МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды, выпуск 14

ОБЛАКА, ОСАДКИ И ВОПРОСЫ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ЛЕНИНГРАД
1963

Л. Ш. ЛИВШИЦ

К ЗАДАЧЕ О ДИФФУЗИИ ЛЕГКОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

В полуэмпирической теории турбулентной диффузии принимается, что объемная концентрация $q(x,y,z)$ легких примесей от непрерывно действующего точечного источника производительности Q г/сек., расположенного на высоте H в атмосфере, удовлетворяет дифференциальному уравнению.

$$u\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial q}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial q}{\partial z}\right)+Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-H). \quad (1)$$

Здесь u - скорость ветра, направленного по оси OX ; K_x, K_y, K_z - коэффициенты турбулентности; δ - дельта-функция Дирака.

Условие взаимодействия примеси с поверхностью земли записывается в виде

$$K_z\frac{\partial q}{\partial z}=\beta q \qquad \text{при } z=0. \quad (2)$$

$$(\beta=\mathrm{const})$$

Решению задачи о концентрации примеси посвящено много работ (см.,например, обзор А.С.Монина "Атмосферная диффузия". Успехи физических наук, т. LXVIII , вып.1, 1959 г.) . В этих работах уравнение (1) решается при условии, что K_x, K_y , K_z , а также u пропорциональны некоторым степеням высоты z , что часто не имеет места. Кроме того, слагаемым $\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ все авторы обычно пренебрегают, получая при этом вместо уравнения эллиптического типа уравнение параболического типа.

В настоящей работе этот член уравнения сохраняется и выясняется влияние этого на величину наземной концентрации примеси.

Для K_z принята модель М.Е.Швеца и М.И.Юдина

$$K_z=\begin{cases}\frac{K_0}{h}z & \text{при } 0\le z\le h,\\ K_0 & \text{при } z\ge h.\end{cases} \quad (3)$$

K_x, K_y , u считаются постоянными; в граничном условии (2) принято $\beta = 0$ (условие "отражения") , т.е. считается, что поток частиц через земную поверхность равен нулю

$$\lim_{z\to 0} K_z \frac{\partial q}{\partial z}=0. \tag{4}$$

После замены

$$\frac{x}{\sqrt{K_x}}=\xi\ ; \quad \frac{y}{\sqrt{K_y}}=\eta; \quad \frac{u}{\sqrt{K_x}}=u_1 \tag{5}$$

получим уравнение

$$u_1\frac{\partial q}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial q}{\partial z}\right)+\frac{Q\,\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}}. \tag{6}$$

Ищем решение уравнения (6) в виде

$$q(\xi,\eta,z)=e^{p\xi}\mathcal{F}(\xi,\eta,z), \tag{7}$$

причем постоянную p выбираем так; чтобы исчез член уравнения, содержащий $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi}$. Тогда при $p=\frac{u_1}{2}$ получим уравнение

$$-\frac{u_1^2}{4}\mathcal{F}+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)=-\frac{Q\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}}. \tag{9}$$

Перейдем в уравнении (9) к цилиндрическим координатам и будем искать его осесимметричное решение $\left(\text{т.е. } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}=0\right)$. Для функции $\mathcal{F}(\rho,z)$ получим уравнение

$$-\frac{u_1^2}{4}\mathcal{F}+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)=-\frac{Q\delta(\rho,\varphi)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}=0 \qquad [\text{следует из условия}(4)] \tag{11}$$

и

$$\lim_{z\to\infty}\mathcal{F}(\rho,z)=0 \tag{12}$$

(естественное граничное условие на бесконечности).

Здесь $\delta(\rho,\varphi)$ - двумерная дельта-функция.

Ищем решение (10) в виде

$$\mathcal{F}(\rho,z)=\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda\rho)\Phi(\lambda,z)\,d\lambda, \tag{13}$$

где J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

Подставив (13) в (10), получим

$$\int_0^\infty \lambda\left[-\frac{u_1^2}{4}J_0\Phi+\lambda^2 J_0''\Phi+\frac{\lambda}{\rho}J_0'\Phi+J_0\frac{d}{dz}\left(K_z\frac{d\Phi}{dz}\right)\right]d\lambda=-\frac{Q\delta(\rho,\varphi)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} \tag{14}$$

В силу уравнения Бесселя

$$\lambda^2 J_0''+\frac{\lambda}{\rho}J_0'=-\lambda^2 J_0. \tag{15}$$

Преобразуем правую часть (10). Известно, что $\iint\limits_{(D)} \delta(\rho,\varphi)\,d\rho\, d\varphi = 1$, (D) охватывает начало координат, следовательно, $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \delta(\rho,\varphi)\rho\, d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\infty} \delta(\rho)\rho\, d\rho = 1$, откуда

$$\int\limits_0^{\infty} \delta(\rho)\rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi}. \qquad (16)$$

[Здесь принято, что $\delta(\rho,\varphi)$ не зависит от φ, так как мы ищем осесимметричное решение].

Применим к $\delta(\rho)$ формулу Фурье-Бесселя [2]

$$\delta(\rho) = \int\limits_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda\rho)\,d\lambda \int\limits_0^{\infty} \mu J_0(\lambda\mu)\delta(\mu)\,d\mu = J_0(0)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda\rho)\,d\lambda$$

[воспользовались теоремой о среднем и формулой (16)].

Следовательно, правая часть (14) может быть записана в виде

$$-\frac{Q\delta(\rho)\delta(z-H)}{\sqrt{K_x K_y}} = -\frac{Q}{2\pi\sqrt{K_x K_y}} \int\limits_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda\rho)\delta(z-H)\,d\lambda.$$

Тогда, учитывая (15), после сокращения на λJ_0 для функции $\Phi(\lambda,z)$ получим уравнение

$$-\left(\frac{u_1^2}{4} + \lambda^2\right)\Phi(\lambda,z) + \frac{d}{dz}\left[K_z \frac{d}{dz}\Phi(\lambda,z)\right] = -\frac{Q\delta(z-H)}{2\pi\sqrt{K_x K_y}} \qquad (17)$$

с граничными условиями

$$\lim_{z\to 0} z\frac{d\Phi}{dz} = 0 \qquad (18)$$

и

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(\lambda,z) = 0. \qquad (19)$$

Примем для определенности, что высота излома коэффициента K_z меньше высоты источника, т.е. $h < H$. Тогда уравнение (17) будет иметь различный вид в областях $0 \le z \le h$ и $z \ge h$.

1) В области $0 \le z \le h$ $K_z = \frac{K_0}{h} z$, и уравнение (17) примет вид

$$\frac{1}{h}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\Phi}{dz}\right) \quad A^2\Phi = 0, \qquad (20)$$

где обозначено

$$A^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{u_1^2}{4} + \lambda^2\right). \qquad (21)$$

Решение уравнения (20) запишется в виде

$$\Phi(\lambda,z) = C_1 J_0(iB\sqrt{z}) + C_2 Y_0(iB\sqrt{z}), \qquad (22)$$

где

$$B = 2A\sqrt{h}. \qquad (23)$$

Так как функция Y_0 имеет при $z = 0$ логарифмическую особенность, то для выполнения условия (18) необходимо взять $C_2 = 0$. Следовательно, в области $0 \le z \le h$ решением (17) будет

$$\Phi(\lambda, z) = C_1 I_0(\beta\sqrt{z}) \qquad (24)$$

(I - функция Бесселя от чисто мнимого аргумента).

2) В области $z \geqslant h$ $K_z = K_0$, и уравнение (17) примет вид

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - A^2\Phi = -\frac{Q}{2\pi K_0\sqrt{K_x K_y}}\delta(z - H). \qquad (25)$$

Решение этого уравнения дает функция Грина, которая с учетом условия (19) может быть записана в виде

$$\Phi(\lambda, z) = \begin{cases} e^{-AH}(c_3 e^{-Az} + c_4 e^{Az}) & \text{при } h \leqslant z \leqslant H, \\ e^{-Az}(c_3 e^{-AH} + c_4 e^{AH}) & \text{при } z \geqslant H. \end{cases} \qquad (26)$$

Из условия, что скачок производной решения при $z = H$ равен $-\frac{Q}{2\pi K_0\sqrt{K_x K_y}}$, получим

$$c_4 = \frac{\omega}{2A},$$

где обозначено

$$\omega = \frac{Q}{2\pi K_0\sqrt{K_x K_y}}. \qquad (27)$$

Постоянные C_1 и C_3 определяем из условия непрерывности решения и его производной при $z = h$

$$\begin{aligned} &e^{-AH}(c_3 e^{-Ah} + \frac{\omega}{2A}e^{Ah}) = C_1 I_0(\beta\sqrt{h}), \\ &e^{-AH}(-Ac_3 e^{-Ah} + \frac{\omega}{2}e^{Ah}) = C_1 I_0'(\beta\sqrt{h})A. \end{aligned} \qquad (28)$$

Так как нас интересует решение лишь в приземной полосе, мы из системы (28) определяем лишь $C_1 = \frac{\omega e^{-A(H-h)}}{A[I_0(\beta\sqrt{h}) + I_0'(\beta\sqrt{h})]}$, и для решения уравнения (17) в этой полосе получим формулу

$$\Phi(\lambda, z) = \frac{\omega e^{-A(H-h)} I_0(\beta\sqrt{z})}{A[I_0(\beta\sqrt{h}) + I_{-1}(\beta\sqrt{h})]}. \qquad (29)$$

Подставляя (29) в (13) и используя (7) и (5), получим выражение для концентрации примеси в полосе $0 \leqslant z \leqslant h$

$$q(x,y,z) = \omega e^{\frac{ux}{2K_x}} \int_0^\infty \lambda J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}\right) \frac{e^{-A(H-h)} I_0(\beta\sqrt{z})}{A[I_0(\beta\sqrt{h}) + I_{-1}(\beta\sqrt{h})]} d\lambda, \qquad (30)$$

где A, β и ω определяются по (21), (23) и (27).

При $z = 0$ получим формулу для концентрации на поверхности земли

$$q(x,y,0) = \omega e^{\frac{ux}{2K_x}} \int_0^\infty \lambda J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y}}\right) \frac{e^{-A(H-h)} d\lambda}{A[I_0(\beta\sqrt{h}) + I_{-1}(\beta\sqrt{h})]}. \qquad (31)$$

Величина $b\sqrt{h} = \frac{2h}{\sqrt{K_0}}\sqrt{\frac{u^2}{4K_x}+\lambda^2}$ достаточно велика (например, при u = 5 м/сек., K_0 = 10 м^2/сек., K_x= 60 м^2/сек., h = 80 м, λ = 0 $b\sqrt{h}>16$ и возрастает при возрастании λ) , что позволяет воспользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя

$$I_p(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}. \tag{32}$$

Известно также [2] , что

$$e^{-x} \sim \mathcal{K}_p(x)\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \tag{33}$$

[здесь $\mathcal{K}_p(x)$- функция Макдональда].

Преобразуя дробь, стоящую под знаком интеграла в (31), пользуясь (32) и (33) и учитывая, что $b\sqrt{h} = 2\mathcal{A}h$, получим

$$\frac{e^{-\mathcal{A}(H-h)}}{\mathcal{A}\left[I_0(b\sqrt{h})+I_{-1}(b\sqrt{h})\right]} = \sqrt{2h(H+h)}\,\mathcal{K}_0\left[\mathcal{A}(H+h)\right]. \tag{34}$$

Интеграл в (31) примет вид

$$\sqrt{2h(H+h)}\int_0^\infty \lambda\, \mathcal{I}_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}}\right)\mathcal{K}_0\left[(H+h)\frac{1}{\sqrt{K_0}}\sqrt{\frac{u^2}{4K_x}+\lambda^2}\right]d\lambda \tag{35}$$

и берется в конечном виде.

Согласно [3] имеем

$$\int_0^\infty \lambda\, \mathcal{I}_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}}\right)\mathcal{K}_0\left[(H+h)\frac{1}{\sqrt{K_0}}\sqrt{\frac{u^2}{4K_x}+\lambda^2}\right]d\lambda = \frac{u\,\mathcal{K}_{-1}\left[\frac{u}{2\sqrt{K_x}}\sqrt{\frac{(H+h)^2}{K_0}+\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}}\right]}{2\sqrt{K_x}\sqrt{\frac{(H+h)^2}{K_0}+\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}}}. \tag{36}$$

Подставив (36) в (31) и воспользовавшись (33) , после несложных преобразований получим расчетную формулу для величины наземной концентрации примеси

$$q(x,y,0) = \frac{Q\sqrt{uh(H+h)}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}}\;\frac{e^{\frac{ux}{2K_x}\left[1-\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}\frac{K_x}{K_y}+\left(\frac{H+h}{x}\right)^2\frac{K_x}{K_0}}\right]}}{x\sqrt{x}\sqrt[4]{\left[1+\frac{y^2}{x^2}\frac{K_x}{K_y}+\left(\frac{H+h}{x}\right)^2\frac{K_x}{K_0}\right]^3}}; \tag{37}$$

Полагая y = 0, получим расчетную формулу для концентрации на наземной оси источника

$$q(x,0,0) = \frac{Q\sqrt{uh(H+h)}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}}\;\frac{e^{\frac{ux}{2K_x}\left[1-\sqrt{1+\left(\frac{H+h}{x}\right)^2\frac{K_x}{K_0}}\right]}}{x\sqrt{x}\sqrt[4]{\left[1+\left(\frac{H+h}{x}\right)^2\frac{K_x}{K_0}\right]^3}}. \tag{38}$$

Перейдем к выявлению влияния члена уравнения $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ на величину концентрации примеси.

Устремляя в формулах (37) и (38) K_x к нулю, получим формулы для расчета концентрации при условии, что $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ опущен:

$$\bar{q}(x,y,0) = \lim_{K_x \to 0} q(x,y,0) = \frac{Q\sqrt{uh(H+h)}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}} \; \frac{e^{-\frac{u}{4x}\left[\frac{y^2}{K_y} + \frac{(H+h)^2}{K_0}\right]}}{x\sqrt{x}}, \quad (39)$$

$$\bar{q}(x,0,0) = \lim_{K_x \to 0} q(x,0,0) = \frac{Q\sqrt{u(H+h)h}}{2K_0\sqrt{2\pi K_y}} \; \frac{e^{-\frac{u(H+h)^2}{4x K_0}}}{x\sqrt{x}}. \quad (40)$$

В области, где

$$\frac{y^2}{x^2}\,\frac{K_x}{K_y} + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0} < 1, \quad (41)$$

получим, разрагая подкоренные выражения в (37) в ряды и деля (37) на (39),

$$\frac{q(x,y,0)}{\bar{q}(x,y,0)} = \frac{e^{\frac{ux}{16K_x}\left[\frac{y^2}{x^2}\frac{K_x}{K_y} + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0}\right]^2}}{1 + \frac{3}{4}\left[\frac{y^2}{x^2}\frac{K_x}{K_y} + \left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0}\right]}. \quad (42)$$

Из формулы (42) следует, что, опуская в уравнении диффузии член $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$, мы получаем заниженное значение концентрации примеси на поверхности земли, причем относительная погрешность возрастает с возрастанием y [в пределах, допустимых условием (41)] и может достигать при фиксированном x величины порядка $e^{\frac{ux}{16K_x}}$. Для наземной оси источника получим

$$\frac{q(x,0,0)}{\bar{q}(x,0,0)} = \frac{e^{\frac{ux}{16K_x}\left(\frac{H+h}{x}\right)^4 \left(\frac{K_x}{K_0}\right)^2}}{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{H+h}{x}\right)^2 \frac{K_x}{K_0}}. \quad (43)$$

Из формулы (43) следует, что погрешность на наземной оси источника уменьшается при возрастании x.

Результаты расчета $\frac{q}{\bar{q}}$, произведенного при H = 100 м; h = 80 м; u = 5 м/сек.; K_x = 20 м^2/сек. и K_0 = 10 м^2/сек., приведены в табл.1.

Таким образом, относительное влияние члена $K_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ на величину концентрации велико лишь на больших расстояниях от наземной оси источника и на небольшом участке самой наземной оси.

Таблица 1

x	400	600	800	1000	1500	2000
$\frac{q}{q_1}$	2,25	1,20	1,13	1,07	1,02	1,00

Однако, учитывая, что величина концентрации на этих участках земной поверхности очень мала, мы приходим к выводу, что для упрощения решения уравнения диффузии член уравнения $k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ может быть опущен.

Литература

1. Монин А.С. Атмосферная диффузия. "Успехи физических наук", т. LХУШ, вып.1, 1959.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.Ш, ч.П, ГТТИ, М.-Л., 1951.
3. Рыжик И.М. и Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, М.-Л., 1951.