

26  
778  
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды, выпуск 14

# ОБЛАКА, ОСАДКИ И ВОПРОСЫ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

175263

**БИБЛИОТЕКА**  
ЛЕНИНГРАДСКОГО  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

ЛЕНИНГРАД  
1963

Л. Ш. ЛИВШИЦ

К ЗАДАЧЕ О ДИФФУЗИИ ЛЕГКОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

В полуэмпирической теории турбулентной диффузии принимается, что объемная концентрация  $q(x, y, z)$  легких примесей от непрерывно действующего точечного источника производительности  $Q$  г/сек., расположенного на высоте  $H$  в атмосфере, удовлетворяет дифференциальному уравнению.

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial q}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial q}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial q}{\partial z}) + Q \delta(x) \delta(y) \delta(z-H). \quad (1)$$

Здесь  $u$  - скорость ветра, направленного по оси  $Ox$ ;  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  - коэффициенты турбулентности;  $\delta$  - дельта-функция Дирака.

Условие взаимодействия примеси с поверхностью земли записывается в виде

$$K_z \frac{\partial q}{\partial z} = \beta q \quad \text{при } z = 0. \quad (2)$$

$$(\beta = \text{const})$$

Решению задачи о концентрации примеси посвящено много работ (см., например, обзор А.С.Монина "Атмосферная диффузия". Успехи физических наук, т. LXVIII, вып. 1, 1959 г.). В этих работах уравнение (1) решается при условии, что  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ , а также  $u$  пропорциональны некоторым степеням высоты  $z$ , что часто не имеет места. Кроме того, слагаемым  $\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial q}{\partial x})$  все авторы обычно пренебрегают, получая при этом вместо уравнения эллиптического типа уравнение параболического типа.

В настоящей работе этот член уравнения сохраняется и выясняется влияние этого на величину наземной концентрации примеси.

Для  $K_z$  принята модель М.Е.Швеца и М.И.Юдина

$$K_z = \begin{cases} \frac{K_0}{h} z & \text{при } 0 \leq z \leq h, \\ K_0 & \text{при } z \geq h. \end{cases} \quad (3)$$

$K_x$ ,  $K_y$ ,  $u$  считаются постоянными; в граничном условии (2) принято  $\beta = 0$  (условие "отражения"), т.е. считается, что поток частиц через земную поверхность равен нулю

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_z \frac{\partial q}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

После замены

$$\frac{x}{\sqrt{K_x}} = \xi; \quad \frac{y}{\sqrt{K_y}} = \eta; \quad \frac{u}{\sqrt{K_z}} = u, \quad (5)$$

получим уравнение

$$u_1 \frac{\partial q}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial q}{\partial z}) + \frac{Q \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}}. \quad (6)$$

Ищем решение уравнения (6) в виде

$$q(\xi, \eta, z) = e^{\rho z} F(\xi, \eta, z), \quad (7)$$

причем постоянную  $\rho$  выбираем так, чтобы исчез член уравнения, содержащий  $\frac{\partial F}{\partial z}$ . Тогда при  $\rho = \frac{u_1}{2}$  получим уравнение

$$-\frac{u_1^2}{4} F + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial F}{\partial z}) = -\frac{Q \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}}. \quad (9)$$

Перейдем в уравнении (9) к цилиндрическим координатам и будем искать его осесимметричное решение (т.е.  $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ ). Для функции  $F(\rho, z)$  получим уравнение

$$-\frac{u_1^2}{4} F + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial F}{\partial z}) = -\frac{Q \delta(\rho, \varphi) \delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad [\text{следует из условия (4)}] \quad (11)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(\rho, z) = 0 \quad (12)$$

(естественное граничное условие на бесконечности).

Здесь  $\delta(\rho, \varphi)$  - двумерная дельта-функция.

Ищем решение (10) в виде

$$F(\rho, z) = \int_0^{\infty} \tilde{\lambda} J_0(\lambda \rho) \Phi(\lambda, z) d\lambda, \quad (13)$$

где  $J_0$  - функция Бесселя нулевого порядка.

Подставив (13) в (10), получим

$$\int_0^{\infty} \tilde{\lambda} \left[ -\frac{u_1^2}{4} J_0 \Phi + \lambda^2 J_0'' \Phi + \frac{\lambda}{\rho} J_0' \Phi + J_0 \frac{d}{dz} (K_z \frac{d\Phi}{dz}) \right] d\lambda = -\frac{Q \delta(\rho, \varphi) \delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} \quad (14)$$

В силу уравнения Бесселя

$$\lambda^2 J_0'' + \frac{\lambda}{\rho} J_0' = -\lambda^2 J_0. \quad (15)$$

Преобразуем правую часть (10). Известно, что  $\iint \delta(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = 1$ ,  
 (D) охватывает начало координат, следовательно,  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \delta(\rho, \varphi) \rho d\rho =$   
 $= 2\pi \int_0^{\infty} \delta(\rho) \rho d\rho = 1$ , откуда

$$\int_0^{\infty} \delta(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}. \quad (16)$$

[Здесь принято, что  $\delta(\rho, \varphi)$  не зависит от  $\varphi$ , так как мы ищем осесимметричное решение].

Применим к  $\delta(\rho)$  формулу Фурье-Бесселя [2]

$$\delta(\rho) = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda \int_0^{\infty} \mu J_0(\lambda \mu) \delta(\mu) d\mu = J_0(0) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

[воспользовались теоремой о среднем и формулой (16)].

Следовательно, правая часть (14) может быть записана в виде

$$-\frac{Q\delta(\rho)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} = -\frac{Q}{2\pi\sqrt{K_x K_y}} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda \rho) \delta(z-H) d\lambda.$$

Тогда, учитывая (15), после сокращения на  $\lambda J_0$  для функции  $\Phi(\lambda, z)$  получим уравнение

$$-\left(\frac{u_1^2}{4} + \lambda^2\right) \Phi(\lambda, z) + \frac{d}{dz} \left[ K_x \frac{d}{dz} \Phi(\lambda, z) \right] = -\frac{Q\delta(z-H)}{2\pi\sqrt{K_x K_y}} \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{d\Phi}{dz} = 0 \quad (18)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(\lambda, z) = 0. \quad (19)$$

Примем для определенности, что высота излома коэффициента  $K_z$  меньше высоты источника, т.е.  $h < H$ . Тогда уравнение (17) будет иметь различный вид в областях  $0 \leq z \leq h$  и  $z \geq h$ .

1) В области  $0 \leq z \leq h$   $K_x = \frac{K_0}{h} z$ , и уравнение (17) примет вид

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dz} \left( z \frac{d\Phi}{dz} \right) A^2 \Phi = 0, \quad (20)$$

где обозначено

$$A^2 = \frac{1}{K_0} \left( \frac{u_1^2}{4} + \lambda^2 \right). \quad (21)$$

Решение уравнения (20) запишется в виде

$$\Phi(\lambda, z) = C_1 J_0(i\sqrt{z}) + C_2 Y_0(i\sqrt{z}), \quad (22)$$

где

$$\sqrt{z} = 2A\sqrt{h}. \quad (23)$$

Так как функция  $Y_0$  имеет при  $z = 0$  логарифмическую особенность, то для выполнения условия (18) необходимо взять  $C_2 = 0$ . Следовательно, в области  $0 \leq z \leq h$  решением (17) будет

$$\Phi(\lambda, z) = C_1 I_0(\beta \sqrt{z}) \quad (24)$$

( $I$  - функция Бесселя от чисто мнимого аргумента).

2) В области  $z \geq h$   $K_z = K_0$ , и уравнение (17) примет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \lambda^2 \Phi = - \frac{Q}{2\pi K_0 \sqrt{K_x K_y}} \delta(z - h). \quad (25)$$

Решение этого уравнения дает функция Грина, которая с учетом условия (19) может быть записана в виде

$$\Phi(\lambda, z) = \begin{cases} e^{-\lambda h} (c_3 e^{-\lambda z} + c_4 e^{\lambda z}) & \text{при } h \leq z \leq H, \\ e^{-\lambda z} (c_3 e^{-\lambda h} + c_4 e^{\lambda h}) & \text{при } z \geq H. \end{cases} \quad (26)$$

Из условия, что скачок производной решения при  $z = H$  равен

$$-\frac{Q}{2\pi K_0 \sqrt{K_x K_y}}, \text{ получим}$$

$$C_4 = \frac{\omega}{2\lambda},$$

где обозначено

$$\omega = \frac{Q}{2\pi K_0 \sqrt{K_x K_y}}. \quad (27)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_3$  определяем из условия непрерывности решения и его производной при  $z = h$

$$e^{-\lambda h} (c_3 e^{-\lambda h} + \frac{\omega}{2\lambda} e^{\lambda h}) = C_1 I_0(\beta \sqrt{h}),$$

$$e^{-\lambda h} (-\lambda c_3 e^{-\lambda h} + \frac{\omega}{2} e^{\lambda h}) = C_1 I'_0(\beta \sqrt{h}) \lambda. \quad (28)$$

Так как нас интересует решение лишь в приземной полосе, мы из системы (28) определяем лишь  $C_1 = \frac{\omega e^{-\lambda(h-h)}}{\lambda [I_0(\beta \sqrt{h}) + I'_0(\beta \sqrt{h})]}$

и для решения уравнения (17) в этой полосе получим формулу

$$\Phi(\lambda, z) = \frac{\omega e^{-\lambda(H-h)} I_0(\beta \sqrt{z})}{\lambda [I_0(\beta \sqrt{h}) + I'_0(\beta \sqrt{h})]}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (13) и используя (7) и (5), получим выражение для концентрации примеси в полосе  $0 \leq z \leq h$

$$q(x, y, z) = \omega e^{\frac{ux}{2K_x}} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}) \frac{e^{-\lambda(H-h)} I_0(\beta \sqrt{z})}{\lambda [I_0(\beta \sqrt{h}) + I'_0(\beta \sqrt{h})]} d\lambda, \quad (30)$$

где  $\lambda$ ,  $\beta$  и  $\omega$  определяются по (21), (23) и (27).

При  $z = 0$  получим формулу для концентрации на поверхности земли

$$q(x, y, 0) = \omega e^{\frac{ux}{2K_x}} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}) \frac{e^{-\lambda(H-h)}}{\lambda [I_0(\beta \sqrt{h}) + I'_0(\beta \sqrt{h})]} d\lambda. \quad (31)$$

Величина  $\sqrt{h} = \frac{2h}{\sqrt{K_0}} \sqrt{\frac{u^2}{4K_x} + \lambda^2}$  достаточно велика (например, при  $u = 5$  м/сек.,  $K_0 = 10$  м<sup>2</sup>/сек.,  $K_x = 60$  м<sup>2</sup>/сек.,  $h = 80$  м,  $\lambda = 0$   $\sqrt{h} > 16$  и возрастает при возрастании  $\lambda$ ), что позволяет воспользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя

$$I_p(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (32)$$

Известно также [2], что

$$e^{-x} \sim K_p(x) \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \quad (33)$$

[здесь  $K_p(x)$  - функция Макдональда].

Преобразуя дробь, стоящую под знаком интеграла в (31), пользуясь (32) и (33) и учитывая, что  $\sqrt{h} = 2\lambda h$ , получим

$$\frac{e^{-\lambda(H+h)}}{\lambda [I_0(\sqrt{h}) + I_{-1}(\sqrt{h})]} = \sqrt{2h(H+h)} K_0[\lambda(H+h)] \quad (34)$$

Интеграл в (31) примет вид

$$\sqrt{2h(H+h)} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}) K_0[(H+h)\lambda \sqrt{\frac{u^2}{4K_x} + \lambda^2}] d\lambda \quad (35)$$

и берется в конечном виде.

Согласно [3] имеем

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}) K_0[(H+h)\lambda \sqrt{\frac{u^2}{4K_x} + \lambda^2}] d\lambda = \frac{u K_1 \left[ \frac{u}{2\sqrt{K_x}} \sqrt{\frac{(H+h)^2}{K_0} + \frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}} \right]}{2\sqrt{K_x} \sqrt{\frac{(H+h)^2}{K_0} + \frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}} \quad (36)$$

Подставив (36) в (31) и воспользовавшись (33), после несложных преобразований получим расчетную формулу для величины наземной концентрации примеси

$$q(x, y, 0) = \frac{Q\sqrt{uh(H+h)}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}} \frac{e^{\frac{ux}{2K_x} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} \frac{K_x}{K_y} + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0}} \right]}}{x\sqrt{x} \sqrt{\left[ 1 + \frac{y^2}{x^2} \frac{K_x}{K_y} + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0} \right]^{3/2}}} \quad (37)$$

Полагая  $y = 0$ , получим расчетную формулу для концентрации на наземной оси источника

$$q(x, 0, 0) = \frac{Q\sqrt{uh(H+h)}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}} \frac{e^{\frac{ux}{2K_x} \left[ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0}} \right]}}{x\sqrt{x} \sqrt{\left[ 1 + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0} \right]^{3/2}}} \quad (38)$$

Перейдем к выявлению влияния члена уравнения  $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$  на величину концентрации примеси.

Устремляя в формулах (37) и (38)  $K_x$  к нулю, получим формулы для расчета концентрации при условии, что  $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$  опущен:

$$\bar{q}(x, y, 0) = \lim_{K_x \rightarrow 0} q(x, y, 0) = \frac{Q \sqrt{u} h (H+h)}{2 K_0 \sqrt{2\pi} K_y} \frac{e^{-\frac{u}{4x} \left[ \frac{y^2}{K_y} + \frac{(H+h)^2}{K_0} \right]}}{x \sqrt{x}}, \quad (39)$$

$$\bar{q}(x, 0, 0) = \lim_{K_x \rightarrow 0} q(x, 0, 0) = \frac{Q \sqrt{u} (H+h) h}{2 K_0 \sqrt{2\pi} K_y} \frac{e^{-\frac{u(H+h)^2}{4x K_0}}}{x \sqrt{x}}. \quad (40)$$

В области, где

$$\frac{y^2}{x^2} \frac{K_x}{K_y} + \left( \frac{H+h}{x} \right)^2 \frac{K_x}{K_0} < 1, \quad (41)$$

получим, разлагая подкоренные выражения в (37) в ряды и делая (37) на (39),

$$\frac{q(x, y, 0)}{\bar{q}(x, y, 0)} = \frac{e^{\frac{u x}{16 K_x} \left[ \frac{y^2}{x^2} \frac{K_x}{K_y} + \left( \frac{H+h}{x} \right)^2 \frac{K_x}{K_0} \right]^2}}{1 + \frac{3}{4} \left[ \frac{y^2}{x^2} \frac{K_x}{K_y} + \left( \frac{H+h}{x} \right)^2 \frac{K_x}{K_0} \right]}. \quad (42)$$

Из формулы (42) следует, что, опуская в уравнении диффузии член  $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ , мы получаем заниженное значение концентрации примеси на поверхности земли, причем относительная погрешность возрастает с возрастанием  $y$  [в пределах, допустимых условием (41)] и может достигать при фиксированном  $x$  величины порядка  $e^{\frac{u x}{16 K_x}}$ . Для наземной оси источника получим

$$\frac{q(x, 0, 0)}{\bar{q}(x, 0, 0)} = \frac{e^{\frac{u x}{16 K_x} \left( \frac{H+h}{x} \right)^4 \left( \frac{K_x}{K_0} \right)^2}}{1 + \frac{3}{4} \left( \frac{H+h}{x} \right)^2 \frac{K_x}{K_0}}. \quad (43)$$

Из формулы (43) следует, что погрешность на наземной оси источника уменьшается при возрастании  $x$ .

Результаты расчета  $\frac{q}{\bar{q}}$ , произведенного при  $H = 100$  м;  $h = 80$  м;  $U = 5$  м/сек.;  $K_x = 20$  м<sup>2</sup>/сек. и  $K_0 = 10$  м<sup>2</sup>/сек., приведены в табл. 1.

Таким образом, относительное влияние члена  $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$  на величину концентрации велико лишь на больших расстояниях от наземной оси источника и на небольшом участке самой наземной оси.

Таблица 1

|                 |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|
| $x$             | 400  | 600  | 800  | 1000 | 1500 | 2000 |
| $\frac{q}{q_0}$ | 2,25 | 1,20 | 1,13 | 1,07 | 1,02 | 1,00 |

Однако, учитывая, что величина концентрации на этих участках земной поверхности очень мала, мы приходим к выводу, что для упрощения решения уравнения диффузии член уравнения  $k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$  может быть опущен.

Л и т е р а т у р а

1. М о н и н А.С. Атмосферная диффузия. "Успехи физических наук", т. LXVIII, вып.1, 1959.
2. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики, т.Ш, ч.П, ГТТИ, М.-Л., 1951.
3. Р ы ж и к И.М. и Г р а д ш т е й н И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, М.-Л., 1951.