система бесконечного числа точек, поэтому для задания кинетического момента суммирование заменяется интегрированием по объему (ρ – плотность тела).

$$\vec{L} = \iiint_{(V)} \vec{r} \times \rho\vec{v}\, dV = \iiint_{(V)} \rho\vec{r} \times \vec{v}\, dV =$$

$$= \iiint_{(V)} \rho\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dV =$$

$$= \iiint_{(V)} \rho\big(\vec{\omega}r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\big)\, dV,$$

если использовать формулу векторной алгебры для преобразования двойного векторного произведения. Вычислим теперь проекцию кинетического момента на ось вращения, т.е. $\vec{L} \cdot \overrightarrow{u_0}$, где $\overrightarrow{u_0}$ – единичный вектор оси (см. рисунок). Поскольку $\vec{L} \cdot \overrightarrow{u_0} = \vec{L} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}$, то



$$\vec{L}\cdot\overrightarrow{u_0} = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{\omega} - \frac{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2}{\omega}\right) dV =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \rho\omega\left(r^2 - \frac{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2}{\omega^2}\right) dV$$

$$= \omega \iiint\limits_{(V)} \rho(r^2 - (\vec{r}\cdot\overrightarrow{u_0})^2)\, dV$$

$$= \omega \iiint\limits_{(V)} \rho d^2\, dV,$$

где d – расстояние от точки тела до оси вращения. Величина

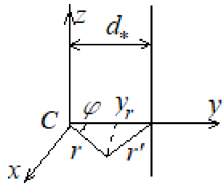
$$J_{uu} = \iiint\limits_{(V)} \rho d^2\, dV$$

называется *моментом инерции*. Иногда рассматривают моменты инерции для масс, расположенных по поверхности или по линии. Тогда

$$J_{uu} = \iint\limits_{(S)} \rho d^2\, dS, \qquad J_{uu} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho d^2\, dt.$$

Свойства момента инерции.

1. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Сравним момент инерции J относительно оси AA' с моментом инерции J_C того же тела относительно оси CC', проходящей через центр масс. Расстояние между этими осями пусть будет равно d_*.



$$J = \iiint\limits_{(V)} \rho r'^2 \, dV.$$

Но по теореме косинусов $r' = r^2 + {d_*}^2 - 2rd_* \cos\varphi = r^2 + {d_*}^2 - 2d_* y_r$. Таким образом

$$J = \iiint\limits_{(V)} \rho r^2 \, dV + \iiint\limits_{(V)} \rho {d_*}^2 \, dV$$

$$- \iiint\limits_{(V)} \rho \cdot 2d_* y_r \, dV.$$

Первое слагаемое в правой части формулы – это J_C, второе легко преобразовать к виду

$${d_*}^2 \iiint\limits_{(V)} \rho \, dV = M{d_*}^2,$$

где M – масса тела, ну а третье слагаемое

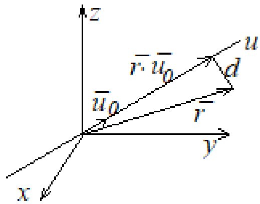
$$2d_* \iiint\limits_{(V)} \rho y_r \, dV = 2d_* M y_C = 0,$$

т.к. в центре масс мы выбрали начало координат. Таким образом,

$$J = J_C + Md_*^2.$$

Аналогично для любой другой оси $J_1 = J_C + Md_1^2$ и, следовательно, $J - J_1 = M(d_*^2 - d_1^2)$.

2. Зависимость между моментами инерции относительно осей, проходящих через данную точку.



Пусть $\overrightarrow{u_0} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$. По формулам векторной алгебры

$$d^2 = r^2 - (\vec{r}\cdot\overrightarrow{u_0})^2 = (\vec{r}\times\overrightarrow{u_0})^2$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}\right)^2.$$

Если вычислить квадрат векторного произведения и подставить его в формулу для момента инерции, получим следующее выражение

$$J_{uu} = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{xy}\alpha\beta,$$

где

$$J_{xx} = \iiint\limits_{(V)} \rho(y^2 + z^2)\,dV,$$

$$J_{yy} = \iiint\limits_{(V)} \rho(x^2 + z^2)\,dV,$$

$$J_{zz} = \iiint\limits_{(V)} \rho(x^2 + y^2)\, dV$$

называются *моментами инерции относительно осей Ox, Oy, Oz*. Величины же

$$J_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \rho yz\, dV, \qquad J_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \rho xz\, dV,$$

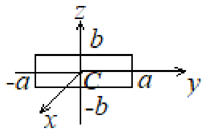
$$J_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \rho xy\, dV$$

называются *произведениями инерции*.

Если подобрать оси координат, то можно добиться того, что все произведения инерции будут равны нулю. Такие оси координат называются *главными осями инерции*, а соответствующие им моменты инерции называются *главными моментами инерции* для данного полюса. Если плотность тела постоянна, её выносят за знак двойного интеграла. Оставшиеся выражения называют *геометрическими моментами инерции*. При умножении геометрического момента инерции на постоянную плотность получается *физический момент инерции*.

Примеры вычисления моментов инерции.

1. Вычислить главные моменты инерции прямоугольника.



Если расположить оси координат так, как показано на рисунке, то легко проверить, что все произведения инерции будут равны нулю. Вычислим моменты инерции относительно осей координат.

$$J_{yy}^{\text{геом}} = \iint\limits_{(S)} (x^2 + z^2)\, dS = \iint\limits_{(S)} z^2\, dS$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-b}^{b} z^2 dz = \int\limits_{-a}^{a} \frac{2b^3}{3} dy$$

$$= \frac{4ab^3}{3},$$

$$J_{yy}^{\text{физ}} = \rho J_{yy}^{\text{геом}} = \frac{m}{S} J_{yy}^{\text{геом}} = \frac{m}{4ab} \frac{4ab^3}{3} = \frac{mb^2}{3}.$$

$$J_{zz}^{\text{геом}} = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\, dS = \int\limits_{-b}^{b} dz \int\limits_{-a}^{a} y^2\, dy$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} \frac{2a^3}{3} dz = \frac{4a^3 b}{3},$$

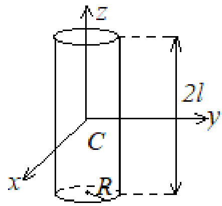
$$J_{zz}^{\text{физ}} = \frac{m}{4ab} \frac{4a^3 b}{3} = \frac{ma^2}{3}.$$

$$J_{xx}^{\text{геом}} = \iint\limits_{(S)} (y^2 + z^2)\, dS = J_{yy}^{\text{геом}} + J_{zz}^{\text{геом}}$$

$$= \frac{4ab^3}{3} + \frac{4a^3b}{3},$$

$$J_{xx}^{\text{физ}} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2).$$

2. Вычислить главные моменты инерции цилиндра.



Поместим начало координат в центр масс цилиндра и направим оси координат по его осям симметрии. Это главные оси инерции и все произведения инерции в них будут равны нулю. Для вычисления главных моментов инерции используем запись тройного интеграла в цилиндрических координатах.

$$J_{xx}^{\text{геом}} = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, dV =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} dr \int\limits_{-l}^{l} ((r\sin\varphi)^2 + z^2)\, r\, dz$$

$$J_{xx}^{\text{геом}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R dr \int\limits_{-l}^{l} (r^3(\sin\varphi)^2 + z^2 r)\, dz$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(2lr^3(\sin\varphi)^2 + \frac{2l^3}{3} r\right) dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^4 l}{2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2} + \frac{R^2 l^3}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^4 l}{4} 2\pi + \frac{R^2 l^3}{3} 2\pi =$$

$$= 2\pi R l \left(\frac{R^3}{4} + \frac{R l^2}{3}\right),$$

$$J_{xx}^{\text{физ}} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot 2l} 2\pi R l \left(\frac{R^3}{4} + \frac{R l^2}{3}\right) = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Аналогичным образом

$$J_{yy}^{\text{геом}} = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2)\, dV =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R dr \int\limits_{-l}^{l} (r^2(\cos\varphi)^2 + z^2)\, r\, dz =$$

$$= 2\pi R l \left(\frac{R^3}{4} + \frac{R l^2}{3}\right),$$

$$J_{yy}^{\text{физ}} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

$$J_{zz}^{\text{геом}} = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, dV =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R dr \int\limits_{-l}^{l} r^3\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R 2lr^3\, dr = \pi R^4 l,$$

$$J_{zz}^{\text{физ}} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot 2l} \pi R^4 l = \frac{mR^2}{2}.$$

21. Работа сил.

Домножим равенство второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ слева и справа скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r}$.

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Левую часть равенства можно преобразовать

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\overrightarrow{dr} = m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v}$$

$$= d\left(m\frac{v^2}{2}\right),$$

$$d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Величина $m\frac{v^2}{2}$ называется *кинетической энергией* частицы. А в правой части равенства стоит так называемая *работа силы на элементарном перемещении* или *элементарная работа*.

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

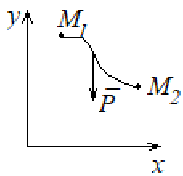
Штрих у дифференциала ставится для того, чтобы показать, что элементарная работа не является, вообще говоря, полным дифференциалом. Полная работа силы $\vec{F}$ определяется по формуле

$$A = \int\limits_l \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где l – путь, который частица прошла за время (t_0, t). Величина A называется *работой* силы $\vec{F}$ на пути l.

Примеры вычисления работы.

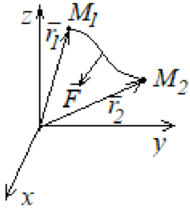
1. Работа силы тяжести. $\vec{P}(0, 0, -mg)$,



$$A = \int\limits_{M_1M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz$$
$$= \int\limits_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = mg(z_1 - z_2)$$
$$= \pm mgh,$$

где h - перемещение точки по оси z.

2. Работа силы притяжения к неподвижному центру. $\vec{F} = -c\vec{r} = (-cx, -cy, -cz)$.



$$A = -c \int_{M_1M_2} xdx + ydy + zdz$$
$$= -c \int_{M_1M_2} d\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)$$
$$= -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

В частности, для работы силы упругости можем записать

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2),$$

где λ_1, λ_2 – деформации пружины в начальном и конечном положениях.

Потенциальной называется сила, работа которой не зависит от траектории перемещения точки её приложения. *Консервативной механической системой* называется система, в которой действуют только потенциальные силы. Для того, чтобы сила была потенциальной, надо, чтобы существовала функция $U(x, y, z)$, такая, что

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Тогда

$$dA = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right),$$

$$A = \int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r} dU = -\big(U(r) - U(r_0)\big).$$

Таким образом, работа силы действительно не будет зависеть от траектории. Функцию $U(x, y, z)$ называют потенциальной энергией материальной точки в данном её положении.

Мощностью N называется величина, измеряемая отношением элементарной работы силы к элементарному времени её совершения.

$$N = \frac{d'A}{dt}.$$

Есть и другая формула для мощности, использовать которую в некоторых задачах бывает удобнее. Поскольку $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$, то

$$N = \frac{d'A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Коэффициентом полезного действия называется величина

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}},$$

где $A_{\text{п}}$ – полезная работа, т.е. работа без учета сопротивлений, $A_{\text{з}}$ – работа затраченная, т.е. реальная.

Запишем еще формулы для вычисления работы при различных движениях тела. Т.к. $d\vec{r} = \vec{v}dt = (\overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r})dt$, то

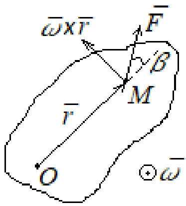
$$A = \int \vec{F}(\overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r})dt$$
$$= \int \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_0}dt + \int \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r})dt.$$

Если тело движется поступательно, то $\vec{\omega} = 0$ и

$$A = \int \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_0}dt.$$

$$A = \int \left(F_x v_{0x} + F_y v_{0y} + F_z v_{0z}\right)dt.$$

Если же тело совершает вращательное движение, то $v_0 = 0$ и $A = \int \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r})dt$. Обозначим $l = |\vec{r}|$ и в таком случае (см. рисунок)



$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega l \sin\frac{\pi}{2} = \omega l,$$

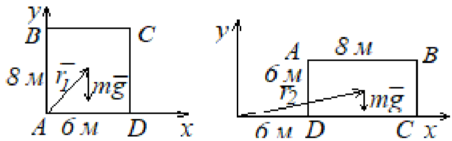
$$\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = F\omega l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = F\omega l \sin\beta$$
$$= \omega \cdot Fl\sin\beta = \omega \cdot L_0,$$

где L_0 – величина момента силы $\vec{F}$ относительно полюса O. Таким образом,

$$A = \int \omega L_0 dt.$$

Примеры решения задач.

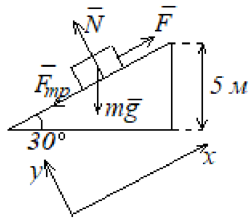
Задача 1. Однородный массив ABCD, размеры которого указаны на чертеже, весит 4000 кг. Определить работу, которую нужно затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.



Решение. Сила, на преодоление которой затрачена работа $\vec{F}(0, -mg) = (0, -40000)$, если считать ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м}/\text{с}^2$. Перемещение центра тяжести массива происходит из положения $\overrightarrow{r_1}(3, 4)$ в положение $\overrightarrow{r_2}(10, 3)$, таким образом $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (7, -1)$. По определению работы можем вычислить

$$A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \cdot 7 + (-40000) \cdot (-1)$$
$$= 40000\ \text{Дж} = 40\ \text{кДж}.$$

Задача 2. Определить наименьшую работу, которую нужно затратить для того, чтобы поднять на 5 м груз в 2 т, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, коэффициент трения 0.5.



Решение. Наименьшая работа – это работа, при которой все действующие на тело силы уравновешиваются. Следовательно, для сил можем записать уравнение

$$\vec{F} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{тр}} + m\vec{g} = 0.$$

Спроектируем это уравнение на оси координат.

$$x: F - mg\sin 30^\circ - F_{тр} = 0,$$

$$y: N - mg\cos 30^\circ = 0.$$

Поскольку $F_{тр} = f \cdot N = fmg\cos 30^\circ$, можем вычислить силу F.

$$F = mg\sin 30^\circ + fmg\cos 30^\circ = 1{,}87 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Осталось вычислить путь, пройденный телом. Из рисунка очевидно, что

$$\sin 30^\circ = \frac{5}{x}, \qquad x = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$A = F \cdot x = 1{,}87 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Задача 3. Для того чтобы поднять 5000 $м^3$ воды на высоту 3 м, поставлен насос с двигателем 1,47 кВт. Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если КПД насоса 0,8? Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Определим общую силу тяжести, против которой совершается работа.

$$F = mg = \rho \cdot V \cdot g = 1000 \cdot 5000 \cdot 10 = 5 \cdot 10^7 H.$$

В таком случае работа $A_п = 5 \cdot 10^7 \cdot 3 = 15 \cdot 10^7$Дж. Но это полезная, т.е. идеальная работа, не учитывающая потерь. Для вычисления реальной работы используем коэффициент полезного действия.

$$A = \frac{A_п}{0.8} = 18{,}75 \cdot 10^7 \text{Дж}.$$

Наконец, чтобы определить затраченное время, используем определение мощности.

$$N = \frac{A}{\Delta t} = 1{,}47 \cdot 10^3,$$

$$\Delta t = \frac{18{,}75 \cdot 10^7}{1{,}47 \cdot 10^3} = 12{,}75 \cdot 10^4 \text{с} = 35 \text{ ч } 42 \text{ мин}.$$

22. Закон изменения кинетической энергии.

Ранее уже была приведена формула, к которой может быть приведен второй закон Ньютона

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A.$$

Если обозначить $T = {mv^2}/{2}$, то $dT = d'A$. Это *закон изменения кинетической энергии* в дифференциальной форме. Если проинтегрировать это уравнение между пределами, соответствующими моментам t_0 и t получим

$$T - T_0 = A,$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \qquad A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Это закон изменения энергии в интегральной форме. Если сила $\vec{F}$ потенциальна, то $d'A = -dU$, где U – потенциальная энергия. В этом случае

$$dT = -dU, \qquad d(T + U) = 0,$$

$$T + U = const.$$

Это так называемый *интеграл энергии* или *закон сохранения энергии*.

Закон изменения кинетической энергии для механической системы. Как известно, второй закон Ньютона для каждой частицы механической системы записывается следующим образом

$$m_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{R_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Домножим обе части равенства на тождество $\overrightarrow{v_k} dt = d\overrightarrow{r_k}$.

$$m_k \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{v_k} dt = \overrightarrow{F_k} \cdot d\overrightarrow{r_k} + \overrightarrow{R_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}.$$

Тогда левую часть равенства можно преобразовать

$$m_k \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{v_k} dt = m_k \overrightarrow{v_k} d(\overrightarrow{v_k}) = d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right).$$

Просуммировав по всем частицам механической системы, можем записать

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \cdot d\overrightarrow{r_k} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{R_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}.$$

Введем обозначения: $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$ – кинетическая энергия механической системы, $d'A^{(F)} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}$ – элементарная работа внешних сил, $d'A^{(R)} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{R_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}$ – элементарная работа реакций связи. Тогда дифференциальная форма записи закона изменения кинетической энергии механической системы примет вид

$$dT = d'A^{(F)} + d'A^{(R)}.$$

Если его проинтегрировать, получим интегральную форму закона

$$T = A^{(F)} + A^{(R)}, \qquad A^{(F)} = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} \overrightarrow{F_k} \cdot d\overrightarrow{r_k},$$

$$A^{(R)} = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} \overrightarrow{R_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}.$$

Отметим, что в этих формулах $\overrightarrow{F_k}$ – это и внешние и внутренние силы. В то время как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, сумма работ внутренних сил, вообще говоря, нулю не равна. Если точки системы движутся относительно друг друга, то расстояние между ними при этом изменяется, что приводит к появлению работы внутренних сил.

Кинетическая энергия твердого тела. Для твердого тела суммирование заменяется интегрированием по объему и кинетическая энергия, соответственно, определяется

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} \rho v^2\, dV,$$

где ρ – плотность тела. По формуле Эйлера $\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, поэтому

$$v^2 = v_0^2 + 2\overrightarrow{v_0} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r})^2,$$

$$T = \frac{1}{2}\iiint_{(V)} \rho v_0^2 dV + \iiint_{(V)} \rho \overrightarrow{v_0}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2}\iiint_{(V)} \rho(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dV. \quad (22.1)$$

Рассмотрим разные случаи.

1. Поступательное движение. Угловая скорость $\vec{\omega} = 0$, таким образом

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} \rho v_0^2 dV = \frac{v_0^2}{2}\iiint\limits_{(V)} \rho dV = \frac{M v_0^2}{2},$$

где M – масса тела.

2. Вращательное движение. В этом случае $\overrightarrow{v_0} = 0$ и можем записать

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} \rho(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dV.$$

По формулам векторной алгебры

$$\begin{aligned}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\ &= \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right)(x^2 + y^2 \\ &+ z^2) - \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)^2 \\ &= \omega_x^2(y^2 + z^2) + \omega_y^2(x^2 + z^2) \\ &+ \omega_z^2(x^2 + y^2) - 2\omega_x\omega_y xy \\ &- 2\omega_x\omega_z xz - 2\omega_y\omega_z yz.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$T=\frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2+J_{yy}\omega_y^2+J_{zz}\omega_z^2-2J_{xy}\omega_x\omega_y\right.$$
$$\left.-2J_{xz}\omega_x\omega_z-2J_{yz}\omega_y\omega_z\right),$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – моменты инерции относительно осей координат, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} – произведения инерции. Если оси координат – это главные оси инерции, то произведения инерции равны нулю и

$$T=\frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2+J_{yy}\omega_y^2+J_{zz}\omega_z^2\right).$$

3. Произвольное движение. В формуле для кинетической энергии (22.1) в этом случае будут все три слагаемых. Первое и третье мы уже разобрали, рассмотрим, как выглядит среднее.

$$\iiint\limits_{(V)}\rho\overrightarrow{v_0}(\vec{\omega}\times\vec{r})dV=\overrightarrow{v_0}\cdot\left(\vec{\omega}\times\iiint\limits_{(V)}\rho\vec{r}dV\right)$$
$$=\overrightarrow{v_0}\cdot\left(\vec{\omega}\times(M\overrightarrow{r_C})\right)$$
$$=M\overrightarrow{v_0}\cdot(\vec{\omega}\times\overrightarrow{r_C})$$
$$=M\begin{vmatrix}v_{0x} & v_{0y} & v_{0z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x_C & y_C & z_C\end{vmatrix}.$$

Таким образом, в случае произвольного движения

$$T=\frac{Mv_0^2}{2}+M\begin{vmatrix}v_{0x} & v_{0y} & v_{0z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x_C & y_C & z_C\end{vmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2+J_{yy}\omega_y^2+J_{zz}\omega_z^2\right.$$
$$-2J_{xy}\omega_x\omega_y-2J_{xz}\omega_x\omega_z$$
$$\left.-2J_{yz}\omega_y\omega_z\right).$$

Если начало системы координат взять в центре масс и направить оси по главным осям инерции, то

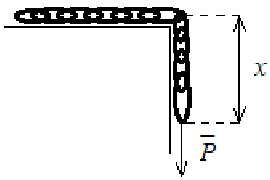
$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2\right).$$

Самый простой случай, когда или $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J$, или $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Цепочка длиной l лежит на горизонтальном столе так, что половина её свешивается со стола. Вначале цепочка находится в покое. Определить скорость v цепочки в тот момент, когда конец её окажется на краю стола.



Решение. Пусть M – масса всей цепочки, m – масса её свешивающейся части. Тогда

$$\frac{m}{M} = \frac{x}{l}, \qquad m = \frac{Mx}{l}.$$

Поскольку сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, то $\vec{P} = \frac{Mx}{l}\vec{g}$. Согласно закону об изменении кинетической энергии можем записать

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = A, \qquad v_0 = 0,$$

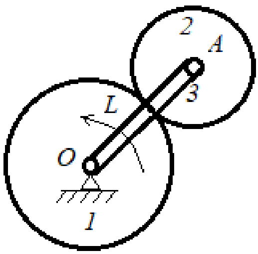
где A – работа силы тяжести по перемещению половины цепочки. Вычислим эту работу.

$$A = \int_{l/2}^{l} M\frac{x}{l}g\,dx = \frac{Mg}{2l}\left(l^2 - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{3Mgl}{8}.$$

Следовательно,

$$v^2 = \frac{2A}{M} = \frac{3}{4}gl, \qquad v = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}.$$

Задача 2. Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством постоянного вращающего момента L, приложенного к кривошипу 3 (см. рисунок). Массы колес и кривошипа m_1, m_2, m_3. Неподвижное колесо имеет радиус r_1, подвижное r_2. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от угла поворота.



Решение. Согласно закону об изменении кинетической энергии, $T - T_0 = A$. $T_0 = 0$, т.к. в начальный момент времени система находится в покое. Кинетическая энергия T складывается из трех слагаемых:

кинетических энергий двух колес и кривошипа.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Первое слагаемое $T_1 = 0$, т.к. центральное колесо неподвижно. Второе колесо совершает одновременно поступательное и вращательное движения, поэтому

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{1}{2} J\omega_2^2,$$

где J – вращательный момент инерции. Для диска этот момент можно вычислить по определению

$$J_{zz}^{\text{геом}} = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\, dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r_2} r^3\, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} r_2^4,$$

$$J_{zz}^{\text{физ}} = \frac{m_2}{\pi r_2^2} \frac{\pi r_2^4}{2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}.$$

Таким образом,

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{4} \omega_2^2.$$

Кривошип совершает только вращательное движение, поэтому $T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$. Для стержня момент инерции

$$J_{zz}^{\text{геом}} = \int\limits_l (x^2 + y^2)\, dl = \int\limits_0^l r^2\, dr = \frac{l^3}{3},$$

$$J_{zz}^{\text{физ}} = \frac{m_3}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{m_3 l^2}{3} = \frac{m_3 (r_1 + r_2)^2}{3}.$$

Следовательно, $T_3 = \frac{1}{6} m_3 (r_1 + r_2)^2 \omega_3^2$.

Сила тяжести перпендикулярна движению, поэтому работу совершает только вращающая сила: $A = L \cdot \varphi$, где φ - угол поворота. Подставляя все полученные выражения в теорему об изменении кинетической энергии, можем записать

$$\frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{4}\omega_2^2 + \frac{1}{6}m_3(r_1 + r_2)^2\omega_3^2 = L\varphi.$$

Нам нужно найти ω_3, поэтому выразим через него ω_2, v_A.

$$v_A = \omega_3(r_1 + r_2) = \omega_2 r_2,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_3(r_1 + r_2)}{r_2}.$$

Таким образом,

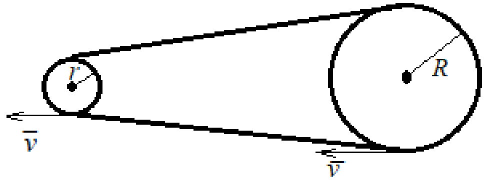
$$\frac{m_2}{2}\omega_3^2(r_1 + r_2)^2 + \frac{m_2}{4}\omega_3^2(r_1 + r_2)^2 + \frac{m_3}{6}\omega_3^2(r_1 + r_2)^2 = L\varphi,$$

$$\frac{\omega_3^2(r_1 + r_2)^2}{2}\left(m_2 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{3}\right) = L\varphi,$$

$$\omega_3^2 = \frac{2L\varphi}{(r_1 + r_2)^2\left(\frac{3}{2}m_2 + \frac{m_3}{3}\right)},$$

$$\omega_3 = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3L\varphi}{9m_2 + 2m_3}}.$$

Задача 3. Большой шкив цепной передачи вращается с угловой скоростью ω; радиус шкива R и момент инерции относительно оси вращения J_1. Малый шкив имеет радиус r и момент инерции относительно своей оси J_2. Вес натянутой на шкивы цепи равен Q. Вычислить кинетическую энергию всей системы.



Решение. Кинетическая энергия системы, очевидно, складывается из трех слагаемых: кинетических энергий двух шкивов и цепи.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}J_2(\omega')^2,$$

где ω' - угловая скорость вращения малого шкива. Её легко выразить через ω, т.к. скорости v двух точек шкивов (см. рисунок) должны , очевидно, быть одинаковыми.

$$v = \omega R = \omega' r, \qquad \omega' = \frac{\omega R}{r},$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\frac{\omega^2 R^2}{r^2}.$$

Цепь, натянутая между шкивами, совершает поступательное движение, поэтому

$$T_3 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Q\omega^2 R^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2}J_1\omega^2 + \frac{1}{2}J_2\frac{\omega^2 R^2}{r^2} + \frac{1}{2}Q\omega^2 R^2,$$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2\left(J_1 + J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + QR^2\right).$$

Задача 4. Имеются два стационарных силовых поля

$$1)\ \vec{F} = ay\vec{i}; \quad 2)\ \vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j}, \ \ a, b = const.$$

Консервативны ли силы этих полей?

Решение. Найдем работу силы каждого поля на пути от некоторой точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2).

1) $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = aydx,$

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} aydx = a \int\limits_{x_1}^{x_2} ydx\,;$$

2) $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = axdx + bydy,$

$$A = a \int\limits_{x_1}^{x_2} xdx + b \int\limits_{y_1}^{y_2} ydy = a \frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} + b \frac{y^2}{2}\bigg|_{y_1}^{y_2}.$$

В случае 1) интеграл зависит от траектории, т.е. от $y(x)$, а значит, сила неконсервативна. В случае 2) работа зависит только от начальной и конечной точки пути, следовательно, сила консервативна.

Задача 5. Сила, действующая на частицу в некотором поле консервативных сил, имеет вид

$$\vec{F} = a(y\vec{i} + x\vec{j}), \qquad a = const.$$

Найти потенциальную энергию частицы в этом поле.

Решение. В данном случае элементарную работу можно представить в виде

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = aydx + axdy$$
$$= a(ydx + xdy)$$
$$= -d(-axy).$$

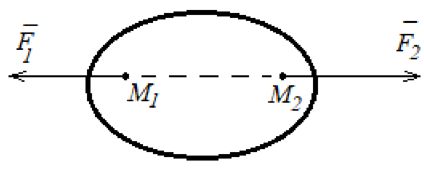
Следовательно, по определению потенциальной энергии $U(x, y) = -axy$.

23. Законы статики. Основные типы связей и их реакции.

Статикой называют раздел механики, который рассматривает условия равновесия материальных систем. *Положение равновесия* системы, находящейся под действием данных сил – это положение системы, в котором она может неопределенное время оставаться в покое относительно данной системы отсчета. В основе статики лежит ряд законов.

Закон 1 (закон инерции). Изолированная материальная точка находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Закон 2. Две силы, приложенные к твердому телу, называются *уравновешивающимися* только в том случае, если они равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

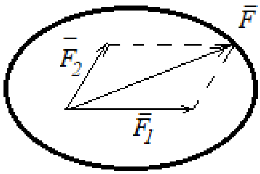


Закон 3. Не нарушая состояния твердого тела, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающиеся силы.

Следствие. Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по линии её действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела. *Равнодействующая сила* – это сила, эквивалентная данной системе сил.

Закон 4. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой же точке и равна векторной сумме двух сил.

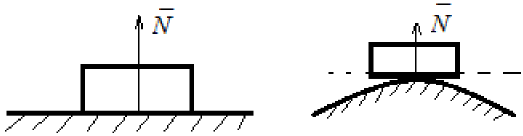


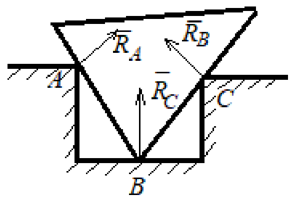
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\widehat{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}}\right)}.$$

Закон 5 (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Эти силы не являются уравновешивающимися, т.к. приложены к разным телам.

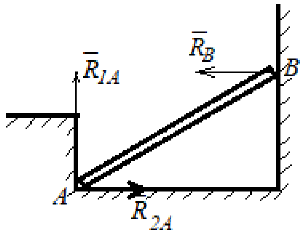
Формулируя статическую задачу, ограничения, которые наложены в задаче на перемещение тела, заменяют приложенными к телу силами. Рассмотрим правила, по которым это делается.

1. Нормальная реакция или реакция опоры. Её направляют перпендикулярно к опоре или перпендикулярно к касательной к опоре. Если в какой-то задаче ни то, ни другое невозможно (например, тело опирается на угол), реакцию опоры направляют перпендикулярно к самому телу.

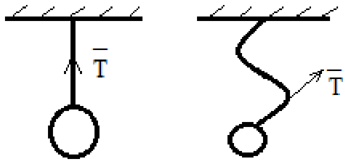




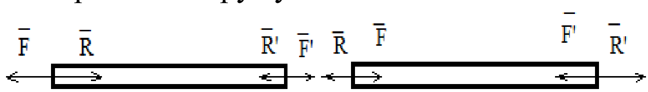
2. Если твердое тело упирается острием в угол (лестница, вид сбоку), то это ограничение следует рассматривать как двойное: угол препятствует движению и в сторону и вниз. Поэтому в общем случае вводят две неизвестных реакции опоры, а затем можно вычислить их равнодействующую, которая является их геометрической суммой.



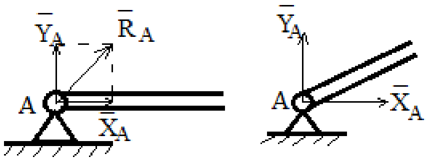
3. Силу натяжения нити обычно направляют вдоль нити, а если это невозможно, то по касательной к ней.



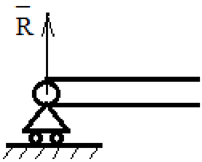
4. Абсолютно жесткий невесомый стержень. Реакции следует направлять вдоль стержня в зависимости от условий задачи. Если стержень растягивают с помощью силы $\vec{F}$, то сила реакции $\vec{R}$ направлена к середине стержня, если же стержень сжимают, то сила реакции направлена наружу.



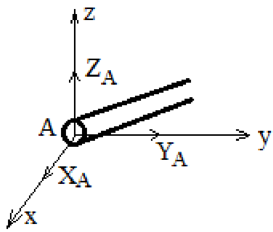
5. Цилиндрический шарнир. Направление реакции здесь не определено, поэтому она представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими.



6. Шарнир на катках. Приведенный рисунок означает, что опора может двигаться влево и вправо. Так что ограничение остается только на перемещение вверх и вниз, соответствующим образом направлена и реакция опоры.

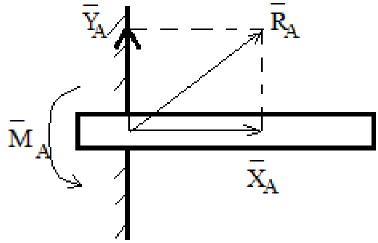


7. Сферический шарнир. Это пространственный шарнир, направление реакции не определено, поэтому приходится вводить три взаимно перпендикулярные неизвестные составляющие.



8. Жесткая заделка. Такое ограничение препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления. Приходится вводить три неизвестных величины: две взаимно перпендикулярные составляющие и момент, препятствующий

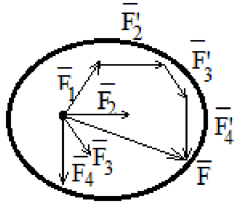
выкручиванию из заделки. Момент M_A называют *моментом заделки*.



24. Равновесие системы сходящихся сил.

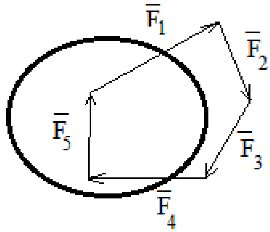
Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующая такой системы находится путем построения силового многоугольника.

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}.$$



Чтобы тело находилось в покое, надо, чтобы силовой многоугольник был замкнут, $\vec{F} = 0$. В случае плоской задачи это означает наличие двух уравнений для проекций равнодействующей силы.

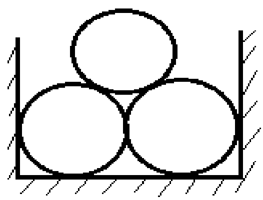
$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases}$$



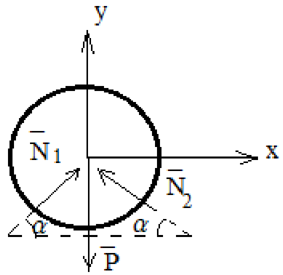
Это система уравнений равновесия для системы сходящихся сил. Задача называется *статически определенной*, если число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. В противном случае задача называется *статически неопределенной* и не может быть решена одними уравнениями статики.

Примеры решения задач.

Задача. Три одинаковые трубы весом P каждая лежат как указано на рисунке. Определить давление каждой из нижних труб на землю и на удерживающие их с боков стенки.



Решение. Рассмотрим сначала верхнюю трубу и составим для неё уравнения равновесия.

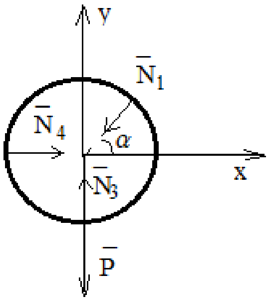


$$\begin{cases} x: N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0, \\ y: N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

Теперь рассмотрим левую нижнюю трубу. Предположим, что правая труба на неё не давит (иначе задача будет статически неопределенной). Тогда можем составить систему уравнений равновесия.



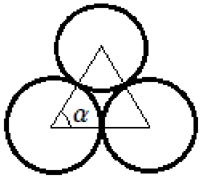
$$\begin{cases} x: N_4 - N_1 \cos\alpha = 0, \\ y: N_3 - N_1 \sin\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Легко получим, что

$$N_4 = N_1 \cos\alpha = \frac{P}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

$$N_3 = P + N_1 \sin\alpha = P + \frac{P}{2} = \frac{3P}{2}.$$

Осталось определить угол α. Треугольник, соединяющий центры окружностей, является равносторонним, поэтому $\alpha = \pi/3$. Таким образом,



$$N_3 = \frac{3P}{2}, \qquad N_4 = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

25. Момент силы, пара сил.

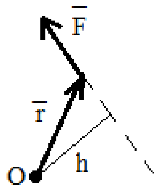
Моментом силы $\vec{F}$ относительно полюса О называют вектор

$$\overrightarrow{m_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

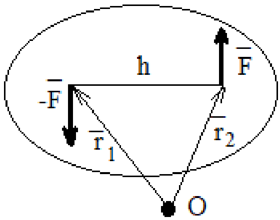
где $\vec{r}$ - радиус-вектор от полюса O до точки приложения силы $\vec{F}$ (см. раздел 16). Из векторной алгебры известно, что модуль векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{m_0}(\vec{F})\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF\sin\left(\widehat{\vec{F},\vec{r}}\right) = F \cdot h,$$

где h – *плечо силы*, т.е. кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы. Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки O против часовой стрелки, и отрицательным при повороте по часовой стрелке.



Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется *парой сил*. Расстояние h между линиями действия сил – *плечо пары*. Направлен момент в ту сторону, откуда вращение видится против часовой стрелки.



Согласно приведенному рисунку

$$\vec{M} = -\vec{r_1} \times \vec{F} + \vec{r_2} \times \vec{F} = (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times \vec{F},$$

$$M = |\vec{r_2} - \vec{r_1}| \cdot F \cdot \sin\frac{\pi}{2} = F \cdot h.$$

Таким образом, момент пары сил $M = \pm F \cdot h$.

Для равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости и приложенных к одному телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k h_k = 0.$$

Если на твердое тело действует система параллельных сил, то главный момент в этом случае определяется как алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно выбранного полюса

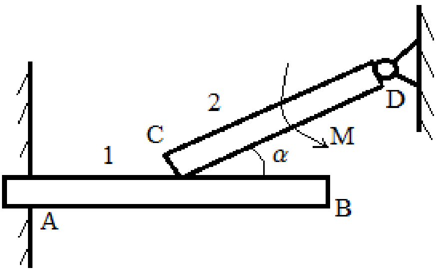
$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}).$$

Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

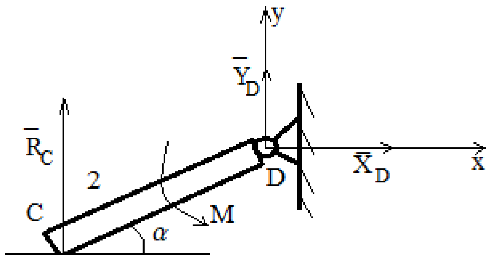
$$\begin{cases} F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ M_0 = 0. \end{cases}$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Наклонная под углом α к горизонту балка 2 длины l, шарнирно закрепленная в точке D, опирается на консольную балку 1. На балку 2 действует пара сил с моментом M. Полагая заданными все геометрические параметры конструкции, определить реакции всех опор.



Решение. Рассмотрим сначала балку 2 и нарисуем согласно правилам реакции опор.



Система уравнений равновесия состоит из трех уравнений: суммарные проекции всех сил на оси *Ox* и *Oy* равны нулю и суммарный момент относительно, например, точки D, тоже равен нулю. Тогда можем записать

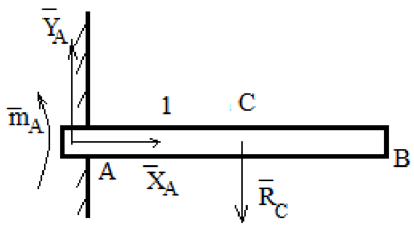
$$\begin{cases} X_D = 0, \\ Y_D + R_C = 0, \\ M - R_C \cos\alpha \cdot |CD| = 0. \end{cases}$$

Решив это уравнение, получим

$$X_D = 0, \qquad Y_D = -\frac{M}{l\cos\alpha},$$

$$R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}.$$

Теперь рассмотрим балку 1 и составим для неё аналогичные уравнения равновесия (суммарный момент возьмем относительно точки A).



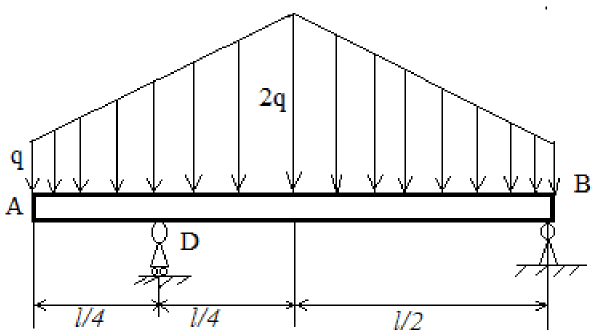
$$\begin{cases} X_A = 0, \\ Y_A - R_C = 0, \\ m_A - R_C \cdot |AC| = 0. \end{cases}$$

Решением этого уравнения являются

$$X_A = 0, Y_A = R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}, m_A = \frac{M \cdot |AC|}{l\cos\alpha}.$$

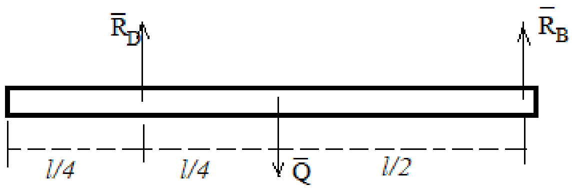
Таким образом, мы определили реакции всех опор.

Задача 2. Балка AB длины l несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах балки AB и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B.



Решение. Распределенную нагрузку можно заменить одной силой Q, вычисленной следующим образом

$$Q = q \cdot l + \frac{1}{2} q \cdot l = \frac{3}{2} q \cdot l.$$



Следовательно, в данной задаче мы имеем дело с системой параллельных сил, изображенных на рисунке. Система уравнений равновесия состоит из двух уравнений: суммарная проекция всех сил на вертикальную ось равна нулю и суммарный момент относительно, например, точки D, тоже равен нулю. Таким образом, имеем равенства

$$\begin{cases} R_B + R_D - Q = 0, \\ Q \cdot \dfrac{l}{4} - R_B \left(\dfrac{l}{2} + \dfrac{l}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2} q \cdot l\ H$, $R_D = Q - R_B = q \cdot l\ H$.

Литература

1. Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика. Сборник заданий. Изд. Лань, Спб: 2018 г.
2. Доронин Ф.А. Теоретическая механика. Изд. Лань, Спб: 2018 г.
3. Суслов Г.К. Основы аналитической механики. М: Физматлит, 2019 г.

Содержание

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
«Теоретическая механика»

Составитель: Вера Валерьевна Петрова

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 08.06.2020. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 9. Тираж 30 экз. Заказ № 908.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская, 79.