

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Коваленко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ: ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ТОПОЛОГИЯ И КАТАСТРОФЫ

Учебное пособие

Направление подготовки: 050405 — Прикладная гидрометеорология
Профиль подготовки — Прикладная гидрология
Квалификация: Магистр



Санкт-Петербург
2015

УДК [556.06+556.072]:519.216.3

ББК 26.22

К56

Рецензент: С.А. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук, зам. директора Института озероведения РАН; Ривера Эберт Гонсало д-р философии (Ph. D), Universidad Militar Nueva Granada, Богота, Колумбия.

Коваленко В.В. Моделирование природных процессов: динамические системы, топология и катастрофы. Учебное пособие. — СПб.: РГГМУ, 2015. — 40 с.: ил.

ISBN 978-5-86813-384-8

В пособии представлена часть материала дисциплины «Моделирование природных процессов», связанного с динамическими системами, топологией и теорией особенностей, которые используются при моделировании и прогнозировании природных (гидрологических) объектов.

Пособие предназначено магистрантам, аспирантам и гидрологам, интересующимся моделированием и методологией научных исследований.

Kovalenko V.V. Modeling natural processes: dynamical systems, topology and catastrophe. Manual. — St. Petersburg, RSHU Publishers, 2015. — 40 pp.

The manual presents the material of discipline «Simulation of natural processes» associated with dynamical systems, topology and the theory of characteristics that are used in the modeling and forecasting of natural (hydrological) objects.

The manual is intended to undergraduates, graduate students and hydrologists who are interested in modeling and methodology of scientific research.

© Коваленко В.В., 2015

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2015

ISBN 978-5-86813-384-8

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие своим содержанием охватывает часть дисциплины общенаучного и профессионального цикла «Моделирование природных процессов» (направление: 050405 – Прикладная гидрометеорология; профиль подготовки – Прикладная гидрология; квалификация: Магистр).

Еще год назад дисциплина называлась «Гидродинамическое моделирование природных процессов» [10]. Так как это название является общим для всех профилей подготовки магистров по направлению Прикладная гидрометеорология (метеорология, гидрология, океанология), а в некоторых из них не ограничиваются гидродинамическими моделями, то название дисциплины сделали более широким. Ее программа охватывает, в основном, третью часть дисциплины «Моделирование гидрологических процессов», который до недавнего времени читался студентам пятигодичного обучения («специалитет») и имел название «Частично инфинитное моделирование гидрологических процессов». Содержание нового курса дополнено рассмотрением элементов теории динамических систем, топологии и теории катастроф. В 2014 году опубликовано учебное пособие по данной дисциплине с изложением философско-методологических оснований частично инфинитного моделирования в гидрологии. Учебное пособие 2015 г. дополняет его материалом, связанным с теорией катастроф в аспекте смены топологий фазовых портретов развивающихся гидрологических объектов.

Представленные в пособии результаты получены в рамках НИР по теме «Адаптация математических моделей формирования вероятностных характеристик многолетних видов речного стока к физико-географическим условиям России для целей обеспечения устойчивости их решений при моделировании и прогнозировании» (№ 1413, № госрегистрации 01 2014 58678), финансируемой Министерством образования и науки РФ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Качественные и количественные оценки фактического и ожидаемого состояния развивающихся систем в науке делаются в определенном пространстве «координат» (понятий): закономерность (динамическая или статистическая), нелинейность, открытость, неустойчивость, топологическая эквивалентность и т. п. Разбор некоторых (основных, в контексте гидрометеозекологии) из них и является предметом данного раздела. Разумеется, не ставится задача системного изложения нелинейной динамики, но та терминология, которая связана с математическим описанием процессов качественных изменений будет затронута. При подготовке учебного пособия использованы монографии и учебные пособия [1, 2, 3, 18, 20, 23, 24], в которых относительно доступно излагается широкий спектр вопросов, связанных с нелинейной динамикой.

Под системой понимается объект, для которого определено понятие вектора состояния (выход, реакция), т. е. величин, характеризующих (по имеющимся у субъекта познания понятиям) его изменения в пространстве и времени x, y, z, t (независимые переменные), при заданном векторе внешних воздействий и параметрах, определяющих известные свойства объекта и его начальное состояние. Предполагается, при этом, что известен и оператор, характеризующий эволюцию объекта во времени.

Перечисленные признаки означают, что известна математическая модель изучаемого объекта. Последние бывают разные: в гидрометеорологии достаточно общими являются модели в виде дифференциальных уравнений в частных производных, например, широко используемое в гидрологии уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Обычно ситуацию пытаются упростить, аппроксимируя подобные модели конечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора состояния \vec{y} :

$$dy_i/dt = F_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Евклидово пространство $R_n = \{(y_1, \dots, y_n)\}$ называется **фазовым**, а $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ – **фазовой точкой**. Если правая часть (1.1) не зависит явным образом от времени, то система называется **автономной**. При-

мером служит система уравнений для моментов (см. ниже (3.4) – (3.7)), которой аппроксимируется уравнение ФПК. (Наряду с методом моментов, эффективным приемом перехода от уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений является метод характеристик.) Решение системы (1.1) $\vec{y}(t)$, представленное в пространстве R_n , есть **фазовая траектория**, а множество последних, соответствующее разным начальным условиям, называется **фазовым портретом** динамической системы. Решение (1.1), т. е. набор функций $\vec{y}(t)$, характеризует процесс изменения состояния системы во времени (тут уместно употребить философскую категорию **историческое**), а фазовый портрет, уходя от временной переменной, «сворачивает» историческое в категорию **логическое**. Умение абстрагироваться от исторических нюансов помогает акцентировать внимание на логической сущности, характеризующей изучаемую систему. Последнюю можно подвергнуть еще одной свертке, выполнив стохастическое обобщение и представляя ее только одной искомой функцией, а именно, плотностью вероятности $p(\vec{y}, t)$. Ее аргументами (независимыми переменными) служат уже не только время и геометрические координаты, но и величины, составляющие понятийный каркас системы, т. е. y_i . Они независимы в том же смысле, как в случае динамических моделей аргументы (x, y, z, t) независимы от событий, происходящих в самой системе. И y_i , и t , и (x, y, z) – это «договорные» понятия, смысл которых не может меняться в рамках действия аристотелевской (формальной) логики (на «плоскости», см. [10]), по крайней мере, до тех пор, пока «плоскости» не давать возможности «разбухать», метаморфозируя ее понятия (см. [11]).

Продолжим вводить понятия, используемые в теории динамических систем. Проще всего это сделать на примере модели маятника (рис. 1)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

(здесь x – перемещение; m – масса осциллятора; α – коэффициент, учитывающий амортизирующие свойства демпфера; β – жесткость пружины) или, заменяя переменные [24]:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 0 < \tau \leq T\sqrt{\beta/m}. \quad (1.3)$$

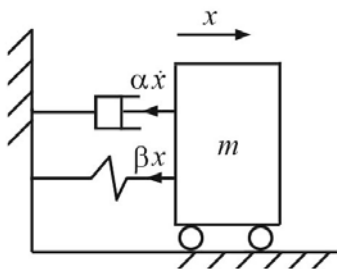


Рис. 1. Линейный осциллятор.

В случае уравнения (1.3) точка над x обозначает дифференцирование по t .

Уравнение (1.2) представляет балансовое соотношение

$$\sum_{i=1}^3 F_i = 0,$$

где F_i – силы: $F_1 = m\ddot{x}$ – ускорения; $F_2 = -\alpha\dot{x}$ – трения; $F_3 = -\beta x$ – возвращающая сила.

С помощью замены переменных, уравнение второго порядка (1.3) сводится к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = -2\delta x_1 - x_2; \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2 = x_1. \quad (1.5)$$

Если обнулить первое (отвечающее за трение) слагаемое правой части (1.4) приняв $\delta = 0$, то имеем фазовую траекторию, показанную на рис. 2, *а* (ей соответствует временная развертка, рис. 2, *б*, т. е. гармоническое колебание). В данном случае радиус окружности определяется начальными условиями (смещением x_2 и импульсом x_1), а его квадрат соответствует полной энергии маятника, которая, в силу предположения $\delta = 0$, сохраняется. Подобные системы называются **консервативными**.

В случае $0 < \delta < 1$ колебания маятника будут затухать, смещение и скорость, претерпевая периодические колебания, стремятся к притягивающему множеству, которым, в данном случае, служит точка $(0, 0)$, рис. 2, *в* и рис. 2, *з*. При $\delta > 1$ (рис. 2, *ж* и 2, *з*) процесс происходит без переколебаний. Системы с демпфированием, в которых энергия уменьшается (теряется), носят название **диссипативных**. Если в модель ввести «отрицательное» трение, то областью притяжения переменных x_1 и x_2 будет бесконечность (рис. 2, *д* и рис. 2, *е*), которая практически не достигается, благодаря тому, что при больших значениях x_1 и x_2 системы ведут себя нелинейно.

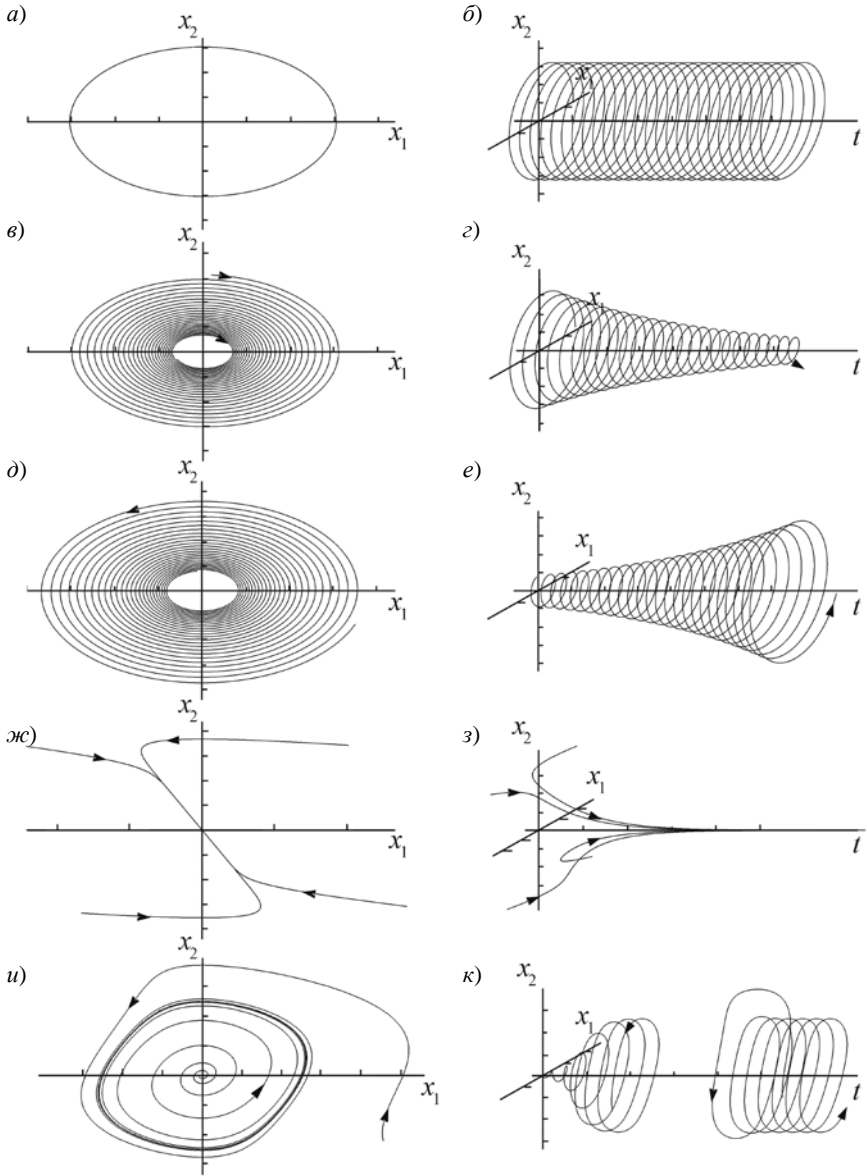


Рис. 2. Фазовые портреты (а, в, д, ж, и) и временные развертки (б, г, е, з, к) для маятника (а-з) и нелинейного осциллятора Ван дер Поля (и, к).

В качестве примера обычно приводят нелинейный осциллятор Ван дер Поля:

$$\dot{x}_1 = a(1 - bx_2^2)x_1 - x_2; \quad (1.6)$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad (1.7)$$

где a – параметр возбуждения; b – константа.

При малых смещениях $|x_2|$ отрицательное трение отталкивает решение от начала координат. Если же смещение $|x_2|$ велико, то положительное трение демпфирует процесс, притягивая решение к **предельному циклу**, рис. 2, *и* и рис. 2, *к*. Это явление называется **автоколебанием** и иллюстрируется данными рисунками. Извне и изнутри жирной замкнутой линии траектории притягиваются к предельному циклу, который эта линия и олицетворяет.

Еще один тип траекторий возможен в фазовом пространстве R_n с $n \geq 3$, когда фазовая траектория представляет собой бесконечную линию без самопересечений. Она не притягивается ни к каким-либо точкам (как на рис. 2, *в*, и рис. 2, *ж*) или циклам (как на рис. 2, *и*), но и не покидает заданной области в R_n , рис. 3, *а*. Временная развертка (рис. 3, *б*) создает иллюзию случайности и хаоса. Однако это не так. На рис. 3 представлено решение системы из трех уравнений

$$\dot{x} = -(y + z); \quad (1.8)$$

$$\dot{y} = x + (1/5)y; \quad (1.9)$$

$$\dot{z} = 1/5 + z(x - a), \quad (1.10)$$

где a – параметр (в данном примере $a = 6,345$).

Для этой системы (она называется системой Рёсслера) выполняются условия теоремы существования и единственности. Повторив решение системы (1.8) – (1.10), при тех же начальных условиях, мы воспроизведем аналогичный квазихаотический процесс. Подобные объекты называются **странными аттракторами**. Аттракторами потому, что суще-

ствуует область притяжения, которую не покидает траектория, а «странными» – так как появление подобных объектов (они были обнаружены несколько десятилетий назад и связываются именем метеоролога Э. Лоренца [25, 26]) показалось сначала научному сообществу странной экзотикой.

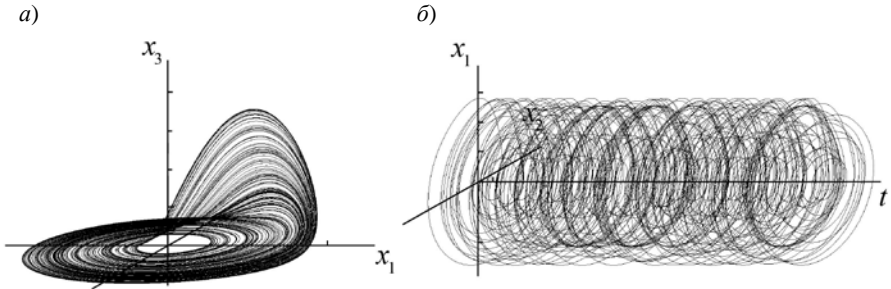


Рис. 3. Фазовый портрет (а) и временная развертка (б) аттрактора Рёсслера.

Представленные на рис. 2 фазовые траектории позволяют ввести понятие **особой точки** – состояния системы, в котором правая часть уравнения (1.1) нулевая: $F_i(y_1, \dots, y_n) = 0$. Каждый тип точки имеет свое название, к которому добавляется характеристика устойчивости: рис. 2, в – **устойчивый фокус**; рис. 2, д – **неустойчивый фокус**; рис. 2, ж – **устойчивый узел**. К ним следует еще добавить так называемое «седло», присущее фазовому портрету (рис. 4, а) осциллятора с отталкивающей силой

$$\ddot{x} - a^2 x = 0 \quad (1.11)$$

или

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad (1.12)$$

$$\dot{x}_2 = -a^2 x_1. \quad (1.13)$$

Последнее новое понятие в этом разделе – потенциал (V). Он определяется следующим образом

$$\dot{y} = F(y) = -\partial V / \partial y.$$

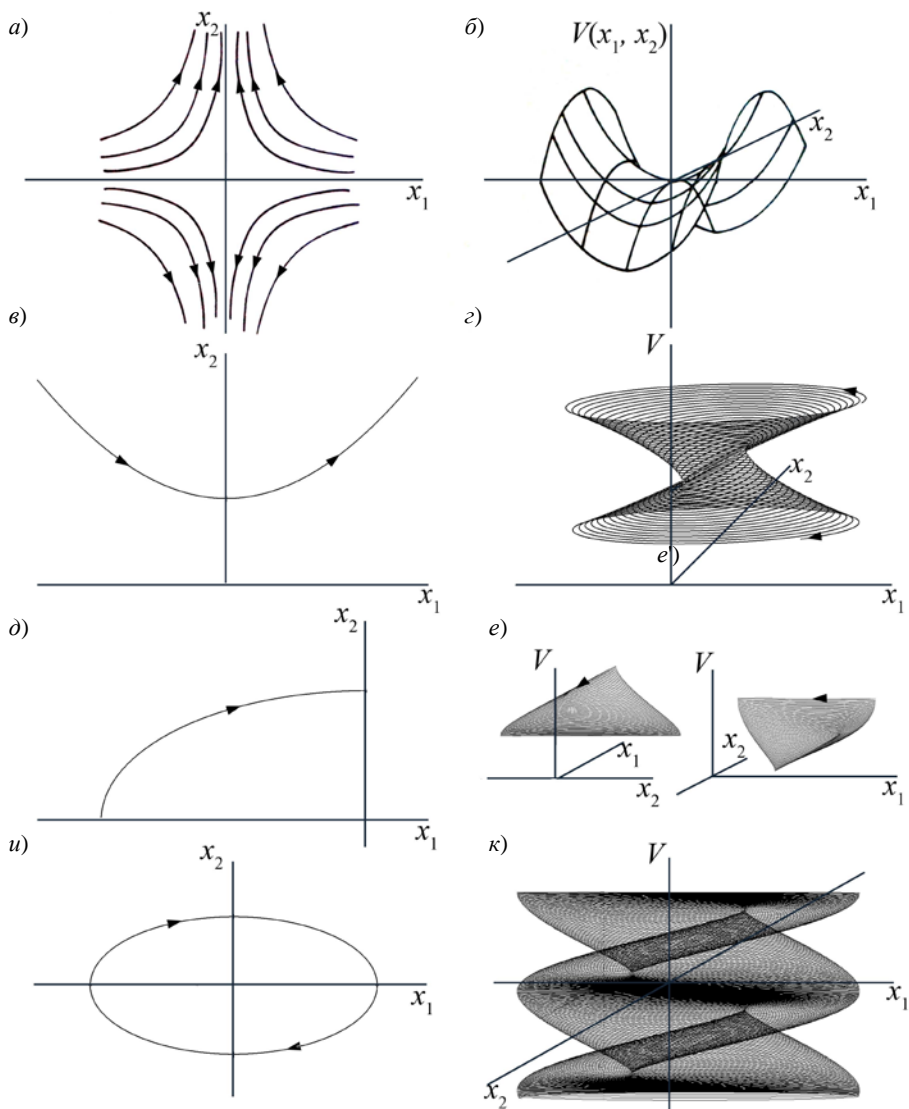


Рис. 4. Фазовый портрет и двумерный потенциал (а, б) [23], а также отдельные фрагменты фазовых портретов и соответствующие им потенциальные функции (в–к).

Например, в случае линейного уравнения первого порядка

$$\dot{y} = a - by \quad (1.14)$$

(здесь $a = a/\tau; b = b/\tau$; τ – время релаксации моделируемого объекта) он выглядит, как показано на рис. 5.

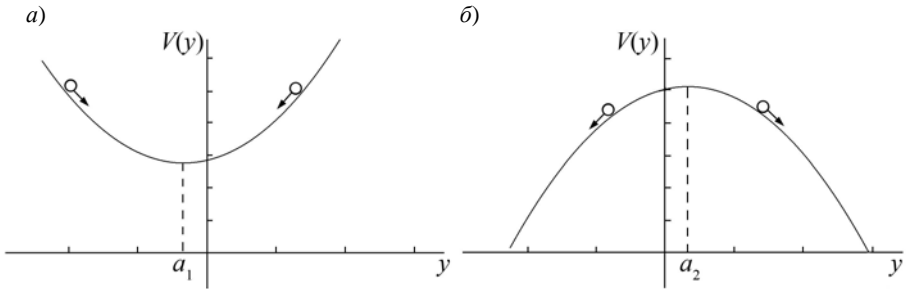


Рис. 5. Вид потенциала для уравнения (1.14) (а): $b > 0$ (решение устойчиво); (б): $b < 0$ (решение неустойчиво).

Потенциал наглядно показывает точки равновесия и их устойчивость (a_1 – устойчивая, a_2 – неустойчивая). Потенциал может быть и многомерным (рис. 4, б), имеющим разную степень устойчивости по переменным x_1 и x_2 . В многомерном случае ($\dot{\vec{y}} = F_i(\vec{y})$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$) потенциальная функция определяется следующим уравнением:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt}.$$

Видимо можно говорить и об устойчивости (по крайней мере ее тенденции) по отдельным фрагментам фазового портрета (см. рис. 4, в–к).

Этого набора понятий пока достаточно, чтобы приступить к изучению качественного поведения детерминистических систем.

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математические модели типа (1.1) составляются для того, чтобы их решая (аналитически, хотя для нелинейных уравнений это редкий случай, или численно), находить эволюцию состояния динамических систем при разнообразных внешних влияниях и задаваемых свойствах (параметрах, характеризуемых коэффициентами уравнений). Каждое такое решение представляет собой траекторию $\vec{y}(t)$ (отражающую философскую категорию «**историческое**») правда не фактическую, а модельную. Если в уравнение ввести шумы, то модельная траектория будет в какой-то степени походить на фактическую – «жизненную», в которой много «изгибов», отражающих побочные влияния на процесс.

Но цель моделирования – уловить главные тенденции, характерные для системы, логику происходящих и моделируемых событий. Категория «**логическое**» уже завуалировано «сидит» в самой модели, также как логика поведения биологических систем определяется их генотипом. Если перед нами зверь, то совсем не обязательно ждать, пока он кого-нибудь съест, чтобы убедиться, что он хищник; достаточно в «стартовой позиции» идентифицировать его вид. Но для этого надо иметь определенный инструментарий. В случае уравнения (1.1) таким инструментарием служит качественная теория динамических систем, у истоков которой стоял А. Пуанкаре [19].

С современной точки зрения, ключевым понятием в ней является понятие **топологии**. Ниже, в этом разделе мы затронем подробнее это понятие, а сейчас дадим самое общее представление (см., например, [6]). Предметом топологии являются свойства многообразий (геометрических фигур), которые не меняются под воздействием так называемых **гомеоморфизмов** (плавных деформаций без разрывов и склеек). Если существует такой гомеоморфизм f , который отождествляет многообразия X и Y , то они считаются топологически эквивалентными $X \sim Y$, рис. 6.

Спрашивается, что общего между «красивым» эллипсом X и абракадаброй Y ? Но, с точки зрения топологии, они неразличимы. Своеобразие подобной эквивалентности заключается в том, что гомеоморфизм f определен не обязательно на всем пространстве R_n , в котором

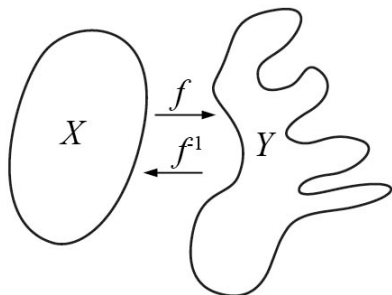


Рис. 6. К пояснению топологической эквивалентности многообразий X и Y .

расположены многообразия X и Y , т. е. эта характеристика самих геометрических фигур, не зависящая от способа их вложения в R_n . Мы не будем углубляться в вопросы топологии («опошлить» ее попытаемся чуть позже в этом разделе), а обратимся к наглядным примерам, учитывая материал раздела 1.

На рис. 2 слева представлены фазовые портреты динамических систем. Это многообразия, среди которых уместно искать топологически эквивалентные. Возьмем для определенности систему

$$\ddot{x} = F(x) \tag{2.1}$$

с потенциалом

$$V = x^4 - ax^2, \tag{2.2}$$

т. е.

$$\dot{x}_1 = p_1 x_2; \tag{2.3}$$

$$\dot{x}_2 = -4p_2 x_1^3 - 2ax_1. \tag{2.4}$$

Дополним систему (2.3), (2.4) уравнением для «протяжки» (изменения) параметра a :

$$da/dt = -a + p_3 t \tag{2.5}$$

(в уравнениях (2.3) – (2.5) коэффициенты p_1, p_2, p_3 постоянны).

Для двумерной системы (2.3), (2.4) уравнение для потенциальной функции будет

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = -p_1^2 x_2^2 + (4p_2 x_1^3 + 2a \cdot x_1)(-4p_2 x_1^3 - 2a \cdot x_1) \quad (2.6)$$

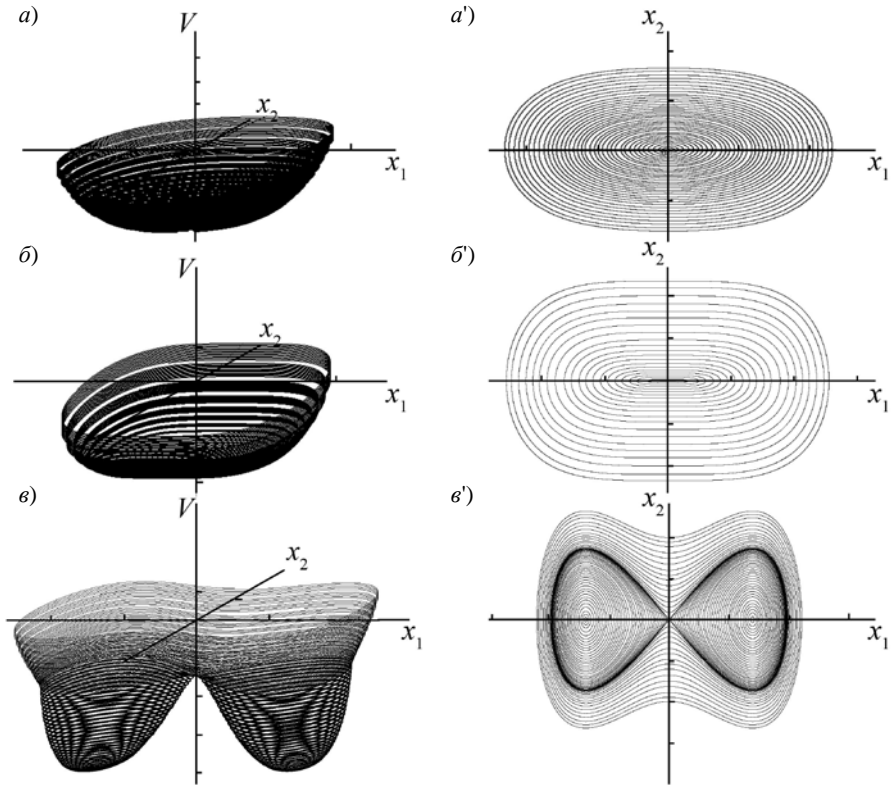


Рис. 7. Потенциалы (а, б, в) и фазовые портреты (а', б', в') при различных значениях управляющего параметра (а): $a - a > 0$; б) $a - a = 0$; в) $a - a < 0$.

Потенциалы и фазовые портреты для $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$ представлены на рис. 7 (параметр a в теории динамических систем называется **управляющим**; внешним управляющим, если $\partial a / \partial \bar{x} = 0$, т. е. если он не зависит от состояния системы). При изменении численного значения a фазовые портреты деформируются, но при неизменном знаке a ха-

рактически особые точки на рис. 7, а, б одинаковы по числу и типу (при $a > 0$ – одно положение устойчивого равновесия $x_1 = x_2 = 0$). На рис. 7, в ($a < 0$) уже три особые точки: две – устойчивые состояния равновесия и одна – неустойчивое). Пока a не меняет знак, поведение системы качественно неразлично: все состояния **топологически эквивалентны**. Значение $a = 0$, при котором система скачком изменяет свое поведение, называется **точкой бифуркации** (рис. 8).

Из рис. 8, а видно, что в точке бифуркации система скачком изменяет свое поведение. Но, прежде чем сделать этот скачок, происходит явление, именуемое **критическим замедлением** (это лакмусовая бумажка наступающего качественного изменения). Внешне это проявляется в том, что потенциал при $a \rightarrow 0$ выполаживается (рис. 7, б), а на временной развертке процесса появляется фаза медленных изменений (рис. 8, з и д, стрелка А), за которой наступает резкая качественная перестройка. Таким образом, точкой бифуркации процесс разбивается на два периода, причем в каждом из них (это видно из рис. 8) параметр a , вызывая количественные изменения, никак не влияет на качественный харак-

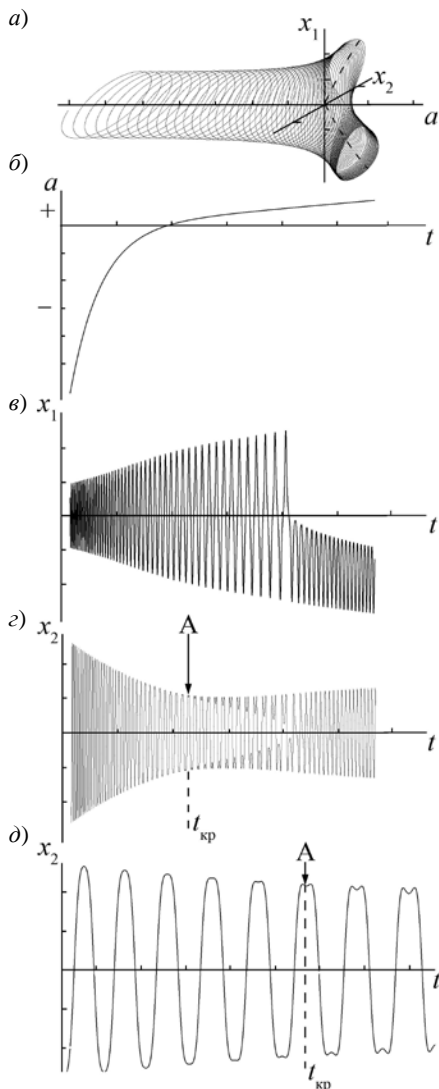


Рис. 8. К понятию «точка бифуркации» (а) и, временные развертки управляющего параметра (б) и фазовых переменных (в, з, д). Стрелкой А и буквой $t_{кр}$ на рис. з и д показано явление критического замедления, а пунктиром на рис. а – бифуркационная вилка.

тер процессов. Говорят, что система **груба** (не «чувствует» a с точки зрения своей топологии) или, более «математизировано» – **структурно устойчива**: малые дифференцируемые возмущения эволюционного оператора оставляют системы топологически эквивалентными.

«Опошляя философию и засоряя математику» можно данной ситуации дать и такую интерпретацию. На грубых участках эволюции системы логика ее поведения не меняется (носит «аристотелевский», формальный характер). В негрубом (бифуркационном) режиме действует диалектическая логика, вызывающая качественную перестройку, нарушение меры. (После определенного промежутка времени, когда траектория «посещает» обе точки устойчивого равновесия, она («случайным» образом) оказывается в бассейне притяжения одной из них, см. рис. 8, a , b , z .)

На первый взгляд мерой служит параметр a . Но мера – это единство количества и качества, а a не претерпевает никаких качественных изменений (только количественные). Качество (в данном случае) – это топологическая картинка – характерные области фазового пространства (предельные множества, седла, фокусы и т. п.). Но в рамках фиксированной модели (например 2.3) – (2.5)) a согласована с этими областями. Если топологию обозначить τ , то мера – это согласованность τ и a ($\mu(\tau, a) = 0$): какое бы ни было a (лишь бы в рамках теоремы существования решения), ему найдется фазовый портрет, сохраняющий некоторые инварианты.

Ниже к этому (инвариантам) вернемся, а сейчас остановимся на таком вопросе. Если негрубые периоды в эволюции подчиняются диалектической логике, которая действует при появлении новизны, то как же мы сейчас, «тупо» меняя численные значения параметра a , получили эту новизну как само собой разумеющееся? Ведь новизна получается только из **инфинитной реальности**, и только в результате действия Dasein (см. [11]) для выхода из тупика. Ничего этого не было, так как вместо инфинитной реальности была реальность финитная (в виде системы (2.3) – (2.5)), а вместо «измученного» творческими муками Dasein был довольный собой читатель, получающий гносеологическую новизну (для себя), ничем не рискуя. Новизны объективной в данном случае нет. А как же диалектические законы, когда a «пробегал» бифуркационное значение «0»? А они действуют **всегда**, а не только в момент рождения новизны. Достаточно плюнуть на стенку: пока плевков летит, задействована вся диалектика и все известные законы сохранения. Проблема в

том, что диалектика ничего не предсказывает для любой конкретной системы, кроме того, что последняя обязана меняться. В этом смысле она не проверяема, как непроверяем факт нашего существования: мы, из набора освоенных нами понятий (финитной реальности), не можем доказать истинность нашего «пребывания в мире», нужен взгляд из расширенной системы (инфинитной реальности), которой мы не обладаем.

Возвращаясь к понятиям меры и инвариантов, имеет смысл попытаться разобраться, что такое топология, как она появилась (над попытками «умничать» топологическими методами иронизируют даже математики, имея в виду неуместное их употребление в математических диссертациях [6]). Топология – раздел геометрии (хотя сейчас она проникает во все разделы математики), объектами которой являются «фигуры», а точнее их свойства (инварианты), не изменяющиеся при преобразовании координат. Исторически развитие геометрии шло в направлении группы преобразований в евклидовом пространстве: наложения (движения или перемещения), сохраняющие расстояния; подобия, сохраняющие отношение отрезков; аффинные преобразования, сохраняющие отношения параллельных отрезков; проективные преобразования, сохраняющие лишь прямолинейность расположения точек. На рис. 9 представлены примеры [1], чтобы иметь общее представление и отличать их от топологического преобразования, представленного на рис. 6.

Появление дифференциального исчисления привело к возникновению еще одной геометрии (наряду с евклидовой, проективной, аффинной) – дифференциальной. В ней, как и в любой другой геометрии, задача заключается в изучении свойств фигур, сохраняющихся при преобразованиях (отображениях). Один из основателей дифференциального исчисления Лейбниц и заложил основы «геометрического исчисления» для изучения свойств, связанных не с расстоянием (метрикой), а с местом (положением). (В работе [14] по этому поводу делается ссылка на письмо Лейбница к Гюйгенсу от 1679 г.) Первоначально топология так и назвалась *analysis situs* («анализ положения»).

Чтобы оценить, какие возможности открывает топологическая (образная) геометрия, вспомним, что задача преобразований (отображений) фигур состоит в выяснении сохраняющихся их свойств. Для всех перечисленных видов геометрии эти свойства (инварианты) индивидуальны, но все они связаны с величинами и мерами (т. е. метрическими свойствами, которые могут «не замечать» топологических свойств:

размерность, связность, хаусдорфовость и т. д.). Метрика вводится, чтобы с ее помощью определить понятие открытого множества. Но можно и не вводя метрики определить в множестве X систему открытых множеств посредством аксиом. Этот путь и привел к топологическим пространствам (Y, τ) [12]. **Топологией** (топологической структурой) в множестве X называется система τ его подмножеств G такая, что:

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$ и $\bigcap_{k=1}^n G_{\alpha} \in \tau$,

причем топология есть обобщение метрики, сопоставляющей элементам множества X (разнообразной природы) число $\rho: X \times X \rightarrow R$, $(x, y) \rightarrow \rho(x, y)$.

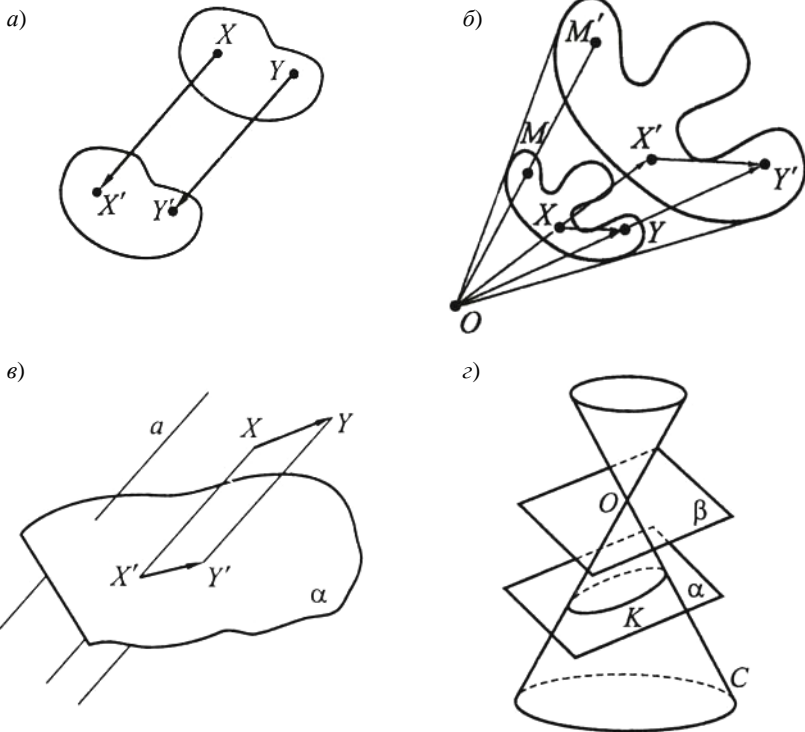


Рис. 9. Простые примеры преобразований (отображений): а) наложение; б) подобия; в) аффинное; г) проективное [1].

Во всяком метрическом пространстве можно вводить топологическую структуру (метрика однозначно определяет топологию). Но не всякая топология метризуема. Если за «топологическое мышление» (за топологию τ , «картинку») отвечает правое полушарие, а за метрику (понятие расстояния ρ) – левое, то следует признать картиночное мышление более «богатым», способным генерировать разный набор понятий – слов, отвечающих одному и тому же зрительному образу. То есть «картинку» (τ) можно интерпретировать разным набором слов-метрик (ρ) [16]. В этом учебнике приводится пример двух топологически эквивалентных пространств (интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и числовой прямой; гомеоморфизм между ними задается функцией $x \rightarrow \operatorname{tg} x$, (рис. 10, а) с разными метрическими свойствами: прямая – полное пространство, а интервал – нет. (Напомним: полными называются метрические пространства, в которых любая фундаментальная последовательность является и сходящейся, причем к элементу этого же пространства. Например, в пространстве рациональных чисел с метрикой $\rho(a_1, a_2) = |a_1 - a_2|$ фундаментальная последовательность $a_n = (1 + 1/n)^n$, $n = 1, 2, \dots$ не имеет предельного элемента, так как ее предел, т. е. число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ не рациональное.)

б)

Рис. 10. К иллюстрации топологически эквивалентных пространств с разными метрическими свойствами (а) и отсутствия топологической эквивалентности из-за наличия разрыва у обратного отображения (б).

Топологическая эквивалентность достигается (там, где она достигается) с помощью гомеоморфизмов, т. е. отображений пространств друг в друга при условии их непрерывности и обратимости в обе стороны. На рис. 10, б отображение $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1 \subset R^2$ действует по правилу: $f(t) = (\cos t, \sin t) \quad \forall t \in [0, 2\pi)$. Оно непрерывно и обратимо. Однако обратное отображение $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ в точке $(1, 0)$ имеет разрыв и гомеоморфности нет. В то же самое время единичная окружность

$x^2 + y^2 = 1$ при отображении **замкнутого** интервала $[0, 2\pi]$ ему топологически эквивалентна [17]: это линии (отрезки), хотя $[0, 2\pi]$ задан в R , а S^1 – в R^2 .

Гомеоморфизм двух пространств ($X \sim^{top} Y$) означает, что они принадлежат одному **топологическому типу**. В этом случае говорят о так называемых топологических свойствах пространств, которыми последние обладают (или не обладают) одновременно. Мы сейчас перечислим некоторые из них, а некоторые рассмотрим более подробно, но существует мнение [6], что совпадающих свойств «не так много, как думается». Гомеоморфизм сохраняет связность, стягиваемость, размерность, эйлеровы характеристики, хаусдорфовость, компактность и др.

Связность топологического пространства указывает на то, что его нельзя разбить на два непустых открытых множества (рис. 11, а иллюстрирует ситуацию, когда такое разбиение возможно, т. е. для U и V , принадлежащих топологии Ω_x имеет место $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$). Рисунки 11, б, в относятся к уравнению

$$dx/dt = x^3 + ax + \varepsilon \tag{2.7}$$

при $\varepsilon = 0$ (рис. 11, б) и при $\varepsilon \neq 0$ (рис. 11, в).

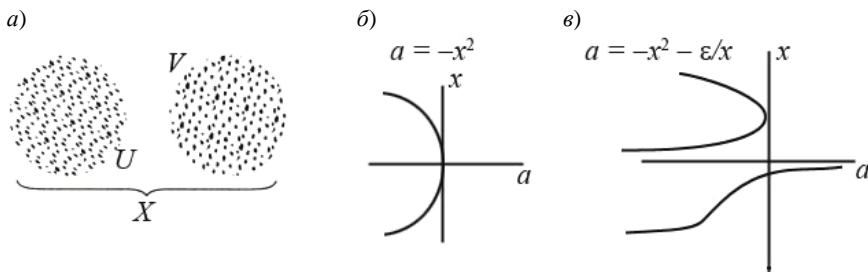


Рис. 11. Несвязное пространство $X(a)$, связный (б) и несвязный (в) графики [1, 2].

При возмущении правой части (2.7) малым членом ε график зависимости $x(a)$ теряет связность, что ведет к скачкам («катастрофам»).

Свойство **хаусдорфовости** связано с возможностью отделимости «точек»: $\forall a, b \in X (a \neq b)$ существуют окрестности $U, V \in \Omega_x$ такие, что $a \in U, b \in V$ и $U \cap V = \emptyset$ (рис. 12). Это свойство передается по наследству: подпространство $U' \subset U$ также хаусдорфово. Этим свойством не обладает, например, связность.

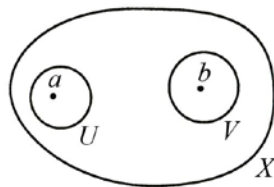


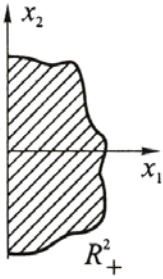
Рис. 12. К понятию хаусдорфовости.

Компактность пространства является его топологическим свойством. (Напомним, что компактным называется пространство, если всякое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.)

Для **многообразий** (топологических пространств, в окрестности каждой точки которых можно ввести локальную систему координат, т. е. линий, поверхностей) топологическим инвариантом является **размерность**. Это следствие знаменитой теоремы Л. Брауэра (об инвариантности области) – многообразие не может гомеоморфно отображаться в пространствах разной размерности. Если этому факту придать метафорический смысл, то можно сказать, что попытки с помощью «непрерывной логики» (взаимно однозначных и непрерывных преобразований) перетащить многообразие в пространство более высокой размерности (усложнить, «развить» его) бессмысленны. Творчество – это процесс разрывный, нужны шаги, смысл которых заранее не заложен в биекции гомеоморфизма.

На глубокие топологические связи между замкнутым множеством n -мерного евклидова пространства и дополнительной частью пространства указывает закон двойственности Понтрягина, придавая которому метафорическую интерпретацию можно сказать, что эти связи обеспечивают существование «нормальной (по Т. Куну [15]) науки, действующей в рамках фиксированной парадигмы. В этом случае финитная реальность моделируется n -мерным многообразием с краем, причем краевые точки (рис. 13) имитируют частично инфинитную границу замкнутого пространства $R_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_1 \geq 0\}$. Гомеоморфизм $f : U \rightarrow R_+^n$ переводит точку x_0 на границу полупространства. Совокупность краевых точек многообразия X образует его **край** (обозначается ∂X).

а)



б)

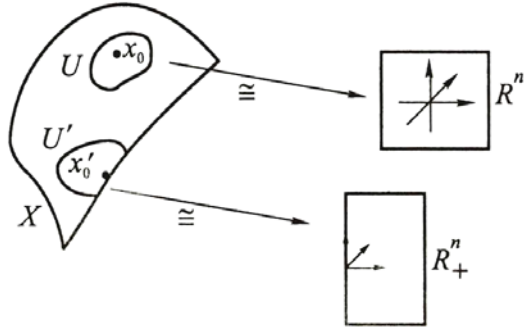


Рис. 13. Замкнутое полупространство (а) и гомеоморфизм окрестностей U и U' n -мерному евклидову пространству R^n или полупространству R_+^n [1].

Окрестности внутренних точек многообразия в силу гомеоморфности преобразуются в рамках фиксированной («плоскостной») логики, пока не достигается край (частично инфинитная граница), окрестности точек которого не гомеоморфны R^n (это опять же следствие теории Брауэра об инвариантности области). «Край замкнутого полупространства совпадает с граничной гиперплоскостью: $\partial R_+^n \cong R^{n-1}$. Из этого следует, что край n -мерного многообразия с краем сам является $(n-1)$ -мерным многообразием **без края**» [1], т. е. делается **открытым**. Например, для круга D^2 край есть окружность: $\partial D^2 = S^1$, которая гомеоморфна числовой прямой R^1 .

Таким образом (продолжаем метафору), чтобы быть в «тупике» надо оказаться «на краю» и осознать свое незнание: неработоспособность одного из измерений (например, неустойчивость процесса по одной из фазовых переменных). У оставшегося $(n-1)$ -мерного многообразия края нет, оно становится открытым для творчества (механизм последнего – негомеоморфные «преобразования»).

Все эти метафорические «опошления» можно дополнить рассуждением [14], что процесс понимания у человека начинается с восприятия образа (топология), перевода его в «вербальное поле» и формирование понятия, путем установления метрических свойств (своеобразные: тезис, антитезис, синтез). К этой картине стоит добавить, что восприятие (формирование) образа (т. е. построение новой топологии) уже требует

2. Топологическая эквивалентность детерминистических систем

каких-то новых понятий (предпонятий), иначе и образу взяться неоткуда. То есть вся эта триада, видимо, не четкие ступени, а своеобразная итерационная карусель, которая «заканчивается», когда новое понятие (его работоспособность) проверено практикой.

Все эти топологические свойства на прикладном уровне «заземляются» в понятиях фазового портрета, его грубости, устойчивости и, в конечном итоге, в выяснении типов катастроф.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВ (КЛАССИФИКАЦИЯ СТАНДАРТНЫХ КАТАСТРОФ)

В данном разделе будут излагаться элементы теории катастроф (по существу это новый раздел математического анализа) с использованием как учебной, так и вспомогательной литературы [2, 4, 5, 7, 18, 23, 24]. Разумеется не ставится задача освоения теории, но познакомить читателя с основными ключевыми понятиями, которые развивают идеи топологической эквивалентности, чтобы представить классификацию катастроф попытаться можно. Хотя бы для того, чтобы не «шарахаться» от терминологии (новой для гидрометеорологов) и трезво оценивать возможности теории. За основу будет взята логика изложения учебного пособия [2] с привлечением других упомянутых изданий.

Вернемся к записи динамической системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, \vec{c}) = -\frac{\partial V(\vec{x}, \vec{c})}{\partial \vec{x}}, \quad \vec{x} \in R^n, \vec{c} \in R^r, V \in R \quad (3.1)$$

[здесь R^n и R^r – пространство внутренних переменных – параметров состояния системы (3.1) \vec{x} и внешних переменных (управляющих параметров) \vec{c}].

Моделью (3.1) задается отображение

$$f : R^n \times R^r \rightarrow R. \quad (3.2)$$

Примером может служить модель формирования стока с речного водосбора

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{\dot{X}}{\tau} = -\frac{\partial V}{\partial Q}, \quad (3.3)$$

которой соответствует отображение

$$f : R^1 \times R^3 \rightarrow R,$$

где $Q \in R^1; k, \tau, \dot{X} \in R^3; V \in R$.

Далее изложение будет происходить по такой схеме. Сначала (на примере потенциала, рассмотренного в разделе 1) будет дана геометрическая иллюстрация многообразия катастроф и бифуркационного множества. Затем представлена таблица типовых катастроф для многочленов, содержащих не более двух внутренних и пяти внешних переменных. Провести классификацию для общего случая не удастся – появляются так называемые непрерывные инварианты-модули.

Поясним ситуацию с привлечением гидрологического примера в определенном смысле отражающим ситуацию с появлением понятия модуля. Представленная ниже таблица «типовых» катастроф разделяет динамические системы на классы эквивалентности. При этом классифицирующий признак меняется дискретно – скачком. Причем удачная классификация обеспечивает «возможность “подойти” к любой динамической системе сколько угодно близко по цепочке структурно устойчивых систем» [16] путем малого возмущения. На математическом языке это означает, что множество структурно устойчивых динамических систем M должно быть **плотным** в пространстве динамических систем N , т. е. если $\bar{M} \subset N$. Если это не так, то возможны типичные изменения систем, состоящие из одних бифуркаций, т. е. только качественных скачков. Это происходит, когда классифицирующий признак может меняться непрерывно [16]. Непрерывно изменяющиеся инварианты и называются модулями, которые рекомендуется избегать.

Что-то похожее можно проиллюстрировать на примере пространства динамических систем, определяемых дифференциальными уравнениями для начальных моментов (см. [10]):

$$dm_1/dt = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})m_1 - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}} + \bar{N}; \quad (3.4)$$

$$dm_2/dt = -2(\bar{c} - G_{\bar{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\bar{c}\bar{N}}m_1 + G_{\bar{N}}; \quad (3.5)$$

$$dm_3/dt = -3(\bar{c} - 1,5G_{\bar{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\bar{c}\bar{N}}m_2 + 3G_{\bar{N}}m_1; \quad (3.6)$$

$$dm_4/dt = -4(\bar{c} - 2G_{\bar{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 14G_{\bar{c}\bar{N}}m_3 + 6G_{\bar{N}}m_2, \quad (3.7)$$

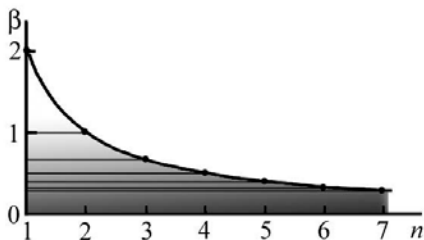


Рис. 14. Сгущение дискретного спектра значений параметра неустойчивости $\beta = G_{\tilde{c}} / \bar{c}$ при увеличении порядка момента n .

где m_i – начальные моменты; $c = \bar{c} + \tilde{c}$, $N = \bar{N} + \tilde{N}$ (здесь $c = 1/k\tau$; $N = \dot{X}/\tau$; k – коэффициент стока, τ – время релаксации речного бассейна); \bar{c} , \bar{N} – математические ожидания; \tilde{c} , \tilde{N} – белые шумы; \dot{X} – осадки; $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ – интенсивности и взаимная интенсивность шумов.

Классифицирующим признаком будем считать число уравнений с устойчивыми моментами, а внешним управляющим параметром – $n(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})$, $n = 1, 2, 3, 4$. В зависимости от отношения $\beta = G_{\tilde{c}} / \bar{c}$ устойчивость теряют последовательно четвертое – первое уравнения системы (3.4) – (3.7), рис. 14, т. е. управляющий параметр является бифуркационным.

После каждой бифуркации, при увеличении β , отбрасывается уравнение с неустойчивым решением (благо, что система (3.4) – (3.7) «развязана»: младшие моменты не зависят от старших). Таким образом все пространство динамических систем разбивается на классы эквивалентности. В интервале $0,5 - 0,67$; $0,67 - 1$; $1 - 2$ системы плавно эволюционируют в рамках фиксированного числа моментов и относятся к определенному типу распределений (например, при $n = 4$ имеем кривую Пирсона 4-го типа, при $n = 2$ – нормальное распределение). Между этими классами («толстых» множеств) имеются границы раздела, состоящие из «тощих» множеств переходных процессов (причем, в данном случае, управление переходом между классами зависит не только от критического значения β , но и от условия отбрасывания очередного уравнения с неустойчивым решением; этим условием обеспечивается скачкообразное изменение классифицирующего признака).

Теперь предположим, что в системе (3.4) – (3.7) много уравнений с аналогичной структурой формулы для управляющего параметра. Это чисто умозрительное допущение не соответствует линейному формирующему фильтру, для которого надо применять только четыре начальных момента, и мы его используем, чтобы дать хотя и некор-

ректное, но по возможности наглядное представление об инвариантах-модулях. При $n \rightarrow \infty$ спектр β становится практически сплошным, и любое «шевеление» β влечет качественное изменение системы; младшие моменты при этом остаются устойчивыми и, в рамках маломоментного приближения, система доступна изучению. Но это возможно только в рамках «развязанной» системы. Если же и младшие моменты зависят от старших (это случай нелинейных уравнений), то действительно имеем развитие, состоящее из одних бифуркаций, без медленных эволюций. «Это кажется бессмысленным» [16], но, по-видимому, примерно такой сценарий содержится в гипотезе Лере: турбулентность – это процесс постоянного разрушения старых решений и возникновения новых. К этой гипотезе следовало бы добавить, что решения разрушаются не полностью, а только на уровне старших моментов.

Появление непрерывных инвариантов-модулей осознается как познавательный тупик в духе Н. Кузанского [13]: знание о своем незнании, которое, по-видимому, стимулирует математиков на поиск новых явлений в частично инфинитной реальности. Инфинитная реальность и становится только «частично инфинитной» благодаря осознанию своего незнания. Красноречиво выглядит признание авторов основополагающей книги по рассматриваемой тематике ([5], стр. 203): «К сожалению, все перечисленные результаты получены сравнением независимо доказанных классификационных теорем, ни одну из которых не удалось вывести из другой».

Интерпретация классификационной таблицы катастроф (см. ниже) требует глубокого осмысления ряда понятий [2], но дать геометрическую иллюстрацию многообразия катастроф и бифуркационного множества можно на примере сборки Уитни. Функция катастрофы (потенциал) имеет вид

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \quad (3.4)$$

Многообразием катастрофы M отображения $f: R^n \times R^r \rightarrow R$ называется множество его (f) **критических точек** вместе с диффеоморфной картой, либо атласом [2]. Понятие карты (и ее обобщения – атласа) появляется в связи с тем, что многообразие должно «куда-то» гладко (дифференцируемо) вкладываться (обычно в R^n). Для этого

надо иметь (построить) взаимнооднозначное отображение на R^n . Делается это с помощью **карты**, т. е. локальной системы координат (рис. 15). Объединение согласованных между собой карт V_α , покрывающих все многообразие ($\cup_\alpha V_\alpha = M$), называется **атласом** многообразия.

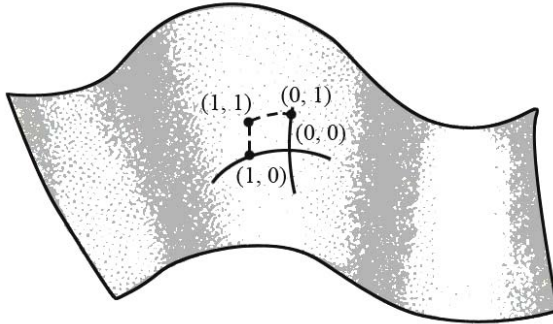


Рис. 15. Пример многообразия с краем с криволинейными координатами.

В нашем случае критические точки порождают поверхность равновесия (сборку) в пространстве $R^1 \times R^2$, уравнение которой следует из равенства $dV/dx = 0$:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (3.5)$$

(см. рис. 16; подобные картинки встречаются в разных вариантах [2, 4, 5, 18, 21, 24]).

Возьмем карту $Y = \{(x, a)\}$ (можно и другую) и введем отображение $\pi: Y \rightarrow M$, действующее по правилу $\pi(x, a) = (x, a, b) \in M$ (здесь $b = -x^3 - ax$, см. (3.5)). Для отображения π матрица Якоби будет

$$J(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3x^2 - a & -x \end{pmatrix}$$

(независимо от значений a и x ранг $J(\pi)$ равняется двум; поэтому π не имеет критических точек и M – гладко).

Отображение катастрофы ($\chi: M \rightarrow C$) определяется как проекция M в пространство управляющих параметров ($a, b \in C \equiv R^2$), действующее по правилу $(x, a, b) \rightarrow (a, b)$. **Особая точка** отображения $f: R^1 \times R^2 \rightarrow R$ есть критическая точка отображения χ в пространстве $R^1 \times R^2$, а **особое множество** F отображения f – совокупность всех особых точек.

В карте (x, a) отображение катастрофы действует по правилу [2]

$$\chi(M) = \chi(\pi(x, a)) = \chi(x, a, -x^3 - ax) = (a, -x^3 - ax) = (a, b) \in C,$$

т. е. отображение катастрофы задается набором правил

$$\chi: \begin{cases} a = a, \\ b = -x^3 - ax. \end{cases}$$

Учитывая, что в данном случае $J(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 - a & -x \end{pmatrix}$, критические точки χ определяются условием $\det J(\chi) = a + 3x^2 = 0$. Следовательно множество F в карте (x, a) задается точками поверхности многообразия катастрофы $M = \{(x, a, -x^3 - ax)\}$, в которых $a = -3x^2$. То есть особое множество F есть многообразие $\{(x, -3x^2, 2x^3)\}$, представляющее собой линию по месту складывания поверхности (рис. 16).

Образ особого множества F в пространстве управляющих параметров (C) при отображении катастрофы χ называется бифуркационным множе-

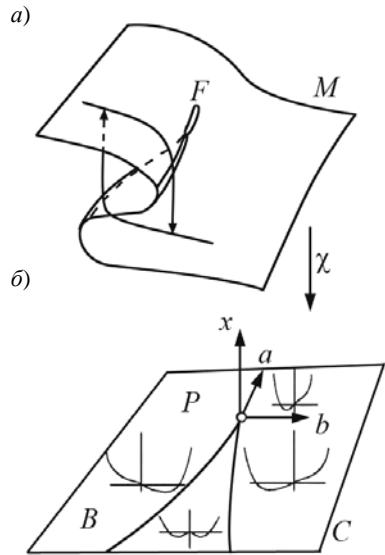


Рис. 16. Многообразие катастроф (а) и бифуркационное множество (б) [2, 18, 24].

ством (B на рис. 16, б). Оно получается, если в особом множестве F оставить только компоненты, соответствующие управляющим параметрам a и b : $B = \{(-3x^2, 2x^3)\}$. Уравнение для B в плоскости параметров ($a = -3x^2, b = 2x^3$) имеет вид $4a^3 + 27b^2 = 0$, т. е. представляет собой полукубическую параболу с выступом в точке P (рис. 16, б).

Метаморфозы, происходящие с потенциальной функцией при пересечении бифуркационного множества, представлены на рис. 16, б. При пересечении левой бифуркационной границы появляется второй минимум, который исчезает за пределами правой границы. В учебном пособии [2] подобная геометрическая иллюстрация многообразий катастроф приводится не только для сборки, но и для других типов катастроф.

Геометрический образ многообразия катастроф и его проекция на плоскость управляющих параметров позволяют наглядно показать так называемые **флаги катастроф**. На рис. 17 представлены два из них: **прыжок** (скачок) и **гистерезис**. При плавном изменении управляющих параметров (a, b) по пути в C справа налево (сплошная линия), в многообразии катастроф M путь вынужден (из-за складки) «прыгать» (по внутренней переменной x) с одного листа поверхности (нижнего) на другой (верхний).

(Пути некуда деваться, так как лист многообразия «заканчивается». Максимум и минимум потенциальной функции сливаются при выходе из области рис. 16, б.) Гистерезис возникает при изменении направления пути (см. штриховую линию на рис. 17). Тут также возникает прыжок, но при оставлении бифуркационного множества на другой стороне области. Из-за того, что прыжки реализуются только при покидании путем бифуркационной области (пересечении бифуркационной границы), позволило Р. Тому [28] сформулировать **принцип мак-**

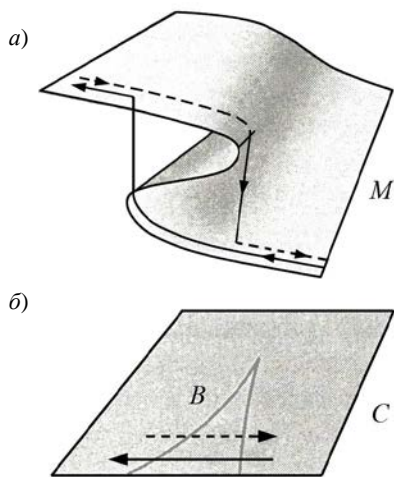


Рис. 17. Иллюстрация прыжка (сплошная линия) и гистерезиса (штриховая линия) в M (а) и в C (б) (см. [18]).

симального промедления: прыжок совершается, когда у системы «не остается другого выбора» (см. [22]). (Прыжки возможны в любой точке бифуркационной области, но при искусственном «принуждении» системы к этому, например, индуцировании скачка шумом определенной интенсивности.) Кроме скачка и гистерезиса возможны и другие явления (см. [18]).

С учетом более общего двумерного случая $f : R^2 \times R^5 \rightarrow R^1$ классификация катастроф имеет вид (см. [2, 5, 18, 23]), представленный в табл. 3.1. В ее основе лежит классификационная теорема Тома [2, 28]: в типичном случае r -параметрическое семейство гладких функций $f : R^n \times R^r \rightarrow R^1$ для всякого n и всех $r \leq 5$ структурно устойчиво и эквивалентно вблизи любой точки одной из форм, представленной в табл. 3.1 (для $r < 5$). Буквами M и N в ней обозначены так называемые морсовские части (см. [2, 18]).

Таблица 3.1

Классификация катастроф для $r < 5$

Тип Катастрофы Том/Арнольд	Форма катастрофы		corank(f)	codim(f)	$\sigma(f)$
	Росток	Возмущение + морсовская часть			
складка / A_2	x^3	$c_1x_1 + (M)$	1	1	3
сборка / A_3	$\pm x^4$	$c_2x + c_1x^2 + (M)$	1	2	4
ласточкин хвост / A_4	x^5	$c_3x + c_2x^2 + c_1x^3 + (M)$	1	3	5
бабочка / A_5	$\pm x^6$	$c_4x + c_3x^2 + c_2x^3 + c_1x^4 + (M)$	1	4	6
эллиптическая омблика / D_4^-	$x_1^2x_2 - x_2^3$	$c_3x_1 + c_2x_2 + c_1x_1^2 + (N)$	2	3	3
гиперболическая омблика / D_4^+	$x_1^2x_2 + x_2^3$	$c_3x_1^2 + c_2x_2 + c_1x_1 + (N)$	2	3	3
параболическая омблика / D_5	$x_1^2x_2 + x_2^4$	$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1^2 + c_4x_2^2 + (N)$	2	4	4

Эта таблица позволяет с помощью трех чисел (коранга функции – corank(f), коразмерности функции – codim(f) и числа определенности

функции – $\sigma(f)$ устанавливать, к какой катастрофе относится наблюдаемая вырожденная особенность. (Форма катастрофы в табл. 3.1 представлена тремя слагаемыми: ростком, возмущением и морсовской частью. Эти термины, а также – коранг, коразмерность и число определенности подробно рассмотрены в цитируемой литературе, см., например, [2]. В РИО РГГМУ запланировано издание соответствующей литературы с разбором этих понятий в адаптированном для магистрантов виде.)

Разумеется, представленная таблица не исчерпывает имеющуюся на сегодняшний день классификацию особенностей (см. [5]). Для случая вырождения 2 при коразмерностях больших 5 появляются уже упоминавшиеся модули, неустранимые диффеоморфной заменой переменных. Не затрагивает таблица вопросы особенностей и бифуркации в динамических системах. Но даже то, что проклассифицировано на практике представляется экзотикой (рис. 18).

Надо ли гидрометеорологам осваивать всю эту изощренную технику (см. [2, 5]). Тип катастрофы идентифицируется при известном виде функции $f : R^{n+r} \rightarrow R$. Причем речь идет о статике: мы начали с рас-

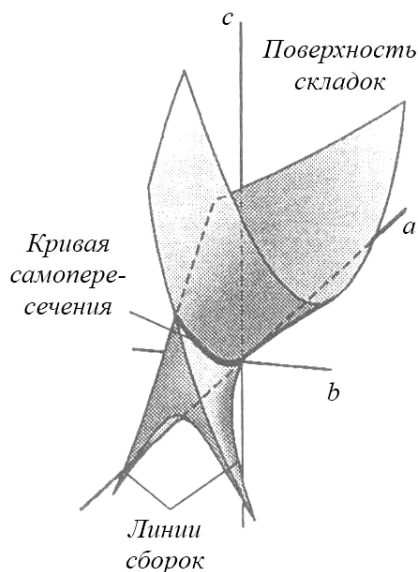


Рис. 18. Бифуркационное множество катастрофы «Ласточкин хвост» [18].

смотрения потенциальной функции, соответствующей стационарному режиму. В гидрометеорологии повсеместно используется класс распределений К. Пирсона, динамическим ядром модели которого является дифференциальное уравнение

$$dy/dt = -ay + b,$$

потенциал для которого вообще не приводит к катастрофам. Правда, эмпирические данные часто указывают на двухмодальность, являющуюся флагом катастрофы сборки. При этом у гидрологов возникает много вопросов: 1. Достаточна ли длина ряда,

чтобы вторую моду считать статистически значимой? 2. Как описывать подобные распределения: для нелинейных моделей система уравнений для моментов не замкнута, и т. д. (В настоящее время даже для линейной системы (3.14) – (3.17) не используется четвертый момент.) Поэтому подобное (двухмодальное) усложнение осмысленно пока только для научных целей. Что уж говорить о больших n (или нескольких фазовых переменных, например Q, E и ΔU) и r (параметрических шумах). Но, даже, если такая потребность возникнет, все равно без профессионального математика не обойтись.

Сами математики [4, 7] часто иронизируют над спекулятивными аспектами теории катастроф. В книге Босса ([7], глава 6 «Бифуркации и катастрофы») раздел 6.4 заканчивается так: «Книга (Беккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977 – В.К.) как нельзя кстати, начинается с китайской притчи. Некий Чжу, дескать, все отдал, чтобы научиться убивать драконов. Долго учился, достиг совершенства, но ни один дракон так ему и не встретился. “И тогда [тут авторы ссылаются на Ренэ Тома] он начал учить других искусству убивать драконов”».

Преподавание этого искусства (курс «Теория катастроф») пытались внедрить на гидрологическом факультете РГГМУ пока не разобрались, что «драконы» (см. рис. 18) вряд ли встретятся. Более того, по словам того же Босса [7]: «...в целом аппаратная часть теории в значительной степени замкнута в себе. Поэтому прикладная востребованность близка к нулю, если говорить об упрощенном взгляде на предмет. Философская составляющая наоборот, существенна и нетривиальна...»

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие охватывает небольшую часть программы дисциплины «Моделирование природных процессов», которая базируется на бывшем курсе «Частично инфинитное моделирование гидрологических процессов». Предполагается, что в следующем году будет издано аналогичное по объему учебное пособие, посвященное фрактальной диагностике рядов измеренных значений гидрологических характеристик с приложениями в виде программного обеспечения диагностической методики. Диагностика позволяет правильно оценить необходимое число фазовых переменных, которые необходимо использовать для моделирования развивающихся объектов. Она является основным этапом «Частично инфинитного моделирования и прогнозирования». После этого предполагается издать полноценный учебник по моделированию природных процессов, который будет представлять третью обновленную часть действующего учебника по моделированию гидрологических процессов.

Существенное место в нем будут занимать философско-методологические вопросы, включая деструкцию онтологии, предпринятую М. Хайдеггером. В настоящее время все чаще появляются работы, в которых словам «диалектический материализм» предшествует ироничное словосочетание «так называемый». Требуют «метризуемости» используемых в нем понятий (см., например, [9]), в частности, понятия «прибавочная стоимость». Иначе, дескать, диалектический материализм не может применяться на практике. О чем это говорит? О том, что многие люди не понимают места философии в общественном сознании. Это не строгая наука, где все доказывается (хотя и это иллюзия) и просчитывается. Она призвана не алгоритмизировать конкретные действия, а создавать определенное мироощущение. Диалектика создает ощущение творческого характера мироздания. Новое отрицает (заметим – диалектически) старое и само (пройдет время) уступит место еще более новому. Все это очень созвучно частично инфинитному подходу к изучению и моделированию природных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Д. Геометрия: учебник/А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. – 2-е изд., исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 624 с.
2. Алексеев Ю. К., Сухоруков А. П. Введение в теорию катастроф. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 184 с.
3. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой: Лекции соровского профессора. Учеб. Пособие. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.
4. Арнольд В. И. Теория катастроф. – М.: «Наука», 1990. – 128 с.
5. Арнольд В. Н., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. – 3-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2009. – 672 с.
6. Босс В. Лекции по математике. Т.13: Топология: Учебное пособие. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 216 с.
7. Босс В. Лекции по математике. Т.7: Оптимизация: Учебное пособие. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 216 с.
8. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: Постмаркет, 2001. – 184 с.
9. Диалектика и атеизм: две сути не совместны. – М.: Изд-во «Общественная инициатива», 2005. – 442 с.
10. Коваленко В. В. Гидродинамическое моделирование природных процессов: философско-методологические основания частично инфинитного моделирования в гидрологии. Учебное пособие. – СПб.: изд. РГГМУ, 2014. – 40 с.
11. Коваленко В. В. Метаморфоз понятий частично инфинитной гидрологии в контексте деструкции онтологии М. Хайдеггером. – СПб.: изд. РГГМУ, 2015. – 132 с.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
13. Кузанский Н. Сочинения в 2-х томах. (Т.1). Об ученом незнании. – М.: Мысль, 1979. С. 47 – 184.
14. Кузовлев В. П., Подаева Н. Г. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 208 с.
15. Кун Т. Структура научных революций: Пер. с англ. / Т.Кун; Сост. В. Ю.Кузнецов. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 608 с.
16. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2000. – 336 с.
17. Мищенко А. С., Фоменко А. М. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
18. Острейковский В. А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. – 326 с.
19. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947.
20. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. Учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 144 с.

-
21. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
 22. Федоров В. Д., Ильманов Т. Г. Экология. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 464 с.
 23. Хакен Г. Синергетика. – М.: «Мир», 1980. – 406 с.
 24. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
 25. Lorenz E. N. (1963). «Deterministic Non-Periodic Flow», J. Atmos. Sci. **20**. 130 – 141.
 26. Lorenz E. N. (1984). «The local structure of a Chatic Attractor in Four Dimensions», Physica **20**. 90 – 104.
 27. Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, t. 1–3, p., 1892 – 99.
 28. Thom R. Stabiliti structurelle et mopheginise. – Benjamin, New York, 1972.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания	8
Атлас	28
Аттрактор	
– странный	8
– Ресслера	9
Бифуркационный режим	16
Бифуркация	26
Вектор состояния	4
Внутренние переменные	24
Временная развертка	6, 8
Время релаксации	11
Генотип	12
Гистерезис	30
Гомеоморфизм	12, 20, 21
Демпфер	5
Диалектика	17
Инвариант	17, 25
Инфинитное моделирование	3
– реальность	16
Катастрофа	23
– стандартная	24
Классификация катастроф	24, 31
Компактность	20, 21
Край	21
Критическое замедление	15
Линейный формирующий фильтр	26
Многообразия	13, 21
– катастроф	25, 27, 29
– открытое	22
– n -мерное	21
Множество	
– бифуркационное	25
– особое	29
– открытое	20
– плотное	29

Мера	17
Метрика	18, 19
Метрическое пространство	19
Нелинейная динамика	4
Осциллятор	6
– нелинейный	7, 8
Отображение	18, 19, 24, 28
– катастроф	29
Полупространство замкнутое	22
Потенциал	9, 11, 13, 14
Потенциальная функция	10, 13, 30
Принцип максимального промедления	30
Реальность финитная	17
Седло	9
Связность	20
Система	
– автономная	4
– грубая	16
– динамическая	12, 14
– диссипативная	6
– консервативная	6
Теория динамических систем	3, 4
– катастроф	3
– особенностей	24
Типовые катастрофы	25
Топология	3, 12, 17, 18, 20
Топологическая эквивалентность	4, 12, 13, 15, 16, 19, 24
Топологическое мышление	19
– свойства	17
– тип	20
Топологическое пространство	20
Точка бифуркации	15
– критическая	27
– равновесия	11, 16
Узел	9
Управляющий параметр	26
Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)	4, 5

Фазовый портрет	3, 5, 7, 9, 10, 11, 16
– пространство	4, 8
– траектория	5, 6
Философская категория	
– логическое	5, 12
– историческое	5, 12
Фокус	9, 16
– устойчивый	9
– неустойчивый	9
Хаусдорфовость	20, 21
Цикл предельный	8
Частично инфинитное моделирование	5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Основные понятия теории динамических систем	4
2. Топологическая эквивалентность детерминистических систем	12
3. Элементы теории особенностей отображений множеств (классификация стандартных катастроф)	24
Заключение.....	34
Список литературы.....	35
Предметный указатель	37

CONTENTS

Introduction	3
1. Basic concepts of the theory of dynamical systems	4
2. Topological equivalence of deterministic systems	12
3. Elements of the theory of singularities of maps sets (standard classification of catastrophes).....	24
Conclusion	34
References	35
Subject index	37