Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.Н. Веретенников

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

РГГМУ

Санкт-Петербург
2015

УДК 51
ББК 22.1.73

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

Рецензент: Вагер Б.Г., д-р физ.-мат. наук, проф. СПбАСУ.

Веретенников В.Н. Практикум по линейной алгебре. Учебное пособие. — СПб.: РГГМУ, 2015. — 140 с.

ISBN 978-5-86813-429-6

Пособие является третьей частью по математике для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам. Целью практикума является активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы.

Пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории, а также выполнения индивидуальных домашних заданий.

ISBN 978-5-86813-429-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться и студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе «Основные теоретические сведения (опорный конспект)» приводятся основные теоретические сведения и формулы (разумеется, без доказательства). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

В разделе «Вопросы для самопроверки» содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этих заданий – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может использовать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание. Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

1. Матрицы

I. Основные теоретические сведения (опорный конспект)

1. Линейные действия над матрицами.

В основном теоретическом разделе [2] было введено понятие числовой матрицы ***A*** как прямоугольной таблицы чисел. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

содержит ***m*** строк и ***n*** столбцов. Говорят, что она имеет ***тип*** (***размер***) $m \times n$, для нее также принято обозначение $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$. Элементы матрицы ***A*** обозначают малыми латинскими буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, а второй – номер столбца, так, например элемент a_{ij} стоит в ***i***-ой строке и в ***j***-ом столбце матрицы ***A***.

Если число строк в матрице равно числу столбцов $(m = n)$, матрица называется ***квадратной***, а число строк **–** её ***порядком***. Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все её элементы равны нулю, кроме элементов, находящихся на главной диагонали (т.е. кроме элементов $a_{ii}, 1 \le i \le n$). ***Единичные*** матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой*** матрицей.

Равенство матриц

Определение. Две матрицы $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ и $B_{pq} = (b_{ij})_{pq}$ **называются *равными***, если они имеют одинаковый тип и их соответствующие элементы равны, то есть

$$A_{mn} = B_{pq} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p, n = q, \\ a_{ij} = b_{ij}, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n). \end{cases}$$

Обозначение: $A = B$.

Линейными действиями над матрицами называются ***сложение*** и ***вычитание*** матриц, ***умножение*** матрицы ***на число***.

Сложение матриц

Определение. ***Суммой двух матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового типа **называется** матрица $C=(c_{ij})$ того же типа, элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(1\le i\le m; 1\le j\le n)$.

Обозначение: $C=A+B$.

Подчеркнем еще раз, что складывать можно только матрицы с ***одинаковым числом строк*** и с ***одинаковым числом столбцов***.

Разность матриц

Вычитание для матриц (как и для чисел) определяется как действие, обратное сложению.

Определение. ***Разностью*** матриц одинакового типа ***B*** и ***A*** **называется** такая матрица ***X***, что $A+X=B$.

Обозначение: $B-A$.

Умножение матрицы на вещественное число

Определение. ***Произведением матрицы*** $A=(a_{ij})$ ***на число λ*** называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы ***A*** путем умножения их на число ***λ***.

Обозначение: λA. Краткая запись: $\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})=(a_{ij})\lambda$.

Свойства линейных операций с матрицами

1. $A+B=B+A$ – коммутативность (переместительный закон) сложения.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность (сочетательный закон) сложения.

3. Для любой матрицы ***A*** существует единственная матрица, равная нулевой матрице ***O***, такая что $A+O=A$.

4. Для любой матрицы ***A*** существует единственная матрица $(-A)$, **называемая** ***противоположной***, такая что $A+(-A)=O$, где ***O*** **–** нулевая матрица.

5. $1\cdot A=A$.

6. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

7. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

8. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Замечание. Во всех перечисленных выше свойствах λ, μ – произвольные вещественные числа, а ***A, B, C, O*** **–** такие матрицы, для которых осуществимы указанные в этих свойствах операции. Матрица $(\text{-}A)$ из свойства 4 равна $(\text{-}1) \cdot A$.

2. Операция умножения матриц и ее свойства

Определение. Матрица ***A*** **называется *согласованной*** с матрицей ***B***, если число столбцов матрицы ***A*** равно числу строк матрицы ***B*** (если «***ширина***» матрицы ***A*** равна «***высоте***» матрицы ***B***).

Другими словами, матрица A_{mn} согласована с матрицей B_{np}.

Определение. Если матрица $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ ***согласована*** с матрицей $B_{np} = (b_{ij})_{np}$, то их ***произведением*** **называется** матрица $C_{mp} = (c_{ij})_{mp}$, элемент c_{ij} которой определяется по следующему правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, (1 \le i \le m; 1 \le j \le p).$$

Формула означает, что элемент c_{ij} матрицы C_{mp} равен ***сумме произведений элементов i***-ой строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы ***j***-го столбца матрицы B_{np}.

(***Строка матрицы А умножается на столбец матрицы В***). Правило для вычисления произведения матриц проиллюстрировано на следующем рисунке

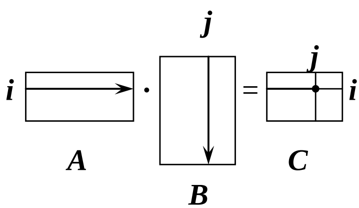


Рис. К определению ***произведения*** матриц

Рассмотрим частный случай ***произведения*** матриц.

Пусть дана матрица-строка $A_{1n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ и матрица-столбец $B_{n1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Матрица $C = AB$ имеет размер 1×1, причем её элемент $c_{11} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$, или

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right).$$

Вычисление произведения матриц

Умножая матрицы вручную, целесообразно расположить их удобным способом. Для этого может употребляться, например, ***схема Фалька***, причем заранее предполагается, что для данных матриц операция ***умножения*** выполнима.

Схема Фалька для умножения двух матриц.

Расположим ***умножаемые*** матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{np}$ и ***произведение*** матриц $AB = C = (c_{ij})_{mp}$ таким образом, чтобы элемент c_{ij} матрицы-произведения ***C*** лежал на пересечении ***i***-й строки ***A*** и ***j***-го столбца ***B*** (см. основной раздел).

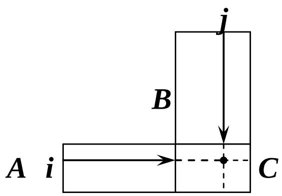


Рис. Иллюстрация к ***схеме Фалька***

Свойства умножения матриц

О коммутативности

Произведение двух матриц в общем случае не обладает свойством коммутативности (переместительности), т.е. $AB \neq BA$.

Значит, в общем случае ***менять местами матрицы-сомножители нельзя***, не изменив их произведения.

Если изменить порядок сомножителей, может оказаться, что вообще умножать матрицы невозможно.

В произведении AB двух матриц ***A*** и ***B*** мы будем говорить, что матрица ***B умножается слева*** на матрицу ***A***, или, что матрица ***A умножается справа*** на матрицу ***B***.

> **Определение**. Матрицы ***A*** и ***B***, для которых $AB = BA$, **называются *коммутативными*** (***перестановочными***).

Примером коммутативных матриц являются квадратная и единичная матрицы одного и того же порядка.

1. $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения).

2. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ (ассоциативный закон относительно скалярного сомножителя).

3. $\begin{matrix}(A+B)C = AC + BC; \\ A(B+C) = AB + AC\end{matrix}$ (дистрибутивные законы).

4. Если матрица ***A*** имеет тип $m \times n$, то равенство $E_m A = AE_n = A$ справедливо только, если E_m, E_n – единичные матрицы ***m***-го и ***n***-го порядка.

Возведение матрицы в степень

Если ***A*** – квадратная матрица, а ***n*** – целое положительное число, то

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ множителей}}.$$

> Матрица A^n называется ***n***-ой степенью матрицы ***A***. При этом
>
> $$A^2 = A \cdot A;$$
>
> $$A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A;$$
>
> $$A^4 = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = A^3 \cdot A$$
>
> и т.д.

Матрица A^2 **называется *квадратом*** матрицы ***A***, а матрица A^3 – её ***кубом***.

3. Транспонирование матрицы

Определение. ***Транспонированием*** матрицы **называется** такое преобразование матрицы, при котором каждая её строка становится столбцом с тем же номером.

В результате транспонирования матрицы получается матрица, **называемая *транспонированной*** по отношению к данной матрице. **Обозначение**: A^T.

Диагональная матрица совпадает со своей транспонированной матрицей. Для двух матриц $\boldsymbol{A}$ и A^T всегда определена операция ***умножения***.

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T = A$.

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathrm{R}$.

4. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ **–** две матрицы. Если произведение $\boldsymbol{AB}$ имеет смысл, то $(AB)^T = B^T A^T$.

II. Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей?
2. Какая матрица называется единичной, квадратной, транспонированной?
3. Сколько элементов содержится в матрице $\boldsymbol{n}$-го порядка?
4. В некоторой матрице 36 элементов. Каких типов она может быть?
5. В некоторой матрице 11 элементов. Каких типов она может быть?
6. Дана квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ с элементами a_{ij} $(1 \le i,\ j \le n)$.

Сколько элементов расположено: а) над главной диагональю; б) на ней; в) под ней?

7. Сколько элементов в квадратной матрице $\boldsymbol{n}$-го порядка расположено над главной диагональю?
8. Постройте матрицы типа 4×4, элементы которых a_{ij} определяются по формулам: а) $a_{ij} = i + j$; б) $a_{ij} = ij$; в) $a_{ij} = (i-j)^2$; г) $a_{ij} = i^2 j + ij^2$.

Симметрично ли расположены элементы этих матриц относительно главной диагонали?

9. Докажите теорему: след суммы двух матриц равен сумме следов этих матриц.

10. Является ли сумма матриц симметрической, если слагаемые – симметрические? Дайте обоснованный ответ.
11. Как определяются линейные операции над матрицами?
12. Как сложить две матрицы и всегда ли это можно сделать?
13. Если сложение матриц определено, сложить матрицы A и B в следующих случаях:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Пусть $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ и $B_{mn} = (b_{ij})_{mn}$. Показать непосредственным вычислением сумм, что $A + B = B + A$.
15. Пусть матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ матрицы типа $m \times n$. Показать непосредственным вычислением сумм, что $A + (B + C) = (A + B) + C$.
16. Как умножить матрицу на число?
17. Каковы свойства линейных операций над матрицами?
18. Как умножить матрицу на матрицу? Всегда ли это выполнимо?
19. Каковы свойства произведения матриц?
20. Выяснить, имеет ли смысл закон коммутативности для прямоугольных матриц. Исследование провести на числовом примере.
21. Выяснить, имеет ли место коммутативность при умножении квадратных матриц одного и того же порядка.
22. Найти произведения $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ (если они определены):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1\\0\\7\\8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9 & 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1\\0\\7\\8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9 & 6\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

23. Показать непосредственным вычислением, что

$A(BC)=(AB)C$, когда $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\1 & 8 & 9\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\2 & 6 & 1\\1 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

24.Даны диагональные матрицы $A=(a_{ii}), B=(b_{ii})$. Записать произведения AB и BA. Что верно для произведений матриц AB и BA?

25. Доказать, что если операции определены, всегда справедливо

$$(A+B)C = AC+BC.$$

26. Даны матрицы A, B, C, D. Предполагая, что все операции определены, доказать, исходя из определения умножения, что

$$(A+B)(C+D)=A(C+D)+B(C+D)=AC+AD+BC+BD.$$

При каких обстоятельствах все операции определены?

27. Даны матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. При каких условиях выполняются следующие равенства:

а) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$;

б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?

III. Примеры решения задач

Пример 1.1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -5 & \pi\\ \sqrt{7} & 0 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{7}\\ -5 & 0\\ \pi & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

а) Указать тип каждой матрицы; б) какие матрицы являются квадратными диагональными?

▲ а) Тип матриц: ***A*** **–** 2×2, ***B*** **–** 2×3, ***C*** **–** 3×2, D – 3×3; квадратными являются матрицы ***A*** и ***D***, а диагональной – только матрица ***D*** . ▼

Пример 1.2. Найти ***сумму*** и ***разность*** двух матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\\ 6 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}.$$

▲ Так как обе матрицы одинакового типа, то их можно складывать. Получаем

$$A+B=\begin{pmatrix}3+1 & 5+2\\ 7+5 & 9+7\\ 6+4 & 8+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 12 & 16\\ 10 & 14\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}3-1 & 5-2\\ 7-5 & 9-7\\ 6-4 & 8-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}. ▼$$

Пример 1.3. Найти a_1, a_2 и a_3, если $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ -3\end{pmatrix}$.

▲ Складывая первую и вторую матрицы в левой части равенства и приравнивая сумму правой части, получаем

$$\begin{pmatrix}a_1+2\\ a_2+3\\ a_3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ -3\end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства двух матриц:

$$a_1+2=7;\ a_2+3=8;\ a_3-1=-3,$$

откуда

$$a_1=5;\ a_2=5;\ a_3=-2.\ ▼$$

Пример 1.4. Произвести указанные действия над векторами:

$$A=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1) 3***A***; 2) **-*B***; 3) $A+4B$; 4) $A+B+C$; 5) $A-B+C$; 6) $3A-2B+4C$.

▲ На основании определения умножения вектора на число имеем

1) $3A=3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 3\\3\cdot 1\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\6\end{pmatrix}$. 2) $-B=-1\cdot\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-5)\\-1\cdot 6\\-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\end{pmatrix}$.

3) На основании определения умножения вектора на число и сложения матриц получаем

$$A+4B=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-20\\24\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\25\\2\end{pmatrix}.$$

4) Пользуясь определением сложения матриц и ассоциативным законом сложения, находим

$$A+B+C=(A+B)+C=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\7\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix}.$$

5) Применяя ассоциативный закон сложения матриц и определения вычитания и сложения матриц, получаем

$$A-B+C=(A-B)+C=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-4\\3\end{pmatrix}.$$

6) На основании определения умножения матрицы на число, определения сложения и вычитания матриц и ассоциативного закона для сложения имеем

$$3A-2B+4C=3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\12\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9-(-10)+4\\3-\quad 12\ +4\\6-\quad 0\ +4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-5\\10\end{pmatrix}.$$ ▼

Пример 1.5. Над векторами

$$A=(2\quad -1\quad 2),\ B=(-1\quad 0\quad 5),\ C=(1\quad 4\quad 3)$$

провести указанные действия:

1) $2A$; 2) $-3B$; 3) $A+B-C$; 4) $2A+B-3C$.

▲ Пользуясь определением умножения матриц на число, имеем

1) $2A=2(2\quad -1\quad 2)=(4\quad -2\quad 4)$. 2) $-3(-1\quad 0\quad 5)=(3\quad 0\quad -15)$.

Пользуясь определением сложения матриц и свойством ассоциативности сложения, получаем

3) $A+B-C=(2\quad -1\quad 2)+(-1\quad 0\quad 5)-(1\quad 4\quad 3)=$

$$=(2+(-1)-1\quad -1+0-4\quad 2+5-3)=(0\quad -5\quad 4).$$

4) $2A+B-3C=2(2\quad -1\quad 2)+(-1\quad 0\quad 5)-3(1\quad 4\quad 3)=$

$$=(4\quad -2\quad 4)+(-1\quad 0\quad 5)-(3\quad 12\quad 9)=$$

$$=(4+(-1)-3\quad -2+0-12\quad 4+5-9)=(0\quad -14\quad 0).$$ ▼

Пример 1.6. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}4&5\\6&1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\\3&-2\end{pmatrix}$.

Найти $2A-3B$.

▲ Используя определения для умножения матрицы на число и вычитания матриц, находим последовательно

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}4&5\\6&1\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10\\12&2\\4&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-3\\6&-9\\9&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&13\\6&11\\-5&12\end{pmatrix}.$$ ▼

Пример 1.7. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}-1&2&3&-2\\3&-3&2&0\end{pmatrix}$ найти противоположную матрицу, а также проверить, что $2A+3A=5A$.

▲ $$-A=(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}-1&2&3&-2\\3&-3&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-3&2\\-3&3&-2&0\end{pmatrix},$$

$$2A+3A=2\begin{pmatrix}-1&2&3&-2\\3&-3&2&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&2&3&-2\\3&-3&2&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&4&6&-4\\6&-6&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6&9&-6\\9&-9&6&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&10&15&-10\\15&-15&10&0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1&2&3&-2\\3&-3&2&0\end{pmatrix}=5A.$$ ▼

Пример 1.8. Даны три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-4&5\\2&1&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&4\\1&-5&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&4&5\\1&-3&2\\8&6&-7\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $3A+4B-2C$.

▲ По определениям произведения матрицы на число и сложения и вычитания матриц находим

$$3A+4B-2C=3\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-4&5\\2&1&-3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&4\\1&-5&6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&4&5\\1&-3&2\\8&6&-7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&6\\9&-12&15\\6&3&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-4&0\\8&12&16\\4&-20&24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&8&10\\2&-6&4\\16&12&-14\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+4-6 & 0-4-8 & 6+0-10 \\ 9+8-2 & -12+12-(-6) & 15+16-4 \\ 6+4-16 & 3+(-20)-12 & -9+24-(-14) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 15 & 6 & 27 \\ -6 & -29 & 29 \end{pmatrix}.$$ ▼

Пример 1.9. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ***X***, удовлетворяющую условию $2A+X=O$, где ***O*** – нулевая матрица.

▲ К равенству $2A+X=O$ прибавим почленно матрицу $-X$ и воспользуемся свойствами 2 и 4 линейных операций с матрицами

$$(2A+X)+(-X)=O+(-X);\ 2A+\big(X+(-X)\big)=O+(-X);$$

$$2A=-X \text{, откуда } X=-2A \text{, т.е.}$$

$$X=-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$$ ▼

Пример 1.10. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Установить, для каких матриц определена операция умножения, и найти эти произведения.

▲ Имеем A_{14}; B_{41}; C_{22}; D_{22}; F_{23}. Сравнивая типы данных матриц, убеждаемся, что определены следующие произведения: AB, BA, CD, DC, CF, DF.

$$AB=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}=\big(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+0\cdot\pi+1\cdot5+(-3)\cdot1\big)=(4).$$

$$BA=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 5\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot 1 & \sqrt{2}\cdot(-3)\\ \pi\cdot\sqrt{2} & \pi\cdot 0 & \pi\cdot 1 & \pi\cdot(-3)\\ 5\cdot\sqrt{2} & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 & 5\cdot(-3)\\ 1\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}\\ \pi\sqrt{2} & 0 & \pi & -3\pi\\ 5\sqrt{2} & 0 & 5 & -14\\ \sqrt{2} & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot3\\ 3\cdot1+4\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 23 & 18\end{pmatrix}.$$

$$DC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4\\ 5\cdot1+3\cdot3 & 5\cdot2+3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 14 & 22\end{pmatrix}.$$

$$CF=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot0\\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot(-1)+4\cdot0\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 15 & 8 & -3\end{pmatrix}$. Произведение DF найти самостоятельно. ▼

Пример 1.11. Показать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ коммутативны.

▲ Так как обе матрицы являются квадратными матрицами одного и того же порядка, то определены произведения AB и BA.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 34\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot6 & 1\cdot4+2\cdot6\\ 3\cdot0+4\cdot6 & 3\cdot4+4\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 6 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot4\\ 6\cdot1+6\cdot3 & 6\cdot2+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\ 24 & 36\end{pmatrix},$$

т.е. $AB=BA$, значит, матрицы A и B коммутативны. ▼

Пример 1.12. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Используя ассоциативность умножения матриц, вычислить ABC.
▲ Имеем $A_{33}; B_{32}; C_{22}$. Сравнивая типы данных матриц, убеждаемся, что определены следующие произведения:

$$(AB)_{32}, (AB)C, (BC)_{32}, A(BC).$$

Решение можно провести двумя способами:

1. $(AB)C$: $\quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 25 & 22 \\ 8 & 8 \end{pmatrix};$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 25 & 22 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ 69 & 16 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. $A(BC)$: $\quad BC = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix};$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ 69 & 16 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}.$$

Оба способа дают, естественно, одинаковый результат. ▼

Пример 1.13. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти произведения AB и BA.
▲ Так как обе матрицы являются квадратными матрицами одного и того же порядка, то определены произведения AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ***A*** и ***B*** **–** делители нуля.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq O. \ \blacktriangledown$$

Пример 1.14. Найти матрицу, транспонированную по отношению к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

▲ В соответствии с определением транспонирования матрицы получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & -8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},\ C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}. \ \blacktriangledown$$

Пример 1.15. Найти $2A^T + B$, если даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

▲ Т.к. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $2A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -10 & -8 & -12 \end{pmatrix}$, то

$$2A^T + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -10 & -8 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \ \blacktriangledown$$

Пример 1.16. Найти $A - 3B^T$, если даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 23 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Поскольку $B^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $3B^T = \begin{pmatrix} 27 & 24 & 21 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, то

$$A - 3B^T = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 23 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 24 & 21 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}. \text{ ▼}$$

IV. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить $x, y, z \in \mathbf{R}$ из следующего матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} x & 2x+y \\ x+z & 2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -22 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 6,\ y = -10,\ z = -2$.

2. Какие из следующих высказываний верны? а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0-0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 \\ x-x & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ при $x \in \mathbf{R}$.

Ответ: пункты а) и в) – не верны; б) – верно.

3. Найти компоненты b_1, b_2 и b_3 вектора B, если $5 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $b_1 = \frac{3}{5},\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{4}{5}$.

4. Чему равны компоненты w_1, w_2, w_3 вектора $\mathbf{W}$, если

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

5. Что можно сказать о компонентах a_1, a_2, a_3 и a_4 вектора $\boldsymbol{A}$, если

$$0 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: a_1, a_2, a_3 и a_4 – любые числа.

6. Даны матрицы ***A***, ***B***, ***C***.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

а) $2A-3B-C$; б) $A+2B-3C$; в) A^T+2B+C^T; г) $2A-B^T+2C^T$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 8 & -8 & -7 \\ -1 & -19 & -8 \\ -7 & 17 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 10 & -15 \\ 4 & 9 & -1 \\ -5 & -11 & -12 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ 6 & 13 & 19 \\ 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 16 \\ 9 & 19 & 19 \end{pmatrix}$.

7. Упростить, вынося за скобки общий для всех элементов множитель, следующие матрицы:

$$а)\ A=\begin{pmatrix} 0.00920 & 0.00011 & 0 \\ 0.00034 & -0.00217 & 0.00024 \end{pmatrix};$$

$$б)\ B=\begin{pmatrix} x^2 & x^3y & 2x \\ x^3-x & 3x^2 & x^2-x \end{pmatrix};\ в)\ C=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{2}{15} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Ответ: Возможные упрощения: а) $A=10^{-5}\begin{pmatrix} 920 & 11 & 0 \\ 34 & -217 & 24 \end{pmatrix}$;

б) $B=x\begin{pmatrix} x & x^2y & 2 \\ x^2-1 & 3x & x-1 \end{pmatrix}$; в) $C=\dfrac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}$.

8. Определить ***X*** и ***Y***, если $X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $X-Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X=\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$.

Найти матрицу ***X***, удовлетворяющую условию:

а) $2A-X=O$; б) $3A+X=O$; в) $2A+3X=O$.

Ответ: а) $X=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 18\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-9 & -18\\ -18 & -27\end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -4 & -6\end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Найти матрицу ***X***, удовлетворяющую условию: а) $A+X=E$;

б) $3A-2X=E$, где ***E*** – единичная матрица.

Ответ: а) $X=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$.

11. Известно, что $A_{23}B_{34}=C_{ml}$.

Чему равны ***m*** и ***l*** – размеры матрицы ***C***? ***Ответ***: $m=2, l=4$.

12. Известно, что $A_{34}B_{nl}=C_{35}$. Найти ***n*** и ***l***. ***Ответ***: $n=4, l=5$.

13. Известно, что $A_{4n}B_{k5}=C_{45}$. Найти зависимость между ***n*** и ***k***.

Ответ: $k=n$.

14. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & 4 & -7\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 6 & 4 & 8\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 6\end{pmatrix}.$$

Существуют ли произведения: 1) ***AB***; 2) ***BA***; 3) ***BC***; 4) ***CB***; 5) ***CD***; 6) ***DC***; 7) ***AC***; 8) ***CA***; 9) ***BD***; 10) ***DB***?

Ответ: 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет;

5) да; 6) нет; 7) нет; 8) нет; 9) да; 10) нет.

15. Найти произведения ***AB*** и ***BA*** матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}8 & -6\\ 8 & -1\end{pmatrix};\ BA=\begin{pmatrix}6 & 4 & -7\\ 19 & 6 & -13\\ 20 & 0 & -5\end{pmatrix}.$

16. Доказать, что перестановочны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$

17. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 8\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 9\\ 4 & 6 & -1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 9 & 6\\ 5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

Найти элемент матрицы ***AB***, принадлежащий её третьей строке и второму столбцу. ***Ответ***: $c_{32}=34$.

18. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 5 & -2\\ 7 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\\ 1 & -5\\ 9 & -7\end{pmatrix}.$

Найти произведение ***AB***. Существует ли произведение ***BA***?

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & -3\\ -11 & 51\end{pmatrix}$. ***BA*** не существует.

19. Для данных матриц ***A*** и ***B*** найти $(A+3B)^2$, если:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -8\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\textbf{\textit{Ответ}}: \begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}.$$

20. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{\textit{Ответ}}: \begin{pmatrix} -11 & 100 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Укажите тип следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2^2 & 6 \\ 1 & 4 & 3^2 \\ 2 & 5 & 3^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3-a & 4 \\ 2a & 4 & a-1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В какой последовательности возможно умножение этих матриц?

Ответ: A_{43}, B_{33}, умножение ***A*** на ***B*** возможно, а ***B*** на ***A*** нет.

22. Вычислите произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (22).

23. Даны матрицы A, B, C и ***D.*** Рассчитать с помощью схемы Фалька произведение матриц ***ABCD***:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}0&2&5&2\\1&3&4&0\\0&1&0&3\\2&5&1&0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\3&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-115&-250\\-66&-317\\-96&-182\end{pmatrix}$.

						0	2	5	2	1	3
						1	3	4	0	0	2
		4	-8	1	-1	0	1	0	3	3	0
		0	2	1	0	2	5	1	0	1	1
3	1	12	-22	4	-9	-40	-83	-37	36	-115	-250
5	6	20	-28	11	-15	-58	-108	-27	73	-66	-317
2	0	8	-16	2	-6	-28	-60	-30	22	-96	-117

24. Даны две матрицы $A=A_{mn}$, $B=B_{lk}$.

В каком случае определены произведения:

1) $\boldsymbol{AB}$; 2) $\boldsymbol{BA}$; 3) AA^T; 4) AB^T; 5) BA^T; 6) A^TA; 7) A^TB^T; 8) B^TA^T.

Ответ: 1) $n=l$; 2) $m=k$; 3) всегда; 4) $n=k$;
5) $n=k$; 6) всегда; 7) $m=k$; 8) $n=l$.

25. Даны две матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&0&5\end{pmatrix}$.

Найти: 1) AB^T; 2) B^TA; 3) A^TB; 4) BA^T.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}2&12\\12&6\end{pmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

I. Основные теоретические сведения (опорный конспект)

Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение. Определителем квадратной матрицы 2-го порядка **называется *число*** $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, вычисляемое по следующему правилу:

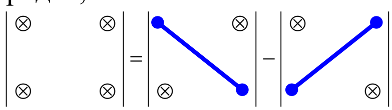
надо взять ***произведение чисел***, ***расположенных по главной диагонали*** (диагональ, идущая от левого верхнего угла к правому нижнему углу),

и вычесть из него ***произведение чисел***, ***расположенных на побочной диагонали*** (диагональ, идущая от правого верхнего элемента, к левому нижнему).

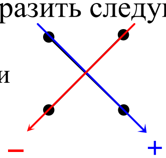
Обозначение: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $|A|$, $\det A$, Δ.

Таким образом, по определению $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка, схематически можно изобразить следующим образом:



или



Свойства определителей 2-го порядка

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы (т.е. при замене её строк столбцами с теми же номерами):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Это свойство означает полную ***равноправность*** строк и столбцов. Другие свойства (ради краткости) будем формулировать только для строк (они, разумеется, верны и для столбцов).

2. При перестановке строк определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Это свойство допускает и другую формулировку: если все элементы одной из строк определителя умножить на некоторое число λ, то определитель умножится на это число.

5. Если все элементы некоторой строки равны нулю, то определитель также равен нулю.

6. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммами двух слагаемых, равен сумме двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Если к элементам одной из строк прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} (\lambda) \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель единичной матрицы 2-го порядка равен 1.

Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение. Определителем квадратной матрицы 3-го порядка ***A*** **называется** число

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Обозначение: $|A|$, $\det A$, $\det(a_{ij})$, Δ.

Итак, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

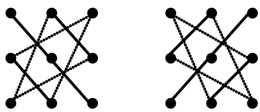
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематически это правило (правило ***Саррюса*** или правило ***треугольников***) может быть изображено следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \bullet & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \otimes & \bullet & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \\ \bullet & \otimes & \otimes \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \bullet \\ \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \bullet & \otimes \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \bullet \\ \otimes & \bullet & \otimes \\ \bullet & \otimes & \otimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \otimes & \bullet & \otimes \\ \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \\ \otimes & \bullet & \otimes \end{vmatrix}$$

или



+ **–**

Если квадратная матрица ***A*** 3-го порядка является треугольной, т.е. имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то её определитель равен произведению элементов главной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Свойства определителей 3-го порядка

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
2. При перестановке строк определитель меняет лишь знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.
4. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя.
5. Если все элементы некоторой строки равны нулю, то определитель также равен нулю.
6. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммами двух слагаемых, равен сумме двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Если к элементам некоторого столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу любого порядка $\boldsymbol{n}$, где $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и её определитель. Для вычисления такого определителя необходимо ввести понятие минора и алгебраического дополнения.

> **Определение.** ***Минором элемента*** a_{ij} определителя ***n***-го порядка **называется** определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием ***i***-ой строки и ***j***-го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Минор элемента a_{ij} **обозначается** M_{ij}.

> **Определение**. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} **называется** его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем **обозначать** A_{1j}.

В соответствии с определением $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема (разложения). ***Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.***

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, 1 \le i \le 3.$$

Теорема (замещения). ***Пусть Δ – определитель* 3-го *порядка. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какого-нибудь столбца (строки) на любые числа*** b_1, b_2, b_3 ***равна определителю*** Δ_1***, который получается из данного определителя Δ заменой указанного столбца (строки) столбцом (строкой) из чисел*** b_1, b_2, b_3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Теорема (аннулирования). ***Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя* 3-го *порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.***

Вычисление определителей 3-го порядка

Определители 3-го порядка можно вычислять по-разному:

1. По ***способу треугольников*** (***правило Саррюса***). Будем пользоваться этим способом только в теории.
2. По ***теореме разложения*** $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, 1 \le i \le 3$.
3. Вычисление определителя после его упрощения по свойству 7. Упрощение заключается в получении в какой-либо строке (столбце) двух нулей с помощью седьмого свойства определителей.
4. Приведение определителя к треугольному виду.

Определитель *n-го* порядка

> **Определение 1** (**предварительное**). Определителем матрицы ***A n***-го порядка **называется** сумма всех ***n*!** произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком плюс или минус по некоторому правилу.

> **Определение 2.** Определителем матрицы ***A*** порядка ***n*** **называется** число, вычисляемое по следующему правилу:
>
> $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{11}(-1)^{1+j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} .$$

Теорема. ***Каков бы ни был номер строки*** i $(1 \le i \le n)$ ***для определителя n-*го *порядка справедлива формула*** $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ $(1 \le i \le n)$, ***называемая разложением этого определителя по i-й строке***.

Теорема. ***Каков бы ни был номер столбца*** j $(1 \le j \le n)$ ***для определителя n-*го *порядка справедлива формула*** $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ $(1 \le j \le n)$, ***называемая разложением этого определителя по j-му столбцу***.

Отметим, ***что для определителей n-***го ***порядка*** $(n > 3)$ ***также верны теоремы замещения и аннулирования. Определители n-***го

порядка $(n > 3)$ ***обладают теми же свойствами, что и определители*** 2-го ***и*** 3-го ***порядков.***

Основные методы вычисления определителей

Метод эффективного понижения порядка

В соответствии с теоремой разложения вычисление определителя $\boldsymbol{n}$-го порядка сводится к вычислению $\boldsymbol{n}$ определителей $(n-1)$- го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $|A| \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$- го порядка, сделав в какой-либо строке (столбце) $|A|$ все элементы, кроме одного, равными нулю. Покажем это на примере.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти $|A|$.

▲ Преобразуя определитель так, чтобы все элементы 3-й строки, кроме одного, обращались в нуль. Для этого к элементам 1-го столбца прибавим элементы 3-го столбца, умноженные на –4, а к элементам 2-го столбца прибавим элементы 3-го, умноженные на 2. Тогда будем иметь

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & {\scriptstyle(-4)} & \\ & & {\scriptstyle(2)} & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 13 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам 1-й строки элементы 2-й строки, умноженные на -2, и к элементам 3-й строки элементы 2-й, умноженные на -3. Тогда

$$|A| = (-3)(-2)\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 13 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & 9 & 0 \\ 13 & -4 & 1 \\ -44 & 18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -20 & 9 \\ -44 & 18 \end{vmatrix} = -(-4)\cdot 9\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -36.$$ ▼

Приведение определителя к треугольному виду

Если квадратная матрица ***A*** ***n***-го порядка является треугольной, то ***её определитель равен произведению элементов главной диагонали***. Приведение любого определителя $|A|$ к треугольному виду всегда возможно.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

▲ Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим с первым. Этот же столбец, умноженный на 3 – со вторым, на 2 – с третьим, на 8 – с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному определителю:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

(3) (2) (8)

$$= 3\cdot 7\cdot(-12)\cdot(-22)\cdot(-1) = -5544.$$ ▼

Приведение определителей к треугольному виду будет использоваться в дальнейшем при решении систем линейных уравнений методом Гаусса.

Метод исключения (метод Гаусса)

Метод ***исключения*** основан на применении изложенных ранее свойств определителей. Он заключается в преобразовании заданного определителя к такому виду, чтобы на главной диагонали всюду стояли единицы, а все элементы, расположенные ниже главной диагонали, были равны нулю.

Рассмотрим этот метод на примере вычисления следующего определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 5 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Представим этот определитель в виде

$$\Delta = b_1 b_2 b_3 \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

тогда значение определителя **Δ** равно произведению $b_1 b_2 b_3$, т.к. значение определителя с единицами по главной диагонали и нулями ниже диагонали равно единице.

Нули в первом столбце во второй и третьей строках можно получить следующим образом.

а) элемент $a_{11} = 2$ вынесем за знак определителя, для чего разделим все элементы первой строки на два, тогда

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1.5 & 3.5 \\ 5 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

б) Умножим первую строку на числа (-5) и (-3) и прибавим соответственно ко второй и третьей строкам; тогда

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 5 & -1 & 8\\ 3 & 4 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}(-5)(-3)\\ \\ \\ \end{matrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 0 & 6.5 & -9.5\\ 0 & 8.5 & -4.5\end{vmatrix}.$$

Таким образом, получен определитель, у которого в первом столбце ниже диагонали стоят нули;

в) «сделаем нули» во втором столбце. Для этого вынесем за знак определителя элемент $a_{22} = 6.5$, получим

$$\Delta = 2\cdot 6.5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 0 & 1 & -1.46\\ 0 & 8.5 & -4.5\end{vmatrix};$$

г) чтобы «сделать нули» во втором столбце ниже диагонали, вычтем из третьей строки вторую, умноженную на (−8.5), получаем

$$\Delta = 2\cdot 6.5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 0 & 1 & -1.46\\ 0 & 8.5 & -4.5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ (-8.5)\\ \\ \end{matrix} = 2\cdot 6.5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 0 & 1 & -1.46\\ 0 & 0 & 7.92\end{vmatrix};$$

д) вынесем за знак определителя элемент $a_{33} = 7.92$; получим

$$\Delta = 2\cdot 6.5\cdot 7.92\cdot\begin{vmatrix}1 & -1.5 & 3.5\\ 0 & 1 & -1.46\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\cdot 6.5\cdot 7.92 = 102.96.$$

Замечание. При получении **1** на главной диагонали элементы матрицы (как видно в предыдущем примере) принимают дробное значение. Как это обойти, показано в следующем примере.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

▲ $(-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} (-3)(-4) =$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}(-4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= 27 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 27.$$ ▼

Резюме

Введены понятия и перечислены свойства определителей 2-го, 3-го и ***n***-го порядка, а также рассмотрены способы вычисления определителей.

II. Вопросы для самопроверки

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Что называется определителем 3-го порядка?
3. Каковы основные свойства определителей?
4. Покажите и объясните почему

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 18, \text{ однако } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -18,$$

тогда как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 180.$$

5. Что называется минором элемента определителя?
6. Что называется алгебраическим дополнением элемента?
7. Сформулируйте теорему разложения.
8. Сформулируйте теорему замещения.
9. Сформулируйте теорему аннулирования.
10. Каковы способы вычисления определителей?

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

а) разложением по первой строк; б) разложением по второму столбцу.

12. Непосредственным вычислением показать, что $|A| = |A^T|$, где

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

13. Используя разложение по первой строке, показать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Показать прямым вычислением, что

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

15. Показать прямым вычислением, что

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2+2\cdot 3 & 7 & 3 \\ 1+2\cdot 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

16. Показать прямым вычислением, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

17. Объясните, почему определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Справедливо ли это утверждение для треугольной матрицы? Приведите примеры.
18. Не прибегая к разложению определителей, подберите значения x, которые удовлетворяли бы следующим уравнениям:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \text{ в) } \begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0; \text{ г) } \begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ 4 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

III. Примеры решения задач

Пример 2.1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

▲ 1) Вычисляя по определению, имеем $\Delta = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

2) Разлагая определитель по элементам 1-й строки, получим

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 1(-1)^{1+1}4 + 2(-1)^{1+2}3 = 4 - 6 = -2. \text{ ▼}$$

Пример 2.2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2384 & 1384 \\ 2385 & 1385 \end{vmatrix}$.

▲ Этот определитель также можно вычислять по определению, для чего потребуется найти два произведения двух четырехзначных чисел и разность этих произведений. Чтобы избежать таких вычислений, воспользуемся свойством 7 определителя

$$(-1)\begin{vmatrix} 2384 & 1384 \\ 2385 & 1385 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2384 & 1384 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2384 - 1384 = 1000. \text{ ▼}$$

Пример 2.3. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^3 & -2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

▲ Найдем определители

$$\begin{vmatrix} x^3 & -2 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 \cdot 1 - (-2)x^2 = x^3 + 2x^2; \quad \begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = x + 2.$$

Уравнение принимает вид

$$x^3 + 2x^2 = x + 2 \text{ или } x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1).$$

Следовательно, уравнение принимает вид $(x+2)(x+1)(x-1) = 0$; оно имеет решения: $x_1 = -2 \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 1$. ▼

Пример 2.4. Вычислить определитель 3-го порядка по правилу Саррюса $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix}$.

▲ $\Delta = 3(-4)2 + (-1)8 \cdot 7 + 5(-6)1 - 1(-4)7 - 8(-6)3 - 5(-1)2 =$

$= -24 - 56 - 30 + 28 + 144 + 10 = 72, \ \Delta = 72$. ▼

Пример 2.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 35\,436 & 46\,343 & 22\,429 \\ 17\,718 & 23\,171 & 11\,214 \\ 5\,906 & 7\,723 & 3\,737 \end{vmatrix}$.

▲ Непосредственное применение правила треугольников для вычисления данного определителя приводит к громоздким вычислениям. Поэтому целесообразно упростить, применяя свойства.

$$\begin{array}{r} \\ (-2) \\ (-3) \end{array} \begin{vmatrix} 35\,436 & 46\,343 & 22\,429 \\ 17\,718 & 23\,171 & 11\,214 \\ 5\,906 & 7\,723 & 3\,737 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5\,906 & 7\,723 & 3\,737 \end{vmatrix} =$$

$$= 5906(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5906.$$ ▼

Пример 2.6. Определить x из уравнения $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

▲ По правилу треугольников получаем

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2.$$

Решаем кубическое уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$. Разлагая на множители левую часть уравнения, находим

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x-1) = (x-1)\big(x(x+1) - 2\big) =$$

$$= (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x-1)(x+2).$$

Следовательно, $(x-1)^2(x+2) = 0$, откуда $x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = -2$. ▼

Пример 2.7. Вычислить определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$$

а) по способу треугольников; б) методом разложения по элементам какой-либо строки (столбца); в) после его упрощения.

▲ а) $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot a + (-1) \cdot (-1) \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot a -$

$$- a \cdot a \cdot a - (-1) \cdot 1 \cdot a - (-1) \cdot 1 \cdot a = 4a.$$

б) Разложив определитель по элементам первой строки, получим

$$\Delta = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} + a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a^2 + 1) - (-a - a) + a(1 - a^2) = 4a.$$

в) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{разложим по} \\ \text{элементам} \\ \text{первой строки}\end{matrix}\right\} =$

$$= 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 4a. ▼$$

В дальнейшем определитель нужно вычислять так, чтобы время на вычисление было наименьшим.

Пример 2.8. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix}$, приведя его к треугольному виду.

▲ $(-2)(-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 19 \end{vmatrix}(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 16.$

Последний определитель является треугольным, он равен произведению элементов главной диагонали. ▼

Пример 2.9. Упростить выражение $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

▲ Разлагая данный определитель по элементам 1-й строки, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos(\alpha+\beta). ▼$$

Пример 2.10. Вычислить определитель методом приведения их к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

▲ $$\begin{array}{c} (-5);(-7);(-6) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & -19 & -13 \\ 0 & -9 & -19 & -13 \\ 0 & -5 & -16 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$ ▼

IV. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Вычислить определители 2-го порядка:

№	Определитель	***Ответ***
1	$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$	-4
2	$\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$	2
3	$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$	a^2+b^2
4	$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$	1
5	$\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}$	0
6	$\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$	0
7	$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi-\sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ -2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{vmatrix}$	1

Решить уравнения:

8. $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: 2.

9. $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: $\dfrac{(-1)^n \pi}{12} + n\dfrac{\pi}{2}$.

Решить неравенства:

10. $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1$. ***Ответ***: $x \in (-\infty;\, 2) \bigcup (4;\, \infty)$.

11. $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 5$. ***Ответ***: $x \in (-\infty;\, \infty)$.

С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

12. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: -36.

13. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 0.

14. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 87.

Вычислить определители, разложив их по элементам первой строки:

15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 55.

16. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -1 \\ b & 1 & b \\ 1 & b & \end{vmatrix}$. ***Ответ***: $2(1-b^2)$.

17. Не раскрывая определителя, докажите, что

$$\begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Решить уравнения:

18. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: -4.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: $x_1 = 1 \vee x_2 = -2$.

20. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$.

21. $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. ***Ответ***: $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$.

Методом понижения порядка вычислить определители:

22. $\begin{vmatrix} 13\,325 & 15\,323 & 37\,527 \\ 23\,735 & 23\,735 & 17\,417 \\ 23\,737 & 23\,737 & 17\,418 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: $-22\,198$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. ***Ответ***:16.

Вычислить определители, приведя их к треугольному виду:

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & -8 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 4. 25. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: -43.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: -2. 27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 48.

28. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. ***Ответ***: 20.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 1

I. 1. Для данного определителя **Δ** найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}.

2. Вычислить определитель **Δ**:

а) разложив его по элементам ***i***-й строки;

б) разложив его по элементам ***j***-го столбца;

в) получив предварительно нули в ***i***-й строке.

II. Даны две матрицы ***A*** и ***B***. Найти:

а) $A^T \cdot B + B^T \cdot A$; б) A^{-1}; в) $A \cdot A^{-1}$; г) $A^{-1} \cdot A$.

ВАРИАНТ 1

I. $\underline{\underline{i=4,\ j=1}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 2

I. $\underline{\underline{i=3,\ j=3}}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 3

I. $\underline{\underline{i=4,\ j=1}}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 4

I. $\underline{\underline{i=1,\ j=3}}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 5

I. $\underline{\underline{i=2,\ j=4}}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 6

I. $\underline{\underline{i=1,\ j=2}}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 7

I. $\underline{\underline{i=2,\ j=3}}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 8

I. $\underline{\underline{i=3,\ j=1}}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 9

I. $\underline{\underline{i=4,\ j=3}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad i=4,\ \ j=3.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 10

I. $\underline{\underline{i=4,\ j=2}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 11

I. $\underline{\underline{i=3,\ j=4}}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 12

I. $\underline{\underline{i=1,\ j=2}}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 13

I. $\underline{\underline{i=1,\ j=4}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 14

I. $\underline{\underline{i=2,\ j=4}}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 15

I. $\underline{\underline{i=1,\ j=3}}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 16

I. $\underline{\underline{i=3,\ j=2}}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 17

I. $\underline{\underline{i=3,\ j=1}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 18

I. $\underline{\underline{i=2,\ j=4}}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

II.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 19 I. $\underline{\underline{i=2,\ j=3}}$ $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$	***ВАРИАНТ 20*** I. $\underline{\underline{i=4,\ j=3}}$ $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$	***ВАРИАНТ 21*** I. $\underline{\underline{i=1,\ j=2}}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$
ВАРИАНТ 22 I. $\underline{\underline{i=3,\ j=2}}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$	***ВАРИАНТ 23*** I. $\underline{\underline{i=4,\ j=4}}$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$	***ВАРИАНТ 24*** I. $\underline{\underline{i=3,\ j=2}}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

ВАРИАНТ 25	***ВАРИАНТ 26***	***ВАРИАНТ 27***
I. $\underline{\underline{i=2,\ j=3}}$ $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$	I. $\underline{\underline{i=4,\ j=1}}$ $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$	I. $\underline{\underline{i=3,\ j=4}}$ $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
ВАРИАНТ 28	***ВАРИАНТ 29***	***ВАРИАНТ 30***
I. $\underline{\underline{i=1,\ j=2}}$ $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	I. $\underline{\underline{i=4,\ j=4}}$ $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$	I. $\underline{\underline{i=2,\ j=2}}$ $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$ II. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Решение типового варианта

I. 1. Для данного определителя

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}.

2. Вычислить определитель Δ_4:

а) разложив его по элементам первой строки;

б) разложив его по элементам второго столбца;

в) получив предварительно нули в первой строке.

▲ 1. Находим миноры указанных элементов по правилу треугольников (Саррюса):

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 4\cdot(-1) -$$

$$-4\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 4\cdot 4 = -8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16 = -18.$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot(-1) -$$

$$-0\cdot 1\cdot 3 - (-3)\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 4 = -12 + 12 - 0 - 0 - 12 - 8 = -20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18$,

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-20) = 20.$$

2. Вычислим данный определитель Δ_4.

а) Разложим определитель по элементам первой строки. В соответствии с теоремой разложения имеем:

$$\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = (-3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(8+2+4-4) - 2(-8-16+6+12+4-16) + (16-12-4+32) = 38.$$

б) Разложив определитель по элементам второго столбца. Имеем:

$$\Delta_4 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8+6-16+12+4-16) - 2(12+6-6-16) + (-6+16-12-4) = 38.$$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в первой строке. Используя свойство 6 определителей, имеем:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & (3) & \\ & & (-2) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \text{умножим элементы третьего столбца на 3} \\ \text{и прибавим к соответствующим элементам} \\ \text{первого столбца; затем умножим на (-2) и} \\ \text{прибавим к элементам второго столбца.} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (-5) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-14 & -6\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-\big((-14)\cdot 4-(-6)\cdot 3\big)=38.$$ ▼

II. Даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти: а) $A^T\cdot B+B^T\cdot A$; б) A^{-1}; в) $A\cdot A^{-1}$; г) $A^{-1}\cdot A$.

▲ а) Транспонируя исходные матрицы, имеем:

$$A^T=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Произведение $A^T\cdot B$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы (ширина) A^T равно числу строк (высоте) матрицы $\boldsymbol{B}$. Произведение $A^T\cdot B$ найдем по схеме Фалька

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & & & & 1 & 2 & -3 & \\
 & & & \boldsymbol{B} & 2 & 0 & 1 & \\
 & & & & -2 & 1 & 3 & \\
\hline
 & -4 & 2 & 3 & -6 & -5 & 23 & \\
A^T & 0 & -1 & 2 & -6 & 2 & 5 & A^T\cdot B\\
 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 6 &
\end{array}$$

Матрица B^T согласована с матрицей $\boldsymbol{A}$, поэтому определено произведение B^TA. Находим:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & & & & -4 & 0 & 1 & \\
 & & & \boldsymbol{A} & 2 & -1 & 3 & \\
 & & & & 3 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & -6 & -6 & 3 & \\
B^T & 2 & 0 & 1 & -5 & 2 & 4 & B^T A \\
 & -3 & 1 & 3 & 23 & 5 & 6 &
\end{array}$$

Поскольку матрицы $A^T B$ и $B^T A$ одного типа (квадратные 3-го порядка), то окончательно имеем:

$$A^T B + B^T A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 23 \\ -6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 23 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -11 & 26 \\ -11 & 4 & 9 \\ 26 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

б) Учитывая алгоритм вычисления обратной матрицы, находим:
1.

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = \left(14 \cdot 2 - (-1) \cdot 11\right) = 39.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, т. е. матрица $\boldsymbol{A}$ – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}.

2. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,\ A_{23} = (-1) \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 2 & -11 & 8 \\ 1 & 14 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Получим присоединённую матрицу, транспонируя полученную матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}.$$

в) Для вычисления AA^{-1} имеем

$$AA^{-1} = A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} AA^*.$$

(Преобразования сделаны, чтобы не работать с дробными числами). Тогда по схеме Фалька имеем:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c} \multicolumn{4}{r|}{} & -8 & 2 & 1 & \\ \multicolumn{4}{r|}{A^*} & 5 & -11 & 14 & \\ \multicolumn{4}{r|}{} & 7 & 8 & 4 & \\ \hline & -4 & 0 & 1 & 39 & 0 & 0 & \\ \boldsymbol{A} & 2 & -1 & 3 & 0 & 39 & 0 & AA^* \\ & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 39 & \\ \hline \end{array}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

г) Для вычисления $A^{-1}A$ имеем $A^{-1}A = \dfrac{1}{|A|} A^{*} A$.

Тогда по схеме Фалька имеем:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
\cline{5-7}
 & & & & -4 & 0 & 1 & \\
 & & & A & 2 & -1 & 3 & \\
 & & & & 3 & 2 & 2 & \\
\cline{2-7}
 & -8 & 2 & 1 & 39 & 0 & 0 & \\
A^{*} & 5 & -11 & 14 & 0 & 39 & 0 & A^{*}A \\
 & 7 & 8 & 4 & 0 & 0 & 39 & \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

$$
A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .
$$

Таким образом, обратная матрица найдена, верно. ▼

3. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Опорный конспект

Ранг матрицы

Определение 1. ***Рангом матрицы А*** **называется** такое целое число ***r***, что среди миноров ***r***-го порядка матрицы ***А*** имеется хоть один, не равный нулю, а все миноры $(r+1)$-го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю.

Обозначение: r, r_A, $\operatorname{rang} A$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы считается равным нулю (здесь равны нулю миноры всех порядков).

Определение 2. ***Рангом матрицы*** **называется** наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Из определения ранга матрицы получаем следующие **утверждения**:

1) ***ранг*** матрицы выражается целым числом, заключенным между нулем и меньшим из чисел ***m, n***, т.е. $\boxed{0 \le r \le \min(m, n);}$

2) ***ранг*** матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является нулевой;

3) для квадратной матрицы ***n***-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица является ***невырожденной***.

Определение. Квадратная матрица ***A n***-го порядка называется ***особенной*** (***вырожденной***), если её определитель равен нулю.

Если же $|A| \neq 0$, то ***A*** **называется** ***неособенной*** (***невырожденной***) матрицей.

Свойства ранга матрицы:

1) ***ранг*** матрицы, полученный из данной матрицы транспонированием, равен ***рангу*** исходной матрицы $r_A = r_{A^T}$;

2) ***ранг*** матрицы не изменится, если вычеркнуть или приписать нулевую строку (столбец), все элементы которой равны нулю.

Замечание. При нахождении ранга матрицы можно пользоваться свойствами миноров.

Итак, ***ранг*** матрицы может быть **найден** следующим образом:

Если ***все миноры*** 1-го ***порядка*** (элементы матрицы) **равны** ***нулю***, то $\underline{r = 0}$.

Если хотя бы ***один из миноров*** 1-го ***порядка*** **отличен** от ***нуля***, а все ***миноры*** 2-го ***порядка*** **равны** ***нулю***, то $\underline{r=1}$.

В случае, когда **имеется** ***минор*** 2-го ***порядка***, **отличный** от ***нуля***, ***исследуют миноры*** 3-го ***порядка***. Так поступают до тех пор, пока не обнаружится одно из двух: ***либо все миноры порядка k*** **равны** ***нулю***, ***либо миноры порядка k не существуют***, тогда $\underline{r=k-1}$.

Линейная зависимость строк (столбцов) матрицы

Определение. Если некоторый столбец матрицы можно представить в виде суммы ***k*** других столбцов, умноженных соответственно на числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то его **называют** ***линейной комбинацией*** указанных столбцов.

Например, если ***n***-й столбец матрицы ***A*** является ***линейной комбинацией*** остальных её столбцов, то это означает, что **существуют** ***числа*** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, для которых

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} a_{1n-1} \\ a_{2n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \end{pmatrix}.$$

Определение. Столбцы матрицы **называются** ***линейно зависимыми***, если **существуют** такие ***числа*** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что ***линейная комбинация*** столбцов **равна** ***нулевому столбцу***:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Если ***линейная комбинация*** столбцов (3.1) **равна** ***нулю*** тогда и только тогда, когда ***все коэффициенты*** λ_i **равны** ***нулю***, т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

то столбцы, **называются** ***линейно независимыми***.

Аналогичным образом можно ввести понятия ***линейной зависимости*** и ***линейной независимости*** между строками матрицы.

Базисные миноры

> **Определение**. ***Базисным минором*** матрицы **называется** ***отличный от нуля её минор, порядок которого равен рангу матрицы***.

Для ***ненулевой*** матрицы **существует** ***базисный минор***; отметим, что он может оказаться ***не единственным***. Строки и столбцы матрицы, которым принадлежат элементы базисного минора, **называются** ***базисными***.

Теорема (теорема о базисном миноре). 1. ***Базисные строки*** (***столбцы***) ***линейно независимы***.

2. ***Любая строка*** (***столбец***) ***матрицы А является линейной комбинацией её базисных строк*** (***столбцов***).

Предложение 1. ***Ранг матрицы не изменится***, если к ней приписать строку, являющуюся ***линейной комбинацией*** строк матрицы.

Предложение 2. ***Ранг матрицы А не изменится***, если вычеркнуть из нее строку, являющуюся ***линейной комбинацией*** остальных строк матрицы.

Элементарные преобразования матрицы

Способ нахождения ранга матрицы, указанный выше, не всегда бывает удобным, так как во многих случаях связан с вычислениями большого количества определителей. Другим простым способом вычисления ранга матрицы является ***метод Гаусса***, основанный на так называемых элементарных преобразованиях, выполнимых над матрицей.

> **Определение**. Под ***элементарными преобразованиями матрицы*** понимаются следующие операции:
>
> 1) ***умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля***;
>
> 2) ***прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число***;
>
> 3) ***перемена местами двух строк***;
>
> 1), 2), 3) – аналогичные операции над столбцами.

Применяя к матрице ***А*** какое-либо ***элементарное преобразование***, мы получаем новую матрицу ***В***.

Обозначение: $A \sim B$.

Элементарные преобразования обратимы, т. е. если матрица ***B*** **получается** из ***A*** при помощи какого-либо ***элементарного преобразования***, то и матрица ***A*** может быть **получена** из ***B*** также при помощи некоторого ***элементарного преобразования*** (называемого обратным к первому).

Теорема. ***При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется. Другими словами, если*** $A \sim B$***, то*** $r_A = r_B$.

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица A^{-1} **называется** ***обратной по отношению к квадратной матрице A***, если она, будучи ***умноженной как справа***, так и ***слева*** на матрицу ***A***, дает единичную матрицу ***E***, т.е. если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пусть ***A*** квадратная матрица ***n***-го порядка.

Матрицей, ***присоединенной*** к матрице ***A***, **называется** матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

где A_{ij} **–** алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы (3.7). Отметим, что алгебраические дополнения элементов *i*-й строки матрицы ***A*** расположены в ***i***-м столбце матрицы A^*.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). ***Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля*** $(|A| \neq 0)$, ***т.е. матрица A невырожденная***.

Теорема (единственности). ***Невырожденная квадратная матрица имеет единственную обратную матрицу***.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Чтобы **найти** матрицу A^{-1} ***обратную*** матрице ***A***, нужно выполнить следующие операции:

1. **Найти** определитель матрицы $A\,(|A|)$.

Если $|A| = 0$, то матрица ***A выроженная*** и ***обратной матрицы*** **не существует**.

Если $|A| \neq 0$, то матрица ***A невырожденная*** и ***обратная матрица*** **существует**.

2. **Найти** алгебраические дополнения элементов матрицы A_{ij} $(1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n)$ и **составить** из них матрицу.
3. **Транспонировать** матрицу из алгебраических дополнений и **получить** ***присоединенную матрицу*** A^*.
4. **Вычислить** ***обратную матрицу*** по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$.
5. **Проверить** правильность вычисления ***обратной матрицы*** A^{-1}, исходя из определения $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (пункт 5 не обязателен).

Нахождение обратной матрицы называется ***обращением*** данной матрицы.

Свойства обратной матрицы

1. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
3. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Основные методы нахождения ранга матрицы

1. ***Метод единиц и нулей***. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждая её строка (каждый столбец) будет состоять ***только из нулей*** или ***из нулей и одной единицы***. Тогда число оставшихся единиц и определит ***ранг*** исходной матрицы, т.к. полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример. **Найти** ***ранг*** матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$. **Указать** её ***базисный минор***.

▲ **Умножим** третий столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ на число $\frac{1}{2}$.

$$A \sim \begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ {\scriptstyle (-1)} \\ {\scriptstyle (-3)} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ {\scriptstyle (-4)} \\ {\scriptstyle (-2)} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (-2) \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ {\scriptstyle (3)} \\ {\scriptstyle (-3)} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (-1)\cdot \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $r_A = 3$.

За ***базисный минор*** можно взять, **например**, определитель третьего порядка на пересечении первой, второй, третьей строк и первого, второго и третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \ ▼$$

2. ***Метод окаймляющих миноров***. **Напоминаем**, если у матрицы ***A*** существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие миноры $M_{k+1} = 0$, то $r_A = k$.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

▲ Имеем минор $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Для минора M_2 окаймляющими будут только два минора $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix}$, $M_3' = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, каждый из которых равен нулю. Поэтому ранг исходной матрицы $r_A = 2$, а указанный минор M_2 может быть принят за ***базисный минор***. ▼

3. ***Метод Гаусса***. Метод Гаусса был рассмотрен выше.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется рангом матрицы?
2. Сформулируйте утверждения, которые вытекают из определения ранга матрицы.
3. Каковы свойства ранга матрицы?
4. Что такое особенная (неособенная) матрица?
5. Сформулируйте свойства ранга матрицы.
6. Что такое линейная комбинация столбцов матрицы?
7. Когда столбцы (строки) матрицы называются линейно зависимыми (линейно независимыми)?
8. Что такое базисный минор матрицы? Какие строки и столбцы матрицы называются базисными?
9. Сформулируйте теорему о базисном миноре матрицы.
10. Сформулируйте предложения, которые вытекают из теоремы о базисном миноре.
11. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
12. Сформулируйте теорему о ранге матрицы при элементарных преобразованиях этой матрицы.
13. Какая квадратная матрица называется обратной по отношению к квадратной матрице ***A***?

14. Что такое присоединенная матрица?
15. В чем заключается необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы?
16. Сформулируйте теорему о единственности обратной матрицы.
17. Каковы свойства обратной матрицы?
18. Каков алгоритм вычисления обратной матрицы?
19. Показать на примере, что в общем случае $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.
20. Используя соотношение $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$, вычислить обратные матрицы для следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\ \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix};\ \text{в) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};\ \text{г) } A = (4).$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Указать её базисные миноры.

▲ Эта матрица имеет миноры второго порядка, отличные от нуля, например, минор, расположенный в верхнем левом углу

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выпишем все миноры третьего порядка, окаймляющий указанный минор:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Т.к. эти миноры равны нулю, то ***ранг*** матрицы равен $r = 2$. ***Базисными минорами*** являются, **например**, следующие:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$ ▼

Пример 3.2. Найти ***ранг*** и указать ***базисные миноры*** матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

▲ Данная матрица имеет миноры второго порядка, отличные от нуля; к ним принадлежит и минор, расположенный в левом верхнем углу. Выпишем все миноры, окаймляющие этот минор:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Каждый из этих миноров **равен *нулю***. Следовательно, ***ранг*** матрицы равен 2. ***Базисными минорами*** являются следующие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$ ▼

Пример 3.3. Найти ***ранг*** матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

▲ **Вычислим** ***ранг*** матрицы ***методом Гаусса***.

$$(-4)(7)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim (2)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & -22 \\ 0 & 34 & 44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & -22 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ***ранг*** матрицы равен двум, так как минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -17 \end{vmatrix} \neq 0$. ▼

Пример 3.4. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

▲ **Преобразуем** матрицу ***A*** так, чтобы все элементы какого-нибудь столбца, **например**, третьего, кроме элемента $a_{13} = 1$, обратились в нуль.

$$\begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен трем, ибо её минор третьего порядка отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9. \text{ ▼}$$

Пример 3.5. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$.

▲ Используя метод Гаусса, приведем матрицу к трапециевидной форме

$$(-1)(2)(-2)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен 3, т.к. минор 3-го порядка, лежащий в левом верхнем углу, не равен нулю, а все миноры 4-го порядка равны нулю. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 3. ▼

Пример 3.6. При каком значении ***α*** ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ равен: 1, 2, 3?

▲ Найдем определитель этой матрицы:

$$|A| = \alpha^3 - 3\alpha + 2.$$

Разложим на множители правую часть этого равенства.

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = \alpha^3 - \alpha - 2\alpha + 2 = \alpha(\alpha^2 - 1) - 2(\alpha - 1) =$$

$$= (\alpha - 1)\big(\alpha(\alpha + 1) - 2\big) = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2).$$

Если $(\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \neq 0$, т.е. $\alpha \neq 1, \alpha \neq -2$, то $|A| \neq 0$, т.е. ***ранг*** матрицы равен 3.

Запишем матрицы, получающиеся из данной матрицы при значениях $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \text{-}2$:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_1 равен **1**, т.к. $|A_1|=0$ и все миноры второго порядка равны нулю, но имеются миноры первого порядка (элементы матрицы), отличные от нуля.

Ранг матрицы A_2 равен **2**, поскольку $|A_2|=0$, но имеются миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля.

Итак, ранг матрицы ***A***: равен **1**, если $\alpha=1$; равен 2, если $\alpha=-2$; равен 3, если $\alpha\neq1, \alpha\neq-2$. ▼

Пример 3.7. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&-2\end{pmatrix}$.

▲ 1. **Найти** $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix}3&4\\5&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-4\cdot5=-26.$$

Т.к. $|A|\neq0$, то ***обратная*** матрица **существует**.

2. **Найти** алгебраические дополнения к элементам матрицы A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-2,\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-4,\ A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=3.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\begin{pmatrix}-2&-5\\-4&3\end{pmatrix}$.

Замечание. Вычисляя алгебраические дополнения элементов исходной матрицы, советуем их располагать сразу в виде матрицы (как это сделано и в данном примере).

3. **Получить** ***присоединенную*** матрицу, транспонируя матрицу алгебраических дополнений

$$A^*=\begin{pmatrix}-2&-4\\-5&3\end{pmatrix}.$$

4. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-26}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{26} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}.$$

5. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из определения $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Сделать самостоятельно. ▼

Замечание. Найдем A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ как обычно:

1. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$. 3. $A^{*} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

$$4.\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Теперь внимательно рассмотрите A^{-1} и научитесь сразу её записывать по виду матрицы A:

- элементы на главной диагонали матрицы $\boldsymbol{A}$ поменять местами,
- на побочной диагонали оставить элементы на месте и изменить их знак на противоположный знак,
- затем записать коэффициент $\frac{1}{|A|}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-6-20}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{26} & -\frac{3}{26} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.8. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

▲ 1. $|A| = (-1)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

2. $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $A^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. Проверить, что $AA^{-1} = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Выбрав 1-ю, 3-ю и 4-ю строки, 1-й, 4-й и 5-й столбцы, найти миноры третьего порядка следующих матриц:

№	Матрицы	***Ответ***
1	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & -5 & 9 \\ 2 & 8 & 6 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & -2 & 3 \\ 9 & 7 & 0 & -6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 21$
3	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

4. Найти миноры 2-го порядка, соответствующие 1-му и 2-му столбцам.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Все миноры равны нулю, кроме одного $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

Найти ранг каждой матрицы:

№	Матрица	*Ответ*	№	Матрица	*Ответ*
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	6	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	2	10	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	2
11	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$	3	12	$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & -7 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	3
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	3	14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	4
15	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	4	16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	5

При каких значениях $\boldsymbol{\alpha}$ ранг каждой матрицы равен **1**.

17. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha = 3$.

18. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha = 4$.

19. $\begin{pmatrix} \alpha & 9 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha = \text{-}6, \alpha = 6$.

20. $\begin{pmatrix} 9 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha = \text{-}3, \alpha = 3$.

При каких значениях $\boldsymbol{\alpha}$ ранг каждой матрицы равен **2**.

21. $\begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq 6$.

22. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq \text{-}1. \alpha \neq 1$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

При каких значениях $\boldsymbol{\alpha}$ ранг каждой матрицы равен **3**.

24. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq 1$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & 3 \\ 2 & \text{-}4 & 5 \\ 3 & \text{-}2 & 6 \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq \frac{13}{3}$.

26. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. **_Ответ_**: $\alpha \neq \text{-}1, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

27. При каких значениях $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен двум ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \text{-}2 \\ 2 & 6 & \text{-}3 & \text{-}4 \\ a & b & 6 & \text{-}2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $a = 1, b = 3$.

28. При каких значениях $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен трем ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-}3 & 8 & 2 \\ 2 & \text{-}3 & 1 & \text{-}5 & \text{-}1 \\ 6 & 7 & \text{-}4 & 3 & \text{-}1 \\ 3 & a & \text{-}9 & 21 & b \end{pmatrix}.$$

Ответ: $a = 13, b = 3$.

Может ли при каком-нибудь значении ***a*** равняться трём ранг матриц:

29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & a \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Да, если $a = 3$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & a & a \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Нет.

Найти ранг матрицы ***A*** с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

31. $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: 2.

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: 2.

33. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: 3.

Привести к трапециевидной или к треугольной форме следующие матрицы:

34. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. 35. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. 36. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 3 & -6 \\ 4 & 8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. 38. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \\ 3 & 4 & -6 & 7 \\ 4 & 7 & -8 & 8 \end{pmatrix}$. 39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. 41. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 43. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Выяснить, имеет ли обратную матрицу каждая из матриц:

44. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Да. 45. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Нет.

46. $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: нет. 47. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Да.

48. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Нет. 49. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Нет.

50. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Да.

51. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: Да.

Найти матрицу, обратную каждой из матриц:

52. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

53. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

54. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

55. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -8 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

57. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Выяснить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной матрице:

58. $\begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq 2$.

59. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \alpha & 6 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq 9$.

60. $\begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 9 & \alpha \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq -6, \alpha \neq 6$.

61. $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq -4, \alpha \neq 4$.

62. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq 1$.

63. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq 9$.

64. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

65. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\alpha \neq -1, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Найти матрицу, обратную данной матрице ***A***:

66. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

67. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ***Ответ***: $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Основные теоретические сведения (опорный конспект)

1. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Системой ***m*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ или ***линейной системой***, **называется** ***совокупность уравнений*** вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i – заданные числа.

- Величины a_{ij} $(1 \le i \le m; 1 \le j \le n)$ **называются** ***коэффициентами***,
- величины b_i $(1 \le i \le m)$ – ***свободными членами***.

Коэффициенты **обозначены** буквой ***a*** с двумя индексами ***i*** и ***j***;

- первый индекс ***i*** указывает номер уравнений,
- второй индекс ***j*** **–** номер неизвестной, к которой относится данный коэффициент.

Индекс свободного члена b_i соответствует номеру уравнения, в которое входит b_i.

Число m уравнений может быть **больше**, **равно** или **меньше** ***числа n неизвестных***.

Линейная система **называется** ***неоднородной***, если среди свободных членов **имеются** ***члены***, ***отличные от нуля***.
Если все свободные члены **равны** ***нулю***, то ***линейная система*** **называется** ***однородной***.

Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Определение. ***Решением линейной системы*** (1) **называется** упорядоченная совокупность ***n*** чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, подстановка которых вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно

$$(x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n) \qquad (3)$$

обращает в тождество каждое из уравнений этой системы.

Отметим, что числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ образуют ***одно решение***, а не ***n*** решений.

Определение. ***Система***, ***имеющая хотя бы одно решение***, **называется** ***совместной***, а ***система, не имеющая ни одного решения – несовместной***.

Отметим, что однородная система (2) всегда совместна, т.к. она **имеет** ***нулевое решение***: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$.

Определение. ***Совместная система***, имеющая ***единственное решение***, **называется** ***определенной***.
Совместная система **называется** ***неопределенной***, если она **имеет** ***более одного решения***.

Определение. ***Две системы линейных уравнений*** от одних и тех же неизвестных, **называются** ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если каждое решение одной из них является решением другой и обратно, т.е. если они **имеют** ***одно и то же множество решений***.
Любые ***две несовместные системы*** **считаются** ***эквивалентными***.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

составленная ***из коэффициентов при неизвестных***, **называется** ***основной матрицей системы*** (или ***матрицей системы***).

Матрица

$$\widetilde{A}=\left\{\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right\} \text{ или } \widetilde{A}=\left(A\,|\,B\right), \qquad (5)$$

получающуюся из ***А добавлением столбца из свободных членов системы*** (1), **называется** ***расширенной матрицей системы*** (1). Матрица $\widetilde{A}$, очевидно, вполне определяет систему (1) с точностью до обозначения неизвестных.

Определение. Под ***элементарными преобразованиями*** системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

1) **перемена** местами двух уравнений в системе (первый тип).

2) **умножение** какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля (второй тип);

3) **прибавление** к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число (третий тип);

Элементарные преобразования системы обратимы, т.е. если мы, сделав элементарное преобразование, перешли от одной системы к другой, то мы можем вернуться от полученной новой системы к первоначальной системе, выполнив опять некоторое элементарное преобразование.

Если мы имеем две равносильных системы, то, определив решения одной из них, мы тем самым будем знать решения другой. Ясно, что ***решать мы будем ту систему, которая проще***.

Теорема 1. ***При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему***.

2. Запись и решение линейной системы в матричной форме

Рассмотрим матрицы столбцы, составленные из неизвестных и свободных членов системы (1):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Поскольку матрица ***A*** согласована с матрицей ***X***, то можно найти произведение AX . Произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

является матрицей столбцом, содержащей ***n*** элементов. Элементами этой матрицы столбца являются левые части уравнений системы (1), поэтому на основании определения равенства матриц получаем

$$A \cdot X = B. \tag{7}$$

Таким образом, ***система линейных уравнений*** (1) **записана *в виде одного матричного уравнения*** (7), где матрица ***A*** определяется формулой (4), а матрицы ***X*** и ***B*** **–** формулами (6). Эта запись системы называется ***матричной***.

Каждой ***линейной системе*** (1) **соответствует *единственная пара матриц* A** и ***B***, и обратно: ***каждой паре матриц – единственная линейная система***. Система (1) может быть записана и в таком виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – решение системы (1), то матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

называется ***вектор решением*** этой системы. Матрица (9) удовлетворяет уравнению (8).

При подстановке в уравнение (8) чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно **получаем**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} c_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} c_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Итак, если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – ***решение системы*** (1), то **выполняется равенство** (10). Обратное также верно: если **выполняется равенство** (10), то $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ **–** ***решение системы*** (1).

Матричный метод

Пусть для системы (1) $m = n$ и основная матрица ***A*** вида (4) – невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$. Тогда для ***A*** существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Умножив левую часть и правую часть матричного уравнения (7) слева на обратную матрицу A^{-1}, получим

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно, матрица решение ***X*** легко находится как произведение A^{-1} и ***B***.

3. Система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Прежде чем изучить систему линейных уравнений самого общего вида (1), рассмотрим тот её частный случай, когда ***число уравнений системы*** **совпадает** с ***числом неизвестных***, подлежащих нахождению, т.е. когда $m = n$.

Пусть дана система ***n линейных уравнений*** с ***n неизвестными*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Определителем системы (4) **называется** определитель матрицы из коэффициентов уравнений этой системы.

Обозначим его буквой **Δ**.

Определитель, полученный из определителя системы заменой столбца из коэффициентов при неизвестной x_k свободными членами, **обозначим** через Δ_k, где ***k*** **–** одно из чисел $1, 2, \ldots, n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Теорема 2 (Крамера). ***Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение.***

Это решение может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (12)$$

где определители $\boldsymbol{\Delta}$ и Δ_k ***определены формулами*** (11).

Метод Гаусса

При решении системы линейных уравнений ***методом Гаусса*** неизвестное x_i исключается только в уравнениях с номером $i+1$, $i+2, \ldots, n$. В результате получается система с треугольной матрицей.

Далее полученная система решается методом подстановки, двигаясь последовательно от последнего уравнения к первому.

4. Критерий совместности системы линейных уравнений

Рассмотрим систему $\boldsymbol{m}$ линейных уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{18}$$

Пользуясь определениями, записываем основную матрицу $\boldsymbol{A}$ и расширенную матрицу $\tilde{A}$ этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Относительно каждой системы линейных уравнений могут быть поставлены следующие вопросы.

1. **Совместна** заданная система или нет?
2. В случае если система совместна, как определить, **сколько она имеет решений –** одно или несколько?
3. Как **найти** все решения системы?

Критерий совместности линейной системы выражается следующей теоремой.

Теорема 3 (Кронекера – Капелли). ***Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу её расширенной матрицы, т.е. чтобы*** $r_A = r_{\tilde{A}}$.

Когда линейная система имеет единственное решение?

Совместная система может иметь единственное решение (в этом случае ее называют ***определенной***) или более одного решения (тогда она называется ***неопределенной***). Нас интересует вопрос о том, при каком условии линейная система имеет единственное решение. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4 (единственность решения линейной системы). ***Если ранг матрицы совместной линейной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.***

Сколько решений может иметь линейная система

Выясним, при каких условиях линейная система имеет более одного решения. Сколько будет иметь решений линейная система в данном случае? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 5 (теорема о числе решений). ***Если ранг матрицы совместной линейной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.***

Базисными неизвестными совместной системы, ***ранг*** матрицы которой равен ***r***, **называются *r*** неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные в уравнениях этой системы называют ***свободными***.

5. Исследование и решение линейных систем

Из доказанных ранее теорем вытекает, что исследование и решение линейных систем можно проводить по следующей схеме.

1. **Составить** матрицу ***A*** и расширенную матрицу $\widetilde{A}$ из коэффициентов данной линейной системы ***m*** уравнений с ***n*** неизвестными.
2. **Найти** ранг r_A матрицы ***A*** данной системы и ранг $r_{\widetilde{A}}$ расширенной матрицы $\widetilde{A}$.
3. **Сравнить** ранги указанных матриц и сделать выводы:
   а) если $r_A \neq r_{\widetilde{A}}$, то ***система несовместна*** (не имеет решений);

   б) если $r_A = r_{\widetilde{A}}$, то ***система совместна*** (имеет решения).
4. В случае $r_A = r_{\widetilde{A}}$ **выделить** базисный минор и базисные неизвестные, данную систему **заменить** равносильной ей системой, состоящей из тех ***r*** уравнений, в которые входят элементы базисного минора.
5. Если $r_A = n$, т.е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных данной системы, то система **имеет** единственное решение; это решение можно найти по ***формулам Крамера*** (или ***матричным методом***, или ***методом Гаусса***).

6. В случае $r_A < n$ из полученной системы, равносильной исходной системе, **находим** выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные; при этом также можно использовать ***формулы Крамера***

(или ***метод Гаусса***). Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, **находим** бесконечное множество решений полученной и исходной линейных систем уравнений.

6. Однородные системы линейных уравнений

Произвольная однородная система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; . \; \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. она **имеет** следующее очевидное решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$.

Это решение (у которого все значения неизвестных равны нулю) **называется** ***нулевым*** или ***тривиальным***. Всякое другое решение (если оно есть), у которого значение, хоть одного неизвестного отлично от нуля, **называется** ***ненулевым*** или ***нетривиальным***.

Совместность системы (19) можно установить и с помощью теоремы Кронекера-Капелли: т.к. расширенная матрица $\widetilde{A}$ получается из матрицы системы $\boldsymbol{A}$ приписыванием столбца из нулей, то по свойству ранга матрицы имеем $r_{\widetilde{A}} = r_A$, а значит, система совместна.

Для однородных систем представляет особый интерес ***вопрос о существовании ненулевых решений***.

- Если $r_A = n$, то система **имеет** ***единственное решение***, и т.к. этим ***единственным решением*** **является** ***нулевое решение***, то ненулевых решений в этом случае нет.
- Если же $r_A < n$, то система **имеет** ***бесконечно много решений*** и среди них, понятно, имеется бесконечно много ненулевых решений (ведь нулевое решение только одно).

Имеет место, таким образом, следующая основная теорема об однородных системах.

Теорема 6. ***Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных*** $(r_A < n)$.

В частном случае, когда ***число уравнений совпадает с числом неизвестных*** $(m = n)$, условие $r_A < n$ равносильно, очевидно, тому, что определитель системы равен нулю $(\Delta = 0)$. Для этого частного случая мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. ***Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.***

Отметим ещё один частный случай, когда $m < n$.

Т.к. ***ранг*** матрицы не может быть больше числа её строк (как и столбцов), то $r_A \le m$. Следовательно, если $m < n$, то и $r_A < n$, а, значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. ***Если число уравнений в однородной системе линейных уравнений меньше числа неизвестных, то эта система имеет ненулевые решения.***

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ.

Определение. Число $\boldsymbol{\lambda}$ **называется *собственным числом* (*значением*)** квадратной матрицы ***A***, если существует ненулевой столбец ***X*** такой, что $AX = \lambda X$.

Если $\boldsymbol{\lambda}$ – собственное число матрицы ***A***, то всякий столбец ***X*** (в том числе и нулевой), удовлетворяющий условию $AX = \lambda X$, **называется *собственным столбцом*** матрицы ***A***, соответствующим собственному числу $\boldsymbol{\lambda}$.

Матричное равенство $AX = \lambda X$ равносильно системе ***n*** равенств

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + & (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + & a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \ldots + & (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

или

$$(A - \lambda E)X = O,$$

где ***E*** – единичная матрица того же порядка, что и матрица ***A***, а ***O*** – нулевой вектор столбец. Но согласно теореме 7 эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$|A-\lambda E| = 0 .$$

> Уравнение $|A-\lambda E| = 0$ **называется *характеристическим уравнением*** матрицы ***A***, а его левая часть **– *характеристическим многочленом*** матрицы ***A***.

Координаты собственного вектора $X^{(i)}$, соответствующие собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_i + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_i + (a_{11}-\lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_i + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_i)x_n = 0. \end{cases}$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

II. Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
2. Что называется решением системы линейных уравнений?
3. Какие системы называются совместными, а какие несовместными?
4. Какая совместная система называются определенной, а какая неопределенной?
5. Какие две системы линейных уравнений называются эквивалентными (равносильными)?
6. Перечислите элементарные преобразования системы линейных уравнений.
7. Сформулируйте теорему об элементарных преобразованиях системы.
8. Запишите систему линейных уравнений с помощью матриц.

9. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

10. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

11. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

12. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

13.Что можно сказать о системе линейных уравнений, если её определитель равен нулю?

14. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

15. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.

16. Какие разновидности метода Гаусса вы знаете?

17. Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, используя метод Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?

18. Какие неизвестные в системе линейных уравнений, и в каком случае называют свободными, а какие базисными?

19. Сформулируйте теорему о единственности решения линейной системы.

20. Сформулируйте теорему о числе решений линейной системы.

21. Сформулируйте схему исследования и решения линейных систем.

22. При каком условии однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

23. Сформулируйте определение собственных чисел и собственных столбцов квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$.

24. Какое уравнение называется характеристическим уравнением квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$?

25. Чем характеризуются собственные числа квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$?

IV. Примеры решения задач

Пример 5.1. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

▲ Составим определитель $\boldsymbol{\Delta}$ данной системы и определители Δ_1, Δ_2:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=5,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=20,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-25.$$

По формулам Крамера (4.12) получаем

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4,\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-25}{5}=-5.$$ ▼

Пример 5.2. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2,\\ 2x_1-3x_2+7x_3=7,\\ 3x_1-4x_2+5x_3=6.\end{cases}$$

▲ Составим и вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 7\\ 3 & -4 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2)(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ (-2)\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=-6\neq 0.$$

Определитель системы $\Delta\neq 0$, т.е. выполнено условие теоремы Крамера. Вычислим определители Δ_k $(1\le k\le 3)$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 7 & -3 & 7\\ 6 & -4 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 6 & -4 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ (-2)(-6)\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}0 & -4 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -10 & -7\end{vmatrix}=-18,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 7 & 7\\ 3 & 6 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2)(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=-12,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 7\\ 3 & -4 & 6\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2)(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

По формулам Крамера получаем:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-18}{-6}=3,\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-12}{-6}=2,\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-6}{-6}=1.$$ ▼

Пример 5.3. Записать систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$ в виде матричного уравнения и решить её.

▲ Систему представим в виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную ей матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8-9} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Теперь по формуле $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 51 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $x_1 = 3 \vee x_2 = 1$. ▼

Пример 5.4. Средствами матричного исчисления решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

▲ Введём обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заменим исходную систему уравнений матричным уравнением

$$AX = B.$$

Вычислим определитель матрицы ***A***:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)(3)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как определитель $|A|$ матрицы $\boldsymbol{A}$ отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1} и система имеет единственное решение. Найдем обратную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения всех элементов определителя $|A|$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Следовательно, присоединённой для матрицы A будет матрица

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -9 & 14 & -12 \\ -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Т.к. $|A| = -1$, то обратной матрицей будет $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.

Подставляя матрицу A^{-1} в формулу $X = A^{-1}B$, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, будем иметь:

$x_1 = 1\cdot 5 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 1 = 2;\ x_2 = 9\cdot 5 + (-14)\cdot 4 + 12\cdot 1 = 1;$

$x_3 = 5\cdot 5 + (-8)\cdot 4 + 7\cdot 1 = 0.$

Итак, $x_1 = 2 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = 0$. ▼

Пример 5.5. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

▲ Составим расширенную матрицу системы и преобразуем её:

$$\begin{array}{c} (-2)(-1) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ (3) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 2$. Второе уравнение дает возможность определить x_2: $x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 = -2$.

Из первого уравнения находим: $x_1 = -4x_2 - 3x_3 + 1 \Rightarrow x_1 = 3$.

Следовательно, полученная система имеет решение:

$$x_1 = 3 \vee x_2 = -2 \vee x_3 = 2.$$

Это же решение имеет и исходная система. ▼

Пример 5.6. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3. \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$$

▲ Составим расширенную матрицу и преобразуем её:

$$
\begin{array}{r}
(-1)(-4)(-2) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\
2 & -3 & 3 & -2 & 2 \\
4 & -9 & 1 & -8 & -3 \\
1 & 6 & -4 & 8 & 4
\end{array}\right) \sim
\begin{array}{r}
\\ (8) \\ \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\
0 & -1 & -15 & 4 & -7 \\
0 & -8 & 8 & -11 & -3
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ (32) \\ (-20)
\end{array}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -20 & 8 & -7 \\
0 & 0 & -32 & 21 & -3
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -20 & 8 & -7 \\
0 & 0 & 0 & -164 & -164
\end{array}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{164}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & -2 & 4 & -3 & 1 \\
0 & 1 & -5 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -20 & 8 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\
x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\
-20x_3 + 8x_4 = -7. \\
x_4 = 1.
\end{cases}
$$

Решая эту систему, находим:

$$
x_4 = 1,\ \ 20x_3 = 8x_4 + 7 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{4},\ \ x_2 = 5x_3 - 4x_4 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4},
$$

$$
x_1 = 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}.
$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение

$$
x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = -\frac{1}{4} \vee x_3 = \frac{3}{4} \vee x_4 = 1. \ ▼
$$

Пример 5.7. Выяснить, совместна ли система $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$

▲ Запишем основную матрицу $\boldsymbol{A}$ и расширенную матрицу $\widetilde{A}$ данной системы:

$$A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cc|c}7 & -2 & 5\\ 3 & 6 & 9\end{array}\right).$$

Очевидно, $r_A=2$ и $r_{\tilde{A}}=2$. Т.к. $r_A=r_{\tilde{A}}$, то система совместна. ▼

Пример 5.8. Выяснить, совместна ли система $\begin{cases}2x_1-3x_2=1,\\ 4x_1-6x_2=3.\end{cases}$

▲ В данном примере

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix},\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 1\\ 4 & -6 & 3\end{array}\right).$$

Поскольку $|A|=0$, то $r_A=1$. В матрице $\tilde{A}$ имеются миноры второго порядка, отличные от нуля, поэтому $r_{\tilde{A}}=2$. Т.к. $r_A\neq r_{\tilde{A}}$, то система несовместна. ▼

Пример 5.9. Выяснить, совместна ли система

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=9,\\ 3x_1+2x_2+5x_3=6.\end{cases}$$

▲ Запишем основную матрицу $\boldsymbol{A}$ и расширенную матрицу $\tilde{A}$ данной системы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix},\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 9\\ 3 & 2 & 5 & 6\end{array}\right).$$

Поскольку $|A|\neq 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ \underset{(-1)}{3} & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-8,$$

то $r_A=3$. Очевидно, $r_{\tilde{A}}=3$. Система совместна. ▼

Пример 5.10. Выяснить, сколько решений имеет линейная система

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

▲ Составим матрицу $\boldsymbol{A}$ и расширенную матрицу $\tilde{A}$ этой системы трёх уравнений $(m = 3)$ с двумя неизвестными $(n = 2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Преобразуем матрицу $\tilde{A}$:

$$(-2)(-4)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right), \ |\tilde{A}| = 0.$$

Поскольку $r_A = r_{\tilde{A}} = 2$, то система имеет единственное решение, т.е. является определенной. ▼

Пример 5.11. Выяснить, является ли определенной линейная система

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$$

▲ Составим матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\tilde{A}$. Преобразуем их:

$$A = (-3)(-4)(-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} (-3)(-4)(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (2) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $r_A = 3, r_{\tilde{A}} = 3$, т. е. $r_A = r_{\tilde{A}}$; система совместна. Поскольку число $\boldsymbol{n}$ неизвестных также равно 3, то система является определенной. ▼

Пример 5.12. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

▲ Запишем расширенную матрицу $\tilde{A}$ данной системы и преобразуем её:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} (-4)(-2) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (-19) \\ (13) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & -19 & 13 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $r_A = 3, r_{\tilde{A}} = 3$. Т.к. $r_A = r_{\tilde{A}}$, то система совместна. Поскольку $r_A = 3, n = 3, r_A = n$, то система имеет единственное решение.

Последняя матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ \quad -13x_2 + 9x_3 = 12, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 10. \end{cases}$$

Решим полученную систему. Из третьего уравнения $x_3 = 10$. Второе уравнение дает возможность определить x_2:

$$-13x_2 = -9x_3 + 12 \Rightarrow x_2 = 6.$$

Из первого уравнения находим: $x_1 = -5x_2 + 4x_3 - 5 \Rightarrow x_1 = 5$.
Следовательно, полученная система имеет решение:

$$x_1 = 5 \vee x_2 = 6 \vee x_3 = 10. \ ▼$$

Пример 5.13. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 = 6. \end{cases}$$

▲ Запишем матрицу $\boldsymbol{A}$, расширенную матрицу $\tilde{A}$ данной системы и преобразуем их:

$$A = (-5)(-4)(-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim (-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1,$$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c}(-5)(-4)(-2)\\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}_1.$$

Отсюда видно, что $r_A = 2, r_{\tilde{A}} = 2$. Т.к. $r_A = r_{\tilde{A}}$, то система совместна. Поскольку $r_A = 2, n = 4, r_A < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Минор второго порядка, расположенный в верхнем левом углу преобразованной матрицы (эквивалентной матрице $\boldsymbol{A}$ и $\tilde{A}$), отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

его можно взять в качестве базисного минора. Указанному базисному минору соответствуют первые два уравнения системы. Запишем их так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \quad x_3 - \quad x_4 + 2, \\ \quad -3x_2 = -5x_3 + 6x_4 - 4, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные; x_3, x_4 – свободные неизвестные.

Полагая

$$x_3 = \alpha \in \mathrm{R},\ \mathrm{x}_4 = \beta \in \mathrm{R},$$

находим решение системы

$$x_2 = \frac{5}{3}\alpha - 2\beta - 4,$$

$$x_1 = -\left(\frac{5}{3}\alpha - 2\beta - 4\right) + \alpha - \beta + 2 = -\frac{2}{3}\alpha + \beta + 6.$$

Следовательно, система имеет решение

$$\left(x_1 = -\tfrac{2}{3}\alpha + \beta + 6\right) \vee \left(x_2 = \tfrac{5}{3}\alpha - 2\beta - 4\right);\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$ ▼

Пример 5.14. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от параметра λ:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ 4x_4 = \ \ 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ \ 6x_4 = \ \ 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \ \ 8x_4 = \ \ 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

▲ Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем её:

$$\begin{array}{c} (-4)(-3)(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (-3)(-2) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ \lambda-8 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Если $\lambda = 8$, то расширенная матрица имеет следующий вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

В этом случае $r_A = 2,\ r_{\tilde{A}} = 2$. Поскольку $r_A = r_{\tilde{A}}$, то система совместна. Т.к. $r_A = 2,\ n = 4,\ r_A < n$, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора возьмём минор $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

В данном случае базисные переменные x_2, x_3; свободные переменные x_1, x_4.

Исходная система уравнений эквивалентна системе, в которой свободные переменные $x_1 = \alpha \in \mathrm{R},\ \mathrm{x}_4 = \beta \in \mathrm{R}$ перенесены в правую часть

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2\alpha - 4\beta + 5, \\ -x_3 = 2\beta - 3. \end{cases}$$

Откуда

$$x_3 = 3 - 2\beta,$$
$$x_2 = 3(3-2\beta) + 2\alpha + 4\beta - 5 = 2\alpha - 2\beta + 4.$$

Итак, если $\lambda = 8$, общее решение системы определяется формулами

$$(x_1 = \alpha) \vee (x_2 = 2\alpha - 2\beta + 4) \vee (x_3 = 3 - 2\beta) \vee (x_4 = \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Если $\lambda \neq 8$, расширенная матрица имеет следующий вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \lambda - 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В этом случае $r_A = 3, r_{\tilde{A}} = 3$. Поскольку $r_A = r_{\tilde{A}}$, то система совместна. Т.к. $r_A = 3, n = 4, r_A < n$, то система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора возьмём минор

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda - 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 - \lambda \neq 0.$$

В данном случае базисные переменные x_1, x_2, x_3; свободная переменная x_4.

Исходная система уравнений эквивалентна системе, в которой свободная переменная $x_4 = \alpha \in \mathrm{R}$ перенесена в правую часть

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 - 4\alpha, \\ x_3 = 3 - 2\alpha, \\ (\lambda - 8)x_1 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 0, x_3 = 3 - 2\alpha, x_2 = 2x_1 + 3x_3 + 4\alpha - 5 = 4 - 2\alpha$.

Следовательно, если $\lambda \neq 8$ общее решение системы определяется формулами $(x_1 = 0) \vee (x_2 = 4 - 2\alpha) \vee (x_3 = 3 - 2\alpha) \vee (x_4 = \alpha);\ \alpha \in \mathrm{R}$. ▼

Пример 5.15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \quad\ \ 2x_2 + \ 4x_3 - 3x_4 - 6 = 0, \\ 2x_1 + \ x_2 + \ 3x_3 + \ x_4 \quad\ \ = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 \qquad\ - 8 = 0. \end{cases}$$

▲ Данная система является неоднородной. Коэффициент при неизвестном x_1 в первом уравнении равен нулю, т.е. $a_{11} = 0$. Чтобы применить метод Гаусса, необходимо поменять местами, например, первое и второе уравнения и перенести свободные члены в правые части:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 + \ 3x_3 + \ x_4 = 0, \\ \quad\ \ 2x_2 + \ 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 \qquad = 8. \end{cases}$$

Это неоднородная система трёх уравнений относительно четырёх неизвестных. Составляем расширенную матрицу и преобразуем её:

$$\begin{array}{c} (-3) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 6 & 5 & 13 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда видно, что система несовместна, т.к. $r_A = 2$, $r_{\tilde{A}} = 3$. $r_A \neq r_{\tilde{A}}$. ▼

Пример 5.16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \qquad\ \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 = \ 3, \\ x_1 + \ x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - \ x_4 = \ 2, \\ \qquad 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = \ 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = \ 1. \end{cases}$$

▲ Это неоднородная система пяти уравнений относительно четырёх неизвестных, где $a_{11} = 0$. Поменяем местами первое и второе уравнения, тогда коэффициент при неизвестном x_1 в первом уравнении $a_{11} = 1$. Составим расширенную матрицу из коэффициентов системы в новой записи (не приведённой здесь) и преобразуем её:

$$
\begin{array}{r} (-2)(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)
\sim
\begin{array}{r} \\ (-1)(-5)(3) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 7 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 4 \end{array}\right)
\sim
\begin{array}{r} \\ \\ (4)(3) \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{r} \\ \\ \\ (-\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -36 \end{array}\right)
\sim
\begin{array}{r} \\ \\ \\ (9) \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -36 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

В этом случае $r_A = 4,\ r_{\tilde{A}} = 4$. Поскольку $r_A = r_{\tilde{A}}$, то система совместна. Т.к. $r_A = 4,\ n = 4,\ r_A = n$, то система

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ \qquad 2x_2 - x_3 = -10, \\ \qquad\qquad x_4 = 4. \end{cases}
$$

имеет единственное решение. $x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -3,\ x_4 = 4$. ▼

Пример 5.17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

▲ Данная система является однородной. Составляя матрицу, не будем записывать столбец из свободных членов, так как все они равны нулю:

$$\begin{matrix}(-2)(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ (-\tfrac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ (\tfrac{1}{3}) \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} \\ \\ (5) \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $r = 4, n = 4$, то система имеет единственное нулевое решение: $x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 0 \vee x_4 = 0$. ▲

Пример 5.18. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

▲ Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (3-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 6.$$

Определение первого собственного вектора
Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ получаем

$$\begin{cases}(3-1)x_1 + 2x_2 = 0,\\ 3x_1 + (4-1)x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x_1 + 2x_2 = 0,\\ 3x_1 + 3x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 + x_2 = 0,\\ x_1 + x_2 = 0.\end{cases}$$

Расширенная матрица системы $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Поскольку определитель системы $|A| = 0$, то система имеет ненулевое решение. Базисный минор первый элемент матрицы, базисная переменная x_1, свободная переменная $x_2 = \alpha \in \mathrm{R}$. Тогда $x_1 = \text{-}\alpha$. Искомый первый собственный вектор запишется так:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix}\text{-}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} \text{ или } X^{(1)} = \alpha\begin{pmatrix}\text{-}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора
Для собственного значения $\lambda_1 = 6$ получаем

$$\begin{cases}(3-6)x_1 + 2x_2 = 0,\\ 3x_1 + (4-6)x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{-}3x_1 + 2x_2 = 0,\\ \quad 3x_1 - 2x_2 = 0\end{cases}$$

Расширенная матрица системы $A = \begin{pmatrix}\text{-}3 & 2\\ 3 & \text{-}2\end{pmatrix}$.

Поскольку определитель системы $|A| = 0$, то система имеет ненулевое решение. Базисный минор первый элемент матрицы, базисная переменная x_1, свободная переменная $x_2 = \alpha \in \mathrm{R}$. Тогда $x_1 = \frac{2}{3}\alpha$. Искомый второй собственный вектор запишется так:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} \text{ или } X^{(1)} = \alpha\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}. ▼$$

Пример 5.19. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix}5 & \text{-}2 & \text{-}1\\ \text{-}2 & 2 & \text{-}2\\ \text{-}1 & \text{-}2 & 5\end{pmatrix}.$$

▲ Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем, определитель в левой части характеристического уравнения

$$(-1)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ \lambda-6 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4-\lambda \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ \lambda-6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-6)\begin{vmatrix} -2 & 4-\lambda \\ 2-\lambda & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-6)\big(8-(4-\lambda)(2-\lambda)\big) = (\lambda-6)(-\lambda^2+6\lambda).$$

Следовательно, уравнение для определения корней будет таким

$$(\lambda-6)(-\lambda^2+6\lambda) = 0.$$

Таким образом, исходная матрица имеет три собственных значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 0$.

Определение первого и второго собственного вектора

Собственный вектор $X^{(1)} = X^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-6)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + (2-6)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (5-6)x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы полученной системы уравнений и преобразуем его:

$$A = (-1)(-2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.к. определитель $|A| = 0$ и имеется минор первого порядка (любой элемент первой строки), отличный от нуля, то ранг матрицы $r_A = 2$ и данная система имеет нетривиальное решение $(n = 3, r_A < n)$. В качестве базисного минора выбираем первый элемент первой строки. Этому минору соответствует первое уравнение преобразованной системы:
$$x_1 = -2x_2 - x_3,$$
где x_1 – базисная неизвестная, x_2, x_3 – свободные неизвестные.

Придавая свободным неизвестным x_2, x_3 произвольные значения $x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta;\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$, получаем решение исходной системы в виде:

$$x_1 = -2\alpha - \beta \vee x_2 = \alpha \vee x_3 = \beta .$$

Следовательно, первый и второй собственный вектор

$$X^{(1)} = X^{(2)} = \begin{pmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора

Третий собственный вектор $X^{(3)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 0$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-0)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + (2-0)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (5-0)x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдём ранг матрицы полученной системы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim (5)(-2) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim (2) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 24 \end{pmatrix} \sim \left(\tfrac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A_1| = 0$ и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен 2 $\left(r_{A_1} = 2\right)$ и данная система имеет нетривиальное решение $\left(n = 3,\ r_{A_1} < n\right)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5x_3, \\ \qquad x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$, решаем полученную систему:

$$x_2 = 2\alpha;\ \ x_1 = -2x_2 + 5\alpha = -2 \cdot 2\alpha + 5\alpha = \alpha .$$

Имеем следующее решение исходной системы:

$$x_1 = \alpha \vee x_2 = 2\alpha \vee x_3 = \alpha .$$

Следовательно, третий собственный вектор

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ или } X^{(3)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

IV. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Решить систему уравнений матричным способом и сделать проверку:

№	Система	***Ответ***
1	$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 = 7, \\ \ x_1 - 3x_2 = 8. \end{cases}$	$x_1 = \frac{29}{16},\ x_2 = -\frac{33}{16}$
2	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2, \\ 4x_1 - \ \ x_2 = 1. \end{cases}$	$x_1 = 0,\ x_2 = -1$
3	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - \ \ x_2 = 4. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 0$

4	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 4x_1 - \ \ x_2 = 7. \end{cases}$	$x_1 = \frac{9}{5},\ x_2 = \frac{1}{5}$
5	$\begin{cases} 4x_1 + \qquad 5x_3 = 7, \\ \qquad x_2 - 6x_3 = 11, \\ 3x_1 + \qquad 4x_3 = -2. \end{cases}$	$x_1 = 38,\ x_2 = \text{-}163,\ x_3 = \text{-}29$
6	$\begin{cases} 4x_1 + \qquad 5x_3 = 7, \\ \qquad x_2 - 6x_3 = 11, \\ 3x_1 + \qquad 4x_3 = -2. \end{cases}$	$x_1 = \text{-}51,\ x_2 = 248,\ x_3 = 41$
7	$\begin{cases} 4x_1 + \qquad 5x_3 = 7, \\ \qquad x_2 - 6x_3 = 11, \\ 3x_1 + \qquad 4x_3 = -2. \end{cases}$	$x_1 = -5,\ x_2 = 29,\ x_3 = 4$
8	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - \qquad\qquad x_4 = 1, \\ \qquad 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 1. \end{cases}$	$x_1 = \text{-}4,\ x_2 = 0,$ $x_3 = 7,\ x_4 = -13$

Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

№	Системы	***Ответ***
9	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 6x_2 = 8. \end{cases}$	$x_1 = 2,\ x_2 = \text{-}1$
10	$\begin{cases} 8x_1 - \ \ x_2 = 5, \\ 9x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 3$
11	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 1, \\ 9x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$	$x_1 = \text{-}2,\ x_2 = 5$

12	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 = -10. \end{cases}$	$x_1 = -1,\ x_2 = -2$
13	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3, \\ 7x_1 + 6x_2 = 5. \end{cases}$	$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{4}$
14	$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 3, \\ 9x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$	$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{2}$
15	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$
16	$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$
17	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$	$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$
18	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 5, \\ 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$	$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \frac{2}{3}$
19	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$	$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4$
20	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$

21	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$	$x_1 = 5,\ x_2 = -4,$ $x_3 = 3,\ x_4 = -2$
22	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 2. \end{cases}$	$x_1 = 3,\ x_2 = -1,$ $x_3 = 0,\ x_4 = 1$

Методом Гаусса решить системы уравнений:

№	Система	***Ответ***
23	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$	$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$
24	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$
25	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$	$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$
26	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$	$x_1 = 1, x_2 = 2,$ $x_3 = 3,\ x_4 = 4$

27	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$	$x_1 = -2,\ x_2 = -1,$ $x_3 = 1,\ x_4 = 2$

Выяснить, совместна ли каждая из систем:

№	Система	***Ответ***
28	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 = 8. \end{cases}$	Система совместна
29	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 5, \\ 8x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$	Система несовместна
30	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$	
31	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 = 4. \end{cases}$	
31	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$	Система совместна
32	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$	Система совместна

Выясните, является ли совместной и определённой каждая из систем линейных уравнений:

№	Система	***Ответ***
33	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$	Система определенная
34	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$	Система несовместна
35	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$	Система неопределенная
36	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$	Система определенная
37	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$	Система определенная
38	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$	Система неопределенная

Выяснить, совместна ли каждая из систем. В случае совместности системы найти все её решения:

№	Система	***Ответ***
39	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9, \\ 3x_1+5x_2+7x_3=15. \end{cases}$	$x_1=\alpha,\ x_2=3-2\alpha,\ x_3=\alpha$ $\alpha\in\mathrm{R}$
40	$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=8, \\ 2x_1+5x_2+2x_3=9, \\ 3x_1+8x_2+6x_3=17. \end{cases}$	$x_1=14\alpha-13,\ x_2=7-6\alpha,$ $x_3=\alpha;\ \alpha\in\mathrm{R}$
41	$\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=8, \\ 5x_1+3x_2+5x_3=13. \end{cases}$	$x_1=2-\alpha,\ x_2=1,\ x_3=\alpha$ $\alpha\in\mathrm{R}$
42	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+4x_2+4x_3=10, \\ 3x_1+6x_2+6x_3=15. \end{cases}$	$x_1=5-2\alpha-2\beta;\ \alpha,\ \beta\in\mathrm{R}$
43	$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3-\ \ x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+3x_3-\ \ x_4=3, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-2x_4=5, \\ 4x_1+5x_2+5x_3-3x_4=7. \end{cases}$	$x_1=1,\ x_2=2,$ $x_3=\text{-}2,\ x_4=\text{-}1$
44	$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=4, \\ x_1+2x_2+2x_3+\ \ x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+\ \ x_3+3x_4=8, \\ 4x_1+5x_2+4x_3+5x_4=18. \end{cases}$	$x_1=2-\alpha,\ x_2=2-\alpha,$ $x_3=\alpha,\ x_4=\alpha;\ \alpha\in\mathrm{R}$

Исследовать каждую из систем уравнений и в случае совместности решить её:

№	Система	***Ответ***
45	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3=7. \end{cases}$	$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2$
46	$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=6, \\ x_1+4x_2-3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=5. \end{cases}$	Система несовместна
47	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-4x_2+6x_3=2, \\ 3x_1-6x_2+9x_3=3. \end{cases}$	$x_1=2\alpha-3\beta+1,\ x_2=\alpha,$ $x_3=\beta;\ \alpha,\ \beta\in \mathrm{R}$
48	$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+3x_4=2, \\ x_1-x_2+12x_3+6x_4=6, \\ 4x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=1. \end{cases}$	$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2},$ $x_3=\frac{1}{4},\ x_4=\frac{1}{3}$
49	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3-2x_4=-2, \\ x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4=-4. \end{cases}$	Система несовместна
50	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+4x_2-6x_3+4x_4=6, \\ 3x_1+6x_2-9x_3+6x_4=9, \\ 4x_1+8x_2-12x_3+8x_4=12. \end{cases}$	$x_1=3-2\alpha+3\beta-2\gamma\vee$ $\vee\ x_2=\alpha\vee x_3=\beta\vee x_4=\gamma$ $\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{R}$

Исследовать каждую из систем уравнений и найти общее решение в зависимости от параметра $\boldsymbol{\lambda}$:

51. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15, \\ 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = \lambda. \end{cases}$

Ответ: Система имеет решение при любом значении $\boldsymbol{\lambda}$:

$$x_1 = \frac{1}{2}(9\lambda - 111),\ x_2 = \frac{1}{4}(99 - 7\lambda),\ x_3 = \frac{1}{4}(\lambda - 9).$$

52. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15, \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = \lambda. \end{cases}$

Ответ: Если $\lambda = 18$, то система совместна; общее решение:

$$x_1 = 18\alpha - 15,\ x_2 = 9 - 7\alpha;\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Если $\lambda \neq 18$, то система несовместна.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
   а) по формулам Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
   в) методом Гаусса.
2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.
3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

Вариант 1	***Вариант 2***
1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.	1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.
Вариант 3	***Вариант 4***
1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.	1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Вариант 5 1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.	***Вариант 6*** 1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.
Вариант 7 1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.	***Вариант 8*** 1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.
Вариант 9 1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ 2.	***Вариант 10*** 1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ 2.

$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0, \\ x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Вариант 11 1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_2-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.	***Вариант 12*** 1. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
Вариант 13 1. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.	***Вариант 14*** 1. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-6x_3-4x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 15

1. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16

1. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18

1. $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

2.

Вариант 20

1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 21

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 22

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

2.
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 23

1. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 24

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 25

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Вариант 26

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Вариант 27

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Вариант 28

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Вариант 29

1. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

2.

Вариант 30

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.

$\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ 4x_3+x_4+2x_5=0,\\ 3x_1+2x_2-\ \ 2x_3+x_4 \qquad\ \ =0,\\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.	$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4+x_5=0,\\ x_1-2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4-x_5=0,\\ 2x_1-\ \ x_2-2x_3+3x_4 \qquad =0. \end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение типового варианта

1. Дана система неоднородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1+5x_2-\ \ x_3=\ \ 3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=\ \ 2,\\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3=-7. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить её.

а) По формулам Крамера.

б) С помощью обратной матрицы (матричным методом).

в) Методом Гаусса.

▲ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

Преобразуем расширенную матрицу, в которой вертикальной чертой отделена матрица $\boldsymbol{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c}(-3)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \\ (-1)\cdot \\ \left(-\frac{1}{16}\right)\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-6) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Имеем, $r_A = r_{\tilde{A}} = 3, n = 3\ (r_A = n)$.

Следовательно, ***исходная система совместна*** и **имеет** ***единственное решение***.

а) Решить систему по формулам Крамера.

Составим определитель $\Delta = |A|$ данной системы и определители Δ_k $(1 \le k \le 3)$:

$$\Delta = \begin{array}{c}(-3)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -16 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -16 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Для получения определителя Δ_1 в определителе $\mathbf{\Delta}$ первый столбец заменим столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -7 & -11 & 0 \\ -16 & -16 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -7 & -11 \\ -16 & -16 \end{vmatrix} = 64.$$

Для получения определителя Δ_2 в определителе $\mathbf{\Delta}$ второй столбец заменим столбцом свободных членов

$$\Delta_2 = \begin{array}{c}(-3)\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -7 & 0 \\ 0 & -16 & -0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = -16.$$

Для получения определителя Δ_3 в определителе $\mathbf{\Delta}$ третий столбец заменим столбцом свободных членов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3)(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & -16 & -16 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -16 & -16 \end{vmatrix} = 32.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \tfrac{\Delta_1}{\Delta} = \tfrac{64}{-16} = -4,\ \ x_2 = \tfrac{\Delta_2}{\Delta} = \tfrac{-16}{-16} = 1,\ \ x_3 = \tfrac{\Delta_3}{\Delta} = \tfrac{32}{-16} = -2.$$

Итак, решение данной системы по правилу Крамера

$$x_1 = -4 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = -2.$$

б) Решить систему с помощью обратной матрицы (матричным методом).

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

1) Поскольку $|A| = \Delta = -16 \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{A}$ имеет обратную матрицу.

2) В соответствии с алгоритмом нахождения обратной матрицы найдем матрицу из алгебраических дополнений.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -3 & -4 \\ 16 & 0 & 16 \\ -11 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

3) Составляем присоединённую матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

4) Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Находим решение данной системы: $X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^*B$,

$$X = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц произведём по схеме Фалька

	B	3 2 -7	
A^*	-15 16 -11 -3 0 1 -14 16 -6	64 -16 32	A^*B

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

На основании равенства матриц получаем ответ

$$x_1 = -4 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = -2.$$

в) Решим систему методом Гаусса.

При проверке совместности данной системы была выписана расширенная матрица и преобразована по методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Этой преобразованной расширенной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом постановки, двигаясь последовательно от последнего уравнения к первому. Из третьего уравнения находим $x_3 = -2$. Второе уравнение дает возможность определить $x_2 = 1$. Из первого уравнения находим:

$$x_1 = -5x_2 + x_3 + 3 \Rightarrow x_1 = -4.$$

Следовательно, полученная система имеет решение:

$$x_1 = -4 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = -2.$$

Это же решение имеет и исходная система. ▼

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - \qquad 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + \ x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + \ x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

▲ Здесь число неизвестных $n = 5$, число уравнений $m = 3$, следовательно, по теореме 4.8 $(n < m)$ система имеет ненулевые решения. Вычислим ранг матрицы системы

$$A = \begin{array}{c} (-1)(-2) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен 3 $(r_A = 3)$. В качестве базисного минора возьмём минор, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2 и x_5 уравнений системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Оставляя базисные неизвестные x_1, x_2 и x_5 в левой части и перенося, свободные неизвестные x_3 и x_4 в правую часть, приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_5 = -2x_3, \\ \qquad x_2 + 7x_5 = -x_3 - 2x_4, \\ \qquad\qquad x_5 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ (\alpha,\ \beta) \in \mathrm{R}$, решение системы имеет вид

$$x_5 = 0,\ x_2 = -7x_5 - x_3 - 2x_4 \Rightarrow x_2 = -\alpha - 2\beta,$$

$$x_1 = -4x_2 + 3x_5 - 2x_3 \Rightarrow x_1 = 2\alpha + 8\beta,$$

Итак, решение однородной исходной системы имеет вид:

$$(x_1 = 2\alpha + 8\beta) \vee x_2 = (-\alpha - 2\beta) \vee (x_3 = \alpha) \vee (x_4 = \beta) \vee (x_5 = 0);$$

$$(\alpha,\ \beta) \in \mathrm{R}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 2\alpha + 8\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. ▼$$

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуя определитель в левой части характеристического уравнения, получим

$$(\text{-}1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 0 & \text{-}2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4-\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2+\lambda)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 5-\lambda & 2 \end{vmatrix} = (2+\lambda)\big(2-(4-\lambda)(5-\lambda)\big) =$$

$$= (2+\lambda)(\text{-}\lambda^2 + 9\lambda - 18).$$

Следовательно, уравнение для определения корней будет таким

$$(2+\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0.$$

Таким образом, исходная матрица имеет три собственных значения:

$$(\lambda_1 = \text{-}2) \vee (\lambda_2 = 3) \vee (\lambda_3 = 6).$$

Определение первого собственного вектора

Собственный вектор $X^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \text{-}2$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases} \big(1-(-2)\big)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + \big(5-(-2)\big)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + \big(1-(-2)\big)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы полученной системы уравнений и преобразуем его:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim (-3)\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim (-1)\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\tfrac{-1}{20}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A_1| = 0$ и имеется минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен 2 $\left(r_{A_1} = 2\right)$ и данная система имеет нетривиальное решение $\left(n = 3,\ r_{A_1} < n\right)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая систему, находим: $(x_1 = -x_3) \vee (x_2 = 0)$. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1 = -\alpha \vee x_2 = 0 \vee x_3 = \alpha;\ \alpha \in \mathrm{R}$.

Следовательно, первый собственный вектор

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ или } X^{(1)} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора

Собственный вектор $X^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases} (1-3)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5-3)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-3)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы полученной системы уравнений и преобразуем его:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix}(-3)(2)\end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{5}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A_2| = 0$ и имеется минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен 2 $\left(r_{A_2} = 2\right)$ и данная система имеет нетривиальное решение $\left(n = 3, r_{A_1} < n\right)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_3, \\ \qquad x_2 = -x_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая систему, находим: $(x_1 = x_3) \vee (x_2 = -x_3)$. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1 = \alpha \vee x_2 = -\alpha \vee x_3 = \alpha; \alpha \in \mathrm{R}$.

Следовательно, второй собственный вектор

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ или } X^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора

Собственный вектор $X^{(3)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5-6)x_2 + \quad x_3 = 0, \\ 3x_1 + \quad x_2 + (1-6)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + \ x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы полученной системы уравнений и преобразуем его:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} (-3)(5) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A_3| = 0$ и имеется минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен 2 $\left(r_{A_3} = 2\right)$ и данная система имеет нетривиальное решение $\left(n = 3, r_{A_1} < n\right)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3, \\ \quad -x_2 = -2x_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая систему, находим: $(x_1 = x_3) \vee (x_2 = 2x_3)$. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1 = \alpha \vee x_2 = 2\alpha \vee x_3 = \alpha; \alpha \in \mathrm{R}$.

Следовательно, первый собственный вектор

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ или } X^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

Контрольная работа

Проверить совместность системы уравнений.

Решить систему уравнений: 1) по формулам Крамера;
2) матричным методом; 3) методом Гаусса.

Вариант 1 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$	***Вариант 2*** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$	***Вариант 3*** $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$
Вариант 4 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$	***Вариант 5*** $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$	***Вариант 6*** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4, \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$
Вариант 7 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=3. \end{cases}$	***Вариант 8*** $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3=5, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9. \end{cases}$	***Вариант 9*** $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31, \\ 4x_1+11x_3=-43, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20. \end{cases}$
Вариант 10 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=20, \\ 3x_1-x_2+x_3=9. \end{cases}$	***Вариант 11*** $\begin{cases} 4x_1+7x_2-3x_3=-10, \\ 2x_1+9x_2-x_3=8, \\ x_1-6x_2+3x_3=-3. \end{cases}$	***Вариант 12*** $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+4x_2+x_3=6, \\ 3x_1-3x_2+7x_3=13. \end{cases}$
Вариант 13 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=-10, \\ x_1-5x_2+2x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3. \end{cases}$	***Вариант 14*** $\begin{cases} 2x_1-5x_2+6x_3=8, \\ x_1+7x_2-5x_3=-9, \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12. \end{cases}$	***Вариант 15*** $\begin{cases} 3x_1-5x_2+6x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=8, \\ x_1+4x_2-x_3=1. \end{cases}$
Вариант 16 $\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5, \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=-4. \end{cases}$	***Вариант 17*** $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-5, \\ x_1+9x_2-4x_3=-1, \\ 2x_1-6x_2+3x_3=-6. \end{cases}$	***Вариант 18*** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 4x_1-x_2+5x_3=6, \\ x_1-2x_2+4x_3=9. \end{cases}$

Вариант 19 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$	***Вариант 20*** $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$	***Вариант 21*** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$
Вариант 22 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$	***Вариант 23*** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$	***Вариант 24*** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$
Вариант 25 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$	***Вариант 26*** $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$	***Вариант 27*** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$
Вариант 28 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$	***Вариант 29*** $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$	***Вариант 30*** $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, формулировок

1. Определители 2-го, 3-го, ***n***-го порядков.
2. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
3. Обратная матрица.
4. Минор, ранг матрицы, базисный минор.
5. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы.
6. Определённые, неопределённые, совместные, несовместные линейные алгебраические системы уравнений.
7. Матричная запись линейных алгебраических систем уравнений.
8. Метод Гаусса решения линейных алгебраических систем уравнений.
9. Метод Кронекера-Капелли исследования и решения линейных алгебраических систем уравнений.
10. Собственные числа и собственные векторы матриц.

2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Свойства операций сложения, вычитания, умножения матриц.
2. Свойства определителей (3-го порядка).
3. Существование обратной матрицы, её конструкция.
4. Метод обратной матрицы решения линейной алгебраической системы уравнений.
5. Теорема Крамера.
6. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений.

3. Умения в решении задач

Студент должен уметь

1. Вычислять определители 2-го, 3-го и старших порядков.
2. Находить сумму, разность, произведение матриц.
3. Находить ранги матриц.
4. Решать произвольные системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. Решать квадратные системы методом Крамера.
6. Анализировать совместность систем методом Кронекера-Капелли.
7. Находить собственные числа и собственные векторы матриц.

Образцы зачетных (экзаменационных) задач

1. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Пусть даны две матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу C, удовлетворяющую уравнениям:

$$\text{а) } A \cdot B + \lambda C = A; \ \lambda \neq 0; \text{ б) } A \cdot C = E.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \phantom{x_3 -{}} x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = \text{-}1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{-}1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \text{-}4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = \text{-}2. \end{cases}$$

5. Исследовать на совместность систему уравнений. Если она совместна, решить её.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = \text{-}1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = \text{-}6. \end{cases}$$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & \text{-}2 & \text{-}1 \\ \text{-}1 & 3 & \text{-}1 \\ 1 & \text{-}2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З. И.* Определители и матрицы: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Наука. Физ.-мат. лит., 1988. – 184 с.

2. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. – СПб.: Изд. РГГМУ. 2004. – 142 с.

3. *Веретенников В. Н.* Методические указания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. – СПб.: Изд. РГГМУ. 2004. – 36 с.

4. *Гильберт А.* Как работать с матрицами. – М.: Статистика, 1981. – 157 с.

5. *Гусак Г. М.* Системы алгебраических уравнений. – Мн.: Выш. Школа, 1983. – 222 с.

6. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А*. Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов. – СПб.: Изд. СПБГТУ, 2001. – 55 с.

7. *Краснов М*. Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.

8. *Рябушко А. П.* и др. Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч. 1. – Мн.: Высш. шк., 1990. – 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Валентин Николаевич Веретенников

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Редактор: И.Г. Максимова

Издается в авторской верстке

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 17.09.15. Формат 60×90 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,75. Тираж 150 экз. Заказ № 453.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр. 98.
Отпечатано в ЦОП РГГМУ