Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. И. Беликова   Е. А. Бровкина   И. В. Зайцева

ТОЛКОВЫЙ И ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2025

УДК 51:[81’373.6+811](03)(075.8)
ББК 22.1:81я73
Б43

Р е ц е н з е н т – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры аудиовизуальных систем и технологий
Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения
Е. Н. Бегун

Беликова Г. И. **Толковый и этимологический словарь математических терминов и понятий** : учеб. пособие / Г. И. Беликова, Е. А. Бровкина, И. В. Зайцева. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 120 с.

Включено более 300 математических терминов и понятий с описанием их смысла и истории происхождения.

Многие из математических терминов родились ещё в Древней Греции. Интересно, что их звучание на греческом часто близко к русскому языку. Немало русских терминов и понятий не только имеют латинское происхождение, но и звучат почти одинаково. Там, где это было уместно, представлены красивые, с точки зрения математиков, классические математические соотношения.

Предназначено для студентов, поэтому авторы добавили к нему ещё три приложения: «О математике и математиках», «Математика с улыбкой», греческий и латинский алфавиты и их произношение в русской математической школе.

Публикуется в авторской редакции.

ISBN 978-5-7422-8798-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если бы мне пришлось начать вновь своё обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику.
Г. Галилей (1545–1638)

В математике особую ценность представляют математические соотношения, термины и понятия. Большинство из них имеют греческое или латинское происхождение. Историей происхождения терминов и понятий занимается филологическая наука этимология. Само слово этимология произошло от двух греческих слов $\varepsilon\tau\iota\mu o\eta$ – *истина, первоначальное значение слова* и $\lambda o\gamma o\varsigma$ – *учение.*

Знание смысла терминов и понятий часто помогает быстрее понять соответствующие разделы математики.

"Думай о смысле, а слова придут сами" – говорил английский математик Чарлз Доджсон (1832–1898), известный как писатель Льюис Кэрролл.

Из содержания представленного словаря видно насколько сильно математика связывает тысячелетия, цивилизации и традиции народов.

Значимость математики существенно повысилась с бурным развитием компьютеризации, поэтому очень важно понимать смысл математических терминов и понятий. Важно и умение найти математическую модель, соответствующую изучаемому процессу.

Основная задача коллектива преподавателей университетов – формирование фундаментальных знаний у студентов. В процессе образования ключевую роль играет математика. Вот что об этом написал ректор МГУ, математик В. Садовничий: "Настоящее хорошее математическое образование воспитывает в студенте целеустремлённость, интеллектуальную честность и стремление к совершенству".

Главное научное направление нашего гидрометеорологического университета – изучение и исследование явлений, происходящих в атмосфере и мировом океане. Такие исследования с давних пор связаны с математикой.

Развитие гидрометеорологии подтверждает знаменитую с XVI века фразу Галилео Галилея: "Великая книга природы написана на языке математики". Он считал, что математика – язык Вселенной, а ключ к расшифровке её языка – математические соотношения.

В XVIII веке выдающийся философ Иммануил Кант отмечал, что в любом учении о природе столько науки, сколько в ней математики.

Математика удивительно интересная наука. Для неё нужна некоторая смелость, фантазия и много любопытства. Уверены, что у студентов есть такие качества, поэтому этот словарь будет им полезен.

ТОЛКОВЫЙ И ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ

Уточняйте значение слов
и вы избавите человечество
от половины заблуждений.
Рене Декарт

А

АБАК
Греческое $\alpha\beta\alpha\xi$ – доска, стол. Доска, покрытая пылью или песком, на которой проводили чёрточки, разделяющие её на столбцы, и раскладывали камешки для различных вычислений.

АББРЕВИАТУРА
Латинское *abbreviare – сокращение.* Сокращение слов, которое используется в письменном языке и устной речи. Например, математический анализ – матанализ; дифференциальные уравнения – дифуры.

АБСОЛЮТНЫЙ
От латинского *absolutus – безусловный.* Название *absolute value –абсолютная величина и* её обозначение $|x|$ ввёл немецкий математик Вейерштрасс (1841). Графический образ абсолютной величины $|x|$ – это расстояние r на числовой оси от точки x или противоположной точки $(-x)$ до начальной точки О: $r = |x| = |-x|$.

АДДИТИВНОСТЬ
От английского *addition – сложение;* латинское *additivus – прибавляемый.*

АДЕКВАТНЫЙ
Латинское *adaequatus – вполне соответствующий, правильный.*

АКРОНИМ
От греческих $\alpha\kappa\rho o\varsigma$ *– высокий* и $o\eta\iota\mu\alpha$ *– имя*. Одно слово, образованное из начальных букв группы других слов. Например, МНК – метод наименьших квадратов, МКЭ – метод конечных элементов.

АКСИОМА
Греческое $\alpha\xi\iota o\mu\alpha$ – *достоинство, уважение, авторитет, почёт*. Современный смысл термина – самоочевидная истина.

В 1900 г. в Париже прошёл второй Математический конгресс. На этом конгрессе видный немецкий математик Давид Гильберт изложил 23 проблемы, которые он предложил решить в XX веке. Второй в этом списке была следующая проблема. Доказать, что можно создать такую полную и непротиворечивую систему базовых аксиом, с помощью которых можно сделать заключение об истинности или ложности любого утверждения.

Австрийский математик Курт Гёдель доказал теорему, которая противоречила поставленной задаче, т.е. он доказал обратное утверждение: **Теорема Гёделя.** Всякая система математических аксиом, начиная с определённого уровня сложности, либо внутренне противоречива, либо неполна.

Эта теорема доказала ограниченность формального логического мышления. Окружающий нас мир, социальные явления и интеллектуальная деятельность связаны с разнообразными процессами, нередко далёкими от формальной логики.

АЛГЕБРА

Первое сочинение по алгебре «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабала» написал знаменитый среднеазиатский учёный Мухамад ибн Муса аль-Хорезми (Абу Абдаллах) (825). Слово *ал-джабр – перенос выражения из одной части равенства в другую.* Слово *ал-мукабала – уничтожение равных слагаемых в обеих частях равенства.* По этой книге долгое время учились в Европе. Слово *алгебра* стало названием одной из математических наук только в начале XII в. Первая печатная книга по алгебре появилась в 1494 году. Её автором был Лука Пачоли – монах и друг великого Леонардо да Винчи. В книгу вошло всё, что было известно об арифметике, алгебре и тригонометрии к концу XV века.

Во многих странах Европы (XVIII в.) издали книгу по алгебре «Универсальная арифметика», автор – Леонард Эйлер. На русскомязыке она появилась в 1768 г. В течение двух веков эту знаменитую книгу пере издавали более тридцати раз.

Современная алгебра – это математическая наука, которая включает несколько разделов, каждый из которых тоже называется алгеброй и посвящён изучению операций над элементами некоторого множества. Все элементы такого множества имеют свою одинаковую, но уникальную структуру. Операции в этих алгебрах являются обобщением операций сложения и умножения с учётом структуры элементов данной алгебры. Название каждой алгебры включает название изучаемого множества: алгебра действительных чисел, алгебра комплексных чисел, векторная алгебра, матричная алгебра, алгебра n-мерных векторных пространств и др.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение называется алгебраическим, если оно представимо в виде

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где коэффициенты $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ – заданные действительные числа. Решить уравнение, значит найти такие значения величины x, при которых это уравнение превращается в тождество. Найденные значения x называются корнями уравнения.

В XVI в. произошло величайшее открытие в алгебре. Итальянские математики Тарталья, Кардано и Феррари, независимо друг от друга, вывели формулы для нахождения корней уравнений 3 и 4 степеней.

В течение следующих трёх веков лучшие математические умы пытались вывести точные формулы для нахождения корней уравнений 5-ой степени.

В XIX в. очень молодой гениальный норвежский математик Нильс Абель вывел эти формулы. Многие известные математики того времени проверяли их и сочли правильными. Ошибку нашёл сам Н. Абель. В результате размышлений о причине ошибочного результата он доказал (1823), что в общем случае алгебраические уравнения выше 4-й степени не решаются точно в радикалах, т.е. с помощью арифметических действий и извлечения корня. Французский двадцатилетний математик Э. Галуа создал метод, который отвечал на следующий важный вопрос:

"Для каких видов алгебраических уравнений выше 4-й степени возможно найти точное решение"?

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

Число, которое может быть корнем некоторого алгебраического многочлена с рациональными коэффициентами.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Линии называются алгебраическими кривыми n-го порядка, если их уравнения – алгебраические уравнения n-ой степени. Такое название линиям придумал Ньютон. Окружность, эллипс, гипербола и парабола – кривые второго порядка. Есть и другие алгебраические кривые более высокого порядка. Ньютон исследовал кубические уравнения, соответствующие кривым 3-го порядка. Оказалось, что существуют 78 видов таких кривых; каждый вид ещё разбивается на пять классов. Алгебраических кривых 4-го порядка настолько много, что они пока не поддаются классификации.

АЛГОРИТМ

От латинского *algorithmus*. Последовательность точно описанных операций, которые однозначно выполняются в определённом порядке и приводят к правильному результату.

Слово произошло от географического названия – Хорезм. Так называли древнее государство Средней Азии в низовьях реки Амударьи. В IX в. там жил великий математик Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми.

В сочинении «Об индийском числе» он изложил десятичную систему исчисления и некоторые методы решения различных задач арифметики. Латинский перевод этой работы начинался со слов: "*Dixit Algorithmi – сказал ал-Хорезми*". Таково происхождение слова *алгоритм*. В средневековой Европе оно означало десятичную позиционную систему. Благодаря работам Лейбница (1684) этим термином стали называть определённый порядок действий для получения нужного результата. На русском языке слово впервые появилось в 1835 году.

С античных времён математики искали общие методы и порядок решения различных задач математики. Понимание, что алгоритм – это самостоятельный математический инструмент появилось (1912) в работах Бореля – великого французского математика. Современное понятие было закреплено за словом *алгоритм* в первой половине XX века в работах Тьюринга, Поста, Маркова (младшего) и др.

Программа для компьютера – это запись на языке программирования алгоритма решения определённого класса задач. Каждая стандартная программа имеет свой алгоритм, разработанный с максимальной степенью общности, максимальным быстродействием и минимальной величиной погрешности.

АЛОГИЗМ
От греческого *αλογισμός – противоречие с логикой, бессмыслица.*

АЛЬТЕРНАТИВА
От французского *alternative – одна из исключающих друг друга возможностей.*

АМПЛИТУДА
Латинское *amplitudo – обширность, широта.* Встречается в тригонометрических рядах Фурье.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
Так называется раздел математики, который изучает функции, с помощью теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления.

Лейбниц написал Я. Бернулли, что до 1700 г. основное в математическом анализе было завершено. Оказалось, что многое ещё осталось для трудов Эйлера, Гаусса, Коши, Вейерштрасса и ряда других математиков.

Первый трактат о дифференциальном исчислении создал И. Бернулли (1691) для своего ученика – маркиза Лопиталя, который позже стал автором первого опубликованного учебного пособия «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий». Русский математик С. Котельников (1771) впервые изложил математический анализ на русском языке. Это был перевод сжатого конспекта трудов Эйлера.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ
Ф. Виет отвергал слово *алгебраический*, считая его варварским, поэтому стал настойчиво заменять его словом *аналитический.*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Великий Р. Декарт был уверен в том, что геометрический объект можно задать уравнением. По свойствам этого уравнения можно судить о

свойствах соответствующего геометрического объекта. Геометрию, в которой у кривых и поверхностей есть свои уравнения, называют аналитической геометрией. Подробно такую геометрию и размышления о ней Декарт изложил в книге «Геометрия». Ньютон, прочитав эту книгу, пришёл к заключению, что аналитическая геометрия – больше алгебра, чем геометрия.

Может возникнуть вопрос. Почему говорят аналитическая, а не алгебраическая геометрия? За ответом обратимся к другому французскому математику Виету. Он первый ввёл в математику слово *аналитическая.* Виет считал слово *алгебра* варварским и всегда заменял его словом *анализ.*

Выход книги «Геометрия» был принят математиками по-разному. Одни восторгались, другие обвиняли Декарта в заимствовании у Виета. Действительно, геометрия Декарта родилась не на пустом месте. Виет стоял у истоков создания аналитической геометрии, работал в этом направлении, но Декарт продвинулся гораздо дальше и сделал фундаментальные обобщения. В письме к своему верному другу, математику Мерсенну, он написал: "Я начал там, где Виет закончил".

Созданием аналитической геометрии занимался и другой великий французский математик Ферма. Он вёл споры с Декартом по теоретическим вопросам новой геометрии и написал о ней небольшую работу, которая вышла в свет позже книги Декарта. Ради справедливости и для того, чтобы воздать должное двум великим французам, в истории математики считается, что основателями аналитической геометрии были Декарт и Ферма.

Аналитическая геометрия продолжала развиваться и после работ Декарта. Сейчас студенты-первокурсники знают канонические уравнения прямой, знакомы с выводом этих уравнений. Создатели аналитической геометрии знали, что любое алгебраическое уравнение первой степени – это уравнение прямой, но в книге Декарта «Геометрия» ещё не было вывода таких уравнений.

АНТЬЕ

Французский математик Лежандр обозначал целую часть величины x в виде $E(x)$ от французского $entier$ – *целый.*

АПОФЕМА

Означает *отложенная на стороне.* Термин составлен из двух греческих слов $\alpha\pi o$ – *от* и $\theta\varepsilon\mu\alpha$ – *приложенное, поставленное*.

АППРОКСИМАЦИЯ

Термин происходит от латинского $approximare$ – *приближаться*.

В теории аппроксимации создаются методы приближения одних математических объектов другими более простой структуры.

Основы теории аппроксимации – теории приближения заложили Вейерштрасс и Чебышёв в середине XIX века.

АПРИОРИ
От латинских *a – от* и *priori – заранее, независимо от опыта.* Лейбниц считал, что знание априори – это умозрительное познание. Он высоко ценил такой способ познания и называл его интеллектуальной интуицией.

АРГУМЕНТ
Термин произошёл от латинского *argumentum – знак, признак, довод*.

Лейбниц разделил величины на постоянные и переменные, ввёл термины *variable valeur, variable quantite*. Эти выражения, а также *independente variable quantite,* в первых её определениях, означали *аргумент функции.* Самое первое появление в печати выражения *аргумент функции* относится к 1862 г. В русской математической литературе используется только с конца XIX века. В русском разговорном языке слово *аргумент* впервые встречается в письмах Курбского к Ивану Грозному.

Термин *аргумент* для угла комплексной переменной ввёл Коши (1847).

АРИФМЕТИКА
Происходит от греческого $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ – *число.* У греков арифметика была наукой о натуральных числах.

АРИФМОМЕТР
Название первых вычислительных машин. Слово происходит от двух греческих $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ – *число* и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ – *мерить*. Слово *арифмометр* придумал парижский инженер Т. Кольмар (1818). Первые арифмометры создали математики В. Шиккард (1623), Б. Паскаль (1642), Г. Лейбниц (1674). Арифмометр непрерывного действия сконструировал П. Чебышев (1876).

АРК
Сокращение латинского слова *arcus – лук, дуга*.

АСИМПТОТА
Первая буква слова соответствует греческой букве α. В начале слова она имеет смысл отрицания. Остальная часть слова от греческого $\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ *– совпадающий*. Смысл слова *асимптота – несовпадающая.* Термин ввёл греческий учёный Аполлоний в процессе изучения свойств гиперболы.

В русский язык термин ввёл известный русский математик, член Петербургской академии наук, В. Буняковский (1804–1889).

Асимптота кривой – это такая прямая, расстояние от которой до данной кривой стремится к нулю при неограниченном удалении точки вдоль бесконечной ветви кривой. Асимптота называется наклонной, если она появляется при стремлении аргумента функции к плюс или минус бесконечности. Такие асимптоты могут появиться только у функций с неограниченной областью определения. Уравнение наклонной асимптоты удобно писать в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

Стремление графика функции $f(x)$ к асимптоте означает, что отклонение графика функции от асимптоты стремится к нулю:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0\,; \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0.$$

Если угловой коэффициент окажется равным нулю, такая асимптота будет горизонтальной. Можно рассматривать горизонтальную асимптоту, как частный случай наклонной.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы один из двух односторонних пределов

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\,,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

равен плюс или минус бесконечности. В этом случае предельная точка x_0 является конечной граничной точкой области определения функции $f(x)$, но не принадлежит этой области.

АССОЦИАТИВНОСТЬ

От латинского *associate – сочетать*. Термин ввёл в математику английский математик В. Гамильтон (1843). Закон *ассоциативности* относительно операции сложения и умножения:

$$(a + b) + c = a + (b + c); \ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Б

БАЗИС

Греческое слово $\beta\alpha\sigma\iota\varsigma$ – основа. Базис – это набор из n линейно независимых элементов (л.н.э) в n-мерном векторном пространстве или бесконечный набор л.н.э в функциональном пространстве. Например, знаменитый ортонормированный векторный базис $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Слово *бесконечный* в математическом смысле стали использовать благодаря немецкому художнику А. Дюреру (1525). Слово *конечный* появилось в математике гораздо позднее (1708).

Математики Греции пытались дать определения таким понятиям как *бесконечность*, *предел*, но столкнулись с трудностями, которые они не смогли преодолеть. Эти понятия были корректно определены только в XIX веке. Знак ∞ для указания неограниченного возрастания ввел английский математик Д. Валлис (1655). Предполагают, что он использовал римский символ ∞, означавший 1000. Этот символ иногда называют *любовный узел.* Знак стал общепринятым с XVIII века.

Великий математик Г. Кантор (1874) открыл удивительные свойства множества действительных чисел.

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ ВЕЛИЧИНА (ФУНКЦИЯ)

Анализ бесконечно малых – это историческое название математического анализа. Древнегреческий метод исчерпывания позволял математикам тех времён проводить вычисления с заданной точностью. Этот метод позже стал фундаментом, на котором строились понятия предела и *бесконечно малой величины*. Создание исчисления *бесконечно малых* не было простым и быстрым. Ньютон старался избегать этого понятия.

Новое исчисление получило прочную базу, когда было строго определено понятие *бесконечно малой*. Такое определение сформулировал великий чешский математик Б. Больцано (1817).

Функция $\alpha(x)$ называют бесконечно малой в окрестности точки x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Две бесконечно малые $\alpha(x), \beta(x)$ называются эквивалентными:

$$\alpha(x) \sim \beta(x),$$

если предел их отношения равен единице:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

БИНАРНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Латинская приставка *bi – удвоение, билинейный, биквадратный.* Термин *бинарный* образован от латинского *binaries – двойной.*

БИНОМ НЬЮТОНА

Это формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} b^k; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Частные случаи этой формулы были известны ещё на Древнем Востоке.

БИССЕКТРИСА

От латинского *bi – два* и *seco – секу, режу*. Смысл слова – рассекающий на две части.

БРАХИСТОХРОНА

Слово составлено из двух греческих *βραχιστος – очень короткий* и *χρονος– время.* Термин ввёл (1696) И. Бернулли, в задаче о брахистохроне (см. *вариационное исчисление*).

В

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Слово *вариация* произошло от латинского *variatio – перемена, различие*.

Первая задача *вариационного исчисления* известна с глубокой древности. Она называется задачей Дидо. По легенде, Дидо была царицей одного из государств Древней Греции. Она спасалась от преследования царя соседнего государства, поэтому попала в Северную Африку. Там попросила у местных жителей участок земли, который можно покрыть шкурой вола. Аборигены удивились её скромности и сразу согласились. Царица резала шкуру на очень тонкие полоски и связывала их друг с другом. В результате получилась тончайшая длинная нить, охватившая достаточно большой участок земли. Там Дидо развернула строительство. Так появился знаменитый город древности Карфаген.

Начиная с XVII в. у математиков стали появляться задачи о нахождении функций, при которых некоторое свойство исследуемого объекта достигает максимума или минимума. Существенно позднее изобрели общий метод решения таких задач и назвали его «Вариационным исчислением», а найденные решения – функции стали называть экстремалями.

В 1687 г. аналогичную задачу стал изучать Ньютон. Ему надо было выбрать такую форму корабля, при которой сопротивление воды стало бы наименьшим. Швейцарский математик Иоганн Бернулли первый попытался обобщить такого рода задачи. Он предложил математикам за год решить задачу о брахистохроне: "Среди всех линий, соединяющих две заданные точки пространства, найти кривую, двигаясь по которой под действием только силы тяжести и без трения, материальная точка пройдёт путь за минимальное время". Лейбниц решил, по его мнению, эту прекрасную задачу. Кроме Лейбница её решили Я. Бернулли, Лопиталь и Ньютон.

Группе математиков, включая И. Бернулли, его старшего брата Я. Бернулли и Лейбница, удалось ещё решить группу задач такого типа. Честь создания совершенно нового метода решения аналогичных задач принадлежит Эйлеру. Ему было всего 25 лет, когда он получил первые блестящие результаты в этом направлении.

Следующий этап развития вариационного исчисления связан с Ж. Лагранжем и А. Лежандром. Французский математик Лагранж в 19 лет придумал свой метод решения вариационных задач и сразу написал об этом мировой математической звезде Эйлеру. Ответ был быстрым. Метод привёл в восторг Эйлера. Дальнейшее развитие этого раздела математики продолжили немецкие математики К. Якоби и К. Вейерштрасс. В XX в. успешно решали интересные задачи с помощью вариационного исчисления ведущие математики России: Крылов, Боголюбов, Понтрягин, Канторович, Михлин и др.

В 1908 г. швейцарский математик и физик-теоретик В. Ритц разработал эффективный численный метод, который строил в аналитическом виде приближённое решение вариационных задач с заданной степенью точности. С помощью этого метода можно найти приближённое решение определённого класса дифференциальных уравнений с граничными (краевыми) условиями.

Теоретическое обоснование метода Ритца разработали только в 1929 г. русские математики А. Крылов и Н. Боголюбов.

В настоящее временя расширяется область применения вариационного исчисления. Оно используется в геометрии, физике, в квантовой механике, вычислительной математике, теории оптимального управления, ракетной и космической технике.

ВЕКТОР

Латинское *vector – несущий;* английское *vector – указатель направления.*

В начале XIX в. операции с направленными отрезками на плоскости возникли почти одновременно в трудах ряда учёных. Это связано с общей причиной – необходимостью геометрической интерпретации комплексных чисел и операций над ними.

Вектор, как математический термин, появился впервые у великого ирландского математика и физика В. Гамильтона (он был членом-корреспондентом Петербургской академии наук).

Старейшее обозначение (1806) вектора – чёрточка над буквой. Немецкий геометр А. Мёбиус, идеи которого легли в основу топологии, первый стал обозначать вектор двумя буквами, чтобы указать начало и конец вектора.

Одним из создателей векторной алгебры был гениальный самоучка знаменитый английский инженер и физик О. Хевисайд. После окончания школы он поработал телеграфистом-оператором, но вскоре оставил службу и стал заниматься исследованиями в собственной лаборатории. Хевисайд не только самостоятельно освоил необходимые ему разделы высшей математики, но и внёс много нового. Он определил и ввёл в математику два действия умножения векторов, придумал им названия, которые используются и в настоящее время. Дал строгое и наиболее общее определение линейной независимости векторов. Впервые назвал *ортами* единичные векторы, расположенные на координатных осях, первый обозначил векторы одной жирной буквой (1896).

<u>Коллинеарные векторы</u>

Так называются векторы, лежащие на одной или параллельных прямых.

Термин *коллинеарность* образован из латинских *co – вместе* и *linearis – линейный.*

<u>Компланарные векторы</u>

Это векторы, лежащие на одной или параллельных плоскостях.

Термин *копланарность* образован из латинских *co – вместе* и *planum – плоский.*

В русской математической школе принято говорить и писать этот термин с буквой м: *компланарность.*

Выражения *коллинеарные векторы* и *компланарные векторы* ввёл (1901) в математику, механику и физику известный американский математик, механик, физик, химик и большой знаток латинского и греческого языков. Д. Гиббс.

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Пьер Ферма – гениальный французский математик самоучка и юрист. Во время чтения книги Диофанта «Арифметика» он сделал запись на полях книги: "Никакую степень выше второй нельзя разложить на сумму двух степеней с теми же показателями. Я открыл это поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки".

Так, на полях Диофантовой «Арифметики» Ферма сформулировал утверждение, которое вошло в историю математики как великая теорема Ферма. Содержание теоремы очень коротко.

Для любого натурального числа $n > 2$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

Общее доказательство теоремы, о котором писал Ферма, никто не видел. В его работах было найдено только доказательство для случая $n = 4$.

Удивительна история доказательства знаменитой теоремы.

Более трёх столетий многие математики разных стран пытались доказать эту теорему. В 1770 г. Эйлер доказал теорему для $n = 3$; в 1825 г. Дирихле и Лежандр – для $n = 5$; в 1839 г. Ламе – для $n = 7$. Затем теорему Ферма доказали для всех простых чисел n из области $[3; 100]$. Страсти вокруг теоремы Ферма накалялись. В 1907 г. за её доказательство была объявлена международная премия в 100000 немецких марок.

Новый поворот в деле доказательства теоремы Ферма произошёл в 1955 году. Молодой японский математик Танияма сформулировал некоторую гипотезу о свойствах кривых, которые описываются уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

где a и b – целые числа.

Через 20 лет об этой гипотезе вспомнил немецкий математик Фрей и предположил, что теорема Ферма является следствием гипотезы. В 1985 г. американский математик К. Рибет доказал предположение Фрея. Оставалось сделать последний шаг – доказать гипотезу Таниямы.

Американский математик Э. Уайлс (1993) доказал её и представил на конференции в Институте математических наук имени И. Ньютона (Кембридж). Доказательство занимало 150 страниц. Его достаточно долго изучали и обнаружили ошибку. Уайлс совместно с другим математиком Тейлором исправили ошибку. Теорема Ферма наконец была доказана!

На Всемирном математическом конгрессе в Берлине (1998) Уайлс доложил доказательство. На докладе присутствовали 2000 математиков.

ВЕЛИЧИНА
Величиной называют числовое значение параметра, функции, коэффициента и других математических объектов, которые могут принимать числовые значения.

ВЕРОЯТНОСТЬ
От старославянского. Первоначальный смысл – достойный доверия.

Теория вероятностей (theory of probability) зародилась в XVI в. Уже тогда итальянские математики Тарталья и Кардано вычисляли вероятность. В XVII в. вероятность использовали Галилей, Паскаль и Ферма.

В работе «Искусство предположений» (конец XVII в.) Я. Бернулли представил одно из первых определений вероятности. Д. Бернулли впервые использовал в теории вероятностей методы математического анализа (1766).

Классическое определение вероятности ввёл П. Лаплас (1812) в работе «Аналитическая теория вероятностей».

Благодаря Петербургской математической школе теория вероятностей стала строгой математической наукой. Яркими представителями этой школы были П. Чебышев и его ученики А. Ляпунов и А. Марков (старший). С ними связано доказательство знаменитых предельных теорем.

Немецкий учёный Д. Гильберт считал вопрос об аксиоматическом построении теории вероятностей важнейшей задачей, стоящей перед математиками XX века, и называл её шестой проблемой. Такую систему аксиом разработал великий русский математик А. Колмогоров.

ВЕРТИКАЛЬ
От латинского слова *vertex – вершина*.

ВЫВОД
Процесс получения какого-либо результата и сам результат этого процесса.

ВЫРАЖЕНИЕ
Формула или некоторая её часть.

ВЫРОЖДЕНИЕ
Впервые это слово, как математический термин, использовал итальянский математик Б. Кавальери (1635): "*линия выродилась в точку*".

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА
Английский математик и изобретатель Чарльз Бэббидж разработал (1822) проект универсальной цифровой вычислительной машины, которая должна была получить численный результат поставленной задачи с помощью

исходных данных и заданного алгоритма. Этот проект был прообразом современных компьютеров.

С помощью Бэббиджа англичанка Августа Ада Байрон, она же леди Лавлейс, всесторонне разобралась в его изобретении и написала первую компьютерную программу.

Два термина, введённые Адой, используют и современные программисты: рабочая ячейка и цикл. Она нашла связь рекуррентных формул с циклическим процессом вычислений и ввела принципы алгоритмизации.

Аду Байрон считают первым в мире программистом, поэтому в день её рождения, 10 декабря, отмечается Международный день программистов.

Г

ГАРМОНИКА

От греческого $\alpha\rho\mu o\nu\iota\chi o\zeta$; латинское $harmonia$ – *соразмерность, связь*.

Обратимся к функции $f(x)$, представленной в виде тригонометрического ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k).$$

Каждое слагаемое этого ряда называется гармоникой. Разложение функции в ряд Фурье с последующим анализом характера каждой гармоники называется в математике гармоническим анализом.

ГАРМОНИЯ

Пифагор с раннего детства любил музыку, хорошо пел и играл на кифаре (старинный струнный инструмент), поэтому в музыке Пифагор услышал подтверждение своему знаменитому утверждению: "Всё есть число". Он обнаружил, что приятные для слуха созвучия (*консонансы)* возникают, если длины 4-х струн соотносятся так же, как первые четыре натуральных числа: $1:2$; $2:3$; $3:4$. Пифагор заметил, что с уменьшением отношения

$$n:(n+1), \text{ где } n = 1,2,3,4,\ldots$$

созвучие струн становится более приятным.

Это удивительное открытие навело Пифагора на мысль о существовании числовых закономерностей в природе.

Слово *консонанс* связано с латинским $consonantia$ –созвучие, устойчивость, гармония. Термин *гармония* встречается в разных разделах математики: *гармоническая функция, гармоническое среднее, гармонический ряд.*

ГЕОМЕТРИЯ

Часть математики, которая изучает пространственные фигуры и их свойства. Слово произошло от греческих слов $\gamma\varepsilon\alpha$ *–земля* и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\iota\nu$ – *мерить.*

Древний Египет считался центром развития геометрии. Великий грек Геродот был уверен, что развитие геометрии в Египте связано с необходимостью измерения прибрежных участков земли после систематического выхода из берегов полноводной реки Нил.

В древней Греции тоже уделялось большое внимание геометрии. Фалес, философ и математик, посетил Египет (VI в. до н.э.); изучил египетскую геометрию и передал свои знания Греции. Геометрия была в те времена самой популярной математической наукой благодаря широчайшей области её практических приложений**.** В школе Пифагора геометрия стала самостоятельной ветвью математики со стройной структурой доказательств.

До нашего времени не дошло содержание первого греческого учебника геометрии, который назывался «Предания Пифагора». Сохранились только фрагменты из курса геометрии «$\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tau o\nu$» – стихии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс составил греческий математик середины V в. до н.э. Гиппократ Хиосский. В III в. до н.э. был издан знаменитый математический труд Евклида, который со временем вытеснил работу Гиппократа. На латинском языке труд Евклида назывался «Elementa», поэтому в русском переводе появилось устойчивое выражение «Элементарная геометрия».

Франция стала первой страной, в которой отошли от евклидовых традиций изложения геометрии. С середины XVI в. появились учебники различных авторов. Немецкий художник А. Дюрер – автор первой «Геометрии» на немецком языке. Первым русским учебником геометрии был перевод соответствующего немецкого учебника. Перевод осуществил Брюс – сподвижник Петра I. Учебник издавали в 1708, 1709 гг.

Великий итальянец Галилей считал, что сама природа говорит на языке математики, а пишет геометрическими фигурами.

Евклидова геометрия

Древнейшая геометрическая система знаний, впервые представленная в «Началах» Евклида. Она справедлива в пространстве с постоянной нулевой кривизной. В этой геометрии сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Через заданную точку всегда можно провести только одну прямую, параллельную другой прямой.

Аналитическая геометрия

Раздел геометрии, в котором геометрические объекты изучаются с помощью алгебры на основе метода координат.

Дифференциальная геометрия

Раздел геометрии, в котором свойства геометрических объектов изучают с помощью математического анализа.

Геометрия Лобачевского (Гиперболическая геометрия)

Геометрия в пространстве с отрицательной постоянной кривизной. В этой геометрии сумма внутренних углов треугольника всегда меньше π. Через заданную точку можно провести больше одной прямой, параллельной другой прямой, которая не проходит через эту точку.

Геометрия Римана (Эллиптическая геометрия)

Геометрия в пространстве с положительной постоянной кривизной. Сумма внутренних углов треугольника больше π. Нет прямых, проходящих через данную точку параллельно прямой, которая не проходит через эту точку.

ГИПЕР

Греческое $\acute{\upsilon}\pi\varepsilon\rho$ – *над, сверх.* В терминах математики означает *превышение.*

ГИПЕРБОЛА

От греческого $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$ – *преувеличение,* на латинском *hyperbole.*

ГИПОТЕЗА

В древнегреческой математике использовали понятие $\upsilon\pi o\theta\varepsilon\tau\iota\varsigma$, которое имело следующий смысл. Гипотеза – предположение, с помощью которого можно объяснить определённый математический результат. Гипотеза проверяется или отвергается в ходе доказательства.

ГЛАДКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция, имеющая непрерывную хотя бы первую производную. Порядок гладкости функции равен порядку старшей производной этой функции.

ГРАДИЕНТ

Происходит от латинского *gradiens* – *идущий вперёд, растущий.*

Ирландский учёный В. Гамильтон (1846) ввёл векторный оператор *градиент* и обозначил его символом ∇, который позже стали называть *набла*. Такой оператор записывается в виде

$$grad\ = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Пусть задано скалярное поле

$$v = f(x, y, z);$$

его градиентом является векторное поле

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}.$$

ГРАДУС

Латинское слово *gradus* – *шаг.* Жрецы Вавилона заметили, что солнечный диск укладывается 180 раз по дневному пути Солнца. Оно делает 180 шагов. Шаг Солнца – маленький круг на небосводе: 180 шагов $= 180^{o}$. Такое обозначение градуса, использовал греческий учёный Птолемей. Путь за сутки составляет 360^{o}, поэтому круг стали делить на 360 частей.

ГРАФ
Пусть заданы непустое множество X, состоящее из элементов (точек) и множество отношений T, которое устанавливает соответствие между каждой точкой множества X и некоторым его подмножеством. Непустое множество X и множество отношений T называется графом и обозначается в виде $G(X, T)$.

Первая работа по теории графов связана с немецким городом Кенигсбергом, ставшим российским Калининградом после Второй мировой войны. В этом городе есть река Прегель с семью мостами. В XVIII веке появилась следующая задача.

Можно ли обойти весь Кенигсберг, проходя при этом по каждому мосту только один раз? Начало прогулки по городу может и не совпадать с её окончанием. Главное, что по каждому мосту надо пройти только один раз.

В 1735 году Л. Эйлер опубликовал статью с решением этой интересной задачи. Так было положено начало теории графов. Этим трудом великого математика заинтересовались во 2-й половине XIX века.

На развитие теории графов оказали большое влияние исследования в биологии, психологии, теории игр; изучение кристаллов, молекулярных структур, электрических цепей и др.

ГРАФИК
Греческое слово $\gamma\rho\alpha\varphi\omega\iota\kappa o\varsigma$ – *изображение* в письме или рисунке.

Д

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ
Лейбниц создал двоичную систему счисления и оценивал своё творение очень высоко. Он написал: "В своей бинарной арифметике я вижу прообраз творения. Единица выражает божественное начало, а ноль – небытие". Лейбниц полагал, что Всевышний создаёт сущее из небытия таким же образом, как единица и ноль в его двоичной системе выражают все числа. В настоящее время двоичная система счисления является классическим языком вычислительной техники.

ДВУЧЛЕН
Это сумма или разность двух одночленов. В математике обычно двучлен называют биномом. Самый знаменитый двучлен – это бином Ньютона.

ДЕДУКЦИЯ
Латинское слово *deductio* – *выведение*. Рассуждение, при котором новое положение выводится логически из предшествующих рассуждений.

ДЕЙСТВИТЕНЛЬНЫЕ ЧИСЛА
Это объединение рациональных и иррациональных чисел. В XVI веке обнаружили, что рациональные числа всегда можно представить в виде

конечной десятичной дроби либо бесконечной периодической дроби. Великий Эйлер доказал, что любое иррациональное число может быть представлено только как бесконечная непериодическая десятичная дробь.

ДЕЛЕНИЕ

В древности в математике не было операции деления. Вместо деления использовали вычитание. Латинские термины: *divisio – деление, dividenti – делимое, divisor – делитель* появились только в X веке в работах французского математика Герберта. Впоследствии он стал папой Римским Сильвестром II. Русские термины: *делимое, делитель, частное* ввёл русский математик Л. Магницкий (1703). Первым знаком деления была горизонтальная черта. Знак деления в виде двоеточия появился в XVI в. Его использовал Лейбниц. Знак ÷ ввели в Швейцарии и использовали в Англии.

ДЕТЕРМИНАНТ (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ)

Слово происходит от латинского *determino – ограничивать, определять*. Впервые встречается у Гаусса (1801). Он использовал это слово для квадратичных форм.

Идея введения детерминанта принадлежит Лейбницу. Он пришёл к детерминантам при решении линейных систем уравнений (1700). В 1750 г. определители были вновь изобретены женевским математиком Крамером, а затем Лагранжем (1770). Крамер ввёл знакомые сегодня термины: строка и столбец детерминанта.

Метод Крамера сразу вошёл в школьную математическую программу тех времён. Французский математик Вандермонд опубликовал первое исследование, посвящённое свойствам детерминанта. Немецкий математик К. Якоби обозначил детерминант греческой буквой Δ и стал использовать слово *element* для описания структуры определителя.

Вычисление определителя 3-го порядка методом треугольников придумал французский профессор Саррюс (1846). Теорема о вычислении определителя любого порядка с помощью разложении определителя по элементам любой строки или столбца встречалась в частных случаях у Лапласа, Вандермонда и Безу. Коши смог в общем виде сформулировать и доказать теорему о вычислении определителя любого порядка. В алгебре эту теорему называют теоремой Лапласа.

Первое полное изложение теории определителей принадлежит Коши. Он посвятил этой теории 14 трудов и превратил её в самостоятельный раздел математики. Коши ввёл выражение *детерминант n-го порядка*.

Следующий этап развития теории – это создание К. Якоби 30-ти работ с завершающей статьёй «О построении и свойствах детерминантов». Он ввёл и первый использовал функциональные определители.

Английский математик Д. Сильвестр впервые назвал якобианом известный функциональный определитель, чтобы воздать должное трудам

К. Якоби. Теория бесконечных детерминантов была заложена великим французским математиком А. Пуанкаре.

ДИАГОНАЛЬ

От греческого $\delta\iota\alpha\gamma\omega\nu\iota o\varsigma$ – *проходящий через угол*. Термин составлен из слов $\delta\iota\alpha$ – *через* и $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ – *угол*.

ДИАМЕТР

От греческого $\delta\iota\alpha\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ – *поперечник*.

ДИВЕРГЕНЦИЯ

От латинского *divergence* – *расходимость.* Термин ввёл английский математик В. Клиффорд (1878) и обозначил дивергенцию div $\boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}$ – векторное поле:

$$\boldsymbol{F} = X(x, y.z)\boldsymbol{i} + Y(x, y.z)\boldsymbol{j} + \mathrm{Z}(x, y.z)\boldsymbol{k};$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

ДИЗЪЮНКЦИЯ

От латинского *disjunctio* – *разъединение, отделение.* Рассмотрение двух высказываний с помощью разделительного союза *либо (или)*.

ДИРЕКТРИСА

Латинское *directrixe* – *направляющая.* Слово в математику ввёл Лопиталь.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Слово *дискретный* образовано от латинского *discretus* – *сложенный из отдельных частей, разорванный.*

С середины XX века вошли и заняли важное место разнообразные информационно-логические системы, основанные на дискретных процессах. Для решения математических задач, связанных с такими процессами нужны соответствующие методы, объединение которых называется *дискретной математикой*. В неё входят следующие разделы: высшая алгебра, теория чисел, математическая логика, булевы функции, логическое исчисление, комбинаторика, кодирование, графы и др.

Российский математик С. Яблонский, член корреспондент РАН – основатель российской школы математической кибернетики, один из первых в нашей стране написал учебники «Введение в дискретную математику» (1983) и «Дискретная математика» (1989).

ДИСКРИМИНАНТ

От латинского. *discriminare* – *различать.* Это понятие использовали Виет, Гаусс, Дедекинд, Кронекер и др. Термин *дискриминант* ввёл британский математик Д. Сильвестр. Он придумывал множество математических терминов и делал это с удовольствием.

ДИСПЕРСИЯ

От латинского *dispersio* – *рассеяние*. Понятие введено (1877) немецкими экономистами. В теории вероятностей дисперсия – это числовая характеристика, которая показывает разброс случайной величины α относительно её математического ожидания:

$$D\alpha = M(\alpha - M\alpha)^2.$$

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

От английского *distribution* – *распределение*. Один из законов умножения и сложения. Название законов *дистрибутивный* и *коммутативный* (от латинского *commutatio*) ввёл (1815) французский офицер и преподаватель Ф. Сервуа. В Российских школах *дистрибутивный закон* называли и сейчас часто называют распределительным:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Латинское *differentia* – *разность*. Этот термин встречается в работах Лейбница, Якоби и И. Бернулли. Они использовали это слово как *приращение*. От И. Бернулли пошла традиция обозначать приращение функции греческой буквой Δ. Лейбниц обозначил линейную, относительно Δx, часть приращения функции латинской буквой d:

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Легко показать, что приращение аргумента всегда равно дифференциалу аргумента: $\Delta x = dx$, поэтому

$$df(x) = f'(x)\Delta x \Rightarrow df(x) = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = {}^{df(x)}/_{dx}$$

Дифференцирование

Благодаря последнему равенству процесс взятия производной Лейбниц назвал *дифференцированием*. Этот термин стал классическим. Вместо фразы *найдём производную*, говорят и пишут *продифференцируем*.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ

Функция, называется *дифференцируемой*, если у неё есть производная хотя бы первого порядка

До конца XIX века математики были уверены, что у каждой непрепрерывной функции есть производная. Первый пример непрерывной функции без производной построил великий чешский математик и теолог Больцано (1831). Этот пример опубликовали только через 100 лет после его смерти. Аналогичные примеры придумали немецкий математик Вейерштрасс и норвежский математик Нильс Абель.

Понятие *дифференцируемая функция* с большим трудом входило в математику. Французский математик К. Жордан (начало XX в.) знал, что есть недифференцируемые непрерывные функции, но писал: "Мы не будем рассматривать эти ненормальные функции".

ДИХОТОМИЯ

От греческого $\delta\iota\chi o\tau o\mu\iota\alpha$ *– разделение на две части.*

В математику это понятие ввёл Аристотель. В вычислительной математике есть несколько итерационных методов приближённого нахождения корней различных непрерывных функций. Метод дихотомии – простейший из них; его ещё называют методом бисекции или половинного деления.

ДОМИНАНТА

От латинского *dominans – основной признак, важнейшая часть чего-либо.* Например, в алгебре есть выражение *доминантная главная диагональ в трехдиагональной матрице.* Такая диагональ встречается в методе трёхдиагональной прогонки для решения алгебраических линейных систем, основная матрица которых трёхдиагональна:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & o & o & o \\ a_2 & c_2 & b_2 & o & o \\ o & a_3 & c_3 & b_3 & o \\ o & o & a_4 & c_4 & b_4 \\ o & o & o & a_5 & c_5 \end{pmatrix}.$$

Главная диагональ матрицы A называется доминантной, если

$$|c_k| \geq |a_k| + |b_k| \text{ для } k = 1,2,3,4,5.$$

Е

e

Впервые это число появилось в 1618 г. в работе «Описание удивительной таблицы логарифмов» шотландского астронома, изобретателя логарифмов Джона Непера. Он использовал в основании логарифма число e^{-1}. В 1668 г. немецкий математик Н. Меркатор первый стал использовать термин *натуральный* для логарифма по основанию e.

В 1683 г. Я. Бернулли доказал, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Это был первый случай в истории математики, когда число определялось как предел. Обозначение e введено Эйлером. Символ сразу стал общепринятым. Во многих странах число e и в настоящее время называют числом

Эйлера. Скорее всего, Эйлер выбрал такое обозначение, потому что e – первая буква латинского слова *exponential – показательный.*

Иррациональность и трансцендентность числа e была доказана только в XIX в. французскими математиками Ж. Лиувиллем и Ш. Эрмитом.

Число e^{π} называют числом А. Гельфонда в честь российского математика, доказавшего трансцендентность этого числа.

Эйлер доказал равенство

$$e^{i\pi} = -1.$$

Математики нашли удивительную взаимосвязь между двумя фундаментальными константами. Приведём простейшие из таких связей:

$$\sqrt{\sqrt{\pi^{\pi}} + \sqrt{e^{e}}} = \pi; \quad \pi \cdot e^2 = e^{\pi}; \quad \frac{\pi^2 + e^2}{\pi^3 - e^3} = \frac{\pi}{2}; \quad \pi^{e} = e^{\pi}.$$

ЕГИПЕТСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Это прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5. В Древнем Египте для получения прямого угла брали верёвку с 12-ю узлами, делящими верёвку на 12 равных частей и, согласно теореме Пифагора, с помощью такой верёвки строили прямой угол. С тех времён сохранились отдельные старинные изображения людей, несущих верёвки с узлами.

Суть теоремы Пифагора была известна в Вавилоне и Египте почти за тысячелетие до Пифагора, но первое известное доказательство знаменитой теоремы принадлежит именно Пифагору.

ЕДИНИЦА

Ещё в XVI в. единицу не рассматривали как число. Справедливости ради следует отметить, что понятие *число один* не является простым понятием. Этот факт известен специалистам в области математической логики.

Обозначение для единицы у всех древних цивилизаций было одинаковым – это вертикальная черта. Греческая буква I-*йота* по начертанию – вертикальная черта. Йота – наименьшее натуральное число. Здесь уместно привести известную фразу: "дело ни на йоту не продвинулось".

З

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Это обобщённое название группы теорем, из которых следует, что среднее арифметическое очень большого числа независимых случайных величин с практической достоверностью равно постоянной величине.

Впервые выражение *закон больших чисел* появилось в работе Пуассона в 1836 г. Он доказал теорему, которая является частным случаем закона больших чисел.

Одним из первых создателей теории вероятностей был швейцарский математик Я. Бернулли. Он считал, что вероятность и статистика обретают смысл, если их используют при большом числе событий. Этот фундаментальный факт Бернулли сформулировал в виде теоремы с названием "*Закон больших чисел*". По признанию Я. Бернулли он 20 лет обдумывал её доказательство и пришёл к выводу, что есть законы, управляющие даже теми событиями и явлениями, которые на первый взгляд, кажутся случайными. Бернулли написал книгу «Искусство предположения», изданную в 1713 году.

Закон больших чисел определяет условия, при которых суммарное воздействие множества случайных факторов приводит к результату, который не зависит от случая. Доказано, что среднее арифметическое большого числа независимых измерений практически не будет отличаться от истинного значения измеряемой величины. В самом общем виде *закон больших чисел* сформулировал П. Чебышев. А. Марков (старший) определил, при каких условиях выполняется такой закон, и предложил называть *законом больших чисел* различные обобщения теоремы Якоба Бернулли.

В 1913 г. в Петербургской академии наук праздновали двухсотлетие открытия закона больших чисел.

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Построим следующую пропорцию. Разделим данный отрезок длины a на две части b (большая часть) и $a-b$ в геометрической пропорции. Это означает, что отношение целого отрезка a к его большей части b равно отношению большей части b к его меньшей части $a-b$:

$$a:b = b:(a-b).$$

Такая пропорция с давних времён называется золотой пропорцией. Она была известна ещё пифагорейцам. Евклид в 6-й книге «Начал» (около 300г. до н. э.) описал её уникальные свойства. В эпоху возрождения Леонардо да Винчи назвал такую пропорцию *золотым сечением*.

Пусть $a:b = \Phi$ (греческая буква), $\Phi > 0$, тогда эту пропорцию можно преобразовать к виду

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет один положительный корень:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\cdots.$$

Доказано, что корень Φ является иррациональным числом.

Золотое сечение широко используют в архитектуре, скульптуре, живописи, музыке и математике. Древние греческие вазы обычно имеют очень красивую форму. Анализ их размеров привёл к интересному выводу.

Большинство таких ваз вписываются в прямоугольник с отношением сторон, равным золотому сечению.

Золотое сечение есть в геометрических фигурах с осью симметрии пятого порядка – это пятиконечная звезда и пятиугольник. Формы различных цветов, морских звёзд, морских ежей и формы многих других живых существ содержат золотую пропорцию. Эту интересную закономерность описал Лука Пачоли в книге «О божественной пропорции»; иллюстрировал книгу его друг Леонардо да Винчи.

Немецкий учёный Цейзинг (1855) в работе «Эстетические исследования» показал, что золотое сечение близко к отношению высоты человека к расстоянию между его пупком и подошвами ног. Сразу после рождения человека это отношение равно двум. Постепенно оно уменьшается и примерно к 21 году становится равным 1,625. Эта величина очень близка числу Ф.

Опыты немецкого психолога Фехнера доказали, что среди различных отношений человек, как правило, выбирает золотое сечение. Он показал (1876) множеству людей различные прямоугольники и просил выбрать из них тот, который больше всего нравится своей формой. Большинство выбрало прямоугольник с отношением сторон, равным отношению золотого сечения.

Удивительно, но золотая пропорция, а значит, и число Ф повсюду встречается в природе. Оно присутствует в законах расположения листьев растений, геометрии живых организмов, пропорции тела человека, в астрономических наблюдениях за Вселенной. Эта связь не случайна, но причины её неизвестны.

И

I

Латинское слово *imaginarius* – *воображаемый, мнимый.* Таким словом Декарт (1637) называл недействительные корни уравнения и обозначал их первой буквой этого слова. Эйлер использовал выдумку Декарта и ввёл (1777) обозначение $i = \sqrt{-1}$. Обозначение стало общепринятым с помощью Гаусса (1801). С тех пор $\sqrt{-1}$ и i называют мнимой единицей.

Буква i ещё используется в математике как индекс.

ИЗО

Греческое слово $\iota\sigma o\varsigma$ *–одинаковый, подобный*. Является приставкой в ряде математических терминах.

ИЗОКЛИНА

От греческих $\iota\sigma o\varsigma$ – *одинаковый, равный, подобный* и $\kappa\lambda\iota\nu\omega$ – *наклоняю*. Изоклиной дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(x) = f(x, y)$$

называется линия (кривая), во всех точках которой тангенс её наклона – постоянная величина:

$$\tan\varphi = f(x, y) = const.$$

ИЗОЛИРОВАННЫЙ

Термин происходит от французского слова *isolé – отдельный*. В математическом анализе, например, есть понятие *изолированная точка.*

ИЗОМОРФИЗМ

Взаимно однозначное соответствие между двумя определёнными математическими множествами и результатами линейных операций в этих множествах. Можно сказать, что изоморфизм – существенное внутреннее сходство таких множеств. Если между множествами есть изоморфизм, то они называются изоморфными. Например, множество векторов и множество их координат изоморфны, поэтому в векторной алгебре используется равенство

$$\overline{AB} = \{x, y, z\}.$$

ИНВАРИАНТ

Слово составлено из латинских *in – отрицание* и *varians – изменяющий.* Термин ввёл английский математик Сильвестр. В математике *инвариантом* называют выражение, которое остаётся неизменным при некоторых преобразованиях переменных. Лейбниц доказал, что форма первого дифференциала функции одного аргумента не меняется (инвариантна) при переходе к новой независимой переменной.

ИНВЕРСИЯ

Латинское *inversio – перевёртывание, обращение, перестановка.*

Слово *инверсия* может означать: нарушение обычного порядка элементов, взаимную перестановку, обратное преобразование и др. Термин используется в геометрии и алгебре.

ИНДЕКС

Латинское слово *index – указатель, титул, надпись*.

Лейбниц активно использовал индексы. С развитием книгопечатания их стали ставить ниже строки, как это делал Лейбниц. Он впервые стал использовать сразу два индекса. Для элементов определителей двойные индексы ввёл немецкий математик К. Якоби.

ИНТЕГРАЛ

В первой половине XVII в. результат операции вычисления площади называли латинской фразой *omnes lineae – совокупность всех неделимых*.

Постепенно последнюю фразу сократили. Лейбниц ради этого ввёл начальную букву слова *Summa*. В те времена буква *S* изображалась как современный знак интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y.$, но через месяц стал писать $\int y dy$ – это уже не сумма неделимых, а сумма площадей бесконечно малых прямоугольников. Лейбниц стал систематически использовать такое обозначение после того, как заметил его инвариантность относительно переменной интегрирования.

В печати современное обозначение появилось в 1686 г. В это же время И. Бернулли обозначал операцию интегрирования буквой I по первой букве введённого им названия *интегральное исчисление.* Впоследствии этот символ сохранился для обозначения конкретных интегралов: I_1, I_2 и т.д.

Слово *интеграл* употребил впервые Я. Бернулли в 1690 г.. По одному предположению термин образован от латинского *integer – целый*. По другому предположению Я. Бернулли придумал термин от *integro – приводить в прежнее состояние, восстанавливать*. Действительно, восстанавливается первообразная функция. Новый термин обсуждался с Лейбницем, и его ввели в математику в 1696. И. Бернулли предложил назвать операцию интегрирования *интегральным исчислением – calculus integralis.*

Интеграл кратный

Эйлер (1769) ввёл понятие *двойной интеграл* и привёл примеры их применения.

Двойной интеграл – это интеграл от функции двух переменных, а интегрирование происходит по плоской области. Тройной интеграл – интеграл от функции трёх переменных по некоторой области трёхмерного пространства. Двойные и тройные интегралы называются кратными интегралами. Они вычисляются с помощью однократных интегралов.

Понятие *двойной интеграл* связано со следующим построением. Пусть на плоскости с декартовой системой координат XOY дана односвязная область S, ограниченная непрерывной кривой. В этой области задана функция двух переменных $f(x,y)$. Разобьём область на N ячеек. Обозначим за Δs_i площадь ячейки с номером i. В каждой ячейке возьмём любую точку $M_i(x_i,y_i)$ и построим сумму произведений $f(x_i,y_i)\Delta s_i$:

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\Delta s_i.$$

Такая сумма называется интегральной суммой.

По всей области S будем неограниченно увеличивать число ячеек. Очевидно, что тогда площади Δs_i всех ячеек устремятся к нулю. Если при таком предельном переходе существует предел интегральной суммы, то он называется интегралом по площади или двойным интегралом:

$$\lim_{\begin{cases} N\to\infty \\ max\Delta s_i\to 0\end{cases}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\Delta s_i = \iint_S f(x,y)ds\,.$$

Если предел интегральных сумм существует, он единственный и не зависит от формы ячеек. Для работы с такими интегралами в декартовой системе координат берутся ячейки, образованные координатными линиями этой системы (рис. 1). Такие ячейки имеют форму прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. В этом случае

$$\Delta s_i = \Delta x_i \Delta y_i \Rightarrow ds = dxdy \Rightarrow \iint_S f(x,y)ds = \iint_S f(x,y)dxdy.$$

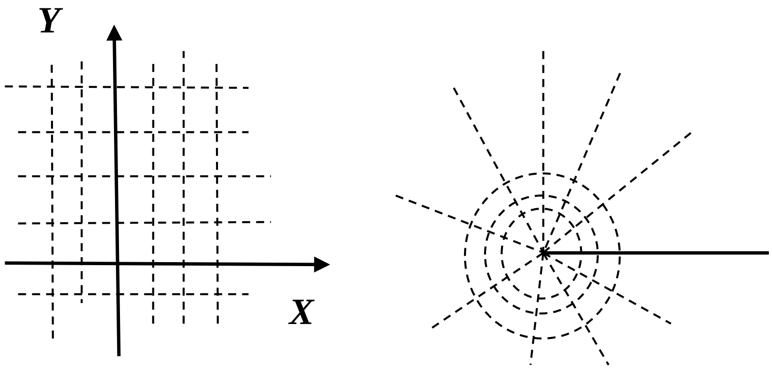


Рис. 1

При переходе двойного интеграла в полярную систему координат меняются не только названия переменных и пределы интегрирования, но изменяется и форма ячеек Δs_i , на которые разбивается область интегрирования при построении двойного интеграла (рис. 1).

Область интегрирования в полярной системе координат разбивается на ячейки, похожие на очень маленькие параллелограммы. Из геометрии известно, что диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника. Значит, площадь ячейки приблизительно равна удвоенной площади треугольника (см. *координаты криволинейные, рис.4*):

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|\Delta|.$$

Предположим, что

$$(x_1 - x_3), (x_2 - x_3), \qquad (y_1 - y_3), (y_2 - y_3)$$

бесконечно малые переменные. Будем их рассматривать как приращения:

$$(x_1 - x_3) = \Delta x,\ (x_2 - x_3) = \Delta x, \qquad (y_1 - y_3) = \Delta y, (y_2 - y_3) = \Delta y.$$

Преобразуем тождественно определитель: умножим и разделим его на произведение $\Delta\rho\Delta\varphi$:

$$\Delta s = \frac{1}{2\Delta\rho\Delta\varphi}\left\|\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}\right\|\Delta\rho\Delta\varphi. \ = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta x}{\Delta\rho} & \dfrac{\Delta y}{\Delta\rho} \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta\varphi} & \dfrac{\Delta y}{\Delta\varphi} \end{vmatrix}\right\|\Delta\rho\Delta\varphi.$$

Для нахождения площади Δs_t бесконечно малого треугольника переходим к пределу

$$\Delta s_t = \lim_{\begin{cases}\Delta\rho\to 0\\ \Delta\varphi\to 0\end{cases}} \Delta s = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho} & \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta\rho} \\ \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta\varphi} & \lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta\varphi} \end{vmatrix}\right\|\Delta\rho\Delta\varphi = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}\right\| d\rho d\varphi.$$

Обозначим площадь бесконечно малого параллелограмма как ΔS_p, тогда $\Delta S_p = 2\Delta s_t$. Зная связь между полярной и декартовой системой координат:

$$x = \rho\cos\varphi\,, \qquad y = \rho\sin\varphi\,,$$

запишем аналитический вид производных, стоящих в определителе:

$$x'_\rho = \cos\varphi\,, \qquad y'_\rho = \sin\varphi, \quad x'_\varphi = -\rho\sin\varphi, \qquad y'_\varphi = \rho\cos\varphi.$$

Подставим их в Δs_t

$$\Delta S_p = 2\Delta s_t = \left\|\begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}\right\| d\rho d\varphi = \left\|\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}\right\| d\rho d\varphi \Longrightarrow$$

$$\Delta S_p = \ \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

Из полученной формулы вытекает, что площадь любой бесконечно малой ячейки-параллелограмма равна $\Delta S_p = \rho d\rho d\varphi$. Двойной интеграл в полярной системе координат становится интегралом вида

$$\iint\limits_S f(\rho,\varphi)\rho\, d\rho d\varphi.$$

Определитель

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix},$$

с помощью которого удалось представить двойной интеграл в новой системе координат, является функциональным определителем, который обозначается латинской буквой J и называется определителем Якоби или якобианом (*см. якобиан*). Интеграл в полярных координатах можно записать, используя это обозначение

$$\iint_S f(\rho, \varphi)|J|\, d\rho d\varphi.$$

Тройные интегралы строятся аналогично двойным интегралам. Для вычисления тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат тоже используются соответствующие им якобианы.

Интеграл криволинейный (Интеграл по пути)

Это интеграл от дифференцируемой функции вдоль аналитически заданной кривой, расположенной на плоскости или в трёхмерном пространстве.

Впервые такой интеграл появился в работе французского математика Клеро (1743). Он вывел условие независимости криволинейного интеграла от вида пути, по которому интегрируется функция.

Криволинейные интегралы подразделяют на два рода.

Криволинейный интеграл первого рода ещё называются интегралами по длине пути. Путь интегрирования L имеет начало в точке A и конец в точке B, но значение криволинейного интеграла первого рода не зависит от направления пути интегрирования. Путь L задаётся дифференцируемой функцией в явном, неявном или параметрическом виде.

$$z = g(x, y); \quad G(x, y, z) = 0; \quad \begin{cases} x = u(t), \\ y = v(t), \\ z = w(t). \end{cases}$$

Подынтегральная функция может зависеть от двух или трёх переменных:

$$z = f(x, y); \; v = f(x, y, z)\,.$$

Доказано, что если путь лежит в трёхмерном пространстве и задан параметрически, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f\big(u(t), v(t), w(t)\big)\sqrt{(u')^2 + (v')^2 + (w')^2}\, dt.$$

Предположим, что в трёхмерном пространстве с декартовой системой координат задан гладкий путь L, с началом в точке A и концом в точке B. Пусть на этом пути задана векторная функция

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}\,.$$

Интеграл по заданному пути от векторной функции называется криволинейным интегралом 2-го рода.

В пространстве R_3 интеграл записывается в виде

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,,$$

Для пространства R_2

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Благодаря такой форме записи криволинейный интеграл второго рода ещё называют криволинейным интегралом по координатам.

Если путь интегрирования задан параметрически, такие интегралы превращаются в следующие простые однократные интегралы:

$$\int_{t_1}^{t_2} \big(P(u,v,w)u'(t) + Q(u,v,w)v'(t) + R(u,v,w)w'(t)\big)dt;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \big(P(u,v,w)u'(t) + Q(u,v,w)v'(t)\big)dt.$$

Интеграл неопределённый

Лейбниц сначала пришёл к понятию определённого интеграла. В 1694 г. он впервые ввёл аддитивную постоянную. Так появился неопределённый интеграл.

В XVIII веке были созданы почти все известные методы интегрирования элементарных функций в конечном аналитическом виде. Б. Паскаль применял интегрирование по частям и метод подстановки. И. Бернулли разработали метод неопределённых коэффициентов для интегрирования дробно-рациональных функций. Позже этот метод модернизировали Эйлер и Коши. Они упростили способ нахождения неопределённых коэффициентов для разложения дробно-рациональной функции на простейшие дроби.

Ньютон интегрировал с помощью замены подынтегральной функции на её разложение в степенной ряд, поэтому ему было достаточно использовать только один интегралы от степенной функции.

Коши впервые опубликовал таблицу интегралов, приближенно похожую на современную. Только в начале XX века учебники стали содержать таблицы интегралов. Таблицы производных появились позже.

Эйлер использовал понятия *общий интеграл* для неопределённого интеграла и *частный интеграл* для одной первообразной.

Интеграл несобственный

Это интегралы, у которых хотя бы один из пределов интегрирования равен плюс или минус бесконечности, либо подынтегральная функция имеет разрыв второго рода в области интегрирования. Выражение *несобственный интеграл* появилось только в 1901 г.

Несобственные интегралы вычисляются с помощью теоремы Ньютона – Лейбница и пределов. Если несобственный интеграл равен числу, говорят, что интеграл *сходится*. Если интеграл равен бесконечности или не существует, говорят, что он *расходится*.

Интеграл определённый

Лейбниц (1693) рассматривал связь между интегралом и производной. С помощью геометрии он вывел формулу этой связи. Аналогичную связь нашёл Ньютон, поэтому знаменитая формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

называется формулой Ньютона – Лейбница.

Эйлер первый стал писать пределы интегрирования над и под знаком интеграла.

Интеграл Пуассона

Это знаменитый несобственный интеграл, который используется в теории вероятностей и в математической физике

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Доказано, что этот интеграл невозможно проинтегрировать в декартовой системе координат. Но его всё же удалось вычислить в три шага простым и очень красивым способом с помощью полярной системы координат.

Первый шаг. Запишем квадрат интеграла в виде:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,e^{-y^2}\,dydx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx.$$

Второй шаг. Перейдём к полярной системе координат

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\,|J|d\rho d\alpha = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\,\rho d\rho.$$

Множитель $|J|$ является модулем якобиана. При переходе из декартовой системы координат в полярную $|J| = \rho$.

Третий шаг. Последний интеграл легко вычислить по формуле Ньютона –Лейбница, если ввести новую переменную интегрирования $\rho^2 = t$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Интеграл Пуассона найден:

$$I^2 = \pi \Longrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

От латинского *integratio – восстановление,* соединение. Интегрированием называется процесс нахождения интеграла (первообразной).

Интегрирование дифференциального уравнения

В XVIII веке удавалось построить точное решение отдельных видов дифференциальных уравнений с помощью операции интегрирования. Позже, любой процесс нахождения решения различных дифференциальных уравнений с помощью численных методов по традиции называли и сейчас нередко называют интегрированием. График решения – интегральная кривая. Решение уравнения, найденное в виде $F(x, y) = C$ – общий интеграл.

ИНТЕРВАЛ

Термин происходит от латинского *intervallum – промежуток, расстояние*. В математике интервалом называется множество действительных чисел x, которые удовлетворяют строгому двойному неравенству $a < x < b$.

В Российской математической школе интервал обозначается как $(a; b)$, в других почти всегда в виде $]a; b[$.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ (ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ)

Термин происходит от латинского *interpolare – подделывать, подновлять*. Это слово первоначально означало подделку рукописи.

В математике интерполяция – это восстановление значения табличной функции в точке, расположенной между заданными значениями аргумента, но не равной им. Термин, в его современном смысле, впервые использовал английский математик Д. Валлис (1656) при составлении астрономических и математических таблиц. С линейной интерполяцией был знаком ещё Птолемей. В настоящее время успешно работают различные интерполяционные методы. Например, интерполяция (интерполирование) с помощью кубических сплайнов.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ (МНОГОЧЛЕНЫ)

Это полиномы, численные значения которых совпадают со значениями заданной табличной функции. С помощью интерполяционных полиномов восстанавливаются те значения табличной функции, которые расположены между заданными узлами таблицы.

Интерполирование с помощью полиномов впервые (1670) ввёл шотландский математик Д. Грегори. Позже появились интерполяционные формулы Ньютона (1711) и Лагранжа (1792). Свои интерполяционные полиномы построили немецкие математики Гаусс, Энке, французские Коши и Леверье, русский математик Чебышев и др.

Независимо друг от друга немецкий математик Рунге (1904) и французский математик Борель (1903) доказали, что рост степени интерполяционного полинома может существенно ухудшить точность приближения.

С 1918 г. началась строгая разработка теории интерполирования.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ

От латинского *irrationalis – неразумный, бессознательный.*

Открытие иррациональных чисел произошло в школе Пифагора. Число $\sqrt{2}$ стало первым числом, иррациональность которого просто и элегантно доказал Евклид. В своём доказательстве он впервые ввёл и использовал доказательство от противного. Эйлер доказал, что иррациональные числа можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

До XVI в. иррациональные числа не считались настоящими числами. Строгая математическая теория чисел была создана только к концу XIX в. Авторы этой теории – ведущие немецкие математики Дедекинд, Кантор и Вейерштрасс.

Иррациональное выражение

Математическое выражение, которое содержит радикал с натуральным показателем, называется иррациональным выражением.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Слово итерация от латинского *iterativus – повторяемый.*

Понятие *итерационный метод* используется в вычислительной математике. Так называют процесс повторного применения совокупности математических операций, с помощью которых происходит последовательное приближение к точному решению задачи. Итерационные методы часто называют методами последовательных приближений.

Архимед придумал такую схему построения числа π, что мог вычислить π с заданной точностью. Его схема стала первым в математике итерационным алгоритмом. Попытки обобщения методов итераций впервые провёл Эйлер (1778).

Итерационный процесс

Поставлена некоторая задача M. Надо найти решение X этой задачи. Пусть известно начальное приближение X_0 к этому решению. Есть алгоритм A, при помощи которого строятся следующие приближения:

$$A(X_0) = X_1,\ A(X_1) = X_2, \cdots, A(X_{k-1}) = X_k.$$

Предположим, что удалось доказать сходимость последовательности таких приближений $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$. Это означает, что существует предел X^*:

$$\lim_{k\to+\infty} X_k = X^*.$$

Найденный предел называется неподвижной точкой. Доказано, что неподвижная точка и является точным решением задачи M.

Переход от приближения X_{k-1} к приближению X_k с помощью равенства $A(X_{k-1}) = X_k$ называется шагом итерации, а последовательность приближений называется итерационной последовательностью.

Точное решение может быть получено только теоретически при бесконечном числе шагов итерации. Реально можно лишь оценить степень близости точного и приближенного решений задачи, поэтому перед началом итерационного процесса всегда задаётся допустимое значение относительной погрешности расчёта.

<u>Итерирование</u>

Переход от одного *шага итерации* к следующему шагу.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Латинское *interpretatio – толкование, объяснение*.

К

КАНОН

Греческое $\kappa\alpha\nu o\nu$ – *предписание, правило*.

КАНОНИЧЕСКИЙ

От греческого $\kappa\alpha\nu o\nu\iota\kappa o\zeta$ – *составленный по правилам, общепринятый.*

В математике есть понятие *каноническое уравнение*. Например, канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m};\quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{m}.$$

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Это функция, заданная в n-мерном векторном пространстве.

Аналитический вид такой функции – однородный многочлен второй степени от компонент вектора $\boldsymbol{X} = (x_1\ x_2\ \ x_3 \cdots\ \ x_n)$ с заданными коэффициенты $a_{ij}\ \in$ R:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ x_i x_j.$$

КВАДРАТУРА

Латинское *quadratura – придание квадратной формы.* Смысл этого слова связан с историей греческой математики. Вычисление площади плоской фигуры греки сводили к построению квадрата той же площади. С точки зрения геометрии определенный интеграл – это тоже площадь. Ещё в начале XIX в. математики считали, что определённый интеграл следует интерпретировать только как площадь; поэтому процесс вычисления определённого интеграла называли и сейчас иногда называют квадратурой.

Редко, но можно встретить выражение "*уравнение решается в квадратурах*".

КВАДРАТУРА КРУГА

Так называется знаменитая задача, поставленная древнегреческими математиками. Она звучит следующим образом. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади заданного круга. Решение этой задачи связано с числом π. Первую попытку точно определить число π и решить квадратуру круга сделал Анаксагор (450 до н.э.). В многовековой задаче пытались разобраться Галилей, Леонардо да Винчи, Гюйгенс, Ньютон, Эйлер и др.

Решение появилось только в XIX в. Немецкому математику Ф. Линдеману удалось доказать трансцендентность числа π, из чего следовал отрицательный ответ: нельзя построить квадрат, равный по площади данному кругу. В результате появилась фраза *искать квадратуру круга – искать недостижимого.* Символом задачи о квадратуре круга стала хорошо всем известная магистерская шляпа, которую надевают почётным учёным и выпускникам университетов (рис. 2).

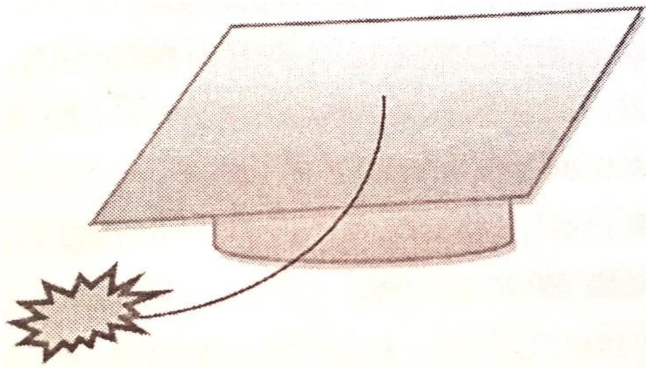


Рис. 2

КВАДРАНТ

Латинское quadrantis – *четвёртая часть.* Один из четырёх углов на плоскости, образованных двумя пересекающимися осями координат. Слово пришло в русский язык из Германии в петровские времена.

КВАНТОР

От латинского quantum – *доля, часть, квант.* Общее название логических операций, с помощью которых даётся характеристика математическому объекту или операции. У каждого квантора есть своё обозначение. Наиболее часто встречаются следующие кванторы и их обозначения:

$\forall$ – квантор всеобщности (1935); заменяет слова: *любой, каждый, все.*

$\exists$ – квантор существования (1885); заменяет слова: *есть, существует.*

$\exists!$ – квантор существования и единственности; заменяет выражения: *есть и только один, существует единственный.*

] – квантор допущения; заменяет слова: *допустим, предположим, рассмотрим, пусть, возьмём.*

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторикой называют область математики, которая создавалась для вычисления количества различных соединений из заданных элементов. При этом предполагается, что выбор соединений из элементов должен заранее удовлетворять некоторым условиям. Обратимся к трём видам соединений: *перестановка – permutation; размещение – arrangement*; *сочетание – combination.*

Перестановки –соединения, которые можно составить из n элементов, с помощью всевозможных перестановок этих n элементов без изменения их числа. Обозначение (1713) числа перестановок и формула для их вычисления

$$P_n = n!$$

Размещения – соединения, содержащие m элементов из числа n заданных элементов $n \geq m$. Размещения отличаются друг от друга либо порядком их вхождения, либо хотя бы одним элементом. Обозначение (1904) числа размещений и формула для их вычисления:

$$A_n^m = n!/(n-m)!\,.$$

Сочетания – соединения, которые содержат m элементов из числа n заданных элементов $n \geq m$. Сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Обозначение (1827) числа сочетаний и формула для их вычисления

$$C_n^m = n!/\big((n-m)!\,m!\big).$$

Элементы комбинаторики были известны ещё во II в. до н. э. К XVII в. итальянские математики Тарталья, Паскаль, Ферма и др. получили много интересных результатов при решении различных комбинаторных задач.

Название этой области математики придумал Лейбниц. Он написал и опубликовал (1666) книгу «Рассуждение о комбинаторном искусстве». В этой работе Лейбниц не только изложил всё, что было известно к этому времени в комбинаторике, но и представил новый класс задач, в которых использовались сочетания и размещения.

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО

Компле́ксное число – составное число. Его алгебраический вид $z = a + bi$. Термин *комплексное число* ввёл итальянский математик Карно (1803). Позднее Гаусс стал использовать этот термин систематически. Декарт впервые противопоставил действительные – *realis* и мнимые – *imaginaire* корни уравнения. Первой буквой термина *imaginaire* обозначалась мнимая единица: $\left(\sqrt{-1} = i\right)$. Такое обозначение стало классическим благодаря

Гауссу. Тригонометрическую форму комплексных чисел впервые применил Эйлер:

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где ρ – модуль комплексного числа $\rho = mod(z)$, α– аргумент комплексного числа $\alpha = arg(z)$.

Коши ввёл показательная форму комплексного числа: $z = \rho e^{i\alpha}$.

<u>Графический образ</u>

Графический образ комплексного числа $z = x + iy$ – это точка $M(x,y)$ или радиус-вектор $\overline{OM}$, $|\overline{OM}| = \rho$ (рис. 3). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Ось OX – действительная ось (ось Re), ось OY – мнимая ось (ось Im).

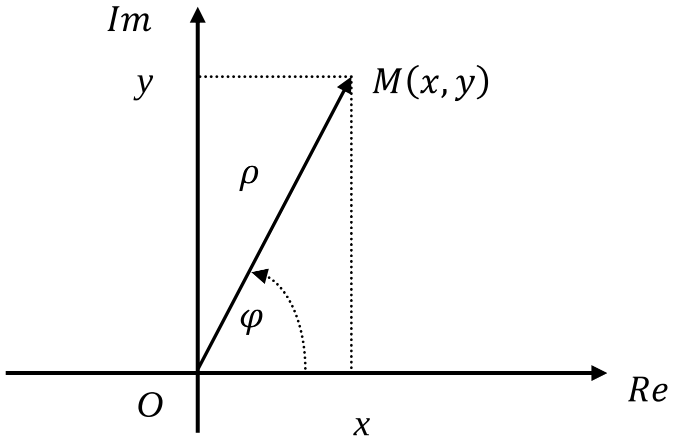


Рис. 3

Графический образ комплексных чисел предложил швейцарский математик-любитель Арган (1806).

КОМПОНЕНТ

Образовано от латинского *componens – составная часть чего-либо*. Например, координаты вектора

$$\boldsymbol{X} = (x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \cdots\cdots\ x_{n-2}\ \ x_{n-1}\ \ x_n)$$

в n-мерном векторном абстрактном пространстве обычно называют компонентами вектора.

КОНИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Это название семейства кривых 2-го порядка. Такие кривые возникают при пересечении плоскостью прямого кругового конуса. К ним относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола (см. *кривые 2-го порядка).*

КОНСТАНТА

Латинское *constants – постоянный, неизменный;* поэтому аддитивные постоянные обычно обозначают буквой *C*.

КОНТИНУУМ
Латинское *continuit – непрерывный*. В математике словом континуум называют мощность бесконечного множества чисел $x \in \mathbb{R}$ на отрезке $[0; 1]$.

Мощность множества – это обобщение понятия *количество элементов*, которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Мощность коечного множества равна количеству элементов в этом множестве.

Эквивалентные множества – это множества, состоящие из одинакового количества элементов. Если бесконечные множества эквивалентны, говорят, что им соответствует одинаковая мощность. Множество всех действительных чисел эквивалентно множеству всех чисел на отрезке $[0; 1]$, поэтому мощность множества действительных чисел равна континууму.

Есть не меньше двух различных видов бесконечных числовых множеств: счётная бесконечность натуральных чисел и несчётная бесконечность действительных чисел. Понятия мощность, эквивалентность и континуум используются в теории множеств. Основал эту теорию математик Г. Кантор.

КОНТУР
Французское *contour – очертание*.

КОНУС
Греческое $\kappa\tilde{\omega}\nu o\varsigma$ *– сосновая шишка, остроконечный предмет*; латинское – *konos*.

КООРДИНАТА
Слово образовано от латинского *co – совместно* и *ordinatus – упорядоченный, определённый*. Координата – это одно из чисел в списке, однозначно определяющем положение точки в пространстве с данной системой координат. Координаты появились в различных формах в географии, астрономии, математике ещё в Вавилоне и Греции. Термины *абсцисса, ордината, аппликата* появились в Греции в учении о конических сечениях, поэтому смысл этих слов не связан с современной аналитической геометрией.

Лейбниц ввёл понятие *координаты точки*, чтобы подчеркнуть равноправие абсциссы, ординаты и аппликаты. Для обозначения начала координат французский математик Ф. Лагир (1679) употребил слово *origine – начало*. Первой буквой этого слова отмечается начало координат.

Для решения многих задач удобны декартовы системы координат, но не менее важны и удобны координаты, принадлежащие другим координатным системам.

Координаты полярные
Название появилось только в XIX веке у французских математиков.

Координаты криволинейные
Впервые такие координаты на плоскости ввёл Я. Бернулли, а в трёхмерном пространстве – французский математик Габриель Ламе (1859).

Интересно, что в течение 11-ти лет Ламе успешно работал в Санкт-Петербурге.

Приведём простой и красивый пример использования декартовых координат для вычисления площади треугольника, если заданы только координаты его вершин (рис. 4)

$$A(x_1, y_1), \qquad B(x_2, y_2), \qquad C(x_3, y_3).$$

Введём обозначения: $|CB| = a,\ |CA| = b,\ \angle\ BCA = \varphi,\ \alpha -$ угол наклона стороны a к оси OX, β – угол наклона стороны b к оси OX. Связь между углами очевидна:

$$\alpha = \varphi + \beta \Longrightarrow \varphi = \alpha - \beta.$$

Площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\ \varphi = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}ab(\cos\beta \cdot \sin\alpha - \sin\beta \cdot \cos\alpha),$$

$$S = \frac{1}{2}(b\cos\beta \cdot a\sin\alpha - b\sin\beta \cdot a\cos\alpha).$$

Перейдём к координатам:

$a\cos\alpha = x_2 - x_3$; $a\sin\alpha = y_2 - y_3$ – проекции стороны CB на оси OX, OY.

$b\cos\beta = x_1 - x_3$; $b\sin\beta = y_1 - y_3$ – проекции стороны CA на оси OX, OY.

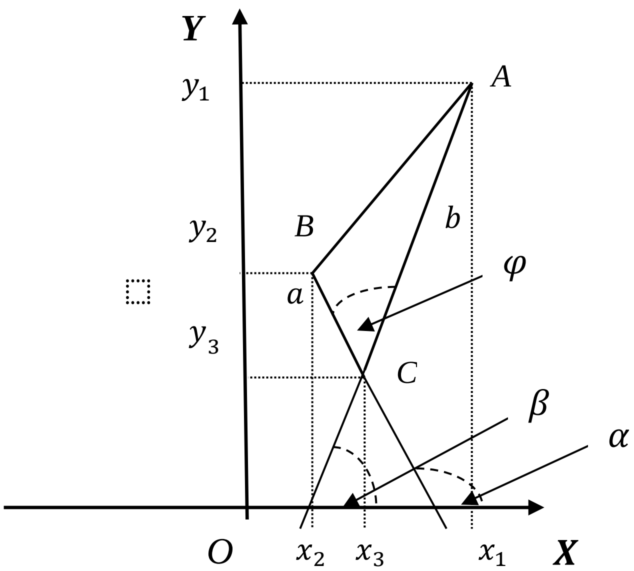


Рис.4

Выразим площадь треугольника через эти проекции

$$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_3)(y_1 - y_3) - (y_2 - y_3)(x_1 - x_3)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

Построена искомая формула для вычисления площади треугольника, но она громоздка. Для упрощения используют определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Теперь формула имеет простой вид

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\Delta|.$$

КОРЕНЬ

В латинском языке слово *radix – корень, радикал.* Первый знак корня ввёл (1525) венский учитель математики Рудольф – автор первого учебника по алгебре на немецком языке. Позже этот знак немного модернизировал Декарт, затем Ньютон. Так появился в математике современный знак корня.

КОРРЕКТНОСТЬ

Латинское *correctement – правильно,* английское *correctness.*

Задача называется *корректно поставленной*, если для любых входных данных, из некоторого заданного множества, решение задачи существует, единственно и устойчиво относительно входных данных. *Устойчивость* означает что малые погрешности в исходных данных не приведут к большим погрешностям в результате решения поставленной задачи.

Существуют методы решения многих некорректно поставленных задач. Эти методы основаны на решении близкой к исходной, но корректно поставленной задаче.

КОРРЕЛЯЦИЯ

От латинского *correlatio – взаимная связь.*

В теории вероятностей используется *коэффициент корреляции* – одна из безразмерных числовых характеристик для выявления взаимосвязи между случайными величинами X и Y. Их коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r_{xy} = \frac{M(X\,Y) - MX \cdot MY}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где MX, MY – математические ожидания данных случайных величин; $M(X\,Y)$ – математическое ожидание их произведения; σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения заданных случайных величин.

КОСИНУС

Термин является сокращением латинского *complementi sinus – синус дополнения угла до* 90^0. Таким же образом введён *котангенс*. Термины ввёл английский математик Гентер (1620). И. Бернулли в письме к Эйлеру написал их обозначения: $\cos\alpha$, $\operatorname{cotan}\alpha$. Эйлеру они понравились. С тех пор пишут: $\cos\alpha$, $\operatorname{cotan}\alpha$. В Российской математической школе для обозначения тангенса и котангенса используют обозначения, которые придумал сам Эйлер: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

КОСМОС

Греческое *κοσμος – порядок, прекрасное устройство*. Пифагор был уверен, что Вселенная устроена на математической основе, поэтому он первый назвал Вселенную *космосом*. Ученики и последователи Пифагора верили в гармоническое устройство всего мира (мироздания), поэтому они тоже называли Вселенную словом *космос*.

КОЭФФИЦИЕНТ

Числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при неизвестном выражении, постоянный множитель при переменной величине. Термин составлен из латинских *со – вместе* и *efficiens – производящий*. Буквальное значение слова *coefficiens – содействующий*. Этот термин в математике систематически стал использовать английский математик Джон Валлис (XVII в).

КРАТНОСТЬ

От старославянского *кратъ – раз.* Кратность показывает во сколько раз одна величина больше другой и выражается натуральным числом $n > 1$.

<u>Кратность корня многочлена (полинома)</u>

Число q называется корнем полинома $P_n(x)$, если $P_n(q) = 0$. Из теоремы Безу следует, что для деления без остатка $P_n(x)$ на двучлен $(x - q)$ необходимо и достаточно, чтобы число q было корнем полинома $P_n(x)$:

$$P_n(x) = (x - q) \cdot G_{n-1}(x).$$

Если полином $P_n(x)$ делится без остатка на $(x - q)^k, k = 2,3, \cdots, n$:

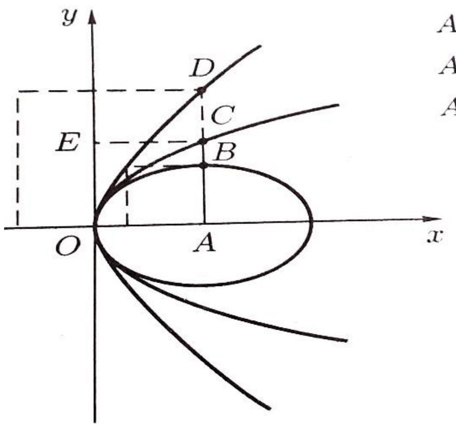
$$P_n(x) = (x - q)^k \cdot G_{n-k}(x),$$

тогда число k называется кратностью корня q.

Доказано, что если у полинома $P_n(x)$ есть корень q кратности $k > 1$, то его производная $P_n'(x)$ имеет такой же корень кратности $(k - 1)$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Греческого математика Аполлония (262–190 до н.э.) ещё при жизни называли великим геометром. Слава пришла к нему после создания 8-ми томов «Начала конических сечений». Название связано с тем, что в ту пору кривые второго порядка определяли как различные сечения прямого кругового конуса. Аполлоний ввёл в математику названия таких сечений. Эти названия произошли от сравнения площадей определённых плоских фигур, связанных с кривыми 2-го порядка (рис. 5).



$$AB^2 < OE \cdot OA$$
$$AC^2 = OE \cdot OA$$
$$AD^2 > OE \cdot OA$$

Рис. 5

Из представленных графиков становится ясным смысл хорошо известных названий этих кривых:

эллипс –ελλειψιζ – ellipsis – *недостаток*;

гипербола – υπερβολη – hyperbole – *избыток*;

парабола – παραβολη – parabole – *равенство.*

Аполлоний разработал теорию построения таких кривых, изучил их свойства и построил теорию кривых второго порядка, используя геометрию. Великие французские математики Декарт и Ферма перевели теорию Аполлония на алгебраический язык. Вывод уравнений эллипса и гиперболы на основе их геометрических определений сделал голландский математик Ян де Витт (1649).

Первые инструменты для построения кривых второго порядка изобрели ещё в IV-V вв. Одним из таких изобретателей был греческий философ Прокл. Немецкий учёный И. Кеплер придумал способы построения эллипса, гиперболы и параболы с помощью верёвки.

Теория Аполлония с XIV в. широко использовалась в астрономии. Кеплер доказал, что все тела Солнечной системы вращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам. Астероиды и метеориты, попадающие к нам из космоса, движутся по гиперболическим и параболическим орбитам. По эллипсам движутся искусственные спутники. Космические корабли, запущенные к другим планетам, движутся по параболическим или гиперболическим орбитам.

Параболическое зеркало, которое используют в астрономии, обладает замечательным свойством. Падающие на зеркало световые лучи, параллельные оси такого зеркала, сходятся в его фокусе с минимальным искажением. В фокусе параболоида возникает наиболее точное и яркое изображение далёких небесных объектов. Если спутник транслирует телевизионные сигналы, которые попадают на параболическую антенну, то эти сигналы собираются в фокусе, откуда – в телевизор почти без искажений. Изобрёл параболическое зеркало Ньютон. Он сделал такое зеркало из сплава олова и меди, вручную отшлифовал его до блеска и с помощью своего изобретения первый в мире создал (1668) самый мощный для того времени телескоп-рефлектор. Новый телескоп, как писал сам Ньютон, увеличивал зрительный диаметр небесных тел примерно в сорок раз. Великий учёный чётко видел круглый Юпитер и его спутники.

КРИТЕРИЙ
От греческого $\chi\rho\iota\tau\varepsilon\rho\iota o\nu$ – *существенный*. Отличительный признак, на основании которого даётся оценка или классификация чего-либо.

КРУГИ ЭЙЛЕРА
Множества можно изображать графически. Эйлер изображал их в виде кругов. Каждую операцию над двумя множествами он представлял соответствующим совместным расположениям кругов.

КУБ
Греческое слово $\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$ – *игральная кость*. Название перешло на любое тело той же формы. Термин ввели пифагорейцы, его использовал Евклид.

Термин используется ещё как показатель 3-й степени: x^3 – *икс в кубе* или *икс куб*.

ЛЕММА
От греческого $\lambda\tilde{\eta}\mu\mu\alpha$ – *предыдущее положение.* У Архимеда и Прокла *лемма* – вспомогательная теорема. Лемма – доказанное утверждение, которое используется для доказательства последующих теорем.

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ
Линейной комбинацией называется выражение

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\, e_k,$$

где c_k – действительные числа, e_k – элементы, принадлежащие одной алгебре или одному функциональному пространству. Это понятие стало широко использоваться в математике только в начале XX века.

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ

Элементы $e_1, e_2, \cdots, e_N$, принадлежащие одной алгебре или одному функциональному пространству, образуют линейно независимую систему, если их линейная комбинация равна нулевому элементу только в случае равенства нулю всех коэффициентов этой линейной комбинации:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\, e_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0.$$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Почти 75% всех расчётных математических задач приводят к решению линейных алгебраических систем. Современные компьютерные пакеты программ содержат целый спектр методов решения таких систем. Методы делятся на две группы.

Прямые методы

Прямыми методами система решается за конечное число действий. Если они выполняются точно, то и ответ будет точным, поэтому прямые методы ещё называют *точными.* К точным методам относится метод Крамера, Гаусса, трёхдиагональной прогонки, квадратного корня и матричный метод.

Итерационные методы

В каждом методе строится своё рекуррентное соотношение, на основе которого вычисляется следующее приближение. Примерами таких методов являются метод простых итераций, метод Якоби и метод Гаусса-Зейделя.

Выбор метода решения системы зависит от структуры и размерности матрицы исходной системы.

Линейную алгебраическую систему уравнений удобно сразу записывать в матричной форме: $A \cdot \boldsymbol{X} = B$.

ЛИНЕЙНОСТЬ

В конце XIX в. стали появляться понятия: линейное пространство, линейный оператор, линейный функционал и др.

Линейное пространство

Множество V элементов x_1, $x_2, x_3, \cdots$ называется линейным пространством, если в нём определены операции сложения элементов и умножение любого элемента на число. В линейном пространстве должны выполняться законы ассоциативности и коммутативности; есть нулевой элемент θ: $x + \theta = x$ и противоположный элемент $(-x)$ для любого элемента множест-ва V: $x + (-x) = \theta$.

Линейный функционал

Функционал U называется линейным, если для него справедливо равенство

$$U\big(C_1 f(x) + C_2 g(x)\big) = C_1 U\big(f(x)\big) + C_2 U\big(g(x)\big), \qquad C_1, C_2 - const.$$

Примерами линейных функционалов является дифференцирование в точке и интегрирование по заданной области.

ЛИНИЯ

Латинское *linea* произошло от латинского *linum – льняная нить.*

ЛОГАРИФМ

Слово *логарифм* возникло на основе двух греческих слов: *λόγος – разум* и *αριΘμος – число.* Буквальный смысл термина *логарифм – числа отношений*. На английском языке этот термин пишется как *logarithm.*

Открытие логарифмов связано с известными к концу XVI в. геометрической и арифметической прогрессиями. Математики уже тогда знали, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в геометрической прогрессии соответствуют в том же порядке сложение, вычитание, умножение и деление в арифметической прогрессии.

Логарифмы придумал (1594) шотландский математик, астроном и создатель первых логарифмических таблиц Джон Непер. Но его работа бала опубликована только спустя 20 лет.

В математическом мире логарифмы встретили с полным восторгом. Через сто лет после публикации этой работы Лаплас писал: "Изобретение логарифмов превратило труд нескольких месяцев в вычисления нескольких дней, удваивая этим жизнь астрономам".

Немецкий математик Н. Меркатор (1668) назвал натуральными логарифмы по основанию e. Выражение *logarithmi naturali* первыми использовали Галлей (1695) и Коши (1823). Термин *логарифм* получил современный смысл благодаря английскому математику Д. Валлису.

Равенство $c = \log_a b$ имеет следующий смысл. Логарифм – это показатель степени, в который надо возвести основание $a,$ чтобы получить степень b. Из этого определения следует основное логарифмическое тождество

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b.$$

ЛОКАЛЬНЫЙ

Термин происходит от латинского *localis – местный*.

М

МАЖОРАНТА

Французское *majorante – больший*. Встречается в теории рядов.

МАКСИМУМ (МИНИМУМ)

Латинские слова *maximum, minimum – максимум, минимум.* Отдельные задачи на нахождение экстремумов решали древнегреческие математики. До XVII в. для решения каждой такой задачи составлялся индивидуальный способ. Первый общий алгоритм изобрёл Ферма (1629). Лейбниц нашёл связь между убыванием, возрастанием функции и точками максимума, минимума.

МАТЕМАТИКА

От греческого глагола *μαθανω – учусь через размышление.*

Пифагорейская система знаний была посвящена арифметике, геометрии, музыке и астрономии. Такую систему знаний греки назвали словом *μάθημα* – наука, знание или словом *μάθηματικα*. Систему такого образования успешно использовали несколько тысячелетий.

В России в XV веке астрологию называли математикой, а математику называли геометрией. Только к XVII веку математикой стали называть арифметику и геометрию.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Слово *логика* произошло от греческого *λογική – наука о правильном мышлении; способность к рассуждению*. Слово *λογος – учение, наука.*

Логикой называется философская система знаний о законах, формах и приёмах интеллектуальной деятельности (латинское *intellectus – мыслительная способность человека).* Термин *логика* был введён Зеноном для обозначения правил и структуре мышления. Аристотель (IV в. до н.э.) заложил основы формальной логики. Ему предшествовали в этой области: Зенон, Сократ и Платон.

Г. Лейбниц (1666) первым сделал попытку преобразовать неточную формальную логику в раздел математики с её точными определениями и точными высказываниями.

Через 100 лет английский математик Д. Буль продолжил развивать идеи Лейбница. Он написал две работы «Математический анализ логики» (1847) и «Исследования логики мышления» (1854). Буль изобрёл алгебру логики, для которой он придумал систему обозначений и правил. В настоящее время его изобретение называется булевой алгеброй. Следующие поколения математиков продолжили развитие алгебры Буля.

Основателем петербургской школы математической логики был знаменитый математик А. Марков-младший. Эта школа достигла больших успехов во 2-й половине XX в. благодаря известным петербургским математикам Николаю Шанину и академику Юрию Матиясевичу.

Символический аппарат математической логики даёт возможность точно выразить самые сложные рассуждения и понятия, необходимые для их последующей компьютерной обработки и анализа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Слово статистика от итальянского *statista – государственный деятель.*

Математическая статистика – раздел математики, посвящённый методам обработки, систематизации и обобщения рядов наблюдений и измерений.

Сначала слово *статистика* относилось к сбору фактов, интересовавших правительственных чиновников. Первая работа по статистике появилась в Лондоне (XVII в.). Автор – лондонский лавочник Д. Граунт. Он заинтересовался сведениями о смерти и рождаемости, стал анализировать и обобщать, полученные интересные результаты, а затем опубликовал их. Граунт впервые ввёл в общественные науки научный количественный подход.

Появление статистики связано также с созданием (XIV в.) страховых обществ сначала в Италии и Нидерландах, затем (XVI в.) по всей Западной Европе. Такие страховые общества страховали от пожаров и крушения кораблей.

Математическая статистика развивалась параллельно с теорией вероятностей. Их связывали, прежде всего, предельные теоремы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Это понятие ввёл в теорию вероятностей французский математик Лаплас (1795).

Математическое ожидание дискретной случайной величины X – это сумма произведений всех возможных значений этой величины на соответствующие вероятности появления этих значений:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Если непрерывная случайная величина определена в области $[a; b]$, то

$$MX = \int_a^b x f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Знаменитая книга Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» издавалась трижды при жизни автора. Он ввёл так называемые производящие функции, обобщил и систематизировал всё, что сделали до него в теории вероятностей Паскаль, Ферма и Я. Бернулли. Лаплас с помощью специального преобразования, носящего его имя, упростил в теории вероятностей некоторые методы доказательств. Он разработал теорию ошибок, доказал теорему об отклонении частоты появления события от его вероятности. Эта теорема тоже называется теоремой Лапласа.

МАТРИЦА

Термин происходит от латинского слова *matrix – исходная форма.*

В математике матрица – это набор упорядоченных чисел или символов, называемых элементами. Они упорядочены по строкам и столбцам, образуя при этом форму квадрата или прямоугольника:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

На основе матриц разработана матричная алгебра. Впервые в математике этот термин стали использовать в середине XIX в. Квадратные матрицы 2×2, 3×3 есть в работах Эйлера (1771). Он называл их просто квадратами. Гаусс использовал матрицы для линейных преобразований (1801) и называл их таблицами.

МЕДИАНА

Термин образован от латинского слова *meduis* – средний. Используется в геометрии и в теории вероятностей, как числовая характеристика случайной величины.

Медиана случайной величины

Медианой непрерывной случайной величины *X* называется такое число x_{me}, для которого верно следующее равенство

$$P(X > x_{me}) = P(X < x_{me}) = 0{,}5.$$

МЕТОД

От греческого слова $\mu\varepsilon\theta o\delta o\varsigma$ – *дорога, ведущая за чем-либо*. Платон и Аристотель стали использовать это слово как название совокупности математических действий, необходимых для получения правильного результата. Приведём примеры.

Метод вариации произвольных постоянных

Лагранж разработал этот метод для решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений (1762–1775).

Метод конечных разностей (разностный метод)

Этот метод возник и развивался теоретически и практически на протяжении XVII в. Его использовали для составления тригонометрических, логарифмических, навигационных и других таблиц, необходимых в географии, небесной механике, теоретической и практической астрономии. Развитием этого метода занимались Кеплер, Гюйгенс, Ньютон и др.

Метод наименьших квадратов

Метод (МНК) связан с постановкой и решением следующей задачи**.**

Задана некоторая табличная функция $f(x)$: $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{N}$. Ставится задача о построении такой непрерывной функции $F(x)$, чтобы сумма квадратов отклонений от этой функции до заданных значений табличной функции была минимальной:

$$\sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - y_i)^2 = min,$$

где величины $(F(x_i) - y_i)$ – это отклонения.

В такой постановке задача имеет бесконечное множество решений. Но, если заранее определить класс функций, к которому должна принадлежать функция $F(x)$, тогда можно найти единственное решение.

Впервые метод был опубликован Лежандром в 1805 г. Гаусс прочёл эту публикацию и заявил, что он пользовался этим методом ещё в 1795 г. Спор о приоритете не разгорелся только потому, что математический мир признал, что оба учёных открыли метод независимо друг от друга.

Гаусс обосновал метод тремя различными способами (1821–1823). Лаплас после статьи Лежандра связал метод с теорией вероятностей. Гаусс тоже использовал метод наименьших квадратов при решении некоторых задач теории вероятностей.

Метод трёхдиагональной прогонки

Среди линейных алгебраических систем особое место занимают системы с трёхдиагональной матрицей. У таких матриц ненулевые только главная диагональ и две ближайшие к ней диагонали. Матрицы такой структуры встречаются в теории аппроксимации функций; например, в аппроксимамации кубическими сплайнами. Линейные алгебраические системы с трёхдиагональными матрицами появляются в разностных методах, в методе конечных элементов (МКЭ), при решении дифференциальных уравнений с заданными краевыми условиями и решении уравнений математической физики с заданными начальными и краевыми условиями.

$$T \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{F},$$

$$T = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & C_4 & B_4 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 & C_5 & B_5 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & C_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \cdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Слово *прогонка* образовано от слова *гонка – очень быстро*. Математический термин *прогонка* появился в середине XX века в Российской математической школе.

МЕТРИКА

От греческого *μετρόν – мера*. Неотрицательная функция $\rho(x, y)$ двух точек некоторого множества (пространства), удовлетворяющая трём условиям:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; 3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Термин *метрическое* образован от греческого слова *μέτρον – мера*.

Метрическое пространство – это пространство, в котором (на котором) определена метрика.

МИНОР

Латинское *minor* – *меньший.* Ввёл термин английский математик Джемс Сильвестр (1852). Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается из исходного определителя после (мысленного) удаления из него i строки и j столбца. Миноры используются при вычислении определителей.

МНИМЫЕ ЧИСЛА

Это числа вида $b \cdot i = i \cdot b,$ где $b -$ любое действительное число, i – мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$. Термин *мнимое число* ввёл в употребление Декарт. Английский математик Д. Валлис (1701) придумал графический образ таких чисел. Они представляются в виде точек на оси ординат (мнимой оси).

МНОЖЕСТВО

Это совокупность элементов, объединённых по некоторому признаку.

Основал теорию множеств чешский богослов, философ, логик и математик Б. Больцано (1781–1848). Он дал определения конечным и бесконечным множествам.

Великий немецкий математик Г. Кантор исследовал множества произвольной природы и поставил теорию множеств на современную основу. В своих работах Кантор впервые ввёл (1895) немецкое слово *menge* – *множество,* понятия: *счётное множество, несчётное множество и др.*

Развитие теории множеств привело к созданию новых символов-знаков. С помощью латинского слова *contieo* – *содержать, содержаться* итальянский математик Д. Пеано придумал (1889) знак $\subset$ принадлежности одного множества другому множеству. С помощью полуокружностей ввёл знаки пересечения и объединения множеств, которые в настоящее время имеют вид $\cup$, $\cap$. Британский математик Б. Рассел преобразовал (1903) греческую букву ε в знак $\in$ принадлежности одного элемента множеству.

Подмножество.

Множество A называется подмножеством множества B, если все элементы A являются элементами B: $A \subset B$.

МНОЖЕСТВО БЕСКОНЕЧНОЕ

Приведём следующее интересное определение Кантора-Дедекинда.

Множество называется бесконечным, если между ним и хотя бы одним из его подмножеств существует взаимно-однозначное (инъективное) соответствие или любому элементу из множества соответствует хотя бы по одному элементу из его подмножества (сюръективное) соответствие.

МОДУЛЬ
От латинского *modulus – мера*. Используют выражения: *модуль функции, модуль вектора, модуль комплексного числа, модуль действительного числа.*

МОНОТОННОСТЬ
Термин составлен из греческих *μονος – один,* и *τονος – натяжение.* Например, монотонная функция, монотонная последовательность.

МОЩНОСТЬ
Мощность множества — это обобщение понятия количества элементов, которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Есть бóльшие и мéньшие бесконечные множества. Среди них счётное множество – самое маленькое.

Различие между счётным и несчётным множествами впервые заметил чешский математик Больцано (1840), позже Кантор. Он ввёл понятие *мощность множества* и специальный символ $\aleph_0$ (алеф нулевое) для обозначения мощности тех множеств, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством целых чисел. Символ $\aleph$ (алеф) –это первая буква еврейского алфавита, а слово *бесконечность* на иврите начинается с этой буквы. Символом $\aleph$ Кантор обозначил мощность несчётных множеств эквивалентных множеству действительных чисел.

В математике принято говорить, что такие множества имеют мощность континуум. Примерами счётных множеств являются множества натуральных чисел, алгебраических чисел, квадратов натуральных чисел и рациональных чисел. Примеры множеств мощности континуум: множество действительных чисел, множество точек на единичном отрезке, множество точек квадрата с единичными сторонами.

В 1877 г. Кантор поставил вопрос: "Есть ли бесконечные множества, мощность которых больше $\aleph_0$, но меньше $\aleph$"? Сам Кантор предполагал, что таких множеств нет. Но доказательства не было, поэтому возникла следующая знаменитая континуум-гипотеза. Не существует множества, мощность которого меньше мощности действительных чисел, но больше мощности целых чисел. Американский математик Пол Коэн (1963) доказал, что гипотеза Кантора недоказуема.

Н

«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА
Древнегреческий математик Евклид родился в Афинах. Его учителем был Платон. В Александрии Евклид создал свою математическую школу и написал самое знаменитое математическое произведение «Начала», что в переводе с греческого означает «Элементы». Этот труд состоял из 13 книг, в которых представлены разделы геометрии и арифметики, разработанные Евклидом и его предшественниками.

Доказательства теорем в изложении Евклида завершались фразой *quod erat demonstrandum – что и требовалось доказать.* С тех пор эта фраза знакома любому выпускнику школы.

Со времени зарождения книгопечатания «Начала» Евклида переиздавались тысячи раз большими тиражами и на всех языках мира. От его первого издания и до начала XX века труд великого грека был основным учебнинником геометрии.

НАБЛА

Векторный оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

ввёл В. Гамильтон, а название *набла* предложил шотландский учёный Робертсон Смит из-за сходства знака ∇ с формой корпуса ассирийской арфы. Это слово математики использовали в шуточных стихах и дружеской переписке. В математических печатных работах термин *набла* впервые появился в 1890 г. До этого использовали выражение *оператор Гамильтона*.

НЕИЗВЕСТНАЯ

Виет с 1591 г. обозначал неизвестные величины гласными буквами, а известные – согласными. Декарт в качестве неизвестных переменных использовал буквы x, y, z.

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ

Неопределённости вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ исследовал Лопиталь (1696). Неопределённости вида $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty$ рассматривал Эйлер (1748), а неопределенности

$$\infty^0,\ 1^\infty, 0^\infty, 0^0$$

исследовал Коши (1821).

Позднее Коши дал общее правило исследования неопределённостей. Доказано, что любую из указанных выше неопределённостей можно преобразовать к одной из двух:

$$\frac{0}{0} \text{ либо } \frac{\infty}{\infty}.$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие возникло ещё в древнегреческой математике. Термины: *непрерывность* и *непрерывная функция,* в современном смысле, ввёл в математику Л. Коши. Слово *непрерывность* на латинском – *continuum*, поэтому пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначают в виде $C_{[a;b]}$.

НЕРАВЕНСТВО

После введения знака равенства английский учёный Т. Гарриот ввёл знаки неравенств $>$ и $<$. Вид этих знаков он обосновал с помощью прямых. Если прямые не параллельны, они пересекаются. Пересечение может быть справа или слева. Знаки $\leq$ и $\geq$ появились через сто лет в Париже. Знаки $\ll$ и $\gg$ (намного меньше, намного больше) ввели французские математики: Э. Борель и А. Пуанкаре (1901).

НЕСОВМЕСТНОСТЬ

Система уравнений (неравенств) называется несовместной, если у неё нет решений, которые удовлетворяют всем составляющим этой системы.

НОЛЬ (НУЛЬ)

Особое место в позиционной системе занимает число 0. У нуля не было геометрического образа, поэтому ноль очень долго и тяжело входил в мир чисел. Ноль признали числом только в XVII в. после работ Рене Декарта.

Число ноль возникло в Индии. Только там увлекались огромными числами. Например, у индусов было 68000 божеств, у брамов сто миллионов божеств. В легенде о мудром Арджуме пытались вычислить количество всех мельчайших частиц во Вселенной.

В Индии появилось понятие небытия, которое играет важную роль в буддийской философии. Всё это привело к введению знака, который обозначал отсутствие цифры. Индусы называли такой знак словом *sunya*, что значит *пустой*. Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово *al-sifr*. Леонардо Фибоначчи нашёл соответствующее слово в латинском языке, поэтому называл в своей книге современный ноль словом *zephirum*. Отсюда произошло французское и английское слово *zero* для обозначения нуля. Сторонники индийской нумерации в Италии сохранили арабское звучание *cifra*, которое с XIII в. перешло во все европейские языки. На французском – *chiffre*, на немецком – *ziffer*, на английском – *cipher*.

В латинских переводах арабских трактатов XII в. знак 0 назывался кружком *ciculus* или *nulla figura* – *никакой знак*. В XV в. итальянцы заменили арабское слово *cifra* словом *nulla*. Его заимствовали немцы и стали писать *null*. Из Германии нуль перешёл в Россию. Введение нового термина освободило арабское слово *cifra* от значения 0. Его стали постепенно использовать для обозначения числового знака.

Слово *цифр*а ещё очень долго использовалось для обозначения нуля. В 1783 г. Эйлер использовал вместо слова *ноль* термин *цифра*. Также поступал Гаусс. В Англии такое же использование слова можно встретить в произведениях Шекспира и Теккерея. Английское слово *cipher* до сих пор сохраняет значение *ноль*. В России в конце XVIII в. число 0 называли цифрой. В это же время появилось в русском языке слово *нуль*, позже – *ноль*. Европейцы не вдавались в подробности происхождения изображения чисел. Привычные для нас числа и сегодня часто называют арабскими. В Европе к нулю окончательно привыкли только в XVII веке благодаря работам Рене Декарта.

НОРМА

От латинского *norma* – *мера, образец.* Немецкий математик Э. Шмидт ввёл (1908) обозначение для нормы в виде $\|x\|$.

Норма – неотрицательное число $\|x\|$, которое сопоставляется любому элементу x некоторого пространства (множества) D и удовлетворяет следующим условиям:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
2. $\|\beta x\| = |\beta| \cdot \|x\|$, где $\beta \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $x \in D, y \in D$.

Пространство с нормой называется нормированным пространством.

Норма вектора

В качестве нормы можно взять квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}^2}.$$

Норма матрицы

В пространстве матриц порядка $(n \times m)$ часто используют нормы:

1. $\|A\| = \max\limits_j \sum_i |a_{ij}|$ – наибольшая из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
2. $\|A\| = \max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$ –наибольшая из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
3. $\|A\|_E = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – евклидова норма.

Норма функции

В пространстве функций, интегрируемых с квадратом:

$$f(x) \in L_2[a, b]; \ \ \|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Множество интегрируемых с квадратом функций называется гильбертовым пространством.

НОРМАЛЬ

Нормаль к кривой (к поверхности) в данной точке P_0 кривой (поверхности) – это прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к кривой (перпендикулярно касательной плоскости к поверхности) в точке P_0. Нормальным вектором называют вектор, ортогональный к касательной кривой (ортогональный касательной плоскости к поверхности) в некоторой точке P_0.

Впервые этот термин появился в работах Х. Гюйгенса (1659). Эйлер стал использовать выражение *normalis planum* (1775). После Эйлера термин стал широко использоваться в математике.

О

ОБОБЩЁННЫЙ ПОЛИНОМ

Бесконечная (конечная) система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется линейно независимой на $[a, b]$, если равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x) = 0$$

выполняется только в случае равенства нулю всех числовых коэффициентов $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Функции, входящие в эту систему, называются *базисными* или *координатными функциями*.

Если конечная система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{M}$ является линейно независимой, тогда выражение

$$P(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n\,\varphi_n(x)$$

называется *обобщённым полиномом*.

Обобщённые полиномы (многочлены) успешно используются в теории аппроксимации функций и в численных методах решения дифференциальных уравнений.

ОВАЛ

Французское *oval* произошло от латинского слова *ovum – яйцо*.

ОГИБАЮЩАЯ

Слово произошло от старославянского *прегыбати – гнуть.*

Огибающей называется такая линия на плоскости, которая в каждой своей точке касается интегральной кривой из общего решения некоторого дифференциального уравнения. Из определения огибающей следует, что она является особым решением. Уравнение огибающей не получается из общего решения или общего интеграла дифференциального уравнения.

ОДНОРОДНОСТЬ

На латинском языке *homogeneus – однородный.* Впервые понятие *однородная функция* появилось у Лейбница. Эйлер называл функцию $f(x, y)$ однородной, если для неё выполнялось равенство

$$f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y).$$

ОКРЕСТНОСТЬ

Впервые слово в математику ввёл Коши. Такой же смысл английского слова *neighbourhood.* Слово появилось сначала во французской математике. Немецкий математик и блестящий педагог Вейерштрасс на первых же лекциях по математическому анализу (1856) использовал понятие *окрестность точки*.

ОКТАНТ

Одна из восьми частей, на которые разбивается трёхмерное пространство координатными плоскостями декартовой системы координат.

ОПЕРАТОР

Знак, символ, обозначение некоторой математической операции или преобразования. Термин произошёл от латинского *operator – работник*. Например, символ $\sum$ – оператор суммирования, Π – оператор умножения.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВАНДЕРМОНДА

Определитель

$$\Delta_V = \begin{vmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда. Он используется в теории приближения функций. Приведём один простой пример.

Задана табличная функция $f(x)$. Величины $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ – это узлы – значения аргумента этой функции. Для неё надо построить интерполяционный алгебраический многочлен, значения которого в заданных узлах будут равны значениям функции $f(x)$.

Доказано, что для заданной табличной функции с различными узлами

$$x_1,\ x_2, \cdots, x_{n-1},\ x_n$$

определитель Вандермонда не равен нулю, поэтому существует единственный интерполяционный алгебраический многочлен (полином) $P_n(x)$ степени $n,$ коэффициенты которого находятся с помощью линейной алгебраическлой системы, определитель которой – это определитель Δ_V.

Александр Вандермонд – французский математик, известный своими трудами в области теории определителей. Он опубликовал (1772) первое исследование, посвящённое свойствам детерминанта. Ввёл и изучил свойства представленного выше определителя, который заслуженно носит имя автора.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО

Имя польского математика Ю. Вронского носит определитель, который по предложению шотландского математика Т. Мьюира (1882) назвали вронскианом:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \vdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \vdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \vdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Вронскиан используется в теории дифференциальных уравнений. Приведём следующий простой пример. Предположим, для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(n-k)}(x) = 0$$

уже найдено n решений:

$$y_1(x) = y_1\,, y_2(x) = y_2, \cdots, y_{n-1}(x) = y_{n-1}\,, y_n(x) = y_n.$$

Необходимо построить общее решение этого уравнения. Обратимся к следующему понятию.

Фундаментальная система решений – это система из n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

В теории дифференциальных уравнений доказано, что линейная комбинация всех решений из фундаментальной системы является общим решением таких дифференциальных уравнений:

$$y_{oo}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k, \qquad \forall c_k \in R.$$

Остаётся ответить на следующий вопрос. Образуют ли найденные решения фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения? За ответом обратимся к свойствам вронскиана.

Доказаны следующие свойства определителя Вронского.

1. Если определитель $W(x) \neq 0$ в одной точке $x_0 \in (a;b)$, то этот определитель не равен нулю для любого $x \in (a;b)$.

2. Если определитель Вронского не равен нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in (a;b)$, то функции $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ являются линейно независимыми в области $(a;b)$, значит они образуют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ГРАМА

Определитель Грама используется в различных областях математики; например, в аппроксимации таблично заданных функций методом наименьших квадратов. Порядок этого определителя зависит от аналитического вида аппроксимирующей функции. Если аппроксимирующая функция линейна, определитель Грама – определитель 2-го порядка и он имеет вид

$$GA = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}.$$

В случае квадратичной аппроксимации определитель Грама имеет 3-й порядок:

$$GA = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} {x_i}^4 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}.$$

Множество чисел

$$x_1,\ x_2, \cdots, x_{N-1},\ x_N$$

в этих определителях – узлы исходной таблицы, N – объём таблицы.

Определитель Грама любого порядка симметричен относительно главной диагонали. Доказано, что если все узлы $x_1,\ x_2, \cdots, x_{N-1},\ x_N$ различны, то определители Грама любого порядка всегда не равны нулю, поэтому решение существует и единственно.

Работы датского математика Й. Грама связаны с линейной алгеброй, теорией приближения функций и математической статистикой.

ОРИЕНТАЦИЯ

Английское orientation – *ориентация, установка.* Слово произошло от латинского oriens – *восток, восходящее солнце.* В XIX в. появились понятия: *ориентация плоскости и ориентация поверхности.*

ОРТ

Термин ввёл английский математик О. Хевисайд (1892) как сокращение слова orientation – *ориентация*.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Греческое $o\rho\theta o\gamma\omega\nu\iota o\varsigma$ – *прямоугольный.* Термин есть в работах Евклида.

Ортогональные функции

Бесконечная (конечная) система интегрируемых с квадратом функций

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$$

называется ортогональной с весом в области $[a; b]$, если для неё верно равенство

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, \text{если } n \neq m, \\ \alpha_n > 0, \text{если } n = m. \end{cases}$$

Функция $\rho(x)$ в подынтегральном выражении называется весовой функцией (весом). При отсутствии весовой функции ($\rho(x) = 1$) система интегрируемых с квадратом функций называется ортогональной в области $[a; b]$, если выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, \text{если } n \neq m, \\ \alpha_n > 0, \text{если } n = m. \end{cases}$$

Система ортогональных функций является линейно независимой, а система линейно независимых функций в общем случае не ортогональна. Но любую линейно независимую систему функций можно преобразовать в ортогональную систему.

Определённый интеграл от произведения двух функций ещё называется скалярным произведением функций и записывается в виде

$$\big(\varphi_n(x), \varphi_m(x)\big) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Впервые понятие ортогональности функций использовал в конце XIX в. немецкий математик Ф. Клейн в лекциях по математической физике. Позже применял Д. Гильберт. Отдельные системы ортогональных функций исследовали задолго до введения самого понятия.

Первая ортогональная система функций появилась ещё у Д. Бернулли и Л. Эйлера. Ж. Лагранж доказал свойство ортогональности знаменитой системы функций

$$\left\{\cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=0}^{\infty} \text{ на } [-l; l].$$

Большой вклад в изучение и применение ортогональных систем функций внесли Штурм, Лиувилль, Фурье, Лежандр и др. Среди русских математиков – Чебышев и Стеклов.

ОСЦИЛЛЯЦИЯ

От латинского *oscillo – колеблюсь;* английское *oscillation – качание, колебание, вибрация.* Термин используется в аппроксимации функций при исследовании поведения погрешностей аппроксимации.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА
Такие числа и операции над ними придумал индийский математик Брахмагупта. Декарт ввёл отрицательные числа в систему координат.

П

ПАРАДОКС
Греческое слова $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\delta o\xi o\varsigma$ – странный, необычный.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ
Греческое слово $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\varsigma$ – *рядом идущая*. Слово стали использовать как математический термин 2500 лет назад в школе Пифагора.

ПАРАМЕТР
От греческого слова $\pi\alpha\rho\alpha\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ – *измеряю что-нибудь, сравнивая с чем-то другим*. Лейбниц назвал параметром любую произвольную постоянную величину, входящую в уравнение.

ПЕНТАГРАММА
От двух греческих слов $\pi\varepsilon\nu\tau\alpha$ – пять; $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ – черта, линия.

Пентаграмму можно построить следующим образом. Делим окружность на 5 равных частей. Последовательно соединяем отрезками точки деления. Получаем правильный пятиугольник, диагонали которого образуют пятиконечную звезду. Такой звёздчатый пятиугольник называется пентаграммой. Внутри неё вновь образуется правильный пятиугольник, диагонали которого снова дают новую пентаграмму и т.д.

Пентаграмма обладает следующими замечательными свойствами. Она содержит арифметическую, геометрическую и золотую пропорции. У неё есть поворотная симметрия пятого порядка. Такой вид симметрии имеют большинство цветов в живой природе: цветы незабудки, гвоздики, колокольчика, вишни, яблони, малины, рябины и др. Поворотную симметрию называют симметрией жизни.

В школе Пифагора число 2 называли первым женским числом, 3 – первым мужским числом, число 5 называли числом любви.

Пифагорейцы первые стали считать пентаграмму главным символом красоты, жизни и здоровья, поэтому выбрали её в качестве тайного опознавательного знака и в качестве символа приветствия.

Уникальное пропорциональное строение пентаграммы, красота её математического содержания не только удивительно интересны, но они ещё делают пентаграмму прекрасной по своей графической форме и символике, вложенной в неё Пифагором.

Теперь, узнав удивительные свойства пентаграммы, стало ясно, что не случайно с давних времён и до настоящего времени пентаграмма реет на флагах многих государств мира (рис. 6).

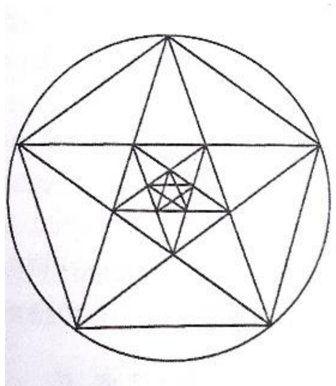


Рис. 6

ПЕРВООБРАЗНАЯ

Лагранж ввёл (1797) в математический анализ выражение *functio primitive – начальная функция.* Латинское слово *primitivus – начальный, исходный*.

В Российской математической школе такую функцию сначала называли произведённой, а потом перешли к термину *первообразная*.

ПЕРЕМЕННАЯ

Термин ввёл в XVII в. Лейбниц при обсуждении понятия *функция*.

ПЕРИМЕТР

Греческое $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ – *измерять около*. Это слово встречается ещё у Архимеда.

ПЕРИОД

От греческого слова $\pi\varepsilon\rho\iota o\delta o\varsigma$, составленного из двух греческих слов $\pi\varepsilon\rho\iota$ – около, вокруг; $o\delta o\varsigma$ – дорога, путь. Значит, греческое слово $\pi\varepsilon\rho\iota o\delta o\varsigma$ – *обход, путь вокруг*.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Латинское слово *perpendicularum – отвес*.

π

Значение отношения длины окружности к её диаметру. Иногда это число называют константой Архимеда. Его вычисление проводились ещё с IV в. до н. э. В библии было написано, что это отношение равно трём. В разных странах это число находили с различной степенью точности. В III в. н. э. китайский математик Лю Хуэй нашёл приближение $\pi \approx 3{,}14159$. Эта точность удерживалась до XV века. В Средневековье в обсерватории великого узбекского учёного М. Улугбека получили приближение числа π с точностью до 16-и знаков после запятой. В 1673 г. Лейбниц открыл числовой ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Есть и другие интересные представления удивительного числа π.

Виет (1593) доказал равенство

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots.$$

Известный английский математик Д. Валлис (1656) вывел формулу

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdots .$$

Эйлер (1735) доказал, что

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

Первый раз привычное для нас обозначение этого числа появилось (1706) в книге английского математика В. Джонса «Новое введение в математику». Знаменитую константу он назвал, скорее всего, таким именем по первой букве греческого слова *περιμετρος* – *периметр*. Позже Эйлер стал постоянно пользоваться этим обозначением. Окончательно оно вошло в математику (1736) с помощью Эйлера.

Французский математик А. Лежандр доказал иррациональность числа π, а немецкий математик Ф. Линдеман доказал его трансцендентность.

Найдены разнообразные связи между константами π и e:

$$\pi^{e} = e^{\pi}; \quad \sqrt{\pi^{\pi}} + \sqrt{e^{e}} = \pi^2; \quad \pi e^{2} = e^{\pi}; \quad \frac{\pi^2 + e^2}{\pi^3 - e^3} = \frac{\pi}{2}.$$

Сегодня нет проблем вычислить число π с любой степенью точности. В Америке есть праздник числа π. Он отмечается с 1988 года 14 марта (3,14). Интересно, что в этот день родился А. Эйнштейн. В Европе даты записывают в обратном порядке, поэтому день числа π отмечается в Европе 22 июля (22/7=3,14…..).

ПИРАМИДА

Средневековые учёные считали, что этот термин произошёл от греческого слова *πυρ* – огонь; в некоторых учебниках геометрии XVI века пирамиду называли *телом огненной формы*.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Термин образован в Средние века. В нём соединены два слова латинское и греческое: *planum* и *μετρεω*.

ПЛОСКОСТЬ

Процесс математического определения плоскости был очень долгим. Лейбниц удачно предложил определить плоскость, как геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек. Алгебраический образ плоскости – линейное уравнение. Например, общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 1,$$

поэтому плоскость ещё можно назвать поверхностью первого порядка.

ПОВЕРХНОСТЬ

Множество точек в трёхмерном пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x; y; z) = 0$ (неявное задание функции) или уравнению $z = f(x; y)$ (явное задание функции).

ПОГРЕШНОСТЬ

От старославянского *грех*. Погрешности классифицируют по источникам их возникновения:

1. Погрешность в исходных данных.
2. Погрешность выбранной математической модели.
3. Погрешность выбранного численного метода.
4. Погрешность компьютерных вычислений (погрешности округления).

Погрешности 1-го класса неустранимы. Их источники – это физические измерения. Множество реальных данных содержат погрешность, которую часто называют шумом. Этот шум отрицательно влияет на точность любого численного метода.

Погрешности 2-го класса неизбежны потому, что математические модели в метеорологии, океанологии, гидрологии, экологии и других науках – это всегда приближённые модели, поэтому имеют погрешность. Для уменьшения такой погрешности следует попытаться повысить точность модели.

Погрешности 3-го класса связаны с использованием тех или иных формул и алгоритмов, выведенных в рамках «Вычислительной математики». В настоящее время хорошо разработаны итерационные методы решения, в которых для получения точного результата теоретически необходимо сделать бесконечно много шагов итераций, а в реальных вычислениях число шагов конечно; оно зависит от заданной заранее точности результата.

Минимизация погрешностей наиболее приоритетна в процессе разработки любого численного метода. Если во время решения погрешность не увеличивается, тогда говорят, что метод (алгоритм) имеет *вычислительную устойчивость*.

Погрешности 4-го класса. Компьютерное округление и деление на число, близкое по модулю к нулю, увеличивают погрешности 4-го класса. Накопление ошибок округления может отрицательно повлиять на результат решения задачи, поэтому во всех алгоритмах стандартных программ есть специальные операции для максимального уменьшения погрешностей компьютерного округления.

ПОКАЗАТЕЛЬ

Целые положительные показатели степени ввел Декарт. Его обозначения распространились очень быстро и сохранились до наших дней. Ньютон первым стал применять отрицательные и дробные показатели степеней. Мнимые показатели степени впервые использовал Эйлер.

ПОЛЕ

Термин *field – поле* впервые встречается (1851) в работах английского учёного Томсона – лорда Кельвина. Различают два вида полей.

Скалярное поле

Скалярная функция, заданная в некоторой области пространства, называется скалярным полем**.** Впервые (1834) это понятие появилось у французского учёного Г. Ламе. Его выражение *function de point – функция точки* постепенно превратилось в скалярное поле в математическом анализе.

Векторное поле

Векторная функция $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, заданная в каждой точке односвязной области пространства называется *векторным полем*. Английский математик Гамильтон исследовал функции, зависящие от расположения точки в пространстве, при этом сама функция – это вектор, направление которого тоже зависит от этой точки. Впоследствии выражение Гамильтона: *vector function of position in space,* стало *векторным полем.* Это понятие использовали физики Фарадей и Максвелл.

ПОЛИГОН

От греческого $\pi o\lambda\upsilon\gamma\omega\nu o\nu$ – *многоугольник,* $\pi o\lambda\upsilon$ – *многочисленный;* $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ – угол. Слово встречается у Евклида и Архимеда.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ

Если любую функцию некоторого метрического пространства можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией из заданной системы линейно независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ этого же метрического пространства, такая система функций называется полной.

ПОЛЮС

Древнегреческое $\pi o\lambda o\varsigma$, латинское *polus – граничная, крайняя точка чего-либо.* В математике: полюс – центр полярной системы координат, центр инверсии.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Это неограниченный набор упорядоченных величин, построенных по заданному алгоритму. Каждый член последовательности имеет нижний индекс, который указывает его место в последовательности: $a_1, a_2, \cdots\cdots$.

Монотонные ограниченные последовательности всегда имеют предел.

ПОСТУЛАТ
Термин образован от латинского слова *postulare – требование.* В греческой геометрии постулаты играли роль аксиом. Примером этому является знаменитый пятый постулат геометрии Евклида о параллельных прямых. Он был неочевиден и отличался от других постулатов сложной формулировкой, похожей на теорему. Так, в 1077 г. Омар Хаям в работе «Трактат об истолковании тёмных положений у Евклида» пытался его доказать.

ПОТЕНЦИРОВАНИЕ
От немецкого математического термина *potenzieren – возводить в степень.* Этот термин произошёл от латинского *potentia – сила, могущество.* В математике выражение *потенцирование* впервые встречается в 1659 г.

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК
Многогранник – это геометрическое тело, каждая грань которого – многоугольник. Многогранник называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от каждой своей грани.

Важное свойство выпуклых многогранников доказал Эйлер. Пусть в многограннике L –число вершин, M – число граней, N – число рёбер, тогда справедливо равенство

$$L + M - N = 2.$$

Многогранник называется правильным, если все его грани – правильные многоугольники и из каждой вершины выходит одинаковое число рёбер.

Самое удивительное свойство правильных многогранников – их всего пять. Три из них открыл Пифагор, остальные два – греческий математик Тэетет. Строгое построение всех таких правильных тел было представлено в 13-ой книге «Начал» Евклида. Название каждого многогранника связано с количеством его граней.

Например, слово *тетраэдр* произошло от двух греческих слов $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha$ – *четыре* и $\varepsilon\sigma\rho\alpha$ – *грань.* Геометрические характеристики правильных многогранников представлены в следующей таблице.

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК	ЧИСЛО ГРАНЕЙ, ЗВУЧАНИЕ НА ГРЕЧЕСКОМ	ЧИСЛО ВЕРШИН	ЧИСЛО РЁБЕР	ВИД ГРАНЕЙ	ЧИСЛО ГРАНЕЙ ПРИ КАЖДОЙ ВЕРШИНЕ
ТЕТРАЭДР	*4-ТЕТРА*	*4*	6	ТРЕУГОЛЬНИК	3
ОКТАЭДР	*8-ОКТО*	*6*	12	ТРЕУГОЛЬНИК	4
ИКОСАЭДР	20-ИКОСИ	*12*	30	ТРЕУГОЛЬНИК	5
ГЕКСАЭДР	*6-ГЕКСА*	*8*	12	ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК	3
ДОДЕКАЭДР	*12-ДОДЕКА*	*20*	30	ПЯТИУГОЛЬНИК	3

Платон (429–348 до н.э.) – великий греческий философ и математик был уверен, что основой материального мира являются четыре стихии: огонь, воздух, вода и земля. Платон считал, что атомы каждой стихии имеют свою уникальную форму. Атом эфира – додекаэдр, земли – куб, воды – икосаэдр, воздуха – октаэдр, огня – тетраэдр. В память о Платоне правильные многогранники называют платоновыми телами (рис.7).

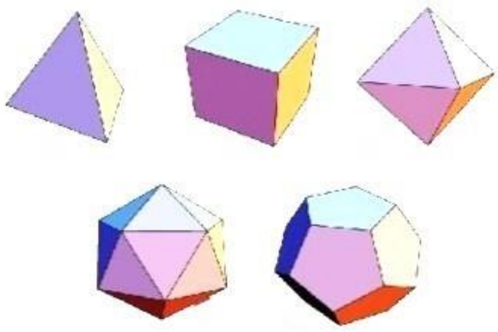


Рис. 7

Ко времени написания Евклидом самой знаменитой математической книги было уже известно, что если число граней правильного тела равно числу вершин другого и наоборот, тогда одно правильное тело можно получить из другого, если центры тяжести граней одного взять за вершины другого. Правильные многогранники, имеющие такие свойства, называют дуальными. Дуальными являются куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, тетраэдр дуален самому себе.

Правильные тела интересны, скорее всего потому, что они встречаются в природе. Например, форма кристаллов поваренной соли – куб, кристаллов квасцов – октаэдр, кристаллов пирита – додекаэдр.

Пифагорейцы считали куб гармоническим телом, потому что число его вершин равно среднему гармоническому числа граней и числа рёбер. Куб является единственным правильным телом, которым можно полностью заполнить всё трёхмерное пространство.

Правильные многогранники интересны и с художественной точки зрения. Так, великий Леонардо да Винчи сам с интересом мастерил каркасы правильных тел и преподносил их в качестве подарка.

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Пифагорейцы уделяли много внимания правильным фигурам и телам. Правильные геометрические формы имеют зеркальную и поворотную симметрию, что соответствует философским взглядам пифагорейцев на гармоническое устройство окружающего мира.

Пифагорейцы доказали, что плоскость можно полностью покрыть правильными многоугольниками только трёх видов: треугольниками, квадратами и шестиугольниками (рис. 8).

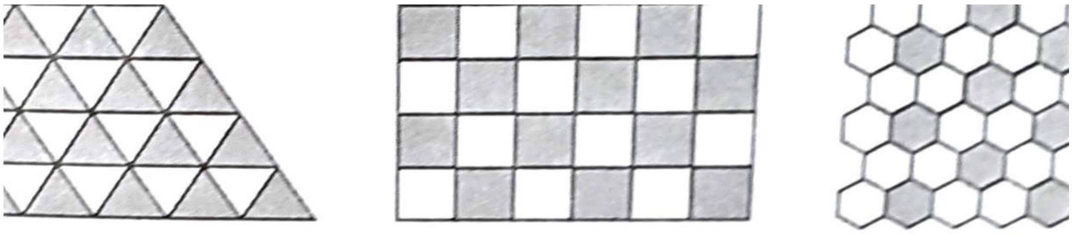


Рис. 8

В 4-й томе «Начал» Евклид представил порядок построения, с помощью циркуля и линейки, правильных многоугольников с тремя, четырьмя, пятью и шестью сторонами. Но Евклиду не удалось решить задачу о построении правильного семиугольника с помощью указанных инструментов.

Через 2000 лет семнадцатилетний немецкий студент Геттингенского университета Гаусс доказал, что невозможно такое построение правильных k-угольников, если $k = 7, 11, 13$, а 17-сторонний многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Гаусс был под большим впечатлением от своего открытия. Стал обобщать полученный результат и вновь сделал следующее открытие.

Правильный k-угольник можно построить только когда k – простое число, для которого верно равенство

$$k = 2^{2^n} + 1, \qquad \text{где } \ n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Первое в его жизни доказательство стало для Гаусса самым любимым.

В Гёттингене есть мемориал, посвященный великому Гауссу. Мемориал имеет форму 17-стороннего многоугольника.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Маркиз Г. Лопиталь должен был стать офицером по семейной традиции, но из-за плохого зрения его освободили от военной службы, поэтому он всё свободное время занимался любимой математикой.

И. Бернулли читал ему лекции и даже написал курс лекций специально для Лопиталя. Под влиянием этих лекций юноша сам написал учебник по дифференциальному исчислению (1696). Книга оказалась настолько удачной, что по ней учились во Франции многие десятилетия. В 1730 г. вышел её английский перевод, а в Вене латинский (1764). Курс содержал правило Лопиталя, которое доказал И. Бернулли. Учебник Лопиталя содержал в основном результаты, полученные братьями Бернулли и Лейбницем.

Напомним это знаменитое правило. Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = (0/0 \quad \text{или } \infty/\infty\ ),$$

тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x).$$

ПРЕДЕЛ

В начале XIX века математики давали только словесное описание предела. Определение предела на языке (ε, δ) впервые ввёл чешский математик Больцано (1817). Благодаря французскому математику и автору учебников по математическому анализу Л. Коши определение Больцано стало классическим. Это знаменитое и очень простое определение успешно используется и сейчас.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в предельной точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что как только

$$|x - x_0| < \delta, \text{ так сразу } |f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon.$$

Главный смысл этого определения: если число А является пределом $f(x)$ в точке x_0, то эта функция может, сколь угодно, близко приближаться к этому пределу.

Современное обозначение предела функции в точке x_0 записывается в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Его придумали В. Гамильтон и Б. Риман. В первом русском издании лекций Коши (1831) слово *limit* перевили как *предел.*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Общие формулы преобразования системы координат впервые осуществил Л. Эйлер. Он вывел формулы перехода из декартовой системы координат в полярную (1748). В XIX в. ряд математиков обратились к исследованию преобразований одних систем координат в другие системы координат.

Немецкий математик К. Якоби обобщил такие преобразования и построил для них специальный функциональный определитель. Самый большой выдумщик удачных математических терминов – английский математик Джеймс Сильвестр (1853) назвал этот определитель якобианом. Якобианы используют и в настоящее время.

ПРИЗМА

Греческое слово $\pi\rho\iota\sigma\mu\alpha$ – *отпиленный кусок*. Это слово встречается у Евклида и Архимеда.

ПРИРАЩЕНИЕ

Разность двух значений переменной величины. Обозначается как Δ.

ПРОБЛЕМА

От греческого слова $\pi\rho o\beta\lambda\eta\mu\alpha$ – *то, что поставлено вперёд*. Примеры.

<u>Проблема близнецов</u>

Близнецами называются два простых числа, разность которых равна двум, например, 5 и 3, 7 и 5, 13 и 11, 19 и 17, 29 и 31. Конечно или бесконечно количество пар близнецов? Ответа пока нет. Такая неизвестность называется проблемой близнецов.

Проблема Гольдбаха

Гольдбах (1742) в письме к Эйлеру написал о своём предположении, что любое число, начиная с шести, можно представить в виде суммы трёх простых чисел. Прошли многие годы. Российский математик И. Виноградов доказал справедливость предположения для нечётных чисел (1937). Но для общего случая доказательство пока не найдено.

Проблема четырёх красок

На протяжении многих лет математики пытались доказать следующее предположение. Любую политическую карту можно так раскрасить в четыре разных цвета, чтобы страны, имеющие общую границу, всегда были окрашены в разные цвета. Проблема ждала своего решения почти 120 лет. Её доказали (1976) с помощью теории графов и компьютера.

ПРОГРАММА

Греческое $\pi\rho o\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ – *объявление, наказ*.

ПРОГРЕССИЯ

От латинского *progressio – движение вперёд, успех, постоянное усилие*

Задачи на прогрессии встречаются в древнейших папирусах и астрономических таблицах Вавилона. Прогрессию называют геометрической из-за того, что любой её член, кроме крайних, равен среднему геометрическому своих ближайших соседей. Формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии вывел ученик Галилея Е. Торричелли.

ПРОЕКЦИЯ

Латинское слово *projectio – бросание вперёд*. Есть разные виды проекций. Впервые ортогональная проекция встречается в книге немецкого художника А. Дюрера «Наставления об измерении циркулем и линейкой» (1525). Это был первый немецкий учебник геометрии. В картографии используют проекцию, изобретённую (1569) фламандским картографом Г. Меркатором.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ

От латинского слова *productum – произведение*. Произведение – результат операции умножения. Русский термин *произведение* ввёл Л. Магницкий (1703).

Точка, как знак умножения (1631), была одобрена Г. Лейбницем.

ПРОИЗВОДНАЯ

Французский термин *derivee – производная* ввёл французский математик Лагранж (1797). Ему принадлежит идея краткого обозначения производной с помощью штриха – $f'(x)$. В России термин *производная* ввёл математик В. Висковатов (1810).

У Лейбница производной являлось отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, поэтому созданное им исчисление называется дифференциальным.

Приведём примеры обозначений первых и вторых частных производных функций двух переменных $f(x,y)$ и авторов этих обозначений:

$f'_x, f'_y,\ f''_{xx}, f''_{yy},\ f''_{xy}, f''_{yx}$ – Лагранж; $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ – Якоби.

ПРОМЕЖУТОК

Обобщённое название для множества всех действительных чисел, лежащих между двумя числами a и b с включением или без включения одного или двух граничных чисел $a,\ b$.

ПРОПОРЦИЯ

От латинского *proportio – соразмерность*. Греческие математики (IV в. до н. э.) полностью построили общую теорию пропорций. Они называли пропорцию термином $\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\alpha$. Цицерон (I в. до н. э) перевёл это слово на латынь. Получилось слово *proportio,* которое сразу стали использовать в математике. Пифагорейцы рассматривали три вида пропорций:

арифметическая $a - b = c - d$;

геометрическая $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

гармоническая $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

Если в пропорциях рассматривать одинаковые средние величины $b = c$, то приходим к известным соотношения для средних:

среднее арифметическое $b = (a + d)/2$;

среднее геометрическое $b = \sqrt{ad}$;

среднее гармоническое $b = 2ad/(a + d)$.

О важности пропорций писал ещё Леонардо да Винчи: "Пропорция – мать и королева искусства". Он говорил, что геометрическая пропорция не только позволяет изобразить предмет, но и передать его эстетическое содержание. В результате пропорциональности получается гармония.

ПРОСТРАНСТВО

Так называется множество математических элементов, структура которого определяется заданными свойствами его элементов. В качестве примера можно привести n-мерное векторное пространство, элементы которого выглядят следующим образом

$$\boldsymbol{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \cdots x_{n-1} \quad x_n).$$

Немецкий математик Д. Гильберт ввёл в математику понятие *бесконечное пространство*. Это понятие используется в чистой математике.

Р

РАВЕНСТВО

До появления специального, всем известного знака, слово *равенство* писали в математике на разных языках. В 1557 г. английский математик и врач Рекорд предложил знак =. Он писал: "Ничего нет более равного, чем две параллельные прямые". Этот знак равенства распространился по всему миру только к концу XVIII века.

К сожалению, изобретатель знака, который наиболее часто встречается в математике, умер в Лондонской долговой тюрьме.

РАДИАН

От латинского *radius* – *спица, луч.* На английском записывают как *radian*. Один радиан – это единица измерения плоского центрального угла, который опирается на дугу окружности, равную по длине радиусу этой окружности. Развёрнутый центральный угол содержит 2π радиан.

РАДИКАЛ

Радикалом в математике называют знак $\sqrt[n]{}$ извлечения корня произвольной степени $n \geq 2$. Декарт ввёл знак квадратного корня с чертой над подкоренным выражением $\sqrt[2]{}$. Ньютон распространил обозначение Декарта на корни любой степени и использовал его в книге «Всеобщая арифметика».

Древние греки вместо слов *извлечь корень* говорили: “найти сторону по данной площади квадрата”, а квадратный корень называли стороной. На латинский язык слова: *сторона, бок, корень* переводятся словом *radix*. Термины *корень* и *радикал* стали математическими благодаря первым переводчикам «Начал» Евклида. Переводили сначала с греческого языка на арабский язык, а затем на латынь.

РАДИУС

Латинское слово *radius* – *палочка*. В древности этого термина не было. Для математиков времён Евклида радиусом была *прямая из центра*. Слово *радиус* впервые встречается в 1569 г. у французских учёных Рамуса и Виета. Слово стало общепринятым термином только в конце XVII века.

РАЗМЕРНОСТЬ

Первые попытки определения понятия *размерность* можно найти в древнегреческой математике. Евклид дал следующее определение. Линия – это то, границей чего является точка. У линии есть длина, нет ширины.

Даламбер (1764) в статье «Размерность» пишет: "Известный мне умный человек считает, что можно рассматривать время как 4-е измерение. Эта идея может быть спорной, но мне кажется, что она имеет некоторое достоинство".

В 1877 г. Немецкий математик Г. Кантор обнаружил, что между точками отрезка одномерного пространства и точками квадрата двумерного пространства, можно установить взаимно однозначное соответствие. Этот факт привёл в шок математический мир. Математики считали, что в двумерном пространстве больше точек, чем в одномерном пространстве.

В математике были разные подходы к определению понятия *размерность*. О ней задумывались многие знаменитые математики XIX в.: Кэли, Больцано, Гроссман, Риман, Пуанкаре и др.

К тридцатым годам XX в. была создана математическая теория размерности. Один из её создателей – великий российский математик Урысон.

Приведём один пример: размерность векторного пространства – это максимальное количество линейно независимых векторов в этом пространстве.

РАЗНОСТЬ

Латинское *differentia – разность.* От этого латинского слова образованы английские: *difference – разность, приращение; differentia – дифференциал; differentiable – дифференцируемый.*

Лейбниц обозначал латинской буквой d конечные и бесконечно малые разности (приращения).

РАНГ МАТРИЦЫ

Это наибольшее количество линейно независимых строк (столбцов) матрицы. В Российской математической школе ранг матрицы A обозначается как $rang\ A$. В других математических школах встречается $rank\ A$.

РЕГУЛЯРНЫЙ

От латинского *regula – правило*; *regulis polygon – правильный многоугольник*; *regulis pyramid – правильная пирамида.*

РЕКУРРЕНТНОСТЬ

От латинского *recuro – бегу назад, возвращаюсь*. Термин (1730) ввёл английский математик А. Муавр.

Очень удобное свойство некоторых последовательностей, при котором любой член такой последовательности может быть вычислен через предыдущие члены этой же последовательности. Необходимая для такого вычисления формула называется рекуррентной формулой.

РОМБ

От греческого ραμβος – *бубен*. Ромб похож на четырёхугольный бубен.

РЯД

Это выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_{k-1} + u_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$

где $u_1, u_2, u_3, \cdots u_{k-1}, u_k \cdots$– числовая или функциональная последовательность.

Невозможно установить время первого появления числовых рядов. Но известно, что вавилонские математики умели суммировать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Понятие *бесконечная сумма* было известно ещё в Древней Греции.

Ряд гармонический

Это числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Он называется гармоническим потому, что каждый член этого ряда, начиная со 2-го, равен среднему гармоническому двух ближайших к нему соседних членов ряда.

С

СЕГМЕНТ

Латинское слово *segment – отрезок.*

СЕКВЕНЦИЯ

Последовательность знаков. От латинского *sequential – следование.*

СЕКУЩАЯ

Латинское *seco – секу.* Прямая, пересекающая кривую в точках.

СИГНУМ

Функция следующего вида

$$sgn(x) = sign(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{array}\right.$$

Эту функцию ввёл в рассмотрение немецкий математик Л. Кронекер. Она получила своё название и обозначение от латинского *signum – знак*.

СИМВОЛ

Греческое $\sigma\upsilon\mu\beta o\lambda o\varsigma$ – *условный графический знак*, *примета*.

СИММЕТРИЯ

Греческое слово $\sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ – *соразмерность, правильное отношение*. С древности человек замечал, что в природе существуют некоторые пространственные закономерности в расположении природных объектов. Рисунки, орнаменты, барельефы и постройки древнего мира показывают большой интерес человека к различным видам симметрии.

Понятие симметрии использовали философы Древней Греции. Они рассматривали её, как некоторую пространственную закономерность, и переносили это понятие в другие области человеческой деятельности. Например, у Аристотеля симметрия означала среднюю меру, к которой должен стремиться в своих действиях человек. Римский врач Гален (II в.) в трактате «Темперамент» под симметрией понимал состояние духа, одинаково далёкое от горя и радости или от апатии и возбуждения. Великий немецкий художник А. Дюрер считал, что прекрасное всегда пропорционально и симметрично. В геометрии симметрия – это свойство объекта совмещаться с собой при некоторых преобразованиях.

Есть несколько видов геометрической симметрии.

Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A переходит в точку B, симметричную относительно некоторой прямой. Точки A и B лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии, расположены по разные стороны от оси и на одинаковом расстоянии от неё. Точки оси симметрии отображаются сами на себя.

Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия)

Отображение точек пространства, при котором каждая точка переходит в другую точку, которая лежит на том же перпендикуляре к плоскости, но по разные стороны от плоскости и на одинаковом расстоянии от неё.

Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A так отображается в точку B, что эти точки лежат на прямой, проходящей через другую заданную точку C, которая называется центром симметрии. Точки A и B расположены по разные стороны от центра симметрии и на одинаковом расстоянии от него.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Слово *система* произошло от греческого *συστημα – соединение, составленное из частей*. Системы координат создавались для определения положения объекта на плоскости или в пространстве. Их используют в астрономии, географии, гидрометеорологии и математике.

Декартовая система

На латинском Рене Декарт – Renatus Cartesius; поэтому в странах, говорящих на романских языках, такую систему координат называют картезианской. Создал (1637) эту систему математик и философ Р. Декарт. Используются различные виды декартовой системы координат:

Прямоугольная.

Модуль угла между координатными осями равен 90°.

Косоугольная.

Модуль угла между координатными осями не равен 90°.

Правосторонняя.

Кратчайший угол между направлением оси абсцисс и направлением оси ординат положительный (рис. 9).

Левосторонняя.

Кратчайший угол между направлением оси абсцисс и направлением оси ординат отрицательный (рис. 10).

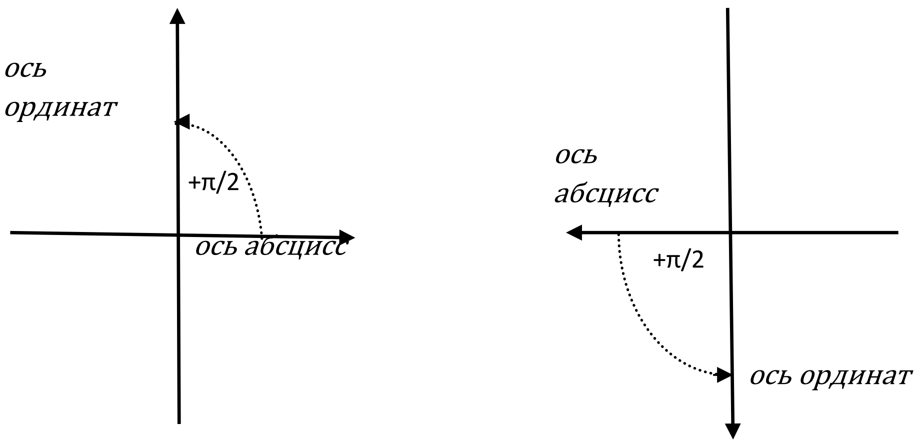


Рис. 9. Правосторонние прямоугольные декартовы системы координат

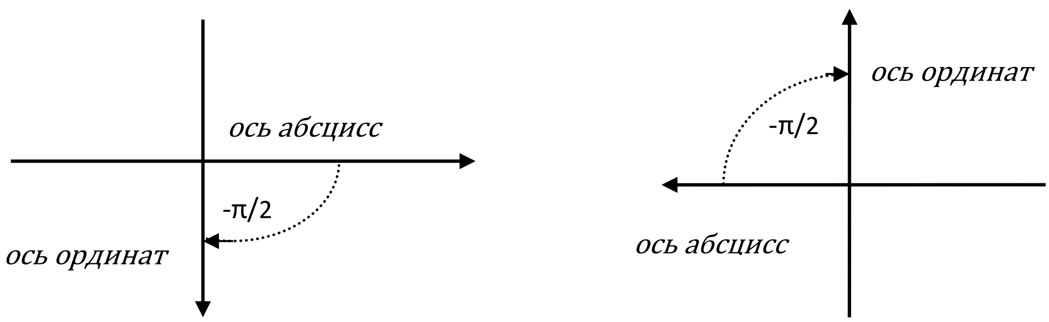


Рис. 10. Левосторонние прямоугольные декартовы системы координат

Полярная система

Эту систему создал (1691) швейцарский математик Я. Бернулли.

На плоскости выбирают любую точку, обозначают её буквой P и называют *полюсом*. От полюса проводят горизонтальный луч – это полярная ось. Выбирают масштаб для измерения длин и положительное направление для измерения углов. Положительное направление угла отсчитывают от полярной оси против часовой стрелки. Для однозначности полагают, что

$$-\pi \leq \varphi < \pi \text{ или } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Любая точка $M(\rho, \varphi)$ с полярными координатами однозначно определяется длиной отрезка PM – *полярным радиусом* ρ и *полярным углом* φ между осью и отрезком PM.

<u>Цилиндрическая система</u>

Цилиндрическая система координат составлена из полярных координат ρ, φ и декартовой координаты – аппликаты z. В такой системе у любой точки пространства есть три координаты (ρ, φ, z), где

$$0 \le \rho < +\infty, \qquad -\pi < \varphi \le \pi \ \ (0 < \varphi \le 2\pi\,), \qquad -\infty < z < +\infty.$$

Данную систему координат называют цилиндрической, так как в ней координатная поверхность $\rho = const$ является цилиндром, ось которого – это ось Z.

<u>Сферическая система</u>

В этой системе координат у любой точки P трёхмерного пространства есть три координаты (ρ, θ, φ), где

ρ – расстояние от начала до точки P, $\rho = |OP|$; $\ 0 \le \rho < +\infty$;

θ – угол между координатной осью Z и отрезком OP; $\ 0 \le \theta \le \pi$;

φ – угол между координатной осью X и отрезком OP', где точка P' – это проекция точки P на координатную плоскость XY; $\ -\pi < \varphi \le \pi$.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В качестве основания системы счисления можно формально взять любое число. Это положение высказал (1665) французский математик Б. Паскаль.

Различные системы счисления использовали задолго до десятичной. Следы пятеричной системы счисления сохранились в римской письменной нумерации, в устройстве китайских и японских счётов. У некоторых африканских племён тоже была пятеричная система счисления.

Когда-то у народов Франции была двадцатеричная система. Она оставила следы в современном французском языке. Название чисел 80, 90 пишут так: *quatre – vingts, quatre – vingts – dix*. Известный роман Виктора Гюго «93-й год» на французском языке пишется *quatre - vingts- treize*. В английском языке среди многих значений слова *score* есть числовое – двадцать. Число 60 – *three score,* 80 – *four score* и т.д.

Шестидесятеричная система счисления была разработана в Древнем Вавилоне. Шестидесятеричные дроби были похожи на наши десятичные дроби. Во всём мире до сих пор используют вавилонские дроби при измерении времени.

О существовании когда-то двенадцатеричной системы счисления говорит традиция считать дюжинами (12 – small gross) некоторые предметы, например, тарелки, вилки или большими дюжинами (144 – great gross).

Двоичная система счисления существовала в Китае. Её изобрёл император Фо Ги, Он жил в четвёртом тысячелетии до новой эры. Мысли о преимуществе десятичной системы появились в Китае гораздо раньше, чем у европейцев.

Позиционная десятичная система возникла в Индии не позже начала нашей эры. В основе этого совершенного изобретения лежит изображение нуля. Французский математик П. Лаплас писал о позиционной системе: "Удивительно проста мысль – выражать все числа знаками, значения которых зависят от их формы и от места в числе. Как нелегко было прийти к этому, видно на примере таких гениев как Архимед и Аполлоний. Для них эта мысль осталась скрытой".

Только к концу XII века индийская система завоевала Европу и вытеснила римскую систему. Это произошло благодаря уроженцу итальянского города Пиза купцу Л. Фибоначчи. Его отец был консулом в одном из портов Алжира, который входил в состав арабской империи. Фибоначчи получил очень хорошее образование в арабской школе Алжира. Вот что он вспоминал о своей школе: "Прекрасные преподаватели обучили меня искусству обращения с десятью индийскими символами. Искусство вычислений стало приносить мне высочайшее наслаждение".

Фибоначчи много путешествовал и вернулся в Пизу только в 1200 году. Он написал несколько математических трудов, среди которых «Книга о вычислениях» («Книга абака») стала научным шедевром. Она написана на латинском языке и опубликована (1202) в Пизе. В книге представлены индийские обозначения цифр и действия с ними: сложение, вычитание, умножение и деление. Объясняются действия с дробями. Есть сведения из геометрии и алгебры. Книга стала математической энциклопедией Средневековья. Многие годы в Европе книги Фибоначчи использовали как школьные учебники для светских школ. Во времена Фибоначчи тиражи книг делали вручную, но труды этого математика сохранились до наших дней. Первый печатный учебник математики появился только в 1475 году.

СКАЛЯР

От латинского *scale – шкала, масштаб* . Французский математик Ф. Виет первым стал называть числовые величины *скалярами*. В таком смысле слово *скаляр* впервые вошло в математику. Современное понятие *скалярная величина,* как отличие от векторной, использовал ирландский математик В. Гамильтон.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Определённый интеграл от произведения двух функций принято называть ска*лярным произведением функций* и записывать в виде

$$\left(\varphi_n(x), \varphi_m(x)\right) = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

СКАЧОК

Французский математик (XIX в.) М. Паш впервые назвал скачком функции в точке a величину

$$\left|\lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a-h)\big)\right|.$$

К. Жордан ввёл (1893) это понятие для функции нескольких переменных.

СКОБКИ

Подобие скобок впервые изобрёл итальянский математик Н. Тарталья. У Виета появились фигурные скобки в 1593 г. Их стали широко использовать в математике с первой половины XVIII в. с помощью Лейбница и Эйлера, который ввёл в математику термин *klammer – скобка.*

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Это числа, равные сумме всех своих делителей. Например, 6=1+2+3; 28=1+2+4+7+14. Пока нет ответа на вопросы: бесконечно ли множество совершенных чисел; существуют ли нечётные совершенные числа?

СООТНОШЕНИЕ

Равенство или неравенство, выражающее зависимость между величинами.

СПЛАЙНЫ

Английское *splain – гибкая линейка*. Термин происходит от названия тонкой и гибкой деревянной или металлической полоски, которую использовали чертёжники для проведения гладкой линии через заданные точки. Впервые такие линейки стали использовать в авиастроении при конструировании обтекаемых профилей.

Сплайны были созданы в середине XX в. американским математиком И. Шёнбергом. Сплайнами называют кусочно-полиномиальные функции заданной гладкости. Наиболее популярными стали кубические интерполяционные сплайны, с помощью которых аппроксимируются дважды непрерывные функции.

Сплайны стали классическим, мощным и гибким математическим инструментом для решения различных прикладных задач. Для построения сплайнов разработано соответствующее компьютерное программное обеспечение.

В качестве простого примера представим в общих чертах схему построения кубического интерполяционного сплайна.

Кубический интерполяционный сплайн

Допустим, что некоторый физический процесс теоретически может быть описан дважды непрерывно дифференцируемой функцией $f(x)$, но фактически представлен в виде таблицы наблюдений $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{N}$. Тогда в качестве интерполяционной функции лучше использовать кубический сплайн.

Если объём таблицы равен $(N+1)$, тогда кубический сплайн состоит из N звеньев. Каждое звено – это кубический полином, который включает четыре неизвестных коэффициента и один узел x_{i-1} из исходной таблицы:

$$z_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad x_{i-1} \le x < x_i.$$

Кубический интерполяционный сплайн аналитически представляется как объединение звеньев:

$$S_3(x) = \sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3),$$

$$\text{где } x_{i-1} \le x < x_i.$$

Для построения $S_3(x)$ необходимо найти $4N$ неизвестных коэффициентов $\{a_i; b_i; c_i; d_i\}_{i=1}^{N}$. Они находятся с помощью линейной алгебраической системы с трёхдиагональной матрицей. Эти системы решаются очень быстрым и достаточно точным методом трёхдиагональной прогонки.

СРЕДНЯЯ ВЕЛИЧИНА

Средняя арифметическая

Числовая характеристика совокупности чисел, $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, которая определяется формулой

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Средняя взвешанная

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, равная дроби

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

где числа p_i называются весами чисел a_i.

Средняя гармоническая

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, равная дроби

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

Средняя геометрическая

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, равная квадратному корню из произведения этих чисел:

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Средняя квадратическая

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, равная квадратному корню из суммы квадратов этих чисел, делённой на количество этих чисел:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,.$$

<u>СТАТИСТИКА</u>

Происходит от латинского status – *политическое состояние.* У этого слова отсутствует множественное число. Постепенно появилось английское *statistics*. В XVIII в. справки о населении, производстве и политической ситуации в стране назывались *статистическими данными*. Статистика в ту пору была политической арифметикой.

Основателем научной статистики стал бельгийский математик, астроном и метеоролог А. Кэтле. Научный мир познакомился с трудами этого учёного из публикаций его книг «О человеке и развитии его способностей» (1735) и «О социальной системе и управляющих ею законах» (1848). Кэтле был уверен, что нравственный мир управляется определёнными законами.

СТАЦИОНАРНОСТЬ

Латинское слово *stationaries* – *тот, кто стоит; нерушимый.*

Стационарный процесс – процесс, который не зависит от времени.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Термин составлен из двух греческих слов $\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon o\varsigma$ – *пространственный* и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ – *измеряю*. Этот термин использовал ещё Аристотель.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ

От греческого $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ – *случайный, беспорядочный.*

СТРУКТУРА

Латинское *structure* – *связь составных частей чего-либо; строение.*

СУПЕРПОЗИЦИЯ

Термин составлен из латинских *super* – *над* и *positio* – *положение.*
Означает *наложение одного на другое*. Термин ввёл Д. Бернулли (XVIII в.).

СФЕРА

Греческое $\sigma\varphi\alpha\tilde{\iota}\rho\alpha$ – *шар, мяч*. Термин использовали ещё до Евклида.

СХЕМА

От греческого $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ – *внешний вид*; *образ.* В древнегреческой математике слово использовали Аристотель, Евклид и Платон.

Т

ТАБЛИЦА

Латинское *tabula* – *доска; стол*; *таблица для письма.* От *tabula* появилось немецкое *tabulieren* – *табулировать*; *составлять таблицы*. Таблицы были известны с древних времен. Тригонометрические таблицы повсеместно использовали в астрономии.

ТЕКУЩАЯ ТОЧКА

Впервые выражение встречается у итальянского математика Б. Кавальери (1635). Если прямая перемещается параллельно самой себе, то он говорил, что прямая течёт и называл её *текущей*. Ньютон обобщил термин и стал называть текущей любую непрерывно меняющуюся величину.

ТЕОРЕМА

От греческого $\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ – *представление; зрелище.* В греческой математике слово использовали в смысле *истина, доступная созерцанию*.

У Пифагора это слово стало означать *умозаключение – теорема*.

Приведём примеры двух теорем, доказанных знаменитыми греками.

Теорема Птолемея. Произведение диагоналей, вписанного в окружность четырёхугольника, равно сумме произведений его противоположных сторон.

Теорема Фалеса. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

ТЕОРИЯ

Греческое слово $\theta\varepsilon\omega\rho\iota\acute{\alpha}$ – *наблюдение; созерцание*. Например, созерцание театральных представлений, толкование мифов, восторг человека после открытия истин. Всё это называлось $\theta\varepsilon\omega\rho\iota\acute{\alpha}$.

В математику это слово ввёл Пифагор. Он считал, что постижение истины вызывает у человека восхищение.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей начала формироваться в XVII веке в письмах об азартных играх. Эту переписку вели французские математики П. Ферма и Б. Паскаль. Лапласу принадлежат следующие слова: "Поразительно, что наука, зародившаяся при рассмотрении азартных игр, смогла стать одной из важнейших частей человеческих знаний".

Одно из самых ранних понятий вероятности встречается у Аристотеля и Фомы Аквинского. Вероятность вычисляли ещё в XVI в. итальянские математики Н. Тарталья, Д. Кардано и Г. Галилей.

Первую книгу по теории вероятностей написал датский математик Схоотен (1657) с помощью своего голландского ученика Х. Гюйгенса, который впоследствии стал знаменитым физиком, астрономом и математиком. Гюйгенс первый применил теорию вероятностей к демографической статистике.

В 1687 г. была опубликована работа голландского философа Б. Спинозы «Заметки о математической вероятности».

Стоит отметить, что в Русской математической школе, используется выражение *теория вероятностей*, в остальных математических школах используют выражение в единственном числе: *теория вероятности*.

В первом периоде развития теории вероятностей задачи решали с помощью комбинаторики, элементы которой были известны ещё за два века до нашей эры. Название этой области математики дал Г. Лейбниц. Он написал (1666) и опубликовал книгу «Рассуждение о комбинаторном искусстве». В этой работе Лейбниц не только изложил всё, что было известно в комбинаторике, но и представил новый класс комбинаторных задач, в которых использовались сочетания и размещения.

С первой половины XVIII в. значительно вырос интерес к теории вероятностей из-за появления страховых компаний и многочисленных лотерей. Леонард Эйлер написал работу «О вероятности последовательностей в генуэзской лотерее». В истории математики описан повод появления этой книги. Прусский король Фридрих II постоянно нуждался в деньгах, поэтому с интересом рассматривал различные проекты пополнения казны. Одним из таких проектов был проект использования генуэзской лотереи, и король консультировался по этому проекту у великого Эйлера.

Первое определение вероятности появилось в 1713 году в книге Якоба Бернулли «Искусство предположений». Определение звучало так:

"Вероятность – это степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому".

Классическое определение вероятности появилось сначала в курсе лекций П. Лапласа, позже в его книгах «Опыт философии теории вероятностей» и «Аналитическая теория вероятностей». Эту работу Лаплас послал Наполеону. Император в это время находился в Витебске и обещал автору, что сразу после взятия Москвы в течение трёх месяцев изучит книгу. Наполеон хорошо знал и любил математику. Он высоко оценил труд Лапласа, но был удивлён, что в книге он не нашёл упоминание о Боге. Лаплас в ответном письме сообщил: "Для описания вероятности мне Бог не понадобился".

ТЕРМИН

Латинское terminus – *межа, граница, конец*. Слово, которое является названием определённого понятия.

ТОЖДЕСТВО

Равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого равны при любых значениях переменных. Знак тождества $\equiv$ впервые использовал немецкий математик Б. Риман (1857).

ТОПОЛОГИЯ

Происходит от двух греческих слов $\tau o \pi o \varsigma$ – *место* и $\lambda o \gamma o \varsigma$ – *закон.*

Топология – раздел геометрии, посвящённый качественному исследованию тех свойств геометрических фигур, которые не зависят от числовых характеристик: расстояний, углов, площадей и объёмов.

Немецкий математик И. Листинг написал (1847) книгу «Предварительные исследования по топологии». Это была первая работа по новому разделу геометрии. Интерес к топологии значительно возрос благодаря книге «Топология» (1930) американского математика Соломона Лефшеца. Большой вклад в развитие топологии внесли Г. Кантор, Ф. Хаусдорф и А. Пуанкаре.

С 1925–1975гг. топология стала одной из самых бурно развивающихся разделов математики. Общая теория топологии всестороннее развивалась группой учёных, включая знаменитых российских математиков П. Александрова и П. Урысона.

Топология очень молода, но её истоки начинаются с трудов древних греков: Платона, Евклида, Архимеда.

Есть наиболее общее определение топологии, которое использует главное понятие в топологии – непрерывность. Топология – это раздел математики, изучающий такие свойства поверхностей и форм, которые остаются неизменными при их непрерывной деформации.

Основные понятия топологии определяются без использования понятий классической геометрии, поэтому топология имеет широкий диапазон применения. Например, сетевая топология используется для обмена информацией между компьютерами.

ТОЧКА

Николай Лобачевский говорил, что это слово происходит от прикосновения отточенного пера, поэтому *точка* означает остриё гусиного пера, которым писали во времена Н. Лобачевского, следовательно, слово образовано от глагола *точить*.

ТРАЕКТОРИЯ

От латинского trajectories – *то, что относится к перемещению.* Траектория – это непрерывная линия, которую описывает материальная точка при своём движении. Термин начали использовать Гюйгенс, И. Бернулли

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ

От латинского transpono – *переставляю*. Термин используется в матричной алгебре. Транспонирование матрицы – это поворот всех строк матрицы на 90^o по часовой стрелке. Все строки после этого становятся столбцами.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО

Слово *трансцендентное* произошло от латинского transcendere – *выходящий за пределы опыта, недоступный познанию.* Числа, не являющиеся корнями алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами, называются трансцендентными числами. Например, числа π и e.

ТРАПЕЦИЯ

От греческого слова $\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\omega\nu$ – *столик*; на латинском – *trapezium*.

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Такой треугольник образован группами чисел, расположенных сверху вниз. Боковые стороны треугольника содержат только единицы. Количество чисел в каждой группе на единицу больше, чем в вышележащей строке. Каждое число, расположенное внутри треугольника, равно сумме ближайших к нему двух чисел, из предыдущей строки. Интересно, что любая строка этого треугольника является последовательностью коэффициентов бинома Ньютона (рис. 11)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Рис. 11

ТРИВИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Слово *тривиальный* от латинского *trivialis* – *обыкновенный.* Тривиальное решение – это нулевое решение некоторой математической задачи.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Слово произошло от двух греческих слов $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\nu$– *треугольник* и $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ – *меряю*. Тригонометрия появилась в глубокой древности вместе с астрономией. Есть два вида тригонометрии: плоская и сферическая.

Ещё до новой эры египетские и вавилонские учёные могли предсказывать солнечные и лунные затмения, значит, они владели знаниями из тригонометрии. В Греции тригонометрию использовал известный астроном Аристарх Самосский. Ко второму веку до н. э. накопились большие ряды астрономических наблюдений, а для научного анализа таких рядов нужны были тригонометрические таблицы. Первые из них составил греческий астроном Гиппарх.

Важный вклад в развитие тригонометрии внесла индийская математика в период V–XII вв. н. э. Математик Брахмагупта в VII веке открыл теорему синусов. Индийские математики составили таблицу синусов. Они знали соотношения, которые в современных обозначениях пишутся в виде:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha).$$

Математика в течение всей своей истории очень тесно связана с астрономией. Поэтому многие математики одновременно занимались и астрономией. Таджикский математик и философ Омар Хайям (1079) составил новый календарь с помощью тригонометрии и астрономии. Ошибка величиной в одни сутки накапливалась в этом календаре за 4500 лет. Календарь Хайяма был персидским календарём до 1925 г. Его использовали в XVIII веке во Франции для составления своего календаря.

Знаменитый узбекский учёный М. Улугбек организовал в Самарканде научные школы и построил обсерваторию, оборудованную на высочайшем уровне. В ней работали математики и астрономы. Они разработали новый способ составления тригонометрических таблиц. Значения синусов и тангенсов давались в таких таблицах с шагом в одну секунду.

Среднеазиатский философ, астроном и математик ал-Бируни из Хорезма доказал теорему косинусов. Он был первым учёным Средней Азии, который считал, что Земля движется вокруг Солнца, и сказал об этом за 600 лет до Коперника.

Арабские учёные обобщили труды предшественников и к XIII веку построили тригонометрию независимо от астрономии. Первое изложение такой тригонометрии написал азербайджанский математик и астроном Насир ад-Дин Туси.

Научные работы по тригонометрии в Западной Европе относятся только к XV веку. Виет (1579) написал книгу, в которой представил первое в Западной Европе системное изложение методов решения треугольников с помощью тригонометрии, первый применил алгебраические преобразования в тригонометрии и вывел формулы для вычисления

$$\sin(n\alpha) \text{ и } \cos(n\alpha) \text{ при } n < 10.$$

Дальнейшее развитие тригонометрии связано с Эйлером. Он первый определил тригонометрические функции, открыл связь между тригонометрическими и показательными функциями. С помощью Эйлера стали использовать современные обозначения $\sin x,\ \cos x,\ tg\ x, ctg\ x$ и формулы приведения. Аналитическое построение теории тригонометрических функций было начато Эйлером, завершил этот труд Н. Лобачевский.

Некоторые математики ещё до Эйлера рассматривали тригонометрические соотношения в единичном круге, но с помощью авторитета Эйлера единичный круг вошёл в тригонометрию раз и навсегда.

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА

В V до н.э. появились задачи на построение, которые не удавалось решить с помощью циркуля и линейки. Одна из таких задач – трисекция угла. Суть задачи: разделить заданный угол на три равные части с помощью циркуля и линейки. Французский математик П. Ванцель (1837), доказал, что эта задача не может быть решена.

У

УДВОЕНИЕ КУБА

Это название одной из трёх знаменитых древнегреческих задач на построение. Постановка задачи такова. С помощью циркуля и линейки построить куб, объём которого в два раза больше заданного куба. Задачу об удвоении куба ещё называют делосской проблемой. С ней связана следующая легенда.

Однажды на острове Делос вспыхнула эпидемия чумы. Испуганные жители острова обратились за советом к жрецу. Тот ответил, что надо удвоить золотой жертвенник, который имел форму куба. Мастера Делоса сделали ещё один куб и поставили его на первый. Новый жертвенник имел вдвое больший объём, но не был кубом. Чума не прекращалась. Жрец сказал, что поставленная задача не решена.

Жители Делоса обратились к Платону. Великий философ ответил: "Боги недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией". Платон сам не знал решения этой задачи. Позже её приближённо решил Архит – друг Платона. Математик и философ Рене Декарт доказал (1637), что задача удвоения куба не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

УЗЕЛ

Неподвижные точки на числовой оси называются узлами.

УРАВНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, слагаемые которого содержат производные некоторой функции $y(x)$. Наличие хотя бы одной производной обязательно, а сама функция $y(x)$ и её аргумент могут отсутствовать в уравнении. В общем виде дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Если при подстановке в исходное дифференциальное уравнение функции $y(x)$ и её производных $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ уравнение становится тождеством во всей области задания аргумента, тогда функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения.

Фундамент теории дифференциальных уравнений заложили братья Бернулли, Эйлер и Лагранж. Отметим здесь три удивительно красивых метода решения таких уравнений, разработанных этими гениями.

1. Построение решения неоднородного линейного уравнения первого порядка. методом Я. Бернулли

$$y'(x) + p(x)y = q(x).$$

Формула решения такого уравнения имеет очень интересный вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}\, q(x)dx \quad + C\right).$$

2. Метод Эйлера для решения однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$p_1 y''(x) + \ p_2 y'(x) + p_3 y(x) = 0.$$

Этот метод является одним из самых простых и элегантных методов.

3. Построение решения неоднородного линейного уравнения методом Лагранжа. Этот метод решения часто называют методом вариации произвольных постоянных.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

УСТОЙЧИВОСТЬ

Способность сохранять своё положение при воздействии внешних условий. Слово происходит от старославянского *стояти.*

Устойчивость относительно начальных данных

В вычислительной математике для любого численного метода и соответствующего алгоритма вводится следующее требование. Маленькая погрешность $|\delta b|$ в начальных данных должна приводить к малой погрешности $|\delta r|$ результата решения.

Численный метод и алгоритм решения, удовлетворяющие такому требованию, называются устойчивыми относительно начальных данных. В противном случае и метод, и алгоритм – неустойчивы.

Для устойчивого численного метода справедливо неравенство

$$|\delta r| \le C|\delta b|, \text{ где } C\text{–}const.$$

Если постоянная C велика, устойчивость будет только формальной. Тогда в процессе решения задачи могут возникнуть неустранимые большие погрешности. В этом случае говорят о слабой устойчивости**.**

Теория устойчивости движения

Великий русский математик А. Ляпунов – создатель общей теории устойчивости движения (1892). До него пытались создать такую теорию английские учёные Томсон и Тэт, французский математик. Пуанкаре и русский механик Жуковский. Создание теории устойчивости движения принесло Ляпунову всемирную известность. В настоящее время теорию Ляпунова используют в авиации, кораблестроении и космонавтике.

Ф

ФАЗА

От греческого $\varphi\alpha\sigma\iota\varsigma$ *– появление.* Встречается в тригонометрии, например,

$y(t) = \sin(\alpha t + \beta)$; величина β называется фазой.

ФАКТОРИАЛ

От английского *factor – множитель.* Термин ввели в 1800 г.

Обозначения у факториала были разные. Только в 1916 г. совет Лондонского математического общества предложил принять обозначение $n!$ и читать его так: *n-восхищение.* Но всё математическое сообщество читает обозначение

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad \text{как } n\text{-факториал.}$$

ФИГУРА

Латинское слово *figura* – образ, *внешний вид, очертание предмета*. В русском языке слово стали использовать в конце XVII века.

Геометрическая фигура

Некоторое объединение множества точек плоскости или пространства.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Слово философия образовано от двух греческих $\varphi\iota\lambda o$ – *люблю* и $\sigma o\varphi\iota\alpha$ – *мудрость.* Изобретение этого слова приписывают Пифагору. Он считал себя любителем мудрости, поэтому говорил о себе $\varphi\iota\lambda o\sigma o\varphi o\varsigma$ – *любомудр.*

Философия математики – это раздел философии, в котором исследуются логические и методологические основания и проблемы математики, а также принципы математики в целом.

ФОКУС

Латинское слово *focus* – *очаг; камин.* Термин ввёл в науку И. Кеплер. Предполагают, что слово *focus* появилось как перевод арабского термина, который означал *место зажигания.*

Фокальная ось – это прямая, на которой лежат фокусы эллипса или гиперболы.

ФОРМУЛА

Исторически это слово имело геометрический смысл. Его корень *forma.*

Приведём несколько примеров знаменитых и полезных формул.

Формула Байеса

Равенство

$$P\left({}^{H_i}/_{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left({}^{A}/_{H_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left({}^{A}/_{H_i}\right)}$$

вывел английский священник и математик Т. Байес (Бейес), поэтому формула носит его имя. Она была опубликована в 1763 г. С помощью этой формулы можно пересчитать вероятности гипотез после того, как в результате опыта появилось событие A. Формула имеет следующее применение.

Предположим, что есть полная группа несовместных гипотез появления события A. Каждая гипотеза имеет свои априорные вероятности. После опыта получили первую информацию о вероятности события A. С помощью этой вероятности проводят первую коррекцию вероятностей гипотез, т.е.

заменяют априорные вероятности гипотез на апостериорные. Если опыты можно повторять, то по мере получения новой коррекции будет изменяться предположение о верности той или иной гипотезы.

Формула Байеса находит всё более широкое применение в решении задач, связанных с недостаточной информацией в экономике и промышленности. С помощью этой формулы корректируют различные решения и планы. Корректировка происходит по мере поступления и накопления информации.

Формула Муавра

Английский математик А. Муавр вывел формулу для возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha);\ (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

Формулы Эйлера

Для любого выпуклого многогранника верно равенство

$$V - E + F = 2,$$

где V – число вершин, E – число рёбер, F – число граней.

Многие математические открытия, изложенные неточно и неясно, вошли в математику только с помощью Эйлера. Он всегда доводил изученный материал до полной строгости и ясности. Такой случай произошёл со знаменитой формулой Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

выведенной молодым неизвестным математиком Р. Коутсом. Он прислал вывод этой формулы (1714) великому Эйлеру, с его помощью с 1748 г. формулу стали успешно использовать.

ФРАКТАЛ

Термин произошёл от латинского прилагательного *fractus – фрагментарный, состоящий из фрагментов*. Последний слог термина *фрактал* связан со словом *алгоритм*. Термин ввёл в математику (1975) французский учёный польского происхождения Бенуа Мандельброт.

Мандельброт является создателем нового направления в математике – фрактальной геометрии. Он так определил своё изобретение: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому". Он был убеждён, что у геометрии природы фрактальное лицо.

Математическое понятие *фрактал* можно описать и другими словами. Фрактал – фигура, которая обладает свойством самоподобия.

Объект называется самоподобным, если его части похожи на его целое. Количество повторяющихся частей у фрактала может стремиться к бесконечности. Более простым является ещё одно определение.

Самоподобной называют такую фигуру, которую можно разрезать на конечное или бесконечное число фигур, подобных исходной.

Простейшие самоподобные фигуры: квадрат, правильный треугольник.

Предшественниками в исследованиях Мандельброта были французские математики Г. Жюлиа и П. Фату (1919).

У многих объектов в природе выявляется фрактальная структура. Таки- ми объектами являются: ветви деревьев, человеческая система кровообра- щения, строение брокколи, подсолнуха, папоротника и др.

Фрактальную структуру имеют горные массивы, коралловые рифы, морские раковины, береговые линии, сталагмиты, сталактиты, молнии, снежинки, формы облаков, трещины на поверхности иссохшей почвы и др. Фракталы обнаружились в музыкальных произведениях Баха и Бетховина; на полотнах художника Леонардо да Винчи.

При создании фрактальной геометрии Мандельброт работал в фирме IBM на лучших для того времени компьютерах. Он использовал рекуррентные формулы и соответствующие им алгоритмы для построения удивительно интересных графических образов фракталов.

Фракталы используют для описания роста таких морских организмов, как кораллы и губки. В медицине фракталы помогают моделировать деятельность мозга. С помощью исследований Мандельброта открывают и будут открывать много нового в математике и окружающем нас мире.

В качестве примеров представлены два простейших фрактала. Первый называется драконом, второй – салфетка Серпинского (рис. 12).

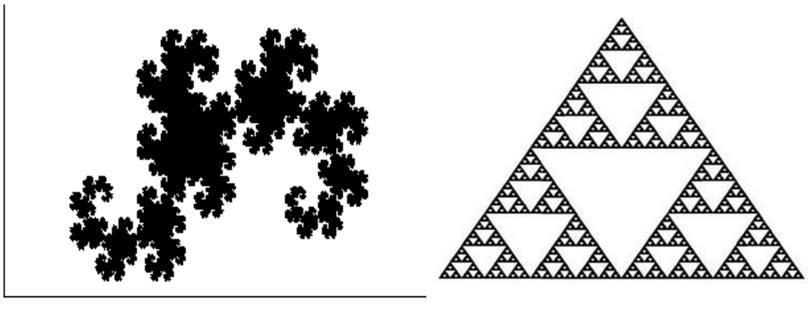


Рис. 12

ФУНКЦИОНАЛ

Математическое понятие раздела математики «Вариационное исчисление». Есть два определения этого термина.

1. Функционалом называется взаимно однозначное соответствие между функциональным множеством и числовым множеством.

2. Функционал – это оператор, который отображает пространство функ- ций в числовое множество. Областью определения функционала является множество функций, а область изменения функционала – это числовое множество. В качестве примера функционала можно привести оператор интегрирования по области и оператор дифференцирования функции в данной точке.

ФУНКЦИЯ

Латинское слово *functio – свершение, исполнение*.

Важную роль в развитии этого понятия сыграли в Средние века натурфилософские школы Оксфорда и Парижа.

Слово *функция* в виде математического термина появилось впервые у Лейбница (1673). Позднее И. Бернулли определил функцию как переменную величину, заданную аналитическим выражением.

Эйлер считал, что функция – это некоторая зависимость одной величины от другой. Он ввёл неявно заданные функции и параметрически заданные функции. Определил функции, зависящие от нескольких переменных.

Аналитическая функция

Со времён Лагранжа функцию называют аналитической в области, если она бесконечно дифференцируема и раскладывается в этой области в сходящийся ряд Тейлора.

Гармоническая функция

Функцию нескольких переменных называют гармонической, если она дважды непрерывно дифференцируема в некоторой области и сумма всех её вторых частных производных равна нулю в этой области.

Гладкая функция

Эта функция, имеющая непрерывную хотя бы первую производную. Порядок гладкости функции равен порядку её непрерывной производной.

Элементарная функция

Это явно заданная функция, представленная одним аналитическим выражением, которое составлено с помощью конечного числа четырёх арифметических действий и операций: возведения в степень, логарифмирования и конечных композиций из простейших элементарных функций. К простейшим элементарным функциям относятся: степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции.

Х

ХАОС

От греческого $\chi\alpha o\varsigma$ *– пустота, пропасть, бездна, полный беспорядок*.

В древнегреческой мифологии и философии – неорганизованная стихия, которая существовала в мировом пространстве задолго до известного человеку мира. Для современного человека это слово также означает полную беспорядочность и непредсказуемость.

Французский математик, физик, астроном и философ А. Пуанкаре считал, что движение объектов Солнечной системы хаотично, но процесс хаотичности настолько незначительный, что непредсказуемы только те изменения, которые произойдут через десятки миллионов лет.

Первым, кто попытался определить понятие хаоса с математической точки зрения, был математик Бенуа Мандельброт. Математикам удалось построить модель хаоса и теорию такого явления (2019). Одним из создателей этой теории был американский математик и метеоролог Э. Лоренц.

Теория хаоса

Теория хаоса – это математический аппарат, описывающий поведение тех нелинейных динамических систем, которые зависят, в определённых условиях, от хаотических явлений. Для изучения таких систем используют и различные математические методы, и компьютерное моделирование.

Теория хаоса помогает обнаружить в хаотических системах устойчивые закономерности, необходимые для прогнозов поведения этой системы.

Исследования в области метеорологии показали, что атмосферные процессы также содержат хаотичность. Отсюда следует, что прогноз погоды более чем на 5 дней не всегда может быть достоверным.

Теория хаоса используется в физике, химии, биологии, социологии и др.

ХАРАКТЕР

Греческое $\chi\alpha\rho\alpha\chi\tau\eta\rho$ – *черта; особенность; главное качество*.

В математике этот термин впервые использовал Гаусс.

ХОРДА

От греческого $\chi o\rho\delta\eta$ – *струна*. Отрезок, соединяющий две точки кривой.

Ц

ЦЕНТР

От греческого слова $\chi\varepsilon\nu\tau\rho o\nu$, которое обозначало палку с заострённым концом. Такой палкой подгоняли быков. Позднее слово обозначало ножку циркуля, помещённую в центр окружности.

ЦИКЛ

Греческое $\chi\acute{\upsilon}\chi\lambda o\varsigma$ – *круг; нечто законченное*. Первым в математике этот термин использовал французский математик (XIX в.) Э. Лагерр. В программирование его ввела (1843) Ада Байрон – первый в мире программист.

ЦИЛИНДР

От греческого $\chi\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma$ – *валик*. Слово встречается у Евклида.

ЦИФРА

Индийские математики называли словом *сунья – пустой* знак отсутствия некоторого разряда в числе. На арабском языке слово *пустой* звучит как *сифр. В* европейской культуре это слово зазвучало как *цифра* и означало нуль. Значительно позже этим словом стали называть все числовые знаки.

Выражение *арабские цифры* неверно, так как все современные цифры придумали в Индии. В Европе эти цифры ввёл французский математик Герберт. Он больше известен как папа Сильвестр II.

Арабские цифры появились в России при Петре I. В 1703 г. была издана книга математика Л. Магницкого с описанием арабских цифр и сопоставлением их со старой российской системой счёта.

С помощью этой книги арабские цифры достаточно быстро вошли в жизнь России.

Ч

ЧИСЛА ФИБОНАЧИ

Числовая последовательность, составленная по рекуррентной формуле:

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ при $a_0 = a_1 = 1$; это числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

ЧИСЛОВАЯ ОСЬ

Во второй половине XVI в. итальянский математик Бомбелли и фламандский математик Стевин предложили геометрическую интерпретацию действительных чисел с помощью числовой оси.

ЧИСЛО ПРОСТОЕ

Выражение является переводом с латинского *numeri prime.*

Время возникновения простого числа неизвестно. Евклид доказал, что количество простых чисел бесконечно.

Эйлер первый изучил распределение простых чисел. Он ввёл обозначение $\pi(x)$ – это количество простых чисел, меньших числа x и доказал, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Гаусс нашёл (1849) приближение

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x}.$$

Французский математик Лежандр (1863) уточнил результат Гаусса, получив асимптотическое равенство

$$\frac{\pi(x)}{x} \approx \frac{1}{\ln x - 1{,}08366}.$$

Справедливость этого равенства удалось доказать в 1948 году.

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Для хорошо известных числовых множеств обычно используются следующие стандартные обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{C}$ – множество комплéксных чисел;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{Z}_0$ – целые числа $\geq$ 0;
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел; $\mathbb{Q}_+$ – рациональные числа >0;
$\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел; $\mathbb{I}_+$ – иррациональные числа >0;
$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел; $\mathbb{R}_+$ – действительные числа >0.

Ш

ШКОЛА ПИФАГОРА

Эта школа появилась после переезда Пифагора в небольшой итальянский город (полис) Кротон, расположенный на юге Апеннинского полуострова. Учеников и последователей школы Пифагора называли пифагорейцами. Они впервые ввели в математику понятие *доказательство* – цепь рассуждений, приводящих неочевидные утверждения к очевидным. В школе родилась идея аксиоматического метода; открыта несоизмеримость, которая стала главным достижением школы Пифагора.

Э

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

От двух латинских слов *aequus – равный, valens – сильный.*

Эквивалентные бесконечно малые

Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными в окрестности точки x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x)/\,\beta(x) = 1.$$

Эквивалентные матрицы

Элементарные преобразования матрицы преобразуют её в другую матрицу, которая называется эквивалентной исходной.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся: перестановка местами строк, умножение любой строки на отличное от нуля число, удаление нулевой строки, замена любой строки на сумму других строк.

ЭКСПОНЕНТА

Латинское слово *exponenet – показатель* введено для показателя степени (1553). Лейбниц ввёл понятие *экспоненциальная функция.*

ЭКСТРЕМУМ

Латинское *extremum – крайний, последний*. Французский математик Раймон первый назвал точки максимума и минимума точками экстремума.

Число x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$ с областью определения X, если существует такая δ окрестность точки x_0, что для всех значений x из окрестности $(x-\delta; x+\delta) \in X$ верно неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

Число x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$ с областью определения X, если существует такая δ окрестность точки x_0, что для всех значений x из окрестности $(x-\delta; x+\delta) \in X$ верно неравенство

$$f(x) > f(x_0).$$

ЭФФЕКТ БАБОЧКИ

Так в математике называют гипотетический эффект от взмахов крыльев бабочки в Китае, которые могут привести к урагану на побережье США.

Эффект бабочки придумал американский математик и метеоролог Эдвард Лоренц – один из авторов теории хаоса. Это наилучший пример того, как крошечное возмущение величины давления воздуха, ничтожное по сравнению с системой "Земля и погода на ней", может вызвать гигантские и неожиданные изменения в удалённом на многие тысячи километров месте Земного шара.

Я

ЯКОБИАН

Определитель J

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

называется якобианом. Его элементами являются частные производные от следующих дифференцируемых функций нескольких переменных

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ \cdots;\ y_1 = y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Этот определитель ввёл в математику знаменитый немецкий математик, профессор Берлинского университета К. Якоби. Английский математик Джемс Сильвестр назвал такой определитель якобианом.

После известной статьи К. Якоби «О построении и свойствах определителей» (1841) теория определителей стала широко применяться в различных областях математики.

Якобианы используются в тех случаях, когда для вычисления интеграла необходимо совершить переход из одной системы координат в другую.

Например, при переходе из декартовой системы координат в полярную используется якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix}.$$

Переход двойного интеграла из декартовой системы координат в полярную записывается в виде

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho(\alpha)}^{\rho_2(\alpha)} f(\rho,\alpha)\,|J|d\rho d\alpha.$$

Декартова и полярная системы координат связаны простыми соотношения-ми:

$$x = \rho\cos\alpha\ , y = \rho\sin\alpha\ ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\alpha\,;\ \frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\alpha\ ;\ \frac{\partial x}{\partial\alpha} = -\rho\sin\alpha\ ;\ \frac{\partial y}{\partial\alpha} = \rho\cos\alpha\ .$$

Строим якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\rho\sin\alpha & \rho\cos\alpha \end{vmatrix} = \rho.$$

В полярной системе координат интеграл приобретает следующий вид

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int\limits_{\rho(\alpha)}^{\rho_2(\alpha)} f(\rho,\alpha)\,\rho d\rho d\alpha.$$

Легко проверить. что в цилиндрической системе координат якобиан имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\rho\sin\alpha & \rho\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь справочник. Изд. 3-е, испр. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 248 с.

2. Волошинов А.В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. Изд. 2-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 227 с.

3. Гомес Ж. Когда кривые искривляются. Неевклидова геометрия./ Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

4. Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б. ОБ Обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 160 с.

5. Гусев И.Н. Математика. (100 гениальных идей, о которых должен знать каждый образованный человек).– Москва: Издательство АСТ, 2018. – 208с.

6. Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик: Пер. с французского. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 112 с.

7. Деменюк С.Л. Супер фрактал. – СПб.: ООО «Страта», 2015. – 196 с. История мира через призму математики.

8. Земляков А.Н. Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс; Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 320 с.: ил.

9. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Изд. 2-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 224 с.

10. Корбалан Ф. Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

11. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – Пер. с англ. Ш. Мартыновой. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.

12. Лонэ М. Большой роман о математике: история мира через призму математики [перевод с французского] – Москва: Эксмо, 2020 – 416 с. – (Бомборий. Новый элемент знаний).

13. Микишина А.Н., Орлов В.Б. Толковый математический словарь. Основные термины: около 2500 терминов. – Рус. яз., 1989. – 244 с., 186 ил.

14. Новиков Ф.А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения.– СПб.: Питер, 2014. – 432 с.: ил. – (Серия «Учебник для вузов»).

15. Петров Ю.П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 445 с.: ил.

16. Полякова Т.А. Леонард Эйлер и математическое образование в России. – М.: КомКнига, 2007. – 184 с.

17. Сабрукова М.Н. Лекции о живой математике. Часть 1. – Севастополь: Издатель Карпин, 2003. – 96 с., ил.

18. Садовничий В.А. Размышления математика и ректора. Избранные выступления/ В.А. Садовничий. – Москва: Издательство Московского университета, 2021. – 392 с.

19. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Издательство «Наука», 1969 – 328 с. ил.

20. Стюарт И. Величайшие математические задачи. – Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015. – 460 с.

21. Успенский В.А. Апология математики: [сборник статей]. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2009.– 554 с. – (серия «Новая эврика»).

22. Ушаков И.А. История науки сквозь призму озарений Кн. 2: Сначала было число. М.: Книжный дом. «ЛИБРОКОМ», 2009. – 208 с.

23. Ушаков И.А. История науки сквозь призму озарений Кн. 3: Колдовство геометрии. М.: Книжный дом. «ЛИБРОКОМ», 2009. – 168 с.

24. Ушаков И.А. История науки сквозь призму озарений Кн. 4: От арифметики до алгебры: Таинственная страна Аль- Джебра.– М.: Комкнига, 2010. – 144 с.

25. Федин С.Н. Математики тоже шутят. Изд.3-е испр. и доп. – М.: Книжый дом «ЛИБРОКОМ», 2010.– 2016 с.

26. Филинова О.Е. Математика в истории мировой культуры: Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям в области информационной безопасности. – М.: Гелиос АРВ, 2006.–.224 с.

27. Шапира Х. Восемь этюдов о бесконечности (пер. с англ. Д.А. Прокофьева). – М.: Колибри, Азбука-Аттикус, 2021.– 336 с.: ил.

28. Шумихин С., Шумихина А. Число Пи. История длиною в 4000 лет. – М.: Эксмо, 2011. – 192 с. – (Тайны мироздания).

29. Математический Петербург. История наука, достопримечательности / Ред.-сост. Г.И. Синкевич, науч. ред. А.И. Назаров – 2-е., изд. и доп. – СПб.: Образовательные проекты, 2018. – 336 с.

Приложение 1

О МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИКАХ

Гордиться славою своих предков
не только можно, но и должно.
А.С. Пушкин

Абель Нильс (1802–1829) – великий норвежский математик.

"Геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах".

Александров Александр (1912–1999) – выдающийся российский математик-геометр. Его считают первым геометром XX века. Александров 12 лет был ректором знаменитого ленинградского университета (ЛГУ).

"Человечность, ответственность и надёжность. Таковы составляющие учёного".

"Теоремы геометрии – это аналог законов природы; они были установлены эмпирически ещё в древности".

"**Арнольд Владимир** (1937–2010) – известный российский математик, академик.

"Роль математики в современном обществе если и изменилась, то в сторону увеличения её значимости".

Архимед (287–212 до н. э.) – величайший греческий учёный.

"Структура мироздания основана на математике".

Банах Стефан (1892–1945) – знаменитый польский математик, один из создателей функционального анализа.

"Математика – самое прекрасное и самое могущественное произведение человеческого духа".

Вашингтон Джордж (1732–1799) – первый президент США.

"Будущих политиков хорошо бы учить математике и философии".

Галилей Галилео (1564–1642) – великий итальянский учёный.

"Учёные должны прислушиваться к самой природе, а ключ к расшифровке языка Вселенной – это математические соотношения".

Гамильтон Вильям (1805–1865) – знаменитый ирландский учёный – математик, механик, физик и астроном. Член-корреспондент Российской академии наук.

"Я всегда старался внести в моё научное развитие что-то от духа поэзии и чувствовал, что это оказывает положительное влияние на интеллектуальное совершенство".

Гильберт Давид (1862–1943) – выдающий немецкий математик, почётный иностранный член Академии наук СССР.

"Математика есть единая симфония бесконечного". Гильберт был убеждён в единстве математики и естествознания.

Гнеденко Борис (1912–1995) – знаменитый российский математик второй половины XX века, работавший в области теории вероятностей. Он уделял большое внимание методике математического образования студентов разных специальностей.

"Знание истории математики важно для развития интереса к самой математике и для воспитания научного мировоззрения".

"Абстрактный характер современной математики является одной из наиболее сильных её сторон. Благодаря этому результаты, достигнутые в математике, успешно используют в большом числе далёких по содержанию и не связанных между собой задач".

Даламбер Жан (1717–1783) – знаменитый французский математик, механик и философ.

"Алгебра щедра. Зачастую она даёт больше, чем у неё спрашивают".

Дарвин Чарльз (1809–1882) – знаменитый английский натуралист.

"У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных".

Дедекинд Рихард (1831–1916) – известный немецкий математик-алгебраист, ученик Гаусса, член Берлинской академии наук.

"Числа – вольное творение человеческого разума".

Дирак Поль (1902–1984) – английский физик, лауреат Нобелевской премии, иностранный член Академии наук СССР.

"Если Бог есть, то он великий математик".

Декарт Рене (1596–1650) – великий французский математик и философ.

"Я мыслю, следовательно, я существую".

Дюрер Альбрехт (1471–1528) – великий немецкий художник и график эпохи Возрождения. Автор первого немецкого учебника по геометрии.

"Геометрия – это основа всей живописи".

Кантор Георг (1845–1918) – гениальный немецкий математик, создатель теории множеств.

"Суть математики целиком и полностью в её свободе".

"Математика – самое прекрасное и самое могущественное произведение человеческого духа".

Канторович Леонид (1912 – 1986) – выдающийся российский математик, создатель нового направления в математике линейного программирования. Единственный математик, получивший нобелевскую премию за работы по экономике.

"Моё главное призвание не в своих научных достижениях, а в том, чтобы творить и делать добро для людей".

У Леонида Витальевича Канторовича было кредо, которое он выразил в одной очень сильной фразе: "У учёного есть право и обязанность говорить правду".

Келдыш Мстислав (1911–1978) – выдающийся специалист в области прикладной математики. Возглавлял 15 лет Академию наук СССР.

Эпоху Келдыша называют "золотым веком" Российской науки. Келдыш– великий человек и не менее великий учёный. Вся его жизнь была посвящена развитию и процветанию науки в России.

"Математика, являясь самой древней из всех наук, вместе с тем остаётся вечно молодой".

Клайн Морис (1908–1992) – американский математик. Хорошо известны его работы по истории, философии математики и проблемам математического образования.

"Математика была и остаётся высшим интеллектуальным достижением и наиболее оригинальным творением человеческого духа. Музыка может возвышать или умиротворять душу, философия – удовлетворять потребности разума, инженерное дело – совершенствовать материальную сторону жизни людей. Но математика способна достичь всех этих целей. Если же говорить о возможностях человеческого разума, то математики немало потрудились, чтобы доказать, сколь высокую надёжность результатов способен обеспечить человеческий разум. Математика по-прежнему остаётся эталоном самого надёжного и точного знания, которого мы только в состоянии достичь".

Колмогоров Андрей (1903–1987) – выдающийся российский математик, академик. В мировом математическом сообществе Колмогорова считали уникальным явлением русской культуры и национальным достоянием России. Коллеги Колмогорова называли его человеком Возрождения. Он был и великим эрудитом, и великим математиком-энциклопедистом, который оставил после себя не только блестящие математические труды, но и глубокие работы по биологии, истории и стиховедению.

"Достижения математики человечеству оказываются нужными. А нам, математикам, она доставляет внутреннее наслаждение".

Крылов Алексей (1863 – 1945) – выдающийся российский учёный – специалист в области прикладной математики, кораблестроения и механики.

Яркий представитель Петербургской математической школы; блестящий лектор. Своих студентов Крылов напутствовал такими словами:

"Не рассчитывайте, что можно овладеть знаниями без работы. Накапливайте опыт в каждом деле. Помните, что никакое книжное знание ничего не даёт само по себе. Только тот, кто думает над вопросами, которые перед ним ставит сама жизнь, добьётся успехов и принесет пользу делу".

Лаплас Пьер (1749–1827) – великий французский математик и астроном.

"Теория вероятностей – это не что иное, как здравый смысл, сведённый к вычислениям".

Лейбниц Готфрид (1646–1716) – великий немецкий учёный и философ.

"Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти сочетание бытия с небытиём".

"Без математики невозможно проникнуть вглубь философии. Без философии невозможно проникнуть вглубь математики. Без них обеих невозжоно проникнуть вглубь чего бы ни было".

Леонардо да Винчи (1452 – 1519) – один из титанов эпохи Возрождения, художник и изобретатель.

"Художнику необходима математика в его искусстве".

Лобачевский Николай (1792 – 1856) – гениальный математик России.

Признание геометрии Лобачевского в математическом мире пришло только в 1868 году. Молодой английский математик Клиффорд понял новые идеи геометрии Лобачевского, активно их пропагандировал, ставил русского гения рядом с Коперником и считал геометрию Лобачевского революцией в понимании строения космоса.

На протяжении многих лет Лобачевский был весьма успешным ректором казанского университета. Много размышлений о воспитании представлено в его ректорском выступлении:

"Жить – значит чувствовать, наслаждаться жизнью, постоянно чувствовать новое, которое напоминало бы, что мы живём. Будем дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинства. Примеры истории, понятия чести и любви к отечеству, заранее заложенные с юности, дадут благородное направление".

"Воспитание должно пробуждать в человеке все способности ума, все дарования, все страсти, ибо только при этом условии человек поистине живёт".

Ломоносов Михаил (1711–1765) – величайший ум России.

"Математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит".

Лузин Николай (1883–1950) – известный российский математик и знаменитый преподаватель математики в МГУ. Его лекции имели огромный успех у студентов. Он организовал научное студенческое общество "Лузитания", в котором зародилась московская математическая школа.

"Математик изучает свою науку вовсе не потому, что она полезна. Он изучает её потому, что она прекрасна".

Мандельброт Бенуа (1924–2010) – французский математик, создатель фрактальной геометрии.

"У геометрии природы – фрактальное лицо".

Морган Август (1806–1871) – шотландский математик, основатель и 1-ый президент Лондонского математического общества.

"Легче найти квадратуру круга, чем перехитрить математика".

Наполеон I Бонапарт (1769–1821) – император Франции; хорошо знал и любил математику.

"Процветание математики тесно связано с благосостоянием государства".

Ньютон Исаак (1643–1727) – великий английский учёный, физик, математик, механик и астроном.

Ньютон был уверен, что мир сотворён в "соответствии с математическими принципами".

"Задача науки – раскрывать блистательные замыслы творца".

Пифагор Самосский (570 – 490 гг. до н.э.) – выдающийся греческий математик, теоретик музыки и философ.

Современный американский математик М. Клайн так определил роль Пифагора в истории естествознания: "… Пифагорейцам удалось понять и сформулировать два тезиса, справедливость которых подтвердило всё последующее развитие науки:

1. Фундаментальные принципы устройства мироздания можно описать языком математики.
2. Объединяющим началом всех вещей служат числовые отношения, которые выражают гармонию и порядок природы".

Современный американский физик и лауреат Нобелевской премии Юджин Вигнер писал о свойстве математики, который открыл Пифагор:

"Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять".

Почти через 100 лет после смерти Пифагора были выпущены монеты с его изображением и подписью ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ. Это было первое в истории Греции изображение человека на монетах. Пифагор-математик стал первым и пока единственным математиком, удостоенным такой великой чести.

Платон (429–348 до н.э.) – Знаменитый греческий философ и математик, ученик Сократа.

"Геометрия приближает разум к истине".

"Размышления: разговор души с самой собой".

Сильвестр Джозеф (1814–1897) – известный английский математик; иностранный чл.-корр. Петербургской АН.

"Математика – это музыка логики".

Успенский Владимир (1930–2018) – известный российский математик, лингвист и публицист.

"Математика, как и искусство – это особый способ познания".

"Значение математической строгости не надо преувеличивать и доводить до абсурда. Здравый смысл не менее уместен во всякой науке. Во все времена крупные математические идеи опережали господствующие стандарты строгости. Так было с великим открытием 18 века – созданием основ анализа бесконечно малых (б.м.) т. е. основ дифференциального и интегрального исчисления. Само понятие б.м. определялось очень туманно и казалось загадочным. Но, вопреки этому, оно с успехом использовалось в математике для исследования важнейших явлений действительности".

Франклин Бенджамин (1706–1790) – американский учёный и государственный деятель; иностранный член Петербургской академии наук (1783).

"Какая наука может быть более благородна, более восхитительна, более полезна для человечества, чем математика?".

Харди Годфри (1877– 1947) – известный английский математик, почётный член Академии наук СССР.

"Творчество математика в такой же степени является процессом создания прекрасного, как творчество живописца или поэта. Совокупность математических идей, подобно совокупности красок или слов, должны обладать внутренней гармонией. Красота – это первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике".

Штейнгаусс Хуго (1887 – 1972) – известный польский математик, один из создателей львовской математической школы.

"Математики хорошо знают, что их ремесло сродни поэзии".

"Математика представляет собой школу мышления".

Эйнштейн Альберт (1879 – 1955) – великий немецкий физик, создатель теории относительности, лауреат Нобелевской премии.

"Как получилось, что математика – продукт человеческой мысли, независимо от опыта, так прекрасно соотносится с объектами физической реальности"?

Приложение 2

МАТЕМАТИКА С УЛЫБКОЙ

МАТЕМАТИКИ В ОБЩЕНИИ СО СТУДЕНТАМИ

1. Мне чрезвычайно лестно первым познакомить вас с великолепным методом Фурье.

2. Прошу вас освободить кору головного мозга для следующей теоремы.

3. Сегодня предстоит интересная лекция. По крайней мере, для меня.

4. Сами разбирайтесь, верно или нет, моё дело написать.

5. Чтобы вывести эту формулу, мне достаточно спинного мозга.

6. Эти вычисления я провожу в уме, так что вам несложно будет их проверить.

7. Так как ε – любое число, то его можно стереть.

8. Я сейчас покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

9. Вот уже пять минут я ничего не говорю, а вы всё пишите и пишите.

10. Теорема не предвещала ничего опасного, она, казалось, утверждала, что жизнь прекрасна.

11. Полное имя этого объекта – полный дифференциал. Мы назовём его уменьшительно и ласково дифференциалом.

12. Я сейчас или соображу или подсмотрю. Нет, кажется, соображаю.

13. Иногда я делаю ошибки, иногда несу чушь. Но вы должны различать.

14. Ясно, что эта функция бесконечно дифференцируема. Сейчас мы продифференцируем один раз, а дома вы закончите.

15. Это выражение я обозначу буквой звёздочка.

16. Для людей со здоровой психикой кажется, что эти свойства очевидны. Ничего подобного.

17. Я надеюсь, что вы поняли это доказательство. Но не поняли, до чего оно хорошо.

18. Если что не так, у меня это будет описка, а у вас – ошибка!

19. Чей это шарфик? Не ваш? Тогда я им доску вытру.

20. Вычислите производную, а дифференциал вы получите совершенно бесплатно.

21. Если вы получили 5, это не значит, что вы умный. Этот значит, что я невнимательно проверял.

22. Идеальный лектор – это лектор, который одной рукой пишет. А другой стирает написанное.

23. Будем менять знак от минус бесконечности до плюс бесконечности.
24. Забудьте это ещё раз и навсегда.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНЕГДОТЫ И НАБЛЮДЕНИЯ

Экзамен по математическому анализу

Профессор:

– А что Вы будете делать, если я попрошу Вас посчитать сумму ряда?

Студент:

– Я повешусь!

Профессор:

– Правильно, он расходится.

Тонкая разница

Если результат не зависит от способа решения – то это математика, а если зависит – бухгалтерия.

Прыжки в воду

Философу, физику и математику надо было прыгнуть с вышки в круглый бассейн, диаметр которого равнялся одному метру.

Философ вспомнил Сократа, Гегеля, понадеялся на удачу, прыгнул и не попал.

Физик измерил скорость и направление ветра, высоту вышки, всё рассчитал и попал.

Математик построил математическую модель. Написал программу, получил траекторию полёта в бассейн, долго что-то вычислял, потом разбежался, прыгнул и улетел вверх. В знаке ошибся.

Двусмысленный ответ

Диалог на экзамене.

Преподаватель:

– Вы один решили эту задачу?

Студент:

– Нет, при помощи двух неизвестных.

Объяснил

Встречаются физик и математик. Физик спрашивает:

– Почему, когда едешь в поезде, его колёса стучат? Они же круглые!

– Это элементарно, – снисходительно объясняет математик. – Ты же знаешь, что площадь круга равна пи эр квадрат. Квадрат как раз и стучит.

Уточнение

Одного глубоко верующего математика спросили:

– Вы, что же, верите в единого Бога?

– Нет, конечно, – ответил тот, но все Боги изоморфны.

Корни многочлена

Экзамен по алгебре. Профессор просит студента дать определение корня многочлена кратности два. Немного подумав, студент отвечает:

– В общем, так. Это такое число, что если два раза подставить его в многочлен, то получится ноль, а вот если в третий раз подставить его туда же, то ноль уже не получится.

Тонкий психолог

Три студента, математик, физик и психолог, решают следующую задачу по теории вероятностей. Сто раз подбросили монетку, всё время выпадала решка. Что выпадет в 101-ый раз?

Математик уверенно говорит:

– С вероятностью 50% выпадет решка.

Физик:

– Эксперимент показал, что должна выпасть решка.

Психолог:

– Я думаю, выпадет орёл.

– Но почему? – удивились математик и физик.

– Ну, всё время решка да решка. Орлу тоже хочется.

Примирение

– Почему у формулы Ньютона – Лейбница двойное имя?

– Интеграл, как песня. Ньютон написал музыку, а Лейбниц – слова.

Сверх наглость

Его наглость не имела предела, производной и не выражалась через элементарные функции.

Знаток

На вступительном экзамене:

– Назовите несколько простых чисел.

– Один, два, три, четыре.

– Что?! Четыре, по-вашему, – простое число?

– Да куда уж проще!

Лучший момент

Лучший момент в жизни математика – это когда он уже вывел доказательство, но ещё не нашёл у себя ошибку.

Три науки

Математика – это вам не физика, где можно химичить.

Автор

Принцип Арнольда утверждает: "если математическое утверждение носит чьё-то имя, то этот человек – не автор данного утверждения".

Вопрос: кто автор принципа Арнольда?

Божественное деление

Чёрные дыры во Вселенной образовались там, где Бог поделил на ноль.

Сам такой

Преподаватель математики обращается к студентам на семинаре:

– Сколько раз я говорил вам, что не бывает большей или меньшей половины, и всё равно большая половина из вас это так и не усвоила!

Успокоил

Инструктор по прыжкам с парашютом говорит новичкам:

– Главное, не бойтесь этой дурацкой статистики. По статистике не раскрывается только один парашют из тысячи. А вас здесь всего двести человек.

Классификация интегралов

1. *Несобственные* – интегралы, которые списал, *собственные* – сам взял.
2. *Определённые* – интегралы, к которым есть ответ, а *неопределённые*, к которым нет ответа.
3. *Сходящиеся* – интегралы, которые сходятся с ответом, *расходящиеся,* которые не сходятся с ответом.

Бесконечно средние знания

– Что будет, если бесконечно большую величину умножить на бесконечно малую?

– Будет бесконечно средняя!

Дельный совет

Если трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять её хотя бы наполовину.

Студентам на заметку

Варианты ответа на вопрос об отсутствии решений задач из домашнего задания:

1. Я случайно разделил на ноль, и все решения тут же исчезли.
2. Я праздновал день рождения Пифагора.

Притча

Давным-давно жил один математик, звали его Пифагор. Однажды он доказал свою знаменитую теорему. О, как он возрадовался тогда! В благодарность богам он принёс в жертву сто быков. Как же кричали несчастные, как молили о пощаде. Но не сжалился Пифагор.

С тех пор вся скотина и не любит математику.

Проще некуда

Первоклассник спрашивает у отца-математика:

– Папа, я забыл, как пишется восьмёрка.

–Это проще простого, сынок. Возьми знак бесконечности и поверни его на пи пополам.

Приложение 3

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ И ЕГО ПРОИЗНОШЕНИЕ

Буквы	Произношение	Буквы	Произношение
Α α	альфа	**Β β**	бета
Γ γ	гамма	**Δ δ**	дельта
Ε ε ϵ	эпсилон	**Ζ ζ**	дзета
Η η	эта	**Θ θ ϑ**	тэта
Ι ι	йота	**Κ κ**	каппа
Λ λ	лямбда	**Μ μ**	мю
Ν ν	ню	**Ξ ξ**	кси
Ο ο	омикрон	**Π π**	пи
Ρ ρ ϱ	ро	**Σ σ**	сигма
Τ τ	тау	**ϒ υ**	ипсилон
Φ φ ϕ	фи	**Χ χ**	хи
Ψ ψ	пси	**Ω ω**	омега

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ И ЕГО ПРОИЗНОШЕНИЕ В РУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Буквы	Произношение	Буквы	Произношение
A a	а	**N n**	эн
B b	бэ	**O o**	о
C c	цэ	**P p**	пэ
D d	дэ	**Q q**	ку
E e	е	**R r**	эр
F f	эф	**S s**	эс
G g	же	**T t**	тэ
H h	ха	**U u**	у
I i	и	**V v**	вэ
J j	жи	**X x**	икс
K k	ка	**Y y**	игрек
L l	эль	**Z z**	зэт
M m	эм		

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Беликова Галина Иосифовна

Бровкина Екатерина Анатольевна

Зайцева Ирина Владимировна

ТОЛКОВЫЙ И ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 27.12.2024. Формат 60×84/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 15,0. Тираж 26. Заказ 5791.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.