

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.ЛЕГОРОВ, Е.В.ПОТЕРЯЙКО

**ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ**

Санкт-Петербург
2025

УДК 551.511

*Одобрено Ученым советом метеорологического факультета
РГГМУ*

К.Л.Егоров, Е.А.Потеряйко. «Пограничный слой атмосферы. Основы теории и аналитические решения».

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям метеорологических и океанологических направлений.

Ответственный редактор К.Л. Егоров

Рецензенты

В.М.Краснов, д.ф.-м.н., профессор 52 кафедры Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского.

Е.Д.Надёжина, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Отдела динамической метеорологии ГГО имени Воейкова.

Санкт-Петербург
2025

Предисловие

Это учебное пособие составлено в соответствии с планом распределения часов по разным дисциплинам, имеющим отношение к теории гидро- и термодинамических процессов в атмосфере. Общее количество часов и тем распределены по четырём дисциплинам: 1- «Гидромеханика (механика жидкости и газа)», - с описанием основных законов и особенностей их проявления на вращающейся Земле; 2- «Динамическая метеорология» - с теоретическим описанием процессов в наиболее типичных атмосферных системах различного масштаба; 3- «Взаимодействие воздушного потока с подстилающей поверхностью»- с изучением детальной структуры пограничного и приземного слоя с аналитическими решениями прикладных задач и анализом внутренних связей их физических параметров; 4- «Дополнительные главы Динамической метеорологии»- с более детальным изучением некоторых важных вопросов, таких как циркуляционные и волновые процессы различной природы и различного масштаба. В дисциплинах, отмеченных как -2- и -3-, основные темы затрагивают круг вопросов, посвящённых процессам в пограничном и приземном слоях атмосферы. В связи с достаточно большим объёмом учебного материала, касающегося основ теории этих вопросов и связанных с ними прикладных задач, авторы сочли целесообразным составить для них отдельное учебное пособие.

Процессы в пограничных слоях определяют локальное взаимодействие между атмосферой и подстилающей поверхностью, формируя обмен теплом и водяным паром. От корректности описания этого обмена зависит и корректность прогноза мезомасштабных и крупномасштабных атмосферных процессов. Это определяет актуальность исследований, касающихся взаимосвязей между параметрами пограничных атмосферных слоёв с определяющими их внешними факторами в различных метеорологических системах.

Краткий исторический обзор работ, посвящённых формированию классической теории турбулентности и теории планетарного пограничного слоя, представлен в монографии Зилитинкевича С.С. «Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои», 2013 г. Впервые влияние вращения Земли на формирование планетарного пограничного слоя (ППС) было проанализировано в работах В. Экмана, 1902 г. и 1905 г., посвящённых вертикальной структуре ветрового дрейфового течения в верхнем слое океана. Позднее аналогичные задачи были решены для атмосферного ППС в работах Акерблома, Ф. А. (1908 г.) и Тейлора Г. И. (1915 г.). В дальнейшем развитие теории ППС определялось развитием классической теории турбулентности, первоначально основанной на

гипотезах Прандтля, и Кармана, и получившей существенное развитие в работах Фридмана А. А., Колмогорова А. Н., Обухова А. М., Мони́на А. С., и Яглома А. М. Некоторые задачи, традиционно включаемые в программу курса «Динамическая метеорология», рассмотрены в монографии Лайхтмана Д.Л. «Физика пограничного слоя атмосферы», 1970 г..

В пособии изложены идеи теории подобия физических процессов и метод анализа размерностей, находящих эффективное применение при определении взаимосвязей между параметрами физических процессов и при решении задач пограничного слоя.

При выборе круга рассмотренных в пособии вопросов и при изложении некоторых из них авторы принимали во внимание материалы базовых учебников «Основы динамической метеорологии» под редакцией Д.Л.Лайхтмана и М.И.Юдина, 1955г., и «Динамическая метеорология» под редакцией Д.Л.Лайхтмана, 1976г., а также материалы монографий «Статистическая гидромеханика» А.С.Мони́на и Яглома, 1965г., «Физика пограничного слоя атмосферы» Лайхтмана Д.Л., 1970г., «Динамика пограничного слоя атмосферы» С.С.Зилитинкевича, 1970г., «Гидродинамика атмосферы, океана и земных недр» А.С.Мони́на, 1999г., «Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои» С.С. Зилитинкевича», 2013г., «Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя» Р.А.Брауна, 1978г. и другие.

Внесены новые вопросы, касающиеся особенностей формирования вертикальной структуры воздушного потока над лесным массивами и над морской поверхностью, а также эффектов трения в горизонтальных и вертикальных структурах циркуляционных систем.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ	6
2. ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ ПО РЕЙНОЛЬДСУ	30
3. ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ СИСТЕМЫ ОСРЕДНЁННЫХ УРАВНЕНИЙ.....	54
4. УПРОЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ.....	87
5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕТРА В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ	105
6. СТАЦИОНАРНЫЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ.....	117
7. ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЭФФЕКТЫ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ	140
8. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ	165
9. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	202
10. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	224
11. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	256
12. ПРОЯВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ В ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ	298
13. ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ.....	320

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

1.1 Аналитические методы моделирования пограничного слоя

1.2 Базовая система уравнений гидротермодинамики атмосферы: гидродинамическая и термодинамическая группы уравнений

1.3 Уравнение переноса как обобщение эволюционных уравнений системы гидротермодинамики атмосферы

1.4 Переход к дивергентно-потокковой форме уравнения переноса

1.1 Аналитические методы моделирования пограничного слоя

Динамическая метеорология занимается разработкой математических моделей атмосферных процессов на базе уравнений, вытекающих из сопутствующих разделов физики и механики жидкостей и газов. Математические модели содержат различные уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные) и функциональные соотношения. Как правило, уравнения являются достаточно сложными (в силу своей нелинейности), что вызывает трудности при их решении. В целом математические методы решения уравнений можно разделить на две группы: аналитические и численные. Роль численных методов резко возросла в современной науке в связи с широкой доступностью вычислительной техники. В метеорологии численные методы реализуются в гидродинамическом моделировании, которое в настоящее время является важнейшим инструментом изучения и прогнозирования атмосферных процессов. Его суть состоит в проведении вычислительных экспериментов на компьютере. При использовании численных методов не удается найти решение уравнений в общем виде, их решают для конкретных начальных данных, представляющих собой массив чисел. При этом имеется возможность задания различных параметров модели и получения решений для большого набора конкретных начальных условий. Реальный прогноз погоды основан на численных методах.

Каково же тогда значение аналитических методов в задачах динамической метеорологии? Аналитические методы направлены на получение явных зависимостей для величин, характеризующих атмосферные процессы. Для возможности их применения идут на некоторые упрощения первоначальной математической модели. Упрощенная модель отражает наиболее существенные стороны моделируемого процесса и абстрагируется от второстепенных. Естественно, получаемые решения упрощенной модели не описывают реальный процесс в полной мере, однако физически обоснованное огрубление математической формулировки позволяет добиться четкого понимания некоторых конкретных, главенствующих механизмов реальных процессов. Данное обстоятельство является главным преимуществом аналитических методов.

Чтобы вносимые в уравнения упрощения отвечали физике исследуемых процессов, а также записывались в удобной для проведения преобразований форме, необходимо владеть определенными навыками. Среди них следует особо отметить следующие: грамотный выбор характерных масштабов физических величин, умение применять теорию подобия и анализ размерностей, а также записывать уравнения с использованием тензорного представления.

Характерные масштабы физических величин

Физические величины, характеризующие процессы в атмосфере, являются функциями координат и времени и изменяются в определенных пределах. Для различных процессов сами величины и пределы, в которых они варьируются, разные. Характерный масштаб физической величины – это типичный для группы сходных процессов диапазон значений рассматриваемой величины. Например, при формировании движений важно не абсолютное значение давления, а перепад давления, поскольку именно он вызывает движение воздушных масс, то есть характерным масштабом является некоторая разность δp [1]. Точно также свойства бризовой циркуляции определяются разностью температур суши и воды, а не средней температурой или температурой в какой-либо точке. Однако имеют место ситуации, когда в качестве характерного масштаба может быть выбрано одно значение. Так, скорость движения воздушной частицы принимает неотрицательные значения, и одно из них может быть характерным для процесса. Можно привести пример, касающийся температуры. Если речь идет о молекулярных процессах, в которых она является мерой средней

кинетической энергии молекул, характерным масштабом будет некоторое одно значение температуры (по шкале Кельвина), а не разность δT .

Следует отметить, что характерные масштабы для одной и той же физической величины могут быть различны для разных пространственных направлений (главным образом, для горизонтального и вертикального направления). При этом, очевидно, возникает вопрос о необходимости введения характерного пространственного масштаба явления. В качестве такового принимается то расстояние x_0 , на котором изменение функции f , определяемое изучаемыми процессами, соответствует масштабу f_0 . Иными словами, это размеры области, охваченной данным явлением. Аналогичным образом вводится и характерный временной масштаб t_0 процесса.

Мы увидели, что выбор масштаба для той или иной величины должен быть осознанным. Определение масштабов для физических величин является важнейшим этапом перед применением теории подобия.

Идеи теории подобия

Задачей теории подобия является установление критериев подобия различных объектов, процессов, и изучение их свойств с помощью этих критериев. Подробный анализ примеров подобных объектов и критериев подобия приведён в работе [2].

Самым простым типом подобия является геометрическое подобие. Все остальные типы подобия представляют собой обобщение этого элементарного и наглядного понятия. Две геометрические фигуры подобны, если они могут стать тождественными вследствие одинакового по всем пространственным направлениям изменения их размеров (рисунок 1.1).

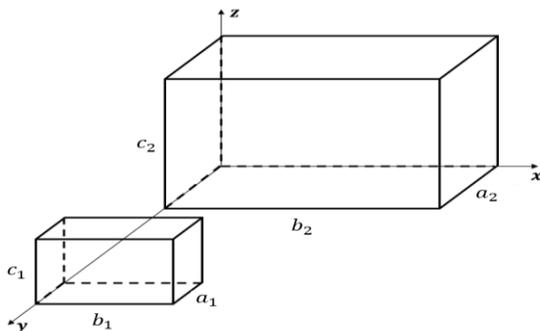


Рисунок 1.1 – Геометрическое подобие параллелепипедов.

При этом коэффициент подобия, или масштаб m_0 , одинаков для всех одноименных размеров

$$m_0 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}. \quad (1.1)$$

Понятие подобия может быть распространено на физические явления. Можно говорить, например, о подобии картины движения двух потоков жидкости – кинематическом подобии; о подобии сил, вызывающих подобные между собой движения – динамическом подобии; о подобии картины распределения температур и тепловых потоков – тепловом подобии и так далее.

Понятие подобия в отношении физических явлений применимо только к явлениям одного и того же рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию. Обязательной предпосылкой подобия физических явлений должно быть геометрическое подобие. Последнее означает, что подобные явления всегда протекают в геометрически подобных системах.

Любой физический процесс отличается от подобного ему процесса только характерными масштабами величин, участвующих в процессе физических величин. При этом численные значения соотношений идентичных характерных масштабов определяются формированием конкретных функциональных связей. Таковыми являются безразмерные комплексы, составленные из характерных масштабов физических величин. Для выяснения условий подобия необходимо иметь математическое описание процесса; либо, основанное на экспериментальных данных и известных теоретических положений, формирование всей группы параметров, участвующих в исследуемом процессе. На основе описывающих два подобных процесса уравнений, приведенных к безразмерному виду, могут быть получены критерии подобия двух физических процессов. Условием полного подобия двух процессов является равенство численных значений критериев подобия. Значения размерных физических параметров подобных процессов могут сильно отличаться друг от друга, но значения безразмерных критериев подобия должны совпадать [3]. Если для двух процессов выполняется равенство численных значений не всех безразмерных комплексов, то говорят о частичном подобии по тем или иным критериям.

Наконец, можно упомянуть о математическом подобии (часто называемом аналогией), которое имеет место, если математическое описание двух каких-либо явлений одинаково по форме, но различно по физическому содержанию. В этом случае общим в сравниваемых процессах будут не их качественные свойства, а формальные отношения между элементами систем. Таким образом, признаком математического подобия является наличие формально одинаковых уравнений, характеризующих процессы различной физической природы. Свойство одних и тех же по форме уравнений описывать различные по своей природе процессы называется изоморфизмом уравнений.

Ярким примером математического подобия является электрогидродинамическая аналогия между движением электрического тока в проводящей среде и движением жидкости. Подобие в данном случае выражается в том, что пространственное распределение потенциала скорости идеальной жидкости, с одной стороны, и пространственное распределение потенциала электрического, с другой стороны, являются решениями уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2)$$

Методами теории подобия решаются многие вопросы механики жидкостей и газов. Изучение процесса, протекающего в натуре, заменяется изучением процесса на модели, как правило, меньшего или большего размера (или, другими словами, на модели со значениями параметров, удобно достижимыми в эксперименте) обычно в специальных лабораторных условиях. Основной смысл такого моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было указать наилучшие характеристики натурального изделия, а иногда просто установить неизвестные ранее закономерности.

Кроме указанного направления применения теории подобия следует отметить еще три, играющих важнейшую роль при исследовании динамики атмосферы. К ним относятся:

- выяснение основных особенностей атмосферных движений, выделяющих их из всего многообразия движения жидкостей и газов, удовлетворяющих уравнениям динамики вязкой сжимаемой жидкости;

- классификация атмосферных движений и установление отличительных особенностей каждого из этих классов, в частности,

установление ключевых параметров, характера зависимости элементов движения от этих параметров и возможность упрощения уравнений для каждого класса движений;

- преобразование уравнений задачи с использованием полученных выводов о виде решения в результате анализа его методами теории подобия.

В случаях, когда рассматривается процесс, для которого аналитическое описание еще не сформулировано, выделение критериев подобия производится на основе достаточно эффективного метода, называемого анализ размерностей.

Анализ размерностей

Анализ размерностей представляет собой оригинальный метод математической физики, который может быть использован как начальный этап в решении физических задач. Основные положения и теоремы, отражающие содержание этого метода изложены в работе [4]. Для того, чтобы понять его сущность, вспомним некоторые, известные из физики, понятия и определения.

Количественная мера той или иной физической величины выражается числом. Это число представляет собой отношение, которое получается путем измерения – прямого или косвенного сравнения с другой величиной того же физического содержания, принимаемой в качестве единицы измерения [5]. Единицы измерения разделяются на основные и производные. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде тех или иных эталонов, искусственных или природных. Они представляют собой элементарные физические категории и не могут быть выражены одна из другой. Например, единицы длины, массы и времени могут быть выбраны в качестве основных единиц для механических величин. В таком случае единица скорости уже не может быть принята в качестве основной. По определению, скорость представляет собой отношение расстояния, проходимого за определенный промежуток времени, к величине этого промежутка времени. Поэтому за единицу скорости следует принять отношение выбранной единицы длины к единице времени. Такая единица будет относиться к группе производных единиц, которые получаются из основных единиц измерения в силу определения той или иной физической величины, не отнесенной к числу основных.

Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения физических величин рассматриваемого класса явлений,

называется системой единиц измерения. Так, в механике в настоящее время принята система единиц СИ, в которой за единицу массы принят 1 килограмм (кг) – масса тщательно охраняемого эталона, за единицу длины – 1 метр (м), за единицу времени – 1 секунда (с) – 1/86400 доля средних солнечных суток.

Классом систем единиц называется совокупность систем единиц, основанных на одних и тех же физических величинах. Каждой физической величине, принятой в качестве основной, присваивается символ в виде заглавной буквы латинского алфавита, называемый размерностью основной величины. Для размерностей массы, длины и времени применяются обозначения соответственно M, L, T . Это значит, что если x есть линейный размер какой-либо физической величины, m – масса, а t – время, то говорят, что в классе MLT размерность x есть L , размерность m есть M , размерность t – есть T , и символическая запись имеет вид

$$[x] = L, [m] = M, [t] = T. \quad (1.3)$$

Упомянутая выше система СИ относится к классу MLT . К этому же классу относится и имеющая до сих пор распространение система СГС, в которой в качестве основных единиц измерения приняты сантиметр (см), грамм (г), и секунда (с).

Размерности M, L, T , которые можно назвать элементарными размерностями в соответствующем классе единиц измерения, кроме символики, отражающей физический смысл измеряемой величины, имеют и другое содержание. Они представляют собой числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины и времени при переходе от исходной системы (например, СИ) к другой системе данного класса. Так, при переходе от системы СИ к системе СГС $M = 1000$ ($1\text{кг} = M \cdot \text{г} = 1000\text{г}$), а $L = 100$ ($1\text{м} = L \cdot \text{см} = 100\text{см}$).

Обобщим понятие размерности для производных физических величин. Размерность таких величин в рассматриваемом классе единиц, может быть выражена только через некоторую комбинацию элементарных размерностей. Такая размерность, в отличие от элементарной, называется составной. Символическая запись, показывающая каким образом составная размерность производной физической величины, выражается через элементарные размерности, называется формулой размерности. В качестве примера рассмотрим как составляется формула размерности в классе MLT для силы F , определяемой как

$$F = ma, \quad (1.4)$$

где m – масса, a – ускорение. Формула размерности скорости движения V имеет вид

$$[V] = \frac{[X]}{[t]} = LT^{-1}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что для ускорения формула размерности записывается следующим образом

$$[a] = \frac{[X]}{[t][t]} = LT^{-2}. \quad (1.6)$$

Тогда, принимая во внимание, что размерность массы есть M , для силы имеем

$$[F] = \frac{[m][X]}{[t][t]} = MLT^{-2}. \quad (1.7)$$

Важно отметить, что формула размерности представляет собой функцию, показывающую, во сколько раз изменится значение физической величины при переводе от одной системы основных единиц к другой внутри данного класса. Так, если единицу массы уменьшить в M раз, единицу длины – в L раз, единицу времени – T раз, то численное значение измеряемой силы возрастет в MLT^{-2} раз.

Во всех случаях размерность любой производной физической величины $[\varphi]$ определяется степенным одночленом

$$[\varphi] = M^\alpha L^\beta T^\gamma. \quad (1.8)$$

При необходимости набор основных физических величин, входящих в класс MLT , может быть дополнен. Например, при описании самостоятельных термодинамических процессов целесообразно добавить единицу температуры θ (градус) и единицу теплоты Q . Стоит помнить, что исторически теплота измерялась в калориях. Именно поэтому элементарной единицей теплоты является калория, при этом возможность преобразования теплоты в эквивалентное количество механической работы позволяет выражать теплоту в джоулях.

Величины, численное значение которых не меняется при переходе от одной системы единиц к другой внутри данного класса, называются безразмерными. Размерность безразмерной величины равна единице.

Говоря о физических исследованиях необходимо отметить, что их результатом, как правило, является установление функциональной связи между различными физическими величинами, или параметрами исследуемого процесса. При этом физические величины, от численного значения которых зависит численное значение искомой физической величины, называют определяющими параметрами. В общей совокупности определяющих параметров исследуемого процесса можно выделить группу параметров, в которой размерность любого параметра нельзя выразить через размерности других параметров этой группы. Такая группа называется группой параметров с независимыми размерностями. Так, например, высота z с размерностью $[z] = L$, скорость V с размерностью $[V] = LT^{-1}$ и сила F с размерностью $[F] = MLT^{-2}$ составляют группу параметров с независимыми размерностями, а размерности расстояния $[X] = L$, скорости $[V] = LT^{-1}$ и ускорения $[a] = LT^{-2}$ являются зависимыми.

Теперь абстрагируемся от класса единиц MLT . Пусть есть класс системы единиц размерности b_1, b_2, \dots, b_q , а также физическая величина a_0 и набор определяющих параметров (a_1, \dots, a_n) , среди которых существует группа из k параметров с независимыми размерностями. Необходимо установить связь между физической величиной a_0 и n определяющими параметрами.

На первом этапе формулируется функциональная связь между искомой физической величиной и определяющими параметрами в виде неявной зависимости

$$a_0 = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (1.9)$$

Для каждой физической величины записывается формула размерности

$$[a_i] = b_1^{c_{1i}} b_2^{c_{2i}} \cdot \dots \cdot b_q^{c_{qi}}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.10)$$

Как только записаны формулы размерности для каждой физической величины, удобно заполнить матрицу размерностей (таблица 1.1). Компоненты (матричные элементы) матрицы размерности есть показатели степеней, в которых единицы размерностей (перечисленные слева) входят в определяющие параметры (перечисленные сверху). Число

столбцов равно числу определяющих параметров, число строк равно числу элементарных размерностей. Заметим, что в первом столбце целесообразно расположить искомую величину a_0 . Всякая матрица, в том числе и матрица размерностей, характеризуется ее рангом r , то есть порядком наибольшего по числу строк и столбцов ненулевого определителя (детерминанта). Ранг матрицы размерностей всегда равен числу определяющих параметров с независимыми размерностями в полном наборе определяющих параметров, то есть $r = k$. В то же время ранг матрицы размерностей не больше числа строк (может быть и меньше), то есть $r \leq q$. Как правило, случай $r < q$ можно заранее предусмотреть и не выписывать лишних строк. Тогда $k = q$.

Таблица 1.1 – Матрица размерностей.

	a_0	a_1	...	a_k	a_{k+1}	...	a_n
b_1	c_{10}	c_{11}	...	c_{1k}	c_{1k+1}	...	c_{1n}
b_2	c_{20}	c_{21}	...	c_{2k}	c_{2k+1}	...	c_{2n}
...
b_q	c_{q0}	c_{q1}	...	c_{qk}	c_{qk+1}	...	c_{qn}

Теперь можно сформулировать главную теорему анализа размерностей, называемую -теоремой. Она устанавливает, что зависимость между n размерными величинами (a_0, a_1, \dots, a_n) может быть преобразована в функциональную связь между $m = n + 1 - k$ безразмерными комплексами $(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k})$, то есть

$$a_0 = f \left(a_1, \dots, a_k, \overbrace{a_{k+1}, \dots, a_n}^{n-k} \right) \quad (1.11)$$

$$\downarrow$$

$$\Pi_0 = F(1, \dots, 1, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n).$$

Нетрудно заметить, что первоначальная функция f является функцией n переменных, а новая функция F является функцией $n - k$ переменных, то есть число переменных сокращается с n размерных до $n - k$ безразмерных (безразмерных комплексов). Безразмерный комплекс (включая и безразмерный комплекс Π_0 , соответствующий искомой величине a_0) представляет собой дробь, в знаменателе которой стоит

степенной одночлен, составленный из группы величин с независимой размерностью, а в числителе один из параметров, не вошедших в эту группу:

$$P_j = \frac{a_j}{a_1^{\alpha_{j1}}, \dots, a_k^{\alpha_{jk}}}. \quad (1.12)$$

где $j = 0, k + 1, \dots, n$. Показатели степени α подбираются так, чтобы обеспечить условие безразмерности записанных комплексов (размерность знаменателя должна быть равна размерности числителя). Другими словами, они должны быть такими, чтобы элементарные размерности сократились в числителе и знаменателе. С учетом этого, для каждого безразмерного комплекса составляется система алгебраических уравнений, приравнивающих показатели степени при элементарных размерностях в числителе и знаменателе. Так, например, для размерности b_i , фигурирующей в любом безразмерном комплексе P_j , может быть составлено равенство:

$$c_{ij} = \alpha_{j1}c_{i1} + \dots + \alpha_{jk}c_{ik}. \quad (1.13)$$

Возможны такие случаи, когда система уравнений для показателей степеней оказывается несовместной. Это свидетельствует о том, что какая-то из величин, существенных для решения задачи, оказалась неучтенной. В числе таких величин может быть и размерная постоянная. В качестве примера размерных постоянных можно привести C_p , или C_v при описании термодинамических процессов с использованием первого начала термодинамики.

Чем меньше разность $m = n + 1 - k$, тем определеннее будет решение задачи. При $m = 1$ задача становится наиболее определенной и, как правило, однозначной, позволяющей выразить искомую зависимость в виде явной функции.

В работах [2], [6] и [7] приведены примеры применения Π -теоремы для различных задач, в частности, задач теории турбулентности и динамической метеорологии.

Рассмотрим два простых примера применения Π -теоремы.

1. Удельная (отнесенная к единице массы) кинетическая энергия неустойчивости W частицы воздуха в устойчиво стратифицированной атмосфере зависит от параметра плавучести g/T , вертикального градиента

потенциальной температуры Γ и смещения ξ частицы относительно ее положения равновесия. Это означает, что мы можем сформулировать неявную зависимость W от трех определяющих параметров

$$W = f(g/T, \Gamma, \xi). \quad (1.14)$$

В рассматриваемой задаче $n + 1 = 4$. Запишем формулы размерности для величин, входящих в формулу (1.14)

$$[W] = L^2 T^{-2}, [g/T] = L T^{-2} \theta^{-1}, [\Gamma] = L^{-1} \theta, [\xi] = L. \quad (1.15)$$

Согласно (1.15) заполним матрицу размерностей (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Матрица размерностей

	W	g/T	Γ	ξ
L	2	1	-1	1
T	-2	-2	0	0
θ	0	-1	1	0

Как видно, что число элементарных размерностей и число параметров с независимыми размерностями $q = k = 3$. Тогда $n + 1 - k = 1$. В таком случае можно составить только один безразмерный комплекс Π_W , который ни от чего не зависит и, следовательно, должен сохранять постоянное значение

$$\Pi_W = const = C, \quad (1.16)$$

где C – некоторая константа. Согласно (1.12)

$$\Pi_W \equiv \frac{W}{(g/T)^{\alpha_1} \Gamma^{\alpha_2} \xi^{\alpha_3}}. \quad (1.17)$$

Чтобы уравнять размерности числителя и знаменателя, составим равенства по каждой из строк матрицы размерностей

$$\begin{cases} L: 2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ T: -2 = -2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3. \\ \theta: 0 = -\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 \end{cases} \quad (1.18)$$

Решение системы (1.18) приводит к результату: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$. Таким образом получаем

$$\Pi_W \equiv \frac{W}{(g/T)\Gamma\xi^2} = C. \quad (1.19)$$

или

$$W = C \frac{g}{T} \Gamma \xi^2. \quad (1.20)$$

2. Скорость установившегося движения вдоль круговых изобар при отсутствии трения определяется величиной (модулем) изменения давления $\partial p / \partial n$ в направлении радиуса-вектора кривизны изобары, плотностью воздуха ρ , параметром Кориолиса $l = 2\omega_z = 2\omega \sin\varphi$ и радиусом кривизны изобар r . Найдем связь между скоростью ветра V и определяющими параметрами. Неявная зависимость имеет вид

$$V = f\left(\frac{\partial p}{\partial r}, \rho, r, \omega_z\right). \quad (1.21)$$

Формулы размерностей для величин, входящих в (1.21), имеют вид

$$[V] = LT^{-1}, [\partial p / \partial r] = ML^{-2}T^{-2}, [\rho] = ML^{-3}, [\omega_z] = T^{-1}, [r] = L \quad (1.22)$$

На основе (1.22) заполним матрицу размерностей (таблица 3).

Таблица 1.3 – Матрица размерностей

	V	r	$\partial p / \partial n$	ρ	ω_z
L	1	1	-2	-3	0
M	0	0	1	1	0
T	-1	0	-2	0	-1

Поскольку $n + 1 - q = 2$, мы можем составить два безразмерных комплекса. В качестве совокупности трех параметров с независимыми размерностями выберем $\partial p / \partial n$, ρ и ω_z . В таком случае можно записать

$$\Pi_V = F(\Pi_r). \quad (1.23)$$

где

$$\Pi_V = \frac{V}{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{\alpha_{11}} \rho^{\alpha_{12}} \omega_z^{\alpha_{13}}}, \quad \Pi_r = \frac{r}{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{\alpha_{21}} \rho^{\alpha_{22}} \omega_z^{\alpha_{23}}}. \quad (1.24)$$

Условие равенства размерности числителя и знаменателя в обоих комплексах позволяет составить две системы уравнений

$$\begin{cases} L: 1 = -2\alpha_{11} - 3\alpha_{12} + 0\alpha_{13} \\ M: 0 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + 0\alpha_{13} \\ T: -1 = -2\alpha_{11} + 0\alpha_{12} - \alpha_{13} \end{cases}, \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} L: 1 = -2\alpha_{21} - 3\alpha_{22} + 0\alpha_{23} \\ M: 0 = \alpha_{21} + \alpha_{22} + 0\alpha_{23} \\ T: 0 = -2\alpha_{21} + 0\alpha_{22} - \alpha_{23} \end{cases}. \quad (1.26)$$

Разрешив обе системы получаем, что $\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = -1, \alpha_{13} = -1, \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = -1, \alpha_{23} = -2$. Тогда

$$\frac{V}{\frac{\partial p}{\partial n} \rho^{-1} \omega_z^{-1}} = F \left(\frac{r}{\frac{\partial p}{\partial n} \rho^{-1} \omega_z^{-2}} \right). \quad (1.27)$$

Выражая из (1.27) V , имеем

$$V = \frac{1}{\rho \omega_z} \frac{\partial p}{\partial n} F \left(\frac{r \omega_z^2}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}} \right). \quad (1.28)$$

Следует отметить, что результат может быть получен и в несколько ином виде. Если в качестве параметров с независимой размерностью выбрать группу r, ρ и l , то получим два других безразмерных комплекса

$$\Pi_V^* = \frac{V}{r \omega_z}, \quad \Pi_p = \frac{\partial p}{\partial n} \frac{1}{\rho r \omega_z^2}. \quad (1.29)$$

Тогда выражение для параметра V представится в виде

$$V = r\omega_z F_1 \left(\frac{1}{\rho r \omega_z^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right). \quad (1.30)$$

Нетрудно убедиться, что записи (1.28) и (1.30) тождественны. Действительно, умножим и разделим правую часть (24) на Π_p

$$V = \frac{1}{\rho \omega_z} \frac{\partial p}{\partial n} \left[\frac{F_1(\Pi_p)}{\Pi_p} \right] = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial n} F_2(\Pi_p). \quad (1.31)$$

Что касается неизвестной функции $F_2(\Pi_p)$ ее аргумент Π_p переводится в аргумент функции $f_n(\Pi_r)$ простой заменой $\Pi_r = (\Pi_p)^{-1}$. В таком случае однозначность зависимости (21) означает, что

$$F_2(\Pi_p) = F(\Pi_r). \quad (1.32)$$

Этот вывод подтверждается решением уравнения установившегося движения в поле круговых изобар. Например, решение уравнения, соответствующего движению в циклонической системе

$$\frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - 2\omega_z V, \quad (1.33)$$

может быть записано в виде:

$$V = \omega_z r \left(\sqrt{1 + \frac{1}{r \omega_z^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial n}} - 1 \right). \quad (1.34)$$

Этому результату соответствует соотношение (1.30), в котором

$$F_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{r \omega_z^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial n}} - 1. \quad (1.35)$$

Используя выражение для геострофической величины ветра [6]

$$V_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (1.36)$$

можем записать

$$F_1 = \sqrt{1 + 2\xi^{-1}} - 1, \quad \xi \equiv \frac{\omega_z r}{V_g}. \quad (1.37)$$

В то же время решение можем записать в виде

$$V = V_g \cdot \frac{\omega_z r}{V_g} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{V_g}{\omega_z r}} - 1 \right) = V_g (\sqrt{\xi^2 + 2\xi} - \xi). \quad (1.38)$$

Такому виду решения соответствует выражение (1.31), в котором

$$F_2 = \sqrt{\xi^2 + 2\xi} - \xi \quad (1.39)$$

Мы показали, что выбор величин с независимыми размерностями, вообще говоря, неоднозначен, в результате чего при применении Π -теоремы могут получаться разные выражения. Однако на самом деле получающиеся результаты эквивалентны, и из одной формы записи можно получить другую путем перехода к комбинациям безразмерных параметров.

1.2 Базовая система уравнений гидротермодинамики атмосферы: динамическая и термодинамическая группы уравнений

Ранее отмечалось, что динамическая метеорология изучает атмосферные процессы на основе общих законов физики. Дифференциальные формулировки закона сохранения импульса движения (второй закон Ньютона) и закона сохранения массы образуют гидродинамическую группу уравнений, а дифференциальная формулировка закона сохранения энергии является ядром термодинамической группы уравнений. Вместе гидродинамическая и термодинамическая группы уравнений образуют систему уравнений гидротермодинамики атмосферы. При изучении конкретного процесса в атмосфере производится преобразование общих уравнений гидротермодинамики применительно к физическим условиям рассматриваемого процесса, его особенностям. Они, в свою очередь, познаются путем обобщения фактических данных, полученных из наблюдений, а также на основании специальных экспериментальных исследований. При этом теоретические выводы

проверяются путем сопоставления их с фактическими данными наблюдений и только после опытной проверки выводы теории используются для решения практических задач. Данное рассуждение объясняет, почему рассмотрение процессов в пограничном слое атмосферы следует начать именно с формулировки системы гидротермодинамики атмосферы в самом общем виде.

Начнем с гидродинамической группы уравнений. В механике жидкости и газа уравнения записываются по отношению к жидкому объему единичной массы. Второй закон Ньютона устанавливает связь между ускорением такого жидкого объема (единичной массы) и действующими на него силами (по отношению к единичной массе эти силы можно назвать удельными)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_i, \quad (1.40)$$

где \vec{V} – вектор скорости, ρ – плотность среды, \vec{F} – силы, действующие на единичную массу (удельные силы). Поскольку в динамической метеорологии используются системы координат, связанные с вращающейся Землей, то в число действующих сил помимо реальных физических сил включаются силы инерции, а именно центробежная сила вращения Земли и сила Кориолиса. При этом результирующая центробежной силы вращения Земли и силы гравитационного притяжения Земли есть сила тяжести.

Привязываясь к вращающейся Земле, ориентацию одной из осей выбирают так, чтобы ее направление в каждой точке поверхности Земли было перпендикулярно локальной горизонтальной плоскости, касательной к условной невозмущенной поверхности мирового океана (на практике, к любой невозмущенной водной поверхности). Это направление, называемое вертикальным, противоположно силе тяжести, и его принято обозначать как ось Oz . Два других ортонормированных направления Ox и Oy в горизонтальной плоскости вместе с осью Oz составляют локальную, вращающуюся вместе с поверхностью Земли, декартову систему координат.

Уравнение движения (как выражение второго закона Ньютона), используемые для описания динамики атмосферы, в такой системе координат имеет вид [8], [9] :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{V}}{dt} &\equiv \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho}\text{grad}p \\
&\quad + 2[\vec{V} \times \vec{\omega}] - \vec{g} \\
&\quad + \vec{F}_\mu \\
\vec{F}_\mu &= \frac{\mu}{\rho} \left[\Delta(\text{grad}\vec{V}) + \frac{1}{3}\text{grad}(\text{div}\vec{V}) \right],
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Здесь: p – давление, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли, g – ускорение свободного падения, μ – коэффициент динамической вязкости воздуха. Первое слагаемое в правой части представляет собой силу барического градиента, второе – силу Кориолиса, третье – силу тяжести, а последнее – вязкие молекулярные силы.

Запись уравнения движения атмосферы в проекциях на оси локальной декартовой системы координат в форме Навье-Стокса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z v - \omega_y w) + (F_\mu)_x,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\
= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x w - \omega_z u) + (F_\mu)_y,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \\
= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2(\omega_y u - \omega_x v) - g \\
+ (F_\mu)_z,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Фактически, уравнения движения в форме Навье-Стокса включают в себя параметры среды, в частности- компоненты скорости u , v , w , давление p , плотность ρ , осредненные по пространству элементарного объема и характеризующие их мгновенные значения. С математической

точки зрения пространственные масштабы в этих уравнениях могут быть сколь угодно малы.

Записанные уравнения (1.42) – (1.44) содержат пять функций, зависящих от времени и координат. Таким образом, система не замкнута и ее необходимо дополнить. Одним из соотношений, дополняющих систему, является уравнение неразрывности, являющееся дифференциальной формулировкой закона сохранения массы и связывающее распределение скорости движения в пространстве с изменением плотности воздуха во времени

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (1.45)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (1.45) можно записать как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0. \quad (1.46)$$

Дифференциальные уравнения (1.42) – (1.44) вместе с уравнением (1.45) или с уравнением (1.46) образуют гидродинамическую группу уравнений системы гидротермодинамики атмосферы.

Термодинамическая группа включает в себя уравнение состояния воздуха, свойства которого с достаточной точностью описывается законами идеальных газов. При отсутствии в воздухе водяного пара связь между давлением, плотностью и термодинамической (абсолютной) температурой T (в Кельвинах) определяется соотношением

$$\rho = \frac{P}{RT}, \quad (1.47)$$

где R – удельная газовая постоянная сухого воздуха. Появление новой переменной T требует привлечения еще одного уравнения. Таковым является уравнение притока тепла, являющееся следствием первого начала термодинамики, выражающего закон сохранения энергии. Оно может быть записано через абсолютную температуру T

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \sum \left(\frac{dQ}{dt} \right)_i, \quad (1.48)$$

где $C_p dT/dt$ – изменение энтальпии (теплосодержания) частицы за единицу времени, $(dQ/dt)_i$ – притоки тепла (лучистый, фазовый, молекулярный диффузионный), или в терминах потенциальной температуры θ

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{C_p} \frac{\theta}{T} \sum \left(\frac{dQ}{dt} \right)_i. \quad (1.49)$$

Использование потенциальной температуры обладает важным преимуществом: потенциальная температура индивидуальной частицы воздуха сохраняется постоянной при сухоадиабатических процессах.

Если используется уравнение притока тепла в форме (1.49), то необходимо привлечь связь между T и θ :

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/C_p}. \quad (1.50)$$

И наконец, термодинамическую группу целесообразно дополнить уравнением для удельной влажности (массовой доли водяного пара) q

$$\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \sum (J_q)_i, \quad (1.51)$$

где $(J_q)_i$ – источники водяного пара (а именно скорость фазовых переходов в объеме воздуха), а также молекулярный диффузионный приток. Использование параметра q (массовой доли водяного пара) в качестве характеристики влагосодержания может быть обусловлено тем, что величина q в ненасыщенной водяным паром массе воздуха сохраняется постоянной при отсутствии источников $(J_q)_i$.

Мы рассмотрели базовую систему уравнений гидротермодинамики атмосферы. Она включает в себя эволюционные (содержащие производную по времени) уравнения, которые могут быть записаны в разных формах в зависимости от задачи.

1.3 Уравнение переноса как обобщение эволюционных уравнений системы гидротермодинамики атмосферы

Если посмотреть на уравнения (1.42) – (1.44), (1.45), (1.49) и (1.51), то нетрудно увидеть, что они имеют идентичную структуру, а именно являются частными случаями уравнения переноса. Под уравнением переноса субстанции f понимают следующее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. По существу, оно представляет собой уравнение сохранения субстанции с развёрнутой полной производной по времени (или индивидуальной)

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \Sigma J_f(t, x, y, z). \quad (1.52)$$

Здесь f – переносимая субстанция, $u_j \sim u, v, w$ – проекции вектора скорости \vec{V} на соответствующие координатные оси, J_f – источники субстанции f .

Если в уравнении (1.52) $f = u$, или $f = v$, или $f = w$, то получаем уравнения переноса соответствующих компонент импульса (три уравнения движения). В этом случае источниками J_f являются суммы проекций сил, соответственно на оси Ox , Oy и Oz . Если $f = \rho$, а $J_f = \rho \operatorname{div} \vec{V}$, то уравнение (1.52) представляет собой уравнение неразрывности. Если в $f = \theta$, то приходим к уравнению притока тепла в терминах потенциальной температуры. Тогда J_f есть сумма притоков тепла. Если $f = q$, то приходим к уравнению переноса водяного пара.

Наконец, уравнение (1.52) может быть использовано для описания процесса переноса любой примеси в атмосфере. В этом случае $f = C$, где C – удельная концентрация примеси, а J_f представляет собой сумму источников примеси, в том числе выбросы компонентов примеси в атмосферу, образование и трансформацию вещества за счет химических реакций с участием компонент примеси.

Для дальнейших рассуждений будет удобна форма записи уравнения (1.52) с применением обозначений суммирования, используемых в тензорном исчислении. Если принять $x = x_1$, $y = x_2$ и $z = x_3$, а также $u = u_1$, $v = u_2$ и $w = u_3$, то сумму конвективных производных можно записать в форме

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \equiv u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (1.53)$$

и уравнение (1.52) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = J_f(t, x, y, z). \quad (1.54)$$

Таким образом, уравнения движения, неразрывности, притока тепла, переноса водяного пара, а также уравнение переноса любой примеси, имеющие форму, аналогичную уравнению (1.52), могут быть обобщены в виде одного уравнения переноса для унифицированной переменной f . При этом для компактности уравнение может быть записано с использованием обозначений, принятых в тензорном исчислении.

1.4 Переход к дивергентно-поточковой форме уравнения переноса

Отметим также, что левая часть уравнения (1.54) выражается через полную производную по времени. Другой формой записи уравнения переноса является дивергентно-поточковая форма. Указанная форма уравнения переноса будет необходима для некоторых дальнейших выкладок.

Умножим уравнение (1.54) на плотность ρ (учитываем, что $\rho J_f = \widetilde{J}_f$)

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \widetilde{J}_f, \quad (1.55)$$

Рассмотрим две производные $\partial(\rho f)/\partial t$ и $\partial(\rho u_j f)/\partial x_j$. В соответствии с правилом дифференцирования произведения двух функций можно записать

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial(\rho u_j f)}{\partial x_j} = f \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (1.57)$$

Отсюда

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} - f \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.58)$$

$$\rho u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho u_j f)}{\partial x_j} - f \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}. \quad (1.59)$$

Подставим выражения (1.58) и (1.59) в уравнение (1.55)

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} - f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j f)}{\partial x_j} - f \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \widetilde{J}_f. \quad (1.60)$$

Сгруппировав слагаемые со знаком минус, перепишем (1.60)

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} - f \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial(\rho u_j f)}{\partial x_j} = \widetilde{J}_f. \quad (1.61)$$

Видим, что выражение в квадратных скобках согласно уравнению неразрывности (1.46) равно нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j f)}{\partial x_j} = \widetilde{J}_f. \quad (1.62)$$

Поскольку уравнение (1.62) содержит в левой части дивергенцию вектора локального потока субстанции f , то оно называется уравнением переноса в дивергентно-потокковой форме. Величина \widetilde{J}_f представляет собой сумму внутренних и внешних источников субстанции f в единичном объёме.

Контрольные вопросы

1. В чём различие между размерностью и единицей измерения физической величины?
2. Какое условие объединяет подобные явления?
3. Что понимается под характерным масштабом физической величины или явления?

4. Какой физический смысл полной производной по времени физического параметра?
5. Чем определяются индивидуальные изменения физического параметра?
6. От чего зависит изменение свойств в фиксированной точке пространства?

Литература к главе 1

- 1 Браун, Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя / Перевод с англ. Э.В. Попова; Под ред. Д.В. Чаликова. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 150 с.
- 2 Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеиздат, 1978. -207 с.
- 3 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, 1970.
- 4 Хантли Г. Анализ размерностей. - Издательство «Мир», Москва, 1970. - 170 с.
- 5 Чертов А. Г. Единицы физических величин. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», 1977. - 287 с
- 6 Лайхтман Д.Л., Палагин Э.Г. Анализ размерностей в задачах динамической метеорологии. ЛПИ, 1976. -58.
- 7 Архипов В. А., Коноваленко А.И. Практикум по теории подобия и анализу размерностей. Учебно-методическое пособие. Томск, 2016.
- 8 Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т, Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. Л.: Гидрометиздат., 1955. – 647 с.
- 9 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.

2 ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ ПО РЕЙНОЛЬДСУ

2.1 Турбулентность и подходы к ее описанию

2.2 Осреднение физических величин в турбулентном потоке по Рейнольдсу

2.3 Спектр атмосферных движений. Выбор периода осреднения

2.4 Формулировка правил осреднения

2.5 Осреднение уравнения состояния. Оценка пульсаций давления и плотности

2.6 Осреднение уравнения неразрывности

2.7 Осреднение уравнения переноса

2.8 Турбулентные потоки и турбулентные притоки метеорологических величин

2.9 Средненные уравнения движения, притока тепла и переноса водяного пара

2.1 Турбулентность и подходы к ее описанию

Известно, что наряду с плавным, «спокойным» характером движения жидкости существует режим течения, когда движение отдельных частиц потока становится непредсказуемым, неупорядоченным, хаотичным. Первый тип течения называется ламинарным, второй – турбулентным. Различие между ламинарным и турбулентным режимом обычно демонстрируют на примере опыта Рейнольдса со стеклянной трубой, по которой течет вода. Если в начальной части трубы подмешивать к воде частицы какого-либо ярко окрашенного вещества, подобрав его таким, чтобы частицы не всплывали, но и не тонули, то можно наблюдать движение и траектории этих частиц. Если режим течения ламинарный, то траектории каждой частицы прямолинейны. Если же режим течения турбулентный, то траектории движения частиц искривляются: кроме движения частицы вдоль оси трубы, происходят непредвиденные, хаотичные движения и в поперечном направлении. Положение частицы (её координата) становится непредсказуемой. Аналогичная ситуация имеет место и в турбулентной атмосфере, где траектории движения отдельных небольших масс воздуха носят чрезвычайно запутанный характер.

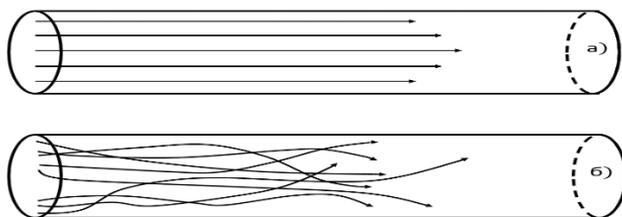


Рисунок 2.1 – Опыт Рейнольдса. В трубе (а) изображаются траектории частиц для случая ламинарного режима, а в трубе (б) – для случая турбулентного режима.

Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при потере гидродинамической устойчивости потока воздуха, когда отношение сил инерции к силам молекулярной вязкости (число Рейнольдса) превосходит некоторое критическое значение: $Re > Re_{кр}$ [1], [2].

Современная теория турбулентности в своём развитии основывается на основных положениях, полученных в конце XIX века в работах Рейнольдса. Для описания явления турбулентности развиты различные подходы: статистический (метод статистических моментов), гидродинамический, структурный (представление турбулентности в виде иерархии структур). Большую значимость имеют полуэмпирические закономерности для определения характеристик турбулентности.

Наиболее эффективным и распространенным в подавляющем большинстве исследований в настоящее время является статистический подход к описанию турбулентности.

Именно этот подход используется в динамической (теоретической) метеорологии для изучения динамических и термодинамических процессов в атмосфере и получения выводов о физической взаимосвязи между их параметрами [3], [4]. Ниже в настоящей главе приведено изложение данного метода с математическим описанием процессов формирования вертикального распределения различных параметров в турбулентной атмосфере.

2.2 Осреднение физических величин в турбулентном потоке

Упомянутый в предыдущем параграфе статистический подход к описанию турбулентных течений жидкости и газа основывается на

предложенном Рейнольдсом представлении гидродинамических параметров в виде суммы:

$$f = \bar{f} + f'. \quad (2.1)$$

Здесь f , \bar{f} и f' – соответственно мгновенные, осредненные и флуктуационные значения величины f .

Однако здесь встает вопрос о смысле получаемых средних и, следовательно, о принципах самого осреднения. Статистический подход к описанию турбулентности предполагает, что изменение любого параметра f представляет собой случайную функцию $f(t)$, описывающую случайный процесс. Фиксируя на определенном временном интервале мгновенные значения этой функции, можно получить реализацию $f_j(t)$ случайного процесса. Чтобы получить другую реализацию случайного процесса нужно при идентичных внешних условиях повторить эксперимент. При постановке ряда экспериментов каждая реализация будет осуществляться с некоторой степенью вероятности при неизменности внешних условий. Бесконечная совокупность всевозможных реализаций случайного процесса при неизменных внешних условиях образует статистический ансамбль реализаций. Таким образом, случайный процесс представляет собой статистический ансамбль реализаций [5].

Под средним значением случайного процесса следует понимать предел, к которому стремится та или иная флуктуирующая величина при неограниченно возрастающем числе наблюдений, когда внешние условия для всех случаев сохраняются неизменными.

$$\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j(t). \quad (2.2)$$

Здесь где j – номер реализации, N – общее их количество.

Такое осреднение называется осреднением по статистическому ансамблю. Как видно из формулы (2.2) для эмпирического определения средних значений со значительной точностью мы должны иметь результаты очень большого числа аналогичных опытов. Вся трудность задачи состоит том, что в реальных условиях практически нет возможности получить реализации случайного процесса при неизменности внешних условий, как необходимо для корректности осреднения по статистическому ансамблю. Поэтому в действительности используется осреднение по времени по одной реализации случайного процесса [7]. Такое осреднение будет соответствовать осреднению по статистическому ансамблю (2.2) только при

достаточно большом промежутке времени ($T \rightarrow \infty$) и при неизменности внешних условий, так что:

$$\bar{f}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = const \quad (2.3)$$

В общем случае случайные процессы в атмосфере не являются стационарными и, следовательно, в большинстве случаев получаемые при осреднении величины зависят от времени. В такой ситуации осреднение по времени приводит к сглаживанию реализации случайного процесса. Исходя из сказанного, указанная замена средних служит лишь приближением к реальной ситуации. При этом на практике невозможно оперировать периодом $T \rightarrow \infty$, поэтому выбирается некоторый конечный интервал осреднения, по величине отвечающий двум требованиям: во-первых, он не должен быть очень коротким, чтобы количество флуктуаций как можно лучше соответствовало статистическому ансамблю и сглаживание (осреднение) оказалось достаточным, то есть при неизменных внешних условиях среднее значение \bar{f} не зависело бы от T . Иными словами, период осреднения T должен быть много больше, чем T_n – характерный период турбулентных флуктуаций: $T_n \ll T$.

Во-вторых, период осреднения не должен быть слишком большим, чтобы в течение его величина \bar{f} оставалась практически постоянной. Это означает, что период осреднения T должен быть много меньше характерного временного интервала изменения осредненного поля T_{cp} ($T \ll T_{cp}$), что и позволяет считать процесс квазистационарным на интервале осреднения (рисунок 2.2).

На рисунке 2.2: а) – на интервале осреднения T_a сглаженная величина изменяется пренебрежимо мало; 1) – интервалы осреднения T_1 или T_2 – недостаточно продолжительные периоды; 2) интервалы осреднения T_3 или T_4 – слишком длинные – сглаживают временной ход средней величины; 3) интервалы осреднения T_5 , T_6 и T_7 соответствуют требуемым условиям $T_n \ll T \ll T_{cp}$.

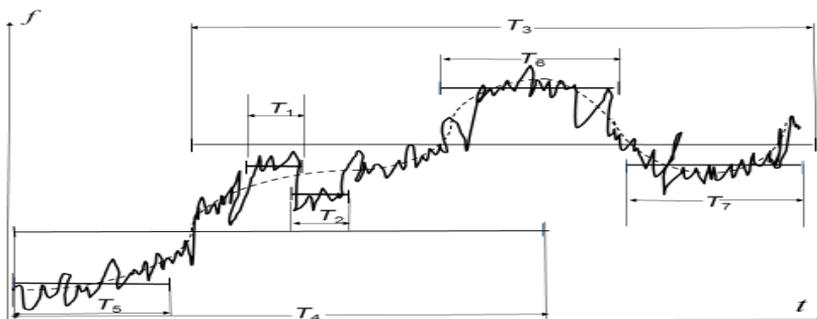


Рис. 2.2. Типичный временной ход метеорологических величин.

Главным следствием наложения ограничения на период осреднения ($T_n \ll T \ll T_{cp}$), является переформулировка определения среднего (2.3). Теперь оно записывается так

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \tau) d\tau \quad (2.4)$$

В результате такого осреднения получаются либо постоянные во времени (для стационарных процессов), либо плавно меняющиеся (для нестационарных процессов) величины, в которых флуктуирующая составляющая исключена.

В следующем параграфе будет дана количественная оценка периода осреднения, исходя из анализа энергетического спектра турбулентных флуктуаций скорости.

2.3 Спектр атмосферных движений. Выбор периода осреднения.

Известно, что атмосферные процессы являются результатом взаимодействия колебаний различных пространственно-временных масштабов. Так колебания во времени метеорологических величин содержат составляющие с периодами от долей секунды и до тысячелетий. Пространственные масштабы меняются от масштаба теплового движения молекул до планетарного масштаба. При этом уравнения гидротермодинамики атмосферы описывают весь спектр атмосферных

движений. В связи с этим возникает вопрос, какие масштабы при осреднении уравнений считать турбулентными флуктуациями. Ответ на этот вопрос находится из анализа энергетического спектра атмосферных движений.

Рассмотрим энергетический спектр флуктуаций скорости ветра Ван дер Ховена (смотри [4]), полученный в 1957 году на основании натуральных измерений в приземном слое, характеризуемым наиболее развитой турбулентностью (рисунок 2.3). Функцию $F(\omega)$ вследствие чрезвычайно широкого диапазона изменения в атмосфере удобно представлять в виде зависимости $\omega F(\omega)$ от $\ln \omega$. Если функция $F(\omega)$ представляет собой спектральную плотность энергии на частоте ω .

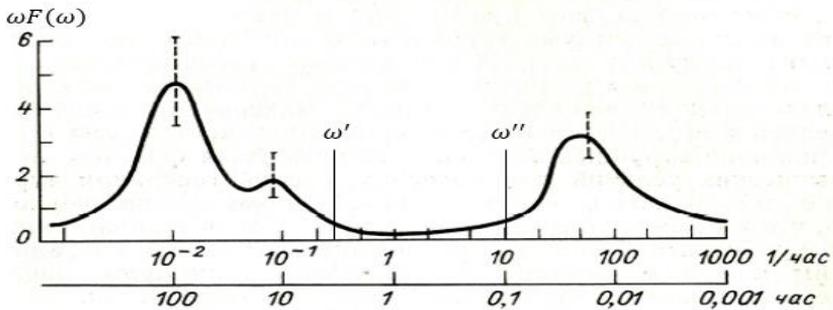


Рисунок 2.3 – Энергетический спектр турбулентных флуктуаций горизонтальной скорости. Аналогичные спектры других метеорологических величин имеют схожий вид.

На рисунке 2.3 видны три максимума функции $\omega F(\omega)$ в различных частотных диапазонах.

Низкочастотный максимум

Этот максимум расположен около частоты $\omega_1 = 0,01$ цикл/ч (соответствующий период составляет $T_1 = 10^2$ ч \approx 4 сут) и обусловлен крупномасштабными процессами ($L \approx 1000$ км). В связи с этим участок спектра в окрестности этого максимума получил название макромасштабной части спектра. Низкочастотный конец макромасштаба соответствует

планетарному масштабу – наиболее крупным атмосферным образованиям и процессам (зональные переносы, струйные течения, длинные волны Россби). Более высокочастотная область макромасштаба – синоптический масштаб (внетропические циклоны и антициклоны, представляющие собой квазидвумерные образования)

Высокочастотный максимум

Этот максимум расположен около частоты $\omega_2 = 80$ цикл/ч (соответствующий период составляет $T_2 = 1/80$ ч ≈ 1 мин) и обусловлен мелкомасштабными трехмерными турбулентными возмущениями динамического и термического происхождения ($L \approx 1 \div 100$ м).

Промежуточный максимум

Данный узкий пик максимума соответствует частоте суточного хода и не вносит заметного вклада в энергетику атмосферных процессов, поэтому его можно считать незначимым.

Оценка периода осреднения

Как мы увидели, анализ энергетического спектра позволяет произвести классификацию атмосферных движений, причем в основу классификации положено сопоставление энергетического спектра с горизонтальными размерами атмосферных процессов.

Важнейшей особенностью энергетического спектра является глубокий минимум, разделяющий низкочастотный и высокочастотный максимумы. Процессы, соответствующие данному диапазону частот $\omega' < \omega < \omega''$ получили название мезомасштабных. Основной особенностью мезомасштабного диапазона является его переходный характер. Возмущения обладают частично свойствами мелкомасштабной трехмерной турбулентности и частично – свойствами квазидвумерных крупномасштабных образований. Именно наличие широкого минимума указывает на возможность выбора такого периода осреднения, для которого эргодическая гипотеза выполнялась бы достаточно надежно при описании мелкомасштабной турбулентности. Это можно проиллюстрировать с помощью простого примера.

Как следует из приведенного спектра, отклонение скорости ветра от климатической нормы приближенно аппроксимировать суммой двух основных гармоник

$$u(t) = A_1 \sin \tilde{\omega}_1 t + A_2 \sin \tilde{\omega}_2 t. \quad (2.5)$$

Здесь $\tilde{\omega}_{1,2} = 2\pi\omega_{1,2}$.

Выполним осреднение выражения (2.5)

$$\bar{u}(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \tilde{\omega}_k(t + \tau) d\tau \quad (2.6)$$

Используя известное соотношение для синуса суммы

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad (2.7)$$

можем произвести следующие преобразования

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \sin \tilde{\omega}_k(t + \tau) d\tau = \\ & = \int_{-T/2}^{T/2} [\sin \tilde{\omega}_k t \cos \tilde{\omega}_k \tau + \cos \tilde{\omega}_k t \sin \tilde{\omega}_k \tau] d\tau = \\ & = \sin \tilde{\omega}_k t \int_{-T/2}^{T/2} \cos \tilde{\omega}_k \tau d\tau + \cos \tilde{\omega}_k t \int_{-T/2}^{T/2} \sin \tilde{\omega}_k \tau d\tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вычислим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \cos \tilde{\omega}_k \tau d\tau = \frac{\sin \tilde{\omega}_k(T/2) - \sin \tilde{\omega}_k(-T/2)}{\omega_k} = \\ & = \frac{\sin \tilde{\omega}_k(T/2) + \sin \tilde{\omega}_k(T/2)}{\omega_k} = \frac{2\sin \tilde{\omega}_k(T/2)}{\omega_k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-T/2}^{T/2} \sin \widetilde{\omega}_k \tau d\tau = -\frac{\cos \widetilde{\omega}_k(T/2) - \cos \widetilde{\omega}_k(-T/2)}{\omega_k} = \\
&= -\frac{\cos \widetilde{\omega}_k(T/2) - \cos \widetilde{\omega}_k(T/2)}{\omega_k} = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Интегрирование выражения (2.6) приводит к результату

$$\bar{u}(t) = A_1 \frac{\sin \widetilde{\omega}_1 t \sin \widetilde{\omega}_1(T/2)}{\widetilde{\omega}_1 T/2} + A_2 \frac{\sin \widetilde{\omega}_2 t \sin \widetilde{\omega}_2(T/2)}{\widetilde{\omega}_2 T/2} \tag{2.11}$$

Поскольку $\widetilde{\omega}_1$ – низкая частота, а $\widetilde{\omega}_2$ – высокая частота, то можно подобрать период T так, что

$$\widetilde{\omega}_1 T = \frac{1}{\widetilde{\omega}_2 T} = \varepsilon \ll 1 \tag{2.12}$$

На основании того, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sin \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = 0 \tag{2.13}$$

можно утверждать, что

$$\bar{u}(t) \approx A_1 \sin \widetilde{\omega}_1 t \tag{2.14}$$

В этом случае осредненное значение скорости не зависит от периода осреднения T . Это означает, что величина сглаженной скорости мало зависит от периода осреднения, если рассматривать интервалы частот, соответствующие мелкомасштабной области спектра.

Из условия (2.12) следует, что

$$\widetilde{\omega}_1 T \widetilde{\omega}_2 T = 1 \tag{2.15}$$

Отсюда

$$T^2 = \frac{1}{\widetilde{\omega}_1 \widetilde{\omega}_2} \tag{2.16}$$

Извлекая из (2.16) квадратный корень и используя данные Ван дер Ховена, получаем оценку оптимального периода осреднения

$$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_1\omega_4}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.01 \cdot 80}} 60 \text{ мин} \approx 11 \text{ мин}, \quad (2.17)$$

что соответствует значению, полученному по данным натуральных наблюдений.

Сформулируем теперь правила осреднения, которые будут основой для записи различных членов уравнений системы гидротермодинамики атмосферы.

2.4 Формулировка правил осреднения

Рассмотрим применение формулы осреднения (2.4) при условии, что выбран соответствующий период осреднения. Определим, чему равно среднее от турбулентной флуктуации, определяемой как разность мгновенного значения величины f и ее среднего значения

$$f' = f - \bar{f}(t). \quad (2.18)$$

В соответствии с формулой (2.4)

$$\bar{f}' = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f' d\tau = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t + \tau) d\tau}_1 - \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) d\tau}_2. \quad (2.19)$$

Первый интеграл по определению (2.4) есть ни что иное как $\bar{f}(t)$. Второй интеграл представляет собой среднее от среднего. Поскольку \bar{f} есть среднее значение в интервале $-T/2 \leq \tau \leq T/2$, и в этом интервале не зависит от переменной τ , то

$$\begin{aligned} \bar{f}'(t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \tau) d\tau \right] d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) d\tau \\ &= \bar{f}(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Первое правило осреднения, задаваемое формулой (2.20) показывает, что повторное осреднение средней величины не изменяет результата.

С учетом (2.20) из выражения (2.19) получим второе правило осреднения

$$\bar{f}' = \bar{f}(t) - \bar{f}(t) = 0. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) показывает, что среднее от турбулентной флуктуации на интервале осреднения $[-T/2, T/2]$ всегда равно нулю. Правила (2.20) и (2.21) будут использоваться при выводе всех последующих правил осреднения.

Третье правило определяет, чему равно среднее от произведения функции и константы a

$$\overline{af} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} af(t + \tau) d\tau = \frac{a}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \tau) d\tau = a\bar{f}(t). \quad (2.22)$$

Четвертое правило состоит в том, что среднее от произведения функции и осредненной функции есть

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}f} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t)f(t + \tau) d\tau = \bar{f}(t) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t + \tau) d\tau \\ &= \bar{f}(t)\bar{f}(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Пятое правило устанавливает аддитивность процедуры осреднения: среднее от суммы двух функций есть сумма средних этих двух функций

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}_1 + \bar{f}_2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f_1(t + \tau) + f_2(t + \tau)] d\tau \\ &= \bar{f}_1(t) + \bar{f}_2(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Шестое правило определяет среднее от производной по времени (учтем, что дифференцирование по переменной t , а интегрирование по переменной τ)

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{\partial \bar{f}(t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

По аналогии несложно доказать правило (2.25) для производных по пространству

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \frac{\partial \bar{f}(t)}{\partial x_j}. \quad (2.26)$$

Наконец, определим правило осреднения для произведения двух функций f_1 и f_2 . Представим обе функции в виде суммы соответствующих им средних и флуктуаций, а затем раскроем скобки

$$\begin{aligned} \overline{f_1 f_2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t+\tau) f_2(t+\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}_1(t) \bar{f}_2(t) d\tau + \frac{\bar{f}_1(t)}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2'(t+\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\bar{f}_2(t)}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1'(t+\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1'(t+\tau) f_2'(t+\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Принимая во внимание, что среднее от флуктуаций f_1' и f_2' (но не от произведения флуктуаций!) в соответствии с правилом (2.21) равно нулю, получим

$$\begin{aligned} \overline{f_1 f_2} &= \bar{f}_1(t) \bar{f}_2(t) + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1'(t+\tau) f_2'(t+\tau) d\tau \\ &= \bar{f}_1(t) \bar{f}_2(t) + \overline{f_1' f_2'}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Величина $\overline{f_1' f_2'}$ равна нулю, только если отсутствует корреляция между флуктуациями f_1' и f_2' . Среднее произведения флуктуаций f_1' и f_2' представляет эффекты турбулентности в осредненном течении.

Процесс разделения переменных на среднюю и флуктуационную составляющие с последующим осреднением по времени традиционно называется осреднением по Рейнольдсу. В следующих параграфах полученные правила будут использованы для осреднения уравнений гидротермодинамики турбулентной атмосферы.

2.5 Осреднение уравнения состояния. Оценка пульсаций давления и плотности

Уравнение состояния

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (2.29)$$

позволяет записать относительную величину флуктуации плотности в виде:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{p'}{p} - \frac{T'}{T}.$$

Заметим, что ускорения флуктуационных вертикальных движений малы по сравнению с ускорением свободного падения $\left| \frac{dw}{dt} \right| \ll g$. Это обстоятельство даёт основание считать, что вертикальные флуктуационные движения совершаются с выполнением условий квазистатики.. Смысл такого условия заключается в том, что давление в частице воздуха (термике, турбулентном вихре) при любых ее перемещениях относительно окружающей среды принимается равным давлению в окружающей среде

$$p(z) = \bar{p}(z). \quad (2.30)$$

Следовательно, перемещения воздушных частиц с одного уровня на другой не должны вносить возмущений в поле давления, т.е. $p' = 0$ и

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{T'}{T}, \quad \left| \frac{\rho'}{\rho} \right| \approx 10^{-2}.$$

Такая оценка позволяет пренебрегать турбулентными флуктуациями плотности и при выполнении процедуры осреднения уравнения неразрывности и уравнений переноса других параметров воздуха использовать условие

$$\rho = \bar{\rho}. \quad (2.31)$$

Такое условие было принято Рейнольдсом и впоследствии традиционно в работах других авторов.

Полученный результат свидетельствует о справедливости использования уравнения состояния для средних величин в виде, аналогичном уравнению для мгновенных величин

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{RT}. \quad (2.32)$$

2.6 Осреднение уравнения неразрывности

Используя установленное выше приближение $\rho = \bar{\rho}$ и представляя составляющие скорости как сумму средних и соответствующих флуктуаций, уравнение неразрывности (1.46) можно записать в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2.33)$$

Осреднение уравнения (2.33) даёт результат

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.34)$$

который показывает, что уравнение неразрывности после осреднения сохраняет форму, аналогичную уравнению неразрывности для мгновенных величин.

2.7 Осреднение уравнения переноса

Запишем уравнение переноса субстанции f в дивергентно-поточковой форме (смотри формулу (1.69)). В указанном уравнении

представим все переменные, кроме плотности, в виде суммы среднего и турбулентной флуктуации. В изложениях процедуры осреднения Рейнольдсом и в последствии другими авторами флуктуациями плотности пренебрегается и полагается $\rho = \bar{\rho}$, что подтверждается анализом уравнений и экспериментальными данными. В таком случае потоковая форма уравнения переноса принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}(\bar{f} + f')}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{f} + f')}{\partial x_j} = \overline{\mathcal{J}_f} + \widetilde{\mathcal{J}'_f}. \quad (2.35)$$

Раскрыв скобки во втором слагаемом в левой части (2.35)

$$(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{f} + f') = \bar{u}_j \bar{f} + \bar{u}_j f' + u'_j \bar{f} + u'_j f'. \quad (2.36)$$

перепишем уравнение (2.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} f'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{f}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j f'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_j \bar{f}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_j f'}{\partial x_j} \\ = \overline{\mathcal{J}_f} + \widetilde{\mathcal{J}'_f}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Осредним уравнение (2.37)

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{f}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\rho}(\overline{u'_j f'})}{\partial x_j} = \overline{\mathcal{J}_f}. \quad (2.38)$$

Перенесем третий член в левой части (2.38) в правую часть

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{f}}{\partial x_j} = \overline{\mathcal{J}_f} - \frac{\partial \bar{\rho}(\overline{u'_j f'})}{\partial x_j}. \quad (2.39)$$

Заметим, что осредненное уравнение переноса содержит новый дивергентный член $\partial \bar{\rho}(\overline{u'_j f'})/\partial x_j$ по отношению к его неосредненной форме.

Перейдем обратно от дивергентно-потоковой формы записи уравнения переноса к записи через полную производную по времени. Процедура заключается в применении правила дифференцирования

произведения функций и в выделении осредненного уравнения неразрывности

Левая часть уравнения (2.39) с учётом осреднённого уравнения неразрывности (2.34) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j \bar{f}}{\partial x_j} &= \bar{f} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} + \bar{f} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \\ &= \bar{f} \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} \right)}_0 + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right) = \bar{\rho} \frac{d\bar{f}}{dt}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

что позволяет записать уравнение (2.39) в форме уравнения сохранения:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = \bar{J}_f - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} (\bar{u}'_j \bar{f}')}{\partial x_j}. \quad (2.41)$$

Изменениями плотности по пространственным координатам (x, y, z) в пределах пограничного слоя можно пренебречь. В качестве примера приведем следующую оценку. Стандартное значение плотности составляет 1.225 кг/м^3 на уровне моря и 1.112 кг/м^3 на высоте 1000 м, соответственно разница в относительных единицах равна 10%. В связи с этим с достаточным приближением можно использовать равенство:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} (\bar{u}'_j \bar{f}')}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{u}'_j \bar{f}')}{\partial x_j}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{d\bar{f}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = \bar{J}_f - \frac{\partial (\bar{u}'_j \bar{f}')}{\partial x_j}. \quad (2.42)$$

2.8 Турбулентные потоки и турбулентные притоки метеорологических величин

Выясним физический смысл нового дивергентного члена в уравнениях (2.39) и (2.42). Запишем выражение (1.59) для неосредненного вектора потока субстанции f

$$\vec{\Phi}_f = \rho u_j f \vec{e}_j \quad (2.43)$$

Представим u_j и f в виде суммы соответствующих средних и турбулентных флуктуаций

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_f &= \rho(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{f} + f')\vec{e}_j \\ &= \rho\bar{u}_j\bar{f}\vec{e}_j + \rho\bar{u}_j f'\vec{e}_j + \rho u'_j\bar{f}\vec{e}_j + \rho u'_j f'\vec{e}_j \end{aligned} \quad (2.44)$$

Осредним выражение (2.44)

$$\begin{aligned} \overline{\vec{\Phi}_f} &= \rho(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{f} + f')\vec{e}_j \\ &= \rho\bar{u}_j\bar{f}\vec{e}_j + \overline{\rho\bar{u}_j f'}\vec{e}_j + \overline{\rho u'_j\bar{f}}\vec{e}_j \\ &\quad + \overline{\rho u'_j f'}\vec{e}_j = \\ &= \rho\bar{u}_j\bar{f}\vec{e}_j + \overline{\rho u'_j f'}\vec{e}_j \end{aligned} \quad (2.45)$$

Осредненный вектор потока субстанции f раскладывается на сумму двух векторов: вектор потока субстанции f в осредненном течении и вектор турбулентного потока субстанции f , определяемый как

$$\vec{\Phi}_{f_{turb}} = \overline{\rho u'_j f'}\vec{e}_j \quad (2.46)$$

Используя (2.46), определим турбулентный приток субстанции f

$$\tilde{J}_{f_{turb}} = -\text{div}\vec{\Phi}_{f_{turb}} = -\frac{\partial \overline{\rho u'_j f'}}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

Или в кинематической форме

$$J_{f_{turb}} = \frac{\tilde{J}_{f_{turb}}}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho u'_j f'}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{u'_j f'}}{\partial x_j} \quad (2.48)$$

Таким образом, новый дивергентный член в осредненном уравнении переноса представляет собой турбулентный приток субстанции f .

Сумма осредненного молекулярного диффузионного притока и турбулентного притока представляет собой суммарный диффузионный приток субстанции f

$$\tilde{J}_{f\ dif} = \overline{J}_{f\ mol} + J_{f\ turb} \quad (2.49)$$

Используя полученные результаты, перепишем уравнение (2.38) в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho} f}{\partial t} = \overline{J}_{f\ div} + \tilde{J}_{f\ dif} + \overline{J}_{f\ вн} \quad (2.50)$$

2.9 Осредненные уравнения движения, притока тепла и переноса водяного пара

Запишем осредненные уравнения движения

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{u}_k - \delta_{i3} g + (\overline{F}_{\tau\ mol})_i - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (2.51)$$

Если осредненное движение удовлетворяет условию несжимаемости ($div \overline{\vec{V}} = 0$), то сила вязкого молекулярного трения, обусловленная молекулярным обменом импульсом, согласно уравнению Навье-Стокса выражается как

$$(\overline{F}_{\tau\ mol})_i = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}. \quad (2.52)$$

Здесь ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости воздуха. С учетом соотношения (2.52), уравнения движения примут вид

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{u}_k - \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (2.53)$$

Дополнительный член в уравнениях движения описывает обмен импульсом между разными участками осредненного турбулентного потока, обусловленный флуктуационным движением со скоростями u' , v' и w' .

Турбулентный перенос импульса вызывает дополнительное торможение либо ускорение отдельных масс жидкости. Таким образом, действие флуктуационного движения проявляется в кажущемся увеличении вязкости или, другими словами, в появлении дополнительной турбулентной вязкости в осредненном движении, величина которой определяется не свойствами жидкости, а взаимодействием флуктуаций скорости (то есть имеет кинематическую природу). Появление дополнительной вязкости, в свою очередь, означает, что в осредненном потоке возникают дополнительные турбулентные напряжения τ_{ij} , по величине равные соответствующим локальным потокам импульса со знаком минус

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j} \quad (2.54)$$

Меняя индексы i и j от единицы до трех, мы получаем набор из девяти турбулентных напряжений, образующих следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\rho} \overline{u'u'} & -\bar{\rho} \overline{u'v'} & -\bar{\rho} \overline{u'w'} \\ -\bar{\rho} \overline{v'u'} & -\bar{\rho} \overline{v'v'} & -\bar{\rho} \overline{v'w'} \\ -\bar{\rho} \overline{w'u'} & -\bar{\rho} \overline{w'v'} & -\bar{\rho} \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Данная матрица представляет собой матрицу симметричного тензора второго ранга в локальной декартовой системе координат. Указанный тензор называют тензором напряжений Рейнольдса \hat{t} (поскольку это понятие было впервые введено Рейнольдсом) [6].

Чтобы понять смысл каждого элемента матрицы тензора турбулентных напряжений, построим параллелепипед (рис. 2.4) и определим напряжения, действующие на грани этого параллелепипеда.

Из рисунка 2.4 несложно понять, что первый индекс обозначает направление действия соответствующего напряжения, а второй – ориентацию рассматриваемой площадки (грани параллелепипеда), а именно какой оси она перпендикулярна.

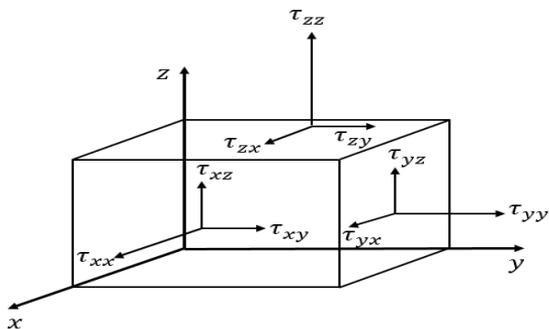


Рисунок 2.4 – Пояснение смысла компонент тензора турбулентных напряжений Рейнольдса.

Напряжения Рейнольдса определяют обусловленную турбулентностью суммарную вязкую силу, действующую по всей поверхности объема (а значит- на массу внутри этого объёма) жидкой частицы. Данную силу называют силой турбулентного трения или силой турбулентной вязкости ($\vec{F}_{\tau turb}$). Упомянутую силу турбулентного трения, действующую на массу движущегося объема, определяют как дивергенцию тензора турбулентных напряжений Рейнольдса

$$\vec{F}_{\tau turb} = \frac{1}{\rho} Div \hat{\tau} \quad (2.56)$$

В покомпонентном виде можем записать

$$(F_{\tau turb})_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (2.57)$$

Поскольку влияние турбулентного перемешивания аналогично вязкости, то логичным представляется введение результирующей силы вязкости \vec{F}_{τ} , представляющей собой суммарный эффект молекулярной и турбулентной вязкости

$$\vec{F}_{\tau} = \vec{F}_{\tau turb} + \overrightarrow{F}_{\tau mol} = \frac{1}{\rho} Div (\hat{\tau} + \mu grad \overrightarrow{V}) \quad (2.58)$$

Или в покомпонентном виде

$$(F_\tau)_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tau_{ji} + \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_i u'_j} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.59)$$

Тогда для уравнения движения имеем

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{u}_k - \delta_{i3} g - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_i u'_j} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.60)$$

Запишем осредненное уравнение притока тепла

$$\frac{d\bar{T}}{dt} - \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{C_p} \sum \left(\frac{d\bar{Q}}{dt} \right)_i - \frac{\partial (\overline{T' u'_j})}{\partial x_j} \quad (2.61)$$

Дополнительный член в уравнении притока тепла связан с турбулентным теплообменом между разными участками осредненного турбулентного течения и представляет собой турбулентный приток тепла

$$J_{T_{turb}} = - \frac{1}{\bar{\rho} C_p} \frac{\partial (\bar{\rho} C_p \overline{T' u'_j})}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\overline{T' u'_j})}{\partial x_j} \quad (2.62)$$

Заметим, что в число нетурбулентных притоков тепла входит приток тепла за счет молекулярной диффузии. Чтобы записать для него выражение, обратимся к закону Фурье, согласно которому вектор потока тепла, обусловленного молекулярной диффузией, пропорционален градиенту температуры

$$\vec{\Phi}_{T_{mol}} = -\bar{\rho} a C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \vec{e}_j \quad (2.63)$$

Здесь a – коэффициент молекулярной теплопроводности воздуха.

С учетом выражения (2.63) для молекулярного притока тепла можем записать

$$\bar{J}_{T_{mol}} = -\frac{1}{\bar{\rho}C_p} \operatorname{div} \overrightarrow{\Phi}_{T_{mol}} = \frac{1}{\bar{\rho}C_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} a C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} \quad (2.64)$$

Поскольку турбулентные флуктуации, также как и молекулярная теплопроводность, приводят к диффузии тепла в осредненном течении, то логичным представляется введение суммарного диффузионного притока тепла

$$J_{T_{dif}} = J_{T_{turb}} + \bar{J}_{T_{mol}} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{T'u'_j} - a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right). \quad (2.65)$$

Тогда для уравнения притока тепла имеем

$$\frac{d\bar{T}}{dt} - \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{C_p} \sum \left(\frac{d\bar{Q}}{dt} \right)_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{T'u'_j} - a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right). \quad (2.66)$$

Запишем осредненное уравнение переноса водяного пара

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum (\bar{J}_q)_i - \frac{\partial (\overline{q'u'_j})}{\partial x_j}. \quad (2.67)$$

Заметим, что в число нетурбулентных притоков водяного пара входит приток водяного пара за счет молекулярной диффузии. Вспомним закон Фика, согласно которому вектор потока любой примеси пропорционален градиенту её концентрации

$$\overrightarrow{\Phi}_{c_{mol}} = -D \frac{\partial \bar{C}_{об}}{\partial x_j} \vec{e}_j. \quad (2.68)$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии примеси, $C_{об}$ – объемная концентрация примеси.

Используя выражение (2.68), для молекулярного притока примеси можем записать

$$\bar{J}_{c_{mol}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \operatorname{div} \overrightarrow{\Phi}_{c_{mol}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} D \frac{\partial \bar{C}_{об}}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\bar{C}_{об}}{\bar{\rho}} \right). \quad (2.69)$$

Имея ввиду под $\bar{C}_{об}$ концентрацию водяного пара, приходим к массовой доле водяного пара

$$\bar{q} = \frac{\bar{C}_{об}}{\bar{\rho}} \quad (2.70)$$

С учетом (2.70) для молекулярного притока водяного пара имеем

$$\bar{J}_{q_{mol}} = D \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x_j^2} \quad (2.71)$$

По аналогии с рассуждениями, касающимися уравнения притока тепла, введем суммарный диффузионный приток водяного пара

$$J_{q_{dif}} = J_{q_{turb}} + \bar{J}_{q_{mol}} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{q'u'_j} - D \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right) \quad (2.72)$$

И тогда

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum (\bar{J}_q)_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{q'u'_j} - D \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right) \quad (2.73)$$

Осредненные уравнения гидротермодинамики атмосферы образуют систему уравнений Рейнольдса для осредненных параметров атмосферных процессов.

Контрольные вопросы

1. Что характеризует критическое число Рейнольдса?
2. В чём различие средней статистической величины и средней по Рейнольдсу?
3. Какому условию должен удовлетворять период осреднения физической величины в турбулентном потоке?
4. Чему должно быть равно среднее от турбулентных флуктуаций?
5. К появлению каких новых слагаемых приводит осреднение уравнений переноса для мгновенных величин?

Литература к главе 2

- 1 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, 1970.
- 2 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Дрофа, 2003.
- 3 Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. Л.: Гидрометеорологическое изд.,1955.– 647 с.
- 4 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.
- 5 Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов (2-е изд., доп. – М.: Наука. Физматлит, 1996)
- 6 Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, ч.1. Москва, 1965

3 ПРОБЛЕМА ЗАМКНАНИЯ СИСТЕМЫ ОСРЕДНЁННЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Система осреднённых уравнений

3.2. Локальная k - гипотеза Буссинеска

3.3. Обоснование связи турбулентных потоков с градиентами осредненных величин на основе теории пути смешения

3.4. Влияние процесса непрерывного перемешивания турбулентных молей

3.5. Формула Прандтля для коэффициента турбулентности

3.6. Замыкание на основе гипотез полуэмпирической модели турбулентности

3.7. Вывод уравнения баланса энергии турбулентности

3.8. Гипотезы для турбулентного пути смешения

3.1. Система осреднённых уравнений

Если посмотреть на приведённую в предыдущей главе систему осреднённых по Рейнольдсу уравнений

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{u}_k - \delta_{i3} g - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_i u'_j} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{R\bar{T}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\bar{T}}{dt} - \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{c_p} \sum \left(\frac{d\bar{Q}}{dt} \right)_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{T' u'_j} - a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum (\bar{J}_q)_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{q' u'_j} - D \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j} \right), \quad (3.5)$$

то нетрудно увидеть, что в отличие от исходной системы уравнений для мгновенных величин она является незамкнутой (число входящих в нее уравнений оказывается меньше, чем число неизвестных функций), поскольку кроме начальных моментов первого порядка (самых параметров $\bar{f}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\rho}, \bar{p}, \bar{T}, \bar{q}$) содержит центральные моменты второго порядка. Действительно, система включает в себя семь уравнений

(три уравнения движения (3.1), уравнение неразрывности (3.2), уравнение состояния (3.3), уравнение притока тепла (3.4), уравнение переноса водяного пара (3.5)) и девятнадцать неизвестных функций: \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , $\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{T} , \bar{q} , $\overline{u'u'}$, $\overline{v'u'}$, $\overline{w'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{w'v'}$, $\overline{w'w'}$, $\overline{u'T'}$, $\overline{v'T'}$, $\overline{w'T'}$, $\overline{u'q'}$, $\overline{v'q'}$, $\overline{w'q'}$.

Данное обстоятельство требует для замыкания системы уравнений введения дополнительных соотношений. Существуют различные исходные физические положения и соответствующие им модели замыкания. Наиболее эффективными для качественного анализа процессов в турбулентном потоке являются модели, объединяемые названием «модели K -теории», основой которых является *локальная k -гипотеза Буссинеска*.

3.2 Локальная k - гипотеза Буссинеска

Предложенное Рейнольдсом выделение из общего турбулентного движения некоторого более простого осредненного движения не исключает необходимости учета тех физических процессов, которые в действительности происходят в турбулентных движениях. Линии тока осредненного движения, непроницаемые для этого условно вводимого движения, проницаемы для флуктуационного движения, которое переносит из слоя в слой сквозь линии тока осредненного движения импульс, тепло, вещество и другие виды физических субстанций. Этот перенос аналогично тому, как это имеет место в случае молекулярного переноса в ламинарных движениях, определяет турбулентное трение между слоями в осредненном движении, тепломассоперенос между ними и другие разнообразные явления переноса.

Отличие от ламинарного (молекулярного) переноса здесь в том, что носителями субстанции в турбулентном переносе являются не сравнительно ничтожные по массе отдельные молекулы, а конечные объемы жидкости, называемые турбулентными молями. С этой точки зрения прием выделения осредненного движения можно представить себе так. Действительное турбулентное движение с характерными для него извилистыми, хаотически переплетающимися линиями тока и траекториями заменяется некоторым упорядоченным слоистым (но не ламинарным!) движением. Такую замену можно выразить принятым в метеорологических применениях теории турбулентности термином стратификация (расслоение). Стратификация может производиться по различным характеристикам потоков: скорости, плотности, температуре и другим.

Линии тока флуктуационного движения, пересекая линии тока осредненного движения, проникают из одного слоя осредненного движения в другой и создают при этом перемешивание жидкости сквозь площадки, расположенные вдоль линий тока осредненного движения. Такого рода перемешивание – его называют турбулентным – сопровождается, подчеркнем еще раз, переносом сквозь границу между слоями импульса, энергии и других механических или термодинамических параметров осредненного движения жидкости, тепла, а также заключенных в жидкости примесей.

Перенос импульса создает турбулентное трение между слоями, перенос тепла обуславливает турбулентную теплопроводность, перенос примесей – турбулентную диффузию этих примесей. Механизм турбулентного перемешивания одинаков как для трения, так и для теплопроводности или диффузии; разница заключается лишь в особых свойствах переносимой флуктуационным движением субстанции – количества движения, тепла или примеси.

Отметим, что дальнейшие рассуждения будут проводится сначала для плоскопараллельного осредненного потока, в котором средняя скорость имеет единственную отличную от нуля компоненту $\vec{V} = (u(z), 0, 0)$, а флуктуации скорости – две компоненты $\vec{V}' = (u'(x, z), 0, w'(x, z))$, а затем будут обобщаться для более общих течений.

В 1877 году Буссинеск, опираясь на аналогию между ламинарным движением вязкой жидкости и турбулентным осредненным ее движением, предложил получившую широкую известность формулу для касательного напряжения между слоями осредненного движения [1]:

$$\tau = -\overline{\rho u' w'} = \bar{\rho} k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (3.6)$$

Это равенство по своему внешнему виду напоминает закон вязкости Ньютона для ламинарных потоков. Так же, как и формула Ньютона, формула Буссинеска относится к числу так называемых локальных формул в том смысле, что она определяет значения турбулентных напряжений в данной точке потока жидкости в зависимости от сдвига средней скорости в окрестности той же точки, то есть не содержит влияния на определяющее соотношение удаленных от этой точки областей потока. Разница лишь в том, что, вместо коэффициента обычной (молекулярной) вязкости ν , в формуле (3.6) стоит существенно больший коэффициент турбулентной вязкости.

Из (3.6) вытекает, что

$$\overline{u'w'} = -k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (3.7)$$

В гидродинамике закон вязкости Ньютона обобщается на случай трехмерного течения и выражается в виде линейной зависимости между тензором напряжений и тензором скоростей деформации. Аналогичным образом можно обобщить формулу Буссинеска, отыскивая линейную связь между тензором напряжений Рейнольдса и тензором осредненных скоростей деформации. Главное отличие состоит в том, что при выводе обобщенного закона вязкости Ньютона принимается гипотеза изотропности, в случае обобщения гипотезы Буссинеска оснований принимать данную гипотезу нет, поскольку турбулентные движения зачастую анизотропны и разные направления для них вовсе не должны быть равноправными. Итак, обобщенная гипотеза Буссинеска имеет вид

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{3} \overline{u'_i u'_i} \delta_{ij} - k_{ij\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (3.8)$$

Индексы i, j, α, β меняются от одного до трех, по повторяющимся индексам ведется суммирование, δ_{ij} – символ Кронекера.

Из формулы (3.8) следует, что турбулентная вязкость определяется тензором коэффициента турбулентной вязкости $k_{ij\alpha\beta}$. Тензор $k_{ij\alpha\beta}$ является тензором четвертого ранга симметричным по i, j и по α, β и удовлетворяющим условию

$$k_{ij\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = 0 \quad (3.9)$$

В практических приложениях использовать тензор коэффициентов турбулентности не удобно. Поэтому, ввиду разнообразия масштабов атмосферных процессов по горизонтали и по вертикали, используют всего два коэффициента турбулентности: коэффициент турбулентности для горизонтального направления k_s и коэффициент турбулентности для вертикального направления k . В указанной постановке выражение (2.85) для компонент силы трения принимает вид

$$\begin{aligned}
 F_{\tau i} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i' u_j'} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_s \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} (k_s + \nu) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} (k + \nu) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $j = 1, 2; i = 1, 3$.

Так как коэффициенты турбулентности на несколько порядков по величине превосходят коэффициент кинематической вязкости, то им, как правило, пренебрегают. И тогда

$$F_{\tau i} = \frac{\partial}{\partial x_j} k_s \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} \tag{3.11}$$

Заметим, что вертикальные градиенты в атмосфере намного больше горизонтальных (за исключением случаев резкого изменения свойств подстилающей поверхности), поэтому членами, отражающими горизонтальный турбулентный обмен, можно в первом приближении пренебречь, что позволяет записать

$$F_{\tau i} \approx \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z}. \tag{3.12}$$

Гипотеза Буссинеска не объясняет физического смысла турбулентного перемешивания, она только говорит о том, что между полем осредненных скоростей и осредненным произведением пульсаций скорости существует функциональная зависимость, и величина k является коэффициентом пропорциональности этой связи. Собственно говоря, само по себе это соотношение математически даже не устанавливает новой связи, оно только заменяет неизвестные моменты новым неизвестным k . Причем в отличие от молекулярных коэффициентов, коэффициенты турбулентного обмена характеризуют не физические свойства жидкости или газа, а статистические свойства турбулентного движения, следовательно, они вовсе не обязаны являться постоянными величинами.

Пользуясь идеей Буссинеска о придании формуле турбулентного напряжения того же вида, что и «ламинарный» закон Ньютона, можно и турбулентным потокам тепла и вещества (массы) придать вид, формально обобщающий известные уже нам законы Фурье и Фика. Таким образом, для

всех турбулентных потоков можно записать связь с градиентами соответствующих средних величин. Следует понимать, что, строго говоря, коэффициенты вертикального турбулентного перемешивания k_f для различных субстанций f различны.

Поскольку турбулентный перенос импульса, тепла, и любой примеси обусловлены одним и тем же механизмом – перемещением элементов жидкости турбулентными вихрями, то, вероятно, существует связь между соответствующими коэффициентами турбулентности. Соотношение процессов турбулентного переноса импульса и тепла характеризует безразмерное турбулентное число Прандтля

$$Pr = \frac{k}{k_T}. \quad (3.13)$$

Соотношение процессов турбулентного переноса импульса и турбулентного переноса вещества характеризует безразмерное число Шмидта

$$Sc = \frac{k}{k_m}. \quad (3.14)$$

Исходя из (3.13) и (3.14) можно записать

$$k_T = \frac{1}{Pr} k = \alpha_T k \quad (3.15)$$

$$k_m = \frac{1}{Sc} k = \alpha_m k \quad (3.16)$$

Поскольку коэффициенты α_T и α_m , согласно опытным данным, как правило, близки к единице, то чаще всего полагают $k_T \approx k_m \approx k$. Таким образом, любая модель замыкания турбулентности, позволяющая рассчитать коэффициент турбулентной вязкости k , дает возможность найти и коэффициент турбулентной теплопроводности k_T , и коэффициент турбулентной диффузии вещества k_m .

Если предположить, что k зависит от координат каким-либо определенным образом, то при этом мы сразу приходим к полуэмпирической теории, основанной на некоторой гипотезе и допускающей проверку на опыте.

Часто, однако, понятие коэффициента турбулентной вязкости ничем не облегчает задачу исследования турбулентных потоков в связи с тем, что выбор приемлемого допущения об этой величине наталкивается на большие трудности, и неясно, чем при таком выборе следует руководствоваться. Для облегчения этого выбора были разработаны некоторые другие полуэмпирические теории, во многих из которых основную роль играет понятие пути смешения, введенное Прандтлем (1925) (в слегка отличной форме та же идея еще раньше высказывалась Тейлором (1915)), [1].

3.3 Обоснование связи турбулентных потоков с градиентами на основе теории пути смешения

Рассмотрим элементарную площадку, параллельную линии тока осредненного движения $\bar{u}(z)$ и расположенную на произвольном уровне z (рисунок 3.1).

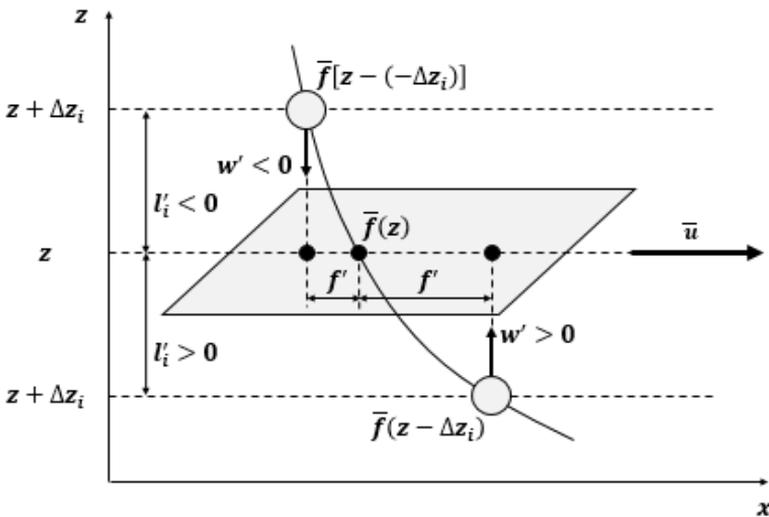


Рисунок 3.1 – Пояснение модели турбулентного пути смешения

Через эту площадку проходят турбулентные моли, имеющие скорость флуктуационного движения w' . На уровень z попадают как моли, зародившиеся на уровне $z - \Delta z_i$ и обладающие в начальный момент

свойствами $f(z - \Delta z_i)$ и двигающиеся вверх, так и зародившиеся на уровне $z + \Delta z_i$ и обладающие в начальный момент свойствами $f(z + \Delta z_i)$ и двигающиеся вниз. Будем считать, что турбулентные моли перемещаются с исходных уровней на уровень z без тепло и массообмена, после чего перемешиваются с окружающей средой, теряя свою индивидуальность. В таком случае Δz_i можно отождествить с путем перемешивания l'_i . Ясно, что молям, двигающимся вверх, отвечает положительное значение флуктуационной вертикальной скорости w' , а двигающимся вниз – отрицательное значение. Аналогичным образом придадим знак величине l'_i : $l'_i = \Delta z_i > 0$ для молей, движущихся вверх, $l'_i = -\Delta z_i < 0$ для молей, движущихся вниз. Тогда $f(z \pm \Delta z_i) = f(z - l'_i)$. В результате перемещения -того моля с уровня $z - l'_i$, где он обладал свойствами $\bar{f}(z - l'_i)$, такими же, как и в окружающей среде, на уровень z свойства на этом уровне будут отличаться от средних значений на этом уровне, то есть будут приводить к появлению флуктуации величины f

$$f' = \bar{f}(z - l'_i) - \bar{f}(z), \quad (3.17)$$

Важно, однако, понимать, что даже при перемещении моля без тепломассообмена с окружающей средой в нем могут происходить индивидуальные изменения δf . Эти изменения отличны от нуля, если переносимая субстанция f не является консервативной (сохраняющейся). Можно привести следующие примеры неконсервативных субстанций в адиабатически перемещающемся моле. Во-первых, в изолированном моле могут происходить фазовые переходы воды, тогда массовая доля водяного пара не является консервативной субстанцией. Во-вторых, могут протекать химические реакции, приводящие к изменению концентрации примеси, тогда концентрация примеси является неконсервативной субстанцией. В-третьих, согласно законам термодинамики, при адиабатическом подъёме воздушной массы в область с постепенно уменьшающимся давлением совершается работа на расширение воздушной массы с потерей её внутренней энергии и, следовательно, с понижением её температуры. При опускании воздушной массы происходит обратный процесс с повышением температуры. Это свидетельствует о том, что температура не является консервативной субстанцией. Напомним, что в отличие от обычной температуры, потенциальная температура для адиабатических процессов консервативна.

Учитывая возможность индивидуальных изменений в движущемся моле, перепишем соотношение (3.17)

$$f' = [\bar{f}(z - l'_i) + \delta f] - \bar{f}(z) \quad (3.18)$$

Разложим значение $\bar{f}(z - l'_i)$ в ряд по степеням l'_i

$$\bar{f}(z - l'_i) = \bar{f}(z) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)_z l'_i + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2}\right)_z \frac{\Delta l'^2_i}{2} + \dots \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18) и ограничиваясь линейными членами, имеем

$$f' = \bar{f}(z) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)_z l'_i + \delta f - \bar{f}(z) = -\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)_z l'_i + \delta f \quad (3.20)$$

В дальнейшем выводе все характеристики, кроме температуры, мы будем считать консервативными. Индивидуальное же изменение температуры адиабатически перемещающегося моля определяется сухоадиабатическим градиентом $\gamma_a = 0.98^\circ \text{K}/100\text{м}$.

Для консервативной субстанции f , в том числе и потенциальной температуры θ , можно переписать выражение (3.20) следующим образом

$$f' = -\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)_z l'_i, \quad (3.21)$$

$$\theta' = -\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\right)_z l'_i \quad (3.22)$$

а для неконсервативной субстанции T в виде

$$\begin{aligned} T' &= -\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)_z l'_i + \delta T = -\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)_z l'_i - \gamma_a l'_i \\ &= -\left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)_z + \gamma_a\right] l'_i = \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= -\frac{T}{\theta} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_z l'_i.$$

Используя соотношение (1.50), покажем, что отношение θ/T близко к единице в пределах пограничного слоя. В качестве p возьмем 850 гПа – первую стандартную изобарическую поверхность за пределами пограничного слоя. Тогда

$$\frac{\theta}{T} = \left(\frac{1000}{850} \right)^{287/1007} = 1.05. \quad (3.24)$$

Оценка (3.24) позволяет записать, что

$$\frac{T}{\theta} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_z l'_i \approx \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_z l'_i. \quad (3.25)$$

Умножая соотношение (3.21) на флуктуацию вертикальной скорости w' , получим

$$f'w' = -w'l'_i \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right)_z. \quad (3.26)$$

Если турбулентный моль перемещается вверх, то $w' > 0$ и $l'_i > 0$, и следовательно, $w'l'_i > 0$. Если турбулентный моль перемещается вниз, то $w' < 0$ и $l'_i < 0$, следовательно, снова $w'l'_i > 0$. Таким образом, знак величины $f'w'$ однозначно определяется вертикальным градиентом консервативной субстанции в среде. Если $\partial \bar{f}/\partial z > 0$, то $f'w' < 0$. Если же $\partial \bar{f}/\partial z < 0$, то $f'w' > 0$. Наконец, если $\partial \bar{f}/\partial z = 0$, то $f'w' = 0$.

Осреднение выражение (3.26) по всем молям, проходящим через выделенную площадку на заданном уровне, приводит к выражению для полного турбулентного потока субстанции f в вертикальном направлении

$$\overline{f'w'} = -\overline{w'l'_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = -\overline{w'l'_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \quad (3.27)$$

Величина $\overline{w'l'_i}$ всегда положительна и имеет размерность м²/с. Сравнивая равенство (3.27) с (3.7), получим выражение для коэффициента турбулентного перемешивания k

$$k = \overline{w'l'_i}, \quad (3.28)$$

придающее благодаря наличию скорости w' и l'_i этой эмпирической величине внутренний, связывающий ее с механизмом турбулентного перемешивания, смысл.

С учетом выражения (3.27) запишем выражение для вертикального турбулентного потока произведения плотности ρ и субстанции f

$$\Phi_{f \text{ turb}} = \overline{\rho u'_j f'} = -\bar{\rho} k \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \quad (3.29)$$

Соответственно турбулентный приток субстанции f выражается следующим выражением

$$J_{f \text{ турб}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\bar{\rho} k \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \quad (3.30)$$

Заметим, что на основании (3.21) – (3.25) турбулентный поток и турбулентный приток тепла, независимо от того, были ли они записаны через пульсацию потенциальной температуры, либо через пульсацию обычной температуры, согласно -гипотезе имеют один и тот же вид

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\rho} C_p \overline{T'w'} \\ \bar{\rho} C_p \overline{\theta'w'} \end{array} \right\} \rightarrow -\bar{\rho} C_p k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad (3.31)$$

$$J_{T \text{ turb}} = -\frac{1}{\bar{\rho} C_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\bar{\rho} C_p k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad (3.32)$$

Запишем суммарные (обусловленные турбулентным и молекулярным обменом) диффузионные притоки тепла и влаги с учетом - гипотезы

$$\begin{aligned}
 J_{T dif} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + a \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + a) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - a \gamma_a \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + a) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right] - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (a \gamma_a)}_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + a) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right],
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$J_{q dif} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + D) \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right], \tag{3.34}$$

Поскольку, как уже отмечалось, интенсивность турбулентных процессов много больше, чем интенсивность молекулярных, то молекулярными коэффициентами в (3.33) и (3.34) можно пренебречь. И тогда

$$J_{T dif} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \tag{3.35}$$

$$J_{q dif} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \tag{3.36}$$

Далее будет использоваться именно такое представление диффузионных членов в системе уравнений гидротермодинамики атмосферы.

3.5 Формула Прандтля для коэффициента турбулентности

Продолжая обсуждение теории пути смешения Прандтля, заметим теперь, что моли, попадающие в слой z из $z - \Delta z_i$ и $z + \Delta z_i$, будут в среднем иметь продольную скорость $\bar{u}(z - \Delta z_i)$ и соответственно $\bar{u}(z + \Delta z_i)$, так что в обоих случаях они будут создавать пульсацию u' продольной скорости, близкую по абсолютной величине к $l'_i |\partial \bar{u} / \partial z|$. Следуя далее рассуждениям Прандтля положим, что пульсации вертикальной скорости w' по абсолютной величине близки к пульсациям продольной скорости u' , так что

$$w' \sim u' \sim l'_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{3.37}$$

Эта центральная формула теории Прандтля приводит к тому, что

$$u'w' = C_1 l'_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} C_2 l'_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = C_1 C_2 l'_i l'_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \quad (3.38)$$

Осредняя, получаем выражение для турбулентного потока импульса в случае рассматриваемого простейшего плоскопараллельного движения

$$\overline{u'w'} = C \overline{l'_i l'_i} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, \quad (3.39)$$

где $l = (\overline{l'_i l'_i})^{1/2}$ величина, представляющая собой осреднённое значение индивидуальных вертикальных флуктуаций l'_i частиц (турбулентных молей) воздуха, При этом длина l уже является неслучайной положительно определенной величиной и характеризует масштаб турбулентности (средний размер турбулентных возмущений) в данной точке.

Чтобы не делать оговорки о знаке $\overline{u'w'}$, Прандтль предложил придать формуле (3.39) вид

$$\overline{u'w'} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (3.40)$$

В такой формулировке $\overline{u'w'}$ всегда имеет тот же знак, что и $\partial \bar{u} / \partial z$, так как импульс всегда передается от слоев жидкости,двигающихся более быстро, к слоям,двигающимся более медленно.

Формула (3.40) позволяет представить коэффициент турбулентности в виде

$$k = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (3.41)$$

С учетом формулы (3.41) выражение для турбулентного потока субстанции f принимает вид

$$\Phi_f = -\bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \quad (3.42)$$

Индекс «turb» опущен, так как мы пренебрегаем молекулярными потоками.

Введение формулы (3.41), казалось бы, не продвигает дела вперед, так как вместо неизвестной величины k вводится другая неизвестная величина l . Однако, это на самом деле не так. Относительно пути смещения можно сделать гораздо более обоснованные предположения, чем о коэффициентах турбулентного обмена.

Теория Прандтля, так же, как и лежащая в ее основе теория Буссинеска, относится к числу локальных теорий турбулентных движений.

3.6. Замыкание на основе гипотез полуэмпирической модели турбулентности

Основные осреднённые характеристики турбулентности.

Наиболее удобной для анализа вертикального распределения метеорологических параметров представляется модель, основанная на идеях, предложенных Колмогоровым и изложенных в окончательном виде в работах Обухова и Моница [2].

Предполагается, что в описании локальной интенсивности турбулентного обмена кроме коэффициента турбулентности k , введённого как коэффициент пропорциональности между значениями турбулентных потоков и пространственными градиентами средних значений соответствующих метеорологических параметров (смотри раздел 3.3), должны участвовать ещё три зависящие от высоты характеристики, а именно:

b - удельная кинетическая энергия турбулентных флуктуаций (кинетическая энергия турбулентности), равная осреднённому по Рейнольдсу всех возможных мгновенных значений удельной кинетической энергии флуктуаций скорости

$$b = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) , \quad (3.43)$$

\mathcal{E} - скорость диссипации энергии турбулентности, отражающая потери энергии турбулентности за счёт её перехода во внутреннюю энергию при молекулярном трении между частицами;

l - турбулентный путь смещения, характеризующий среднее значение вертикальных масштабов всех возможных вихревых образований (или турбулентных молей). Иными словами, путь смещения соответствует среднему значению флуктуационных вертикальных перемещений индивидуальных частиц в вихревых образованиях, о которых упоминалось в разделе 2. В процессе таких перемещений и происходит перенос свойств воздушного потока с одного уровня на другой.

Введение четырёх новых характеристик турбулентного потока требует введения в систему уравнений четырёх новых соотношений. Для характеристик b и l , которые считаются основными, вводятся независимые одно от другого два уравнения.

Две другие характеристики, коэффициент турбулентности и скорость диссипации принимаются полностью определяющимися значениями основных характеристик b и l , т.е.:

$$k = f_k(b, l), \quad (3.44)$$

$$\varepsilon = f_\varepsilon(b, l). \quad (3.45)$$

Вывод явного вида зависимостей $k = f_k(b, l)$ и $\varepsilon = f_\varepsilon(b, l)$.

Определим явный вид зависимости (3.44) на основе анализа размерностей. Формулы размерностей для входящих в неё величин, записываются следующим образом

$$[k] = L^2T^{-1}, \quad [b] = L^2T^{-2}, \quad [l] = L.$$

Заполним матрицу размерностей (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Матрица размерностей

	k	b	l
L	2	2	1
T	-1	-2	0

Число столбцов этой матрицы $n = 3$, число строк $m = 2$. Тогда $n - m = 1$, что позволяет составить один безразмерный комплекс

$$\frac{k}{b^\alpha l^\beta} = C_k,$$

где C_k – некоторая константа. Вычислим показатели α , β на основании матрицы размерностей. Запишем равенства по каждой из строк

$$\begin{cases} L: & 2 = 2\alpha + \beta \\ T: & -1 = -2\alpha + 0\beta \end{cases}$$

Разрешив эту систему, получаем $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$. Тогда

$$\frac{k}{b^{1/2}l} = C_k$$

Отсюда

$$k = C_k l \sqrt{b} \quad .$$

Константа C_k может быть учтена включением её в функцию $l_1 = C_k l$, так что далее выражение для коэффициента k будет использоваться в форме

$$k = l_1 \sqrt{b} \quad . \quad (3.46)$$

Аналогичным методом получаем явный вид функции (3.45), определяющей скорость диссипации энергии турбулентности.

Используя размерности величин, входящих в формулу (3.45)

$$[\varepsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [b] = L^2 T^{-2}, \quad [l_1] = L,$$

заполним матрицу размерностей (таблица 3.2).

Таблица 3.2. Матрица размерностей.

	ε	b	l_1
L	2	2	1
T	-3	-2	0

Число столбцов этой матрицы $n = 3$, число строк $m = 2$. Тогда $n - m = 1$, что позволяет составить один безразмерный комплекс вида

$$\frac{\varepsilon}{b^\alpha l_1^\beta} = C_\varepsilon$$

Вычислим показатели α , β на основании матрицы размерностей. Запишем равенства по каждой из строк

$$\begin{cases} L: & 2 = 2\alpha + \beta \\ T: & -3 = -2\alpha + 0\beta \end{cases}$$

Разрешив эту систему, получим $\alpha = 3/2$, $\beta = -1$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{b^{3/2} l_1^{-1}} = C_\varepsilon$$

Отсюда

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{b\sqrt{b}}{l_1} \quad , \quad (3.47)$$

или с учётом соотношения (3.47)

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{b\sqrt{b}}{l_1} = C_\varepsilon \frac{b^2}{k} \quad . \quad (3.48)$$

Полученные формулы (3.46) и (3.48) соответствуют соотношениям, приведённым в [3], [4].

Перейдём далее к выводу уравнения баланса энергии турбулентности.

3.7. Вывод уравнения баланса энергии турбулентности

Для более глубокого понимания физического смысла слагаемых в общем балансе различных видов энергии и факторов, их определяющих, приведём два варианта вывода уравнения баланса энергии турбулентности.

Вариант 1

3.7.1 Полная кинетическая энергия и её составляющие

Рассмотрим удельную кинетическую энергию элемента потока, соответствующую полной мгновенной скорости частицы

$$E_k = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}u_i^2$$

Используем принятое ранее положение о средних и флуктуационных составляющих скорости

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = w', \quad \bar{w} = 0,$$

и запишем полную энергию в виде

$$E_k = \frac{1}{2}(u_i^2) = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \frac{1}{2}(\bar{u}u' + \bar{v}v') + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

Осреднение последнего соотношения по Рейнольдсу приводит к результату

$$\hat{E}_k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2}) + \frac{1}{2}(\overline{\bar{u}u'} + \overline{\bar{v}v'}) + \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

В соответствии с правилами осреднения второе слагаемое равно нулю, а первое и третье слагаемые представляют собой кинетическую энергию, соответствующую средней скорости потока

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2}) = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)$$

и энергию турбулентности (1), соответственно, так что

$$\hat{E}_k = \bar{E}_k + b. \quad (3.49)$$

Последнее соотношение позволяет получить уравнение баланса энергии турбулентности как разность уравнения баланса полной осреднённой энергии \hat{E}_k и уравнения баланса энергии среднего потока \bar{E}_k

$$\frac{db}{dt} = \frac{d\hat{E}_k}{dt} - \frac{d\bar{E}_k}{dt} . \quad (3.50)$$

3.7.2 Уравнение баланса кинетической энергии полной скорости потока

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v , \quad (3.51)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u , \quad (3.52)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g . \quad (3.53)$$

Умножая уравнения (3.51)75), (3.52)76) и (3.53)77) на проекции скорости u , v и w , соответственно, и складывая их, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + 2\omega_z (uv - vu) - wg ,$$

или иначе

$$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - w \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \right) . \quad (3.54)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части последнего равенства с учётом принятого условия $\bar{w} = 0$ и выполнения условий квазистатики

$$p(z) = \bar{p}(z), \quad \frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{T}{\bar{T}}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\bar{\rho}$$

при вертикальных перемещениях турбулентных молей. В результате получим

$$w \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \right) = w' g \left(-\frac{\bar{\rho}}{\rho} + 1 \right) = -\frac{g}{\bar{T}} w' (T - \bar{T}) = -\frac{g}{\bar{T}} w' T'$$

Выполним процедуру осреднения уравнения (3.78) полагая, что осреднённые характеристики (кроме давления) не зависят от горизонтальных координат и зависят только от z . Результат принимает вид

$$\frac{d\hat{E}_k}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) + \frac{g}{T} \overline{w'T'} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{w'E'_k} \right)$$

Используем принятую в k -теории турбулентности и введённую выше гипотезу о связи вторых моментов с градиентами средних величин, так что

$$\overline{w'T'} = -k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad \overline{w'E'_k} = -k \frac{\partial \hat{E}_k}{\partial z} = -k \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial z} - k \frac{\partial b}{\partial z}$$

С учётом этих соотношений выражение для изменения осреднённой кинетической энергии принимает вид

$$\frac{d\hat{E}_k}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) - \frac{g}{T} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (3.55)$$

3.7.3 Уравнение баланса кинетической энергии осреднённой скорости потока

Умножение уравнений для проекций скорости осреднённого движения

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\omega_z \bar{v} + \frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial z},$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\omega_z \bar{u} + \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial z},$$

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g, \quad \bar{w} = 0$$

на соответствующие им компоненты скорости позволяет записать уравнение для индивидуальных изменений удельной кинетической энергии осреднённого движения

$$\frac{d\bar{E}_k}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}) + (\bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial z}). \quad (3.56)$$

Здесь
$$\bar{E}_k = \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2).$$

Используя правило дифференцирования

$$\varphi d\psi = d(\varphi \cdot \psi) - \psi d\varphi$$

и принятые ранее обозначения

$$\bar{\tau}_x = \frac{\tau_x}{\rho} = k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \bar{\tau}_y = \frac{\tau_y}{\rho} = k \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad (3.57)$$

преобразуем второе слагаемое в правой части уравнения (3.56) к виду

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}{\partial z} - k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right].$$

В результате выполненных преобразований получим уравнение для изменения кинетической энергии осреднённого движения в виде

$$\frac{d\bar{E}_k}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}(\bar{V} \cdot \text{grad}\bar{p}) + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial z} - k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3.58)$$

3.7.4 Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности

Вычитая выражение (3.58) из (3.56), получим уравнение, отражающее изменение энергии турбулентности за счёт действия силы турбулентного трения и силы плавучести

$$\frac{db}{dt} = \frac{d\hat{E}_k}{dt} - \frac{d\bar{E}_k}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{T} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (3.59)$$

Выполним анализ полученного уравнения. Первое слагаемое отражает постоянный приток энергии турбулентности за счёт потерь кинетической энергии, соответствующей осреднённой скорости потока.

Второе слагаемое представляет собой источник энергии, формируемый работой силы плавучести. При устойчивой стратификации ($\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$) это слагаемое будет приводить к потерям энергии, при

неустойчивой ($\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0$) стратификации сила плавучести будет создавать положительный приток энергии.

Третье слагаемое представляет собой источник с переменным знаком по высоте, формируемый за счёт вертикальной турбулентной диффузии энергии турбулентности.

Проинтегрируем выражение (3.59) по высоте от подстилающей поверхности ($z=0$) до верхней границы пограничного слоя ($z=H$) в условиях нейтральной стратификации ($\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$) и использованием очевидных условий

$$k \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad k \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad \text{отражающих отсутствие вертикальных}$$

потоков энергии турбулентности на границах пограничного слоя. В результате получим выражение

$$\int_0^H \frac{db}{dt} dz = \int_0^H k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] dz > 0, \quad (3.60)$$

из которого следует, что интегральное по всей высоте пограничного слоя значение скорости изменения энергии турбулентности всегда положительного знака, что должно приводить к её постоянному росту. Такой вывод, очевидно, противоречит условиям ограниченности величины энергии турбулентности и существованию стационарных условий.

Полученный результат означает, что при выводе уравнений для кинетической энергии, соответствующей полной (3.56) и осреднённой (3.58) скоростей, не учтён фактор, приводящий к постоянной потере кинетической

энергии турбулентности. Таким фактором является неучтённое в исходных уравнениях движения молекулярное трение. При наличии мелкомасштабной хаотичной неоднородности поля флуктуаций скорости в турбулентном потоке молекулярное трение приводит к переходу кинетической энергии флуктуаций скорости во внутреннюю тепловую энергию потока.

Вывод уравнения баланса энергии с учётом силы молекулярного трения приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$diss = \frac{\mu}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2},$$

обеспечивающего постоянные потери, или диссипацию энергии турбулентности. Здесь μ – динамический коэффициент молекулярной вязкости.

Используя в дальнейшем для скорости диссипации обозначение $\varepsilon \equiv diss$, запишем окончательный вид уравнения баланса энергии турбулентности

$$\frac{db}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{T} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (3.61)$$

Вариант 2

3.7.5 Общая формулировка уравнения баланса кинетической энергии турбулентности

Запишем осредненное уравнение переноса субстанции f в дивергентно-поточковой форме

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{f}}{\partial t} = \overline{J_{f \text{ div}}} + \overline{J_{f \text{ aif}}} + \overline{J_{f \text{ вн}}} \quad (3.62)$$

Понимая под f кинетическую энергию турбулентности, перепишем (3.62)

$$\frac{\partial \bar{\rho} b}{\partial t} = \overline{J_{b \text{ div}}} + \overline{J_{b \text{ aif}}} + \overline{J_{b \text{ вн}}} \quad (3.63)$$

Дивергентный источник кинетической энергии турбулентности представляет собой дивергенцию потока кинетической энергии турбулентности через грани выделенного объема, обусловленного средним потоком,

$$\overline{J}_{b\,div} = -\frac{\partial \overline{\rho u_j} b}{\partial x_j} \quad (3.64)$$

Диффузионный источник представляет собой приток кинетической энергии турбулентности за счет турбулентных флуктуаций скорости

$$\overline{J}_{b\,dif} = -\frac{\partial \overline{\rho u_j' b}}{\partial x_j} \quad (3.65)$$

Наконец, качественный анализ структуры турбулентного потока позволяет сформулировать внутренние источники кинетической энергии турбулентности. Изменения энергии турбулентности определяются тремя факторами:

- количеством энергии турбулентности, которое возникает благодаря трансформации кинетической энергии среднего потока;
- количеством энергии турбулентности, которое возникает из запасов потенциальной и внутренней энергий при неустойчивом состоянии или превращается в потенциальную и внутреннюю энергии при устойчивом состоянии;
- количеством кинетической энергии, которое превращается во внутреннюю энергию благодаря диссипации.

Тогда

$$\overline{J}_b\,_{вн} = \overline{J}_b\,_{ср} + \overline{J}_b\,_{пл} - \overline{J}_b\,_{дис} \quad (3.66)$$

С учетом соотношений (3.64) – (3.66) перепишем уравнение (3.63)

$$\frac{\partial \overline{\rho} b}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{\rho u_j} b}{\partial x_j} + \overline{J}_b\,_{ср} + \overline{J}_b\,_{пл} - \overline{J}_b\,_{дис} - \frac{\partial \overline{\rho u_j' b}}{\partial x_j} \quad (3.67)$$

Вернёмся обратно от дивергентно-поточковой формы записи уравнений к записи через полную производную по времени

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} b}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j b}{\partial x_j} &= b \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial b}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial b}{\partial x_j} + b \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \\ &= b \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} \right)}_0 + \bar{\rho} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) = \bar{\rho} \frac{db}{dt}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

С учетом перехода (3.68) уравнение (3.67) принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{db}{dt} = \bar{J}_{b_{\text{ср}}} + \bar{J}_{b_{\text{пл}}} - \bar{J}_{b_{\text{дис}}} - \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j b}{\partial x_j} \quad (3.69)$$

Если разделить на среднюю плотность, можно записать

$$\frac{db}{dt} = N + Ar - \varepsilon - \frac{\partial(\bar{u}_j b)}{\partial x_j}. \quad (3.70)$$

где

$$N = \frac{\bar{J}_{b_{\text{ср}}}}{\bar{\rho}}, \quad Ar = \frac{\bar{J}_{b_{\text{пл}}}}{\bar{\rho}}, \quad \varepsilon = \frac{\bar{J}_{b_{\text{дис}}}}{\bar{\rho}} \quad (3.71)$$

Таким образом, задача вывода уравнения баланса кинетической энергии турбулентности сводится к выводу выражений для трех членов N , Ar и ε .

Отметим, что все дальнейшие рассуждения будут проводиться по отношению к частному случаю, когда осредненные значения потоков турбулентной энергии и ее источники зависят только от высоты, то есть являются функциями z . Именно таким является поток в нижних слоях атмосферы над однородной подстилающей поверхностью. При этом будем пренебрегать влиянием флуктуаций давления на баланс кинетической энергии флуктуаций.

3.7.6 Генерации энергии турбулентности как сток кинетической энергии среднего потока

Отнесенная к единице массы (удельная) кинетическая энергия среднего горизонтального потока \bar{E}_s , имеющего скорость $\vec{V} = \bar{u}\vec{i} + \bar{v}\vec{j}$, определяется как

$$\bar{E}_s = \frac{1}{2} \bar{V}^2 = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2). \quad (3.72)$$

Запишем выражение для проекций осредненного уравнения движения на оси декартовой системы координат, пренебрегая молекулярной вязкостью и учитывая только вертикальный турбулентный приток импульса

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{u}_k - \delta_{i3} g - \frac{\partial \overline{u'_i w'}}{\partial z} \quad (3.73)$$

Полагая в формуле (3.73) индекс $i = 1$, а затем $i = 2$, получим два уравнения движения для среднего горизонтального потока

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\omega_z \bar{v} - 2\omega_y \bar{w} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \quad (3.74)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 2\omega_x \bar{w} - 2\omega_z \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (3.75)$$

Вводя напряжения Рейнольдса, а также учитывая, что $\bar{w} \ll \bar{u} \approx \bar{v}$, а, следовательно, $\omega_y \bar{w} \approx \omega_x \bar{w} \ll \omega_z \bar{u} \approx \omega_z \bar{v}$, перепишем уравнения (3.74) и (3.75)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\omega_z \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (3.76)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\omega_z \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (3.77)$$

Поскольку мы рассматриваем только две составляющие тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, действующие на площадке перпендикулярной оси Oz , необходимость во втором индексе отпадает. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь ввиду, что $\tau_{xz} \equiv \tau_x$, $\tau_{yz} \equiv \tau_y$.

Умножим (3.76) на \bar{u} , а (3.77) на \bar{v} , а также внесём \bar{u} и \bar{v} под знак индивидуальной производной (например, $\bar{u}d\bar{u}/dt = d(\bar{u}^2/2)/dt$), и получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) = -\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\omega_z \bar{v} \bar{u} + \frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (3.78)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) = -\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\omega_z \bar{u} \bar{v} + \frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (3.79)$$

Складывая левые и правые части уравнений (3.78) и (3.79), имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \frac{d\bar{E}_s}{dt} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2\omega_z \bar{v} \bar{u} + \frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} - \frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\omega_z \bar{u} \bar{v} + \frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = \\ & = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\bar{u} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \bar{v} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_i}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Объединяя (3.80) и (3.81), приходим к

$$\frac{d\bar{E}_s}{dt} = -\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_i}{\partial z} \quad (3.82)$$

В этом уравнении слева стоит изменение кинетической энергии единицы массы воздуха, первое слагаемое в правой части может быть записано как $(\vec{V} \cdot \vec{F}_p)/\rho$, то есть представляет собой работу, совершаемую горизонтальным градиентом давления при движении единичной массы воздуха; второе слагаемое в правой части характеризует изменение кинетической энергии среднего движения под влиянием силы турбулентного трения.

Преобразуем второе слагаемое в правой части, используя известное правило для производной от произведения. Так, очевидное равенство

$$\frac{\partial \bar{u}_i \tau_i}{\partial z} = \bar{u}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial z} + \tau_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} \quad (3.83)$$

позволяет записать

$$\tau_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}_i \tau_i}{\partial z} - \tau_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} \quad (3.84)$$

Подставляя (3.84) в (3.85), имеем

$$\frac{d\bar{E}_s}{dt} = -\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{u}_i \tau_i}{\partial z} - \frac{\tau_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} \quad (3.85)$$

Второе слагаемое в уравнении (3.85) определяет ту часть энергии, обусловленной касательными напряжениями, которая идет на изменение кинетической энергии среднего движения частицы, придавая ей ускорение. Третье слагаемое со знаком минус представляет собой сток кинетической энергии среднего горизонтального потока, а именно ту часть энергии, которая превращается в кинетическую энергию турбулентности. Таким образом, данная величина, являясь стоком кинетической энергии среднего потока, играет роль притока в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности. Тогда можно записать

$$N = \tau_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (3.86)$$

3.7.7. Вывод уравнения для вклада сил плавучести в изменение кинетической энергии турбулентности

Рассмотрим взаимные превращения кинетической энергии турбулентности и потенциальной энергии вертикального столба воздуха, стратифицированного по температуре, в поле тяжести. Эти превращения затрагивают составляющую $\overline{w'w'}/2$ кинетической энергии турбулентности и описываются уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{w'w'}}{2} \right) = Ar \quad (3.87)$$

Чтобы получить кинетическую энергию флуктуаций вертикальной скорости, необходимо рассмотреть неосредненное и осредненное уравнение движения в проекции на вертикальную ось Oz . Первое из них вытекает из уравнения (3.73), если положить $i = 3$ и опустить малые по сравнению с ускорением силы тяжести слагаемые,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3.88)$$

Второе уравнение вытекает из уравнения (3.73), если в нем также положить $i = 3$ и опустить малые по сравнению с ускорением силы тяжести слагаемые, дополнительно принимая квазистатическое приближение,

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g \quad (3.89)$$

Вычтем из (3.88) уравнение (3.89)

$$\frac{dw'}{dt} = -\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \quad (3.90)$$

Пренебрегая пульсациями давления ($p' = 0$), имеем

$$\frac{dw'}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} \right) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \frac{\rho'}{\rho} \quad (3.91)$$

Поскольку определяющим фактором в формировании вертикальных ускорений вихревых образований является сила плавучести, то в уравнении для флуктуаций вертикальной скорости мы не можем, в отличие от того как делалось ранее, пренебрегать пульсациями плотности.

Выражая из (3.89) градиент среднего давления, можем преобразовать (3.91) к виду

$$\frac{dw'}{dt} = g \left(\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} \right) = g \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1 \right) = g \frac{\rho'}{\rho} \quad (3.92)$$

Покажем, что отношение плотностей есть обратное отношение температур, для чего воспользуемся уравнением состояния

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (3.93)$$

Разделив осредненное уравнение состояния на неосредненное уравнение состояния, получим

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{p}{R\bar{T}} \frac{RT}{p} = \frac{T}{\bar{T}} \quad (3.94)$$

С учетом этого, уравнение (3.92) может быть преобразовано следующим образом

$$\frac{dw'}{dt} = \left(\frac{T}{\bar{T}} - 1 \right) g = \frac{g}{\bar{T}} (T - \bar{T}) = \frac{g}{\bar{T}} T' \quad (3.95)$$

Приближенное равенство $T'/\bar{T} \approx \theta'/\bar{T}$, позволяет записать

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} \theta' \quad (3.96)$$

Умножая (3.94) на w' и учитывая, что $w'dw'/dt = d(w'w'/2)/dt$, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{w'w'}{2} \right) = \frac{g}{\bar{T}} w'\theta' \quad (3.97)$$

Осредним уравнение (3.97)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{w'w'}}{2} \right) = \frac{g}{\bar{T}} \overline{w'\theta'} \quad (3.98)$$

Из сопоставления уравнений (3.98) и (3.71) вытекает

$$Ar = \frac{g}{\bar{T}} \overline{w'\theta'} \quad (3.99)$$

Если термическая стратификация устойчивая, то вертикальные перемещения турбулентных элементов сопровождаются затратой энергии на работу против архимедовых сил, так что $Ar < 0$. В случае неустойчивой стратификации, наоборот, при вертикальных перемещениях турбулентных элементов работа архимедовых сил совершается за счет потенциальной энергии стратификации и приводит к росту энергии турбулентности, так что $Ar > 0$.

3.7.8 Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности с учетом k -гипотезы и замыкающие соотношения

В соответствии с полученными выше результатами перепишем уравнение баланса кинетической энергии турбулентности (3.94)

$$\frac{db}{dt} = \tau_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{T} \overline{w'\theta'} - C_\varepsilon \frac{b\sqrt{b}}{l} - \frac{\partial(\overline{u'b})}{\partial x_j}. \quad (3.100)$$

Воспользовавшись k -гипотезой, для членов уравнения (3.100) можем записать

$$\tau_x = k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \tau_y = k \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (3.101)$$

$$\overline{w'\theta'} = -k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (3.102)$$

$$\overline{u'b} = -k \frac{\partial b}{\partial z} \quad (3.103)$$

Тогда

$$\frac{db}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{T} k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - C_\varepsilon \frac{b^2}{k} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z} \quad (3.104)$$

Удобно ввести характеристическую функцию Ψ , зависящую от вертикальных градиентов скорости и вертикального градиента потенциальной температуры

$$\Psi = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (3.105)$$

После введения характеристической функции Ψ уравнение (3.104) принимает вид

$$\frac{db}{dt} = k\Psi - C_\varepsilon \frac{b^2}{k} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z} \quad (3.106)$$

3.8. Гипотезы для турбулентного пути смешения

1. Гипотеза Прандтля для потока вблизи плоской поверхности при малых z :

$$l = C_1 z. \quad (3.107)$$

Здесь C_1 - константа, традиционно обозначаемая как κ , равная ≈ 0.4 , и известная под названием постоянной Кармана, так что

$$l = \kappa z. \quad (3.108)$$

2. Гипотеза Кармана для одномерного нейтрально стратифицированного потока вблизи подстилающей поверхности:

$$l = C_2 \frac{\partial u}{\partial z} / \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (3.109)$$

3. Обобщение гипотезы Кармана, предложенное Россби при меняющемся с высотой в пограничном слое направлении ветра:

$$l \sim \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| / \left| \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \right|,$$

которое в двумерном случае преобразуется к виду:

$$l = C_3 \psi / \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2. \quad (3.110)$$

4. Гипотеза для пути смещения, предложенная Лайхтманом Д.Л. и Зилитинкевичем С.С. для стратифицированного пограничного слоя

$$l = C_4 \psi \left/ \frac{\partial \psi}{\partial z} \right., \quad \psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (3.111)$$

обобщающая все предыдущие случаи. Действительно, при $\psi = z$ имеем гипотезу Прандтля, при $\psi = \frac{\partial u}{\partial z}$ - гипотезу Кармана.

Постоянные C_2 и $C_3=C_4$ должны быть такими, чтобы при малых z

формулы гипотез 2, 3 и 4 переходили в формулу гипотезы 1 с константой Кармана. Анализ вертикальной изменчивости параметров потока при малых высотах, выполненный в разделе 4, приводит к следующим результатам:

$$C_2 = -\kappa, \quad C_3 = C_4 = -2\kappa c^{1/4} = -2\tilde{\kappa}.$$

Контрольные вопросы

1. Почему возникает необходимость привлечения новых уравнений после процедуры осреднения уравнений для мгновенных величин?

2. От чего зависит «среднее» от произведения флуктуаций вертикальной скорости и температуры согласно κ -теории?

3. При каких условиях турбулентный поток тепла равен нулю?

4. Назовите четыре основные характеристики турбулентного потока, принятые в κ -теории турбулентности.

5. Что является постоянным источником кинетической энергии турбулентности?

6. За счёт какого фактора может существовать турбулентность при отсутствии градиента средней скорости?

Литература к главе 3

1 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. Для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003 – 840 с.

2 Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: «Наука», 1965. – 639 с

3 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.

4 Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов /В.М. Радикевич – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.

4 УПРОЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

4.1 Два подхода к упрощению уравнений

4.2 Процедура приведения первого уравнения движения к безразмерному виду

4.3 Относительная значимость сил в первом уравнении движения и разделение атмосферы на слои

4.4 Критерии стационарности и горизонтальной однородности для пограничного слоя и свободной атмосферы

4.5 Критерии стационарности и горизонтальной однородности для приземного слоя атмосферы

4.6 Упрощение третьего уравнения движения

4.1 Два подхода к упрощению уравнений

Математические аспекты исследования атмосферных процессов могут заключать в себе существенные трудности при использовании системы уравнений гидротермодинамики атмосферы. Это обусловлено тем, что в общем случае невозможно получить необходимые аналитические решения системы уравнений в силу их сложности. Поэтому при исследовании конкретных атмосферных процессов важным и эффективным может оказаться предварительный этап, заключающийся в оценке вклада каждого слагаемого в уравнении. В результате такого анализа отбрасываются малые члены. По существу, это означает упрощение уравнений, основанное на пренебрежении второстепенными эффектами. Такого рода анализ, не всегда тривиальный, выполняется методами, которые, в известной мере, условно можно разделить на две группы:

- упрощения, основанные на оценке порядка отдельных членов с помощью эмпирических оценок порядка самих физических величин и их производных;

- упрощения, основанные на оценке критериев подобия в уравнениях, приведённых к безразмерному виду.

Первый подход был реализован еще в 1914 году А. А. Фридманом и Т. Гессельбергом [1], в результате чего были построены соответствующие таблицы. В данной главе используется второй подход.

Если для каждой величины f ввести характерный масштаб f_0 , то можно определить безразмерную величину

$$f_n = \frac{f}{f_0}. \quad (4.1)$$

Поскольку величина f имеет такой же порядок как и ее масштаб, то отношение (4.1) имеет порядок единицы, что символически обозначается как

$$O(f_n) = 1. \quad (4.2)$$

Необходимо сделать несколько пояснений относительно того, что понимать под величиной порядка единицы. Считается, что переменная величина φ имеет порядок единицы, если выполняется неравенство $0 \leq |\varphi| \leq 1$. При этом верхний предел неравенства, следует толковать как приближенное соотношение, поскольку, например, если верхний предел 2 или 3, а не 1, то это не меняет порядка величины. Помимо этого важно понимать, что $O(\varphi) = 1$ вовсе не означает, что $\varphi \approx 1$.

Рассмотрим случай, когда величина φ изменяется в пределах $\varphi_1 \leq |\varphi| \leq \varphi_2$. Очевидно, что можно получить неравенство с пределами 0 и 1 вычитанием φ_1 . Оно имеет вид: $0 \leq |\varphi - \varphi_1| / (\varphi_2 - \varphi_1) \leq 1$, то есть в этом случае

$$O[|\varphi - \varphi_1| / (\varphi_2 - \varphi_1)] = 1. \quad (4.3)$$

Данный пример показывает, что в общем случае характерным масштабом физической величины является интервал, в котором изменяются значения данной величины.

На основании соотношения (4.1) все величины в уравнениях выражаются как произведение характерного масштаба на безразмерную функцию

$$f = f_0 f_n. \quad (4.4)$$

Уравнения, подлежащие упрощению, содержат производные. Поэтому выясним, как применить рассмотренную процедуру к ним. Для этого в форме (4.4) представляются переменные, по которым берутся производные (для пространственных координат – $x_j = x_{j0} x_{jn}$, для времени – $t = t_0 t_n$). Пространственные и временные масштабы определяются как величины x_0, t_0 , для которых f изменяется на порядок собственной величины, то есть на f_0 . На основании сказанного запишем

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{f_0}{x_{j0}} \frac{\partial f_n}{\partial x_{jn}}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_0}{t_0} \frac{\partial f_n}{\partial t_n}. \quad (4.6)$$

В то же время, f_0/x_{j0} есть порядок величины $\partial f/\partial x_j$, а f_0/t_0 есть порядок величины $\partial f/\partial t$. Отсюда сразу следует очевидный вывод [2], что

$$O\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{jn}}\right) = 1, \quad (4.7)$$

$$O\left(\frac{\partial f_n}{\partial t_n}\right) = 1. \quad (4.8)$$

Применим рассмотренную процедуру к первому уравнению движения (в проекции на ось Ox).

4.2 Процедура приведения первого уравнения движения к безразмерному виду.

Обратимся к выражению (2.86) для проекций осредненного уравнения движения на оси декартовой системы координат

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &\equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} \omega_j u_k - \delta_{i3} g \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{ij}}{\rho} - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Полагая в формуле (4.5) индекс $i = 1$, получим уравнение движения в проекции на ось Ox

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v - 2\omega_y w \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{xj}}{\rho} - \nu \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Введя обозначение

$$P_x = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.11)$$

и выделив производные по горизонтальным и вертикальной координатам, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{P_x}{\rho} + 2\omega_z v - 2\omega_y w + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\tau_{xj}}{\rho} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

В уравнении (4.12) индекс j пробегает значения от единицы до двух.

При переходе к безразмерным величинам будем иметь ввиду, что в общем случае характерные масштабы скорости, расстояния и изменений физических величин в горизонтальном и вертикальном направлениях могут быть различны. Пусть L_0 – характерный линейный горизонтальный масштаб, H_0 – характерный линейный вертикальный масштаб, t_0 – характерный временной масштаб, P_{s0} – характерный масштаб горизонтального градиента давления, u_0 – характерный масштаб горизонтальных скоростей, w_0 – характерный масштаб вертикальной скорости, ρ_0 – характерный масштаб плотности, τ_0 – характерный масштаб напряжения турбулентного трения. За масштаб силы Кориолиса разумно принять величину $2\omega_z u_0$.

Представим все переменные в виде произведения характерного масштаба на безразмерную функцию [2], [3] и, руководствуясь выкладками предыдущего параграфа, запишем (4.12) следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{t_0} \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \frac{u_0^2}{L_0} u_{jn} \frac{\partial u_n}{\partial x_{jn}} + \frac{w_0 u_0}{H_0} w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = -\frac{P_{s0}}{\rho_0} \frac{P_{xn}}{\rho_0} + 2\omega_z u_0 v_n \\ + \frac{\tilde{\tau}_0}{H_0} \left(\frac{H_0}{L_0} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xn}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xn}}{\partial z_n} \right) + \frac{u_0 \nu}{H_0^2} \left(\frac{H_0^2}{L_0^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_{jn}^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\tilde{\tau}_0 \equiv \frac{\tau_0}{\rho_0}, \quad \tilde{\tau}_n \equiv \frac{\tau_n}{\rho_n}. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.13) содержит безразмерные переменные и размерные комбинации характерных масштабов, имеющие размерность ускорения. Чтобы привести уравнение (4.13) к безразмерному виду, необходимо поделить его на какую-либо комбинацию характерных масштабов, имеющую размерность ускорения. Выбор такой размерной комбинации не является произвольным, он определяется исходя из того, какой из членов уравнения является ключевым для рассматриваемой задачи.

Для динамики геофизических процессов ключевую роль играет вращение Земли и, следовательно, сила Кориолиса. Именно поэтому уравнение (4.13) целесообразно приводить к безразмерному виду делением на множитель $2\omega_z u_0$ при силе Кориолиса. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \Pi_{u1} \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \Pi_{u2} u_{jn} \frac{\partial u_{jn}}{\partial x_{jn}} + \Pi_{u3} w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} \\ = -\Pi_{u4} \frac{P_{xn}}{\rho_n} + \mathbf{1}v_n + \Pi_{u5} T_n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь

$$T_n = \Pi_{u6} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xjn}}{\partial x_{jn}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xzn}}{\partial z_n} + \Pi_{u7} \left(\Pi_{u8} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_{jn}^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2} \right) \quad (4.16)$$

– сумма безразмерных значений сил турбулентного и молекулярного трения. Безразмерные комплексы Π_u в (4.15) и (4.16) имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{u1} = \frac{1}{2\omega_z t_0}, \quad \Pi_{u2} = \frac{u_0}{2\omega_z L_0}, \quad \Pi_{u3} = \frac{w_0}{2\omega_z H_0}, \quad \Pi_{u4} \\ = \frac{P_{s0}}{2\omega_z u_0 \rho_0}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$P_{u5} = \frac{\tilde{\tau}_0}{2\omega_z u_0 H_0}, P_{u6} = \frac{H_0}{L_0}, P_{u7} = \frac{\nu}{2\omega_z H_0^2}, P_{u8} = \frac{H_0^2}{L_0^2}$$

В уравнении (4.15) относительная значимость каждого слагаемого определяется числовым значением стоящего при нем безразмерного комплекса, поскольку все безразмерные переменные имеют порядок единицы. Таким образом, вид уравнения, описывающего конкретный атмосферный процесс, определяется значениями безразмерных комплексов P_{uj} , выступающими в качестве критериев подобия. По этой причине безразмерное уравнение (4.15) может быть названо критериальным уравнением, причем все критерии определяют значимость каждого члена по отношению к единице при ν_n , то есть по отношению к силе Кориолиса.

4.3 Относительная значимость сил в первом уравнении движения и разделение атмосферы на слои

Проанализируем относительную значимость слагаемых в правой части (4.15), последовательно оценивая соответствующие безразмерные комплексы. Во всех геофизических динамических процессах скорость ветра существенно определяется величиной горизонтального градиента давления, что обеспечивает одинаковый порядок силы Кориолиса и силы барического градиента. Это означает, что $P_{u4} \approx 1$ за исключением тонкого слоя у земной поверхности.

Обратимся к оценке значимости члена, описывающего влияние трения. Прежде всего укажем на одну особенность вертикальной структуры атмосферы, заключающуюся в том, что при всех ситуациях вертикальные градиенты метеорологических величин вблизи земной поверхности (ввиду влияния твердой стенки) намного больше соответствующих значений на высоте. Это означает, что H_0^{-1} и соответствующий этой величине безразмерный комплекс P_{u5} , отражающий влияние сил трения, в нижних слоях атмосферы существенно больше, чем в верхних. В связи с этим в атмосфере выделяют две области: атмосферный пограничный слой, где $P_{u5} \gtrsim 1$, и свободную атмосферу, где $P_{u5} \ll 1$. Приведенные неравенства указывают на относительную роль эффектов трения и силы Кориолиса в разных слоях атмосферы.

Исходя из последнего неравенства можно оценить верхнюю границу пограничного слоя атмосферы, за пределами которой эффекты трения малы по сравнению с силой Кориолиса

$$P_{u5} \equiv \frac{\tilde{\tau}_0}{2\omega_z u_0 H_0} \ll 1, \quad (4.18)$$

откуда следует условие для характерного масштаба толщины (высоты)

$$H_0 \gg \frac{\tilde{\tau}_0}{2\omega_z u_0} \quad (4.19)$$

Характерным масштабом напряжения трения в пограничном слое выступает его значение на подстилающей поверхности $\tau(z=0)$, определяемое через так называемую динамическую скорость v_*

$$\tilde{\tau}_0 = \tilde{\tau}(z=0) = v_*^2 \quad (4.20)$$

Динамическую скорость можно оценить, используя следующее эмпирическое соотношение

$$v_* = 0.04u_0 = 0.04 \cdot 10 \text{ м/с} = 0.4 \text{ м/с} \quad (4.21)$$

Тогда

$$H_0 \gg \frac{v_*^2}{2\omega_z u_0} = \frac{(0.4)^2 u_0}{2\omega_z} = \frac{(0.4)^2 10 \text{ мс}^{-1}}{10^{-4} \text{ с}^{-1}} = 1.6 \cdot 10^2 \text{ м} \quad (4.22)$$

В пограничном слое естественно выделить его нижнюю часть, называемую приземным слоем (иногда подслоем), где $P_{u5} \gg 1$. Из записанного неравенства вытекает, что для данного слоя $H_0 \ll 1.6 \cdot 10^2 \text{ м}$.

Наконец, сравним между собой слагаемые в соотношении (4.12). В большинстве атмосферных процессов $H_0/L_0 \ll 1$, то есть $P_{u6} \ll 1$ и $P_{u8} \ll 1$, поэтому эффекты трения будут определяться главным образом слагаемыми, отмеченными цифрами 1 и 2 и характеризующими турбулентный и молекулярный обмен импульсом в вертикальном направлении. Таким образом, член T_n упрощается и принимает вид

$$T_n = \mathbf{1} \frac{\partial \tilde{\tau}_{zxn}}{\partial z_n} + P_{uv} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2}. \quad (4.23)$$

Заметим, что класс задач, для которых удовлетворяется условие $H_0/L_0 \approx 1$, отражает процессы вблизи подстилающей поверхности с резкими горизонтальными неоднородностями физических характеристик.

Как видно из (4.23), порядок слагаемого, отражающего вертикальный турбулентный обмен в пограничном слое атмосферы, равен единице. При этом значимость молекулярного трения определяется величиной P_{uv} . Очевидно, что молекулярное трение может иметь ощутимое значение по сравнению с турбулентным лишь при условии

$$P_{uv} = \frac{\nu}{2\omega_z H_0^2} \gtrsim 1. \quad (4.24)$$

Принимая $2\omega_z = 10^{-4} \text{ 1/с}$, $\nu = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ получаем оценку характерного вертикального масштаба таких процессов

$$H_0 \gtrsim \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_z}} = \sqrt{\frac{10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}}{10^{-4} \text{ 1/с}}} = \sqrt{10^{-1} \text{ м}^2} = 0.3 \text{ м}. \quad (4.25)$$

Такие вертикальные масштабы не характерны для атмосферных процессов. Поэтому, фактически для всех атмосферных движений молекулярным обменом можно пренебречь по сравнению с турбулентным. Исключения составляют ситуации, возникающие в тонком слое ($H_0 \gtrsim 0.3 \text{ м}$), прилегающем к достаточно гладкой подстилающей поверхности. Такой слой получил название вязкого подслоя.

На основании анализа относительной роли сил в первом уравнении движения, получено динамическое деление атмосферы на два слоя: пограничный слой и свободная атмосфера (рисунок 4.1).

В нижней части пограничного слоя выделяется приземный слой, внутри которого, в свою очередь, выделяется вязкий подслой. В каждом слое имеют место свои закономерности движения. Наиболее простую форму уравнение (4.9) приобретает для свободной атмосферы вследствие пренебрежения эффектами трения.

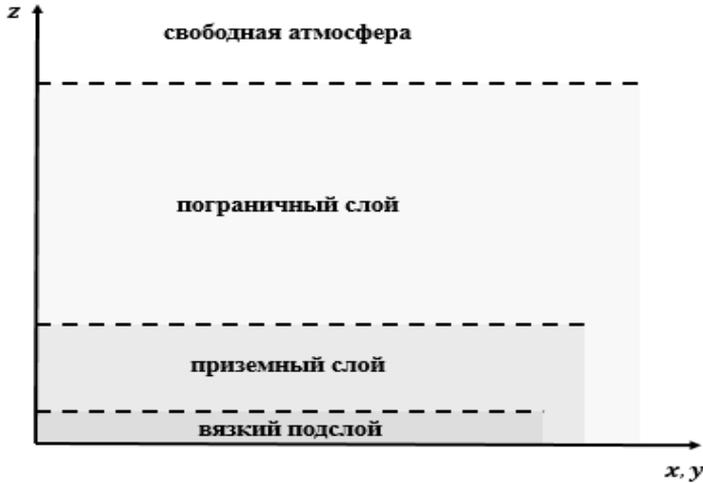


Рисунок 4.1 – Динамическое разделение атмосферы на слои по вертикали по степени влияния сил трения

В частности, если движение в свободной атмосфере происходит без ускорения, то уравнения движения представляют собой баланс силы барического градиента и силы Кориолиса. Такой тип движений носит название геострофических движений. В пограничном слое уравнение (4.9) имеет значительно более сложный вид. При этом возможно дальнейшее упрощение уравнения, поскольку можно выделить стационарные и нестационарные, горизонтально однородные и горизонтально неоднородные процессы в зависимости от числового значения критериев в левой части уравнения безразмерного уравнения движения.

4.4. Критерии стационарности и горизонтальной однородности для пограничного слоя и свободной атмосферы

Как было выяснено в предыдущем параграфе, ключевым фактором в пограничном слое является сила турбулентного трения. Поэтому и критерии стационарности, горизонтальной однородности и плоского движения должны строиться как результат сравнения соответствующих слагаемых с силой турбулентного трения. Однако сила турбулентного трения (за исключением приземного слоя) имеет такой же порядок, как и

сила Кориолиса, что позволяет продолжать сравнение слагаемых в левой части (4.11) с единицей при v_n . При этом полученные оценки будут справедливы и для пограничного слоя, и для свободной атмосферы.

Стационарным называется процесс, параметры которого в каждой точке пространства при неизменных во времени внешних условиях также не изменяются во времени, то есть равны нулю локальные производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (4.26)$$

В реальных процессах в пограничном слое редко соблюдаются условия достаточно длительного постоянства внешних воздействий. Однако существуют такие ситуации, когда скорость изменения внешних факторов много меньше скорости приспособления (адаптации) внутренних параметров процесса к внешним условиям, или иначе, характерный масштаб временной изменчивости внешних факторов много больше времени релаксации. Под временем релаксации понимается промежуток времени, за который процесс выходит на стационарный режим в ходе приспособления к мгновенно изменившимся значениям внешних параметров. Время релаксации не зависит от внешних условий и определяется лишь внутренними свойствами изучаемого процесса. В таких случаях процессы называют квазистационарными, полагая, что при их физико-математическом описании локальными изменениями по времени можно пренебречь по сравнению с главными определяющими факторами с требуемой точностью.

Критерием, по которому процессы могут быть выделены в группу стационарных, является безразмерный комплекс Π_{u1} в уравнении (4.11). Если обозначить через ε малую по сравнению с единицей величину ($\varepsilon \ll 1$), то условие стационарности процессов в свободной атмосфере и пограничном слое должно выполняться при условии

$$\Pi_{u1} = \frac{1}{2\omega_z t_0} \leq \varepsilon. \quad (4.27)$$

Если положить $\varepsilon = 0.05$, то для средних широт ($2\omega_z = 10^{-4} 1/c$) на основании (4.27) получаем следующую оценку

$$t_0 \geq \frac{1}{2\omega_2 \varepsilon} = \frac{1}{0.05 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}} = 2 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 2 \text{ сут.} \quad (4.28)$$

Для пограничного слоя атмосферы условием стационарности следует считать следующее неравенство

$$P_{u1} \ll P_{u6} \rightarrow \frac{1}{2\omega_2 t_0} \ll \frac{\tilde{\tau}_0}{2\omega_2 u_0 H_0}.$$

Отсюда следует условие для оценки величины t_0

$$t_0 \gg \frac{u_0 H_0}{\tilde{\tau}_0}, \quad \tilde{\tau}_0 = u_*^2 \cong (0,04 \cdot u_0)^2,$$

$$t_0 \gg \frac{H_0}{1,6 \cdot 10^{-3} u_0} = \frac{1000 \text{ м}}{1,6 \cdot 10^{-3} 10 \text{ мс}^{-1}} \approx 70 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 20 \text{ час}$$

Это означает, что при временной изменчивости внешних воздействий синоптического масштаба (порядка нескольких суток) динамические процессы в свободной атмосфере и в пограничном слое могут рассматриваться как квазистационарные.

Горизонтально однородным называется процесс, параметры которого в каждый момент времени не изменяются по горизонтальным пространственным координатам, то есть равны нулю производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.29)$$

и, следовательно, равен нулю весь адвективный член

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (4.30)$$

В реальных условиях все процессы в пограничном слое являются горизонтально неоднородными, однако при определенных условиях неоднородностью можно пренебречь. Относительная значимость адвективного слагаемого в (4.11) определяется безразмерным комплексом P_{u2} . Адвективные слагаемые малы по сравнению с силой Кориолиса, если выполняется условие

$$P_{u2} = \frac{u_0}{2\omega_z L_0} \leq \varepsilon. \quad (4.31)$$

Если положить $\varepsilon = 0.05$, то для средних широт ($2\omega_z = 10^{-4} \text{ 1/с}$) и характерной скорости $u_0 = 10 \text{ м/с}$ на основании (4.31) получаем следующую оценку

$$L_0 \geq \frac{u_0}{2\omega_z \varepsilon} = \frac{10 \text{ м/с}}{0.05 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}} = 2 \cdot 10^6 \text{ м} = 2000 \text{ км}.$$

Таким образом, если изменение скорости, характеризуемое ее горизонтальным градиентом, составляет величину, соответствующую ее порядку на расстоянии большем или равном 2000 км, то движение в пограничном слое можно считать горизонтально однородным.

4.5 Критерии стационарности и горизонтальной однородности для приземного слоя атмосферы

Как было сказано выше, для приземного слоя выполняется условие $P_{u5} \gg 1$. Указанное условие можно переписать в следующем виде

$$P_{u5} \approx \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 \ll 1. \quad (4.32)$$

Напомним, что условие (4.32) выражает тот факт, что трение в приземном на порядки превосходит силу Кориолиса. Следовательно, оценку значимости локальных и адвективных изменений целесообразно проводить по отношению к вязкому члену T_n в уравнении (4.11). Для этого поделим уравнение (4.11) на безразмерный комплекс P_{u6}

$$\begin{aligned} \frac{P_{u1}}{P_{u5}} \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \frac{P_{u2}}{P_{u5}} u_{jn} \frac{\partial u_{jn}}{\partial x_{jn}} + \frac{P_{u3}}{P_{u5}} w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} \\ = -\frac{P_{u4}}{P_{u5}} \frac{P_{xn}}{\rho_n} + \frac{1}{P_{u5}} v_n + \mathbf{1} T_n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Теперь можно проводить сравнение интересующих членов с единицей при вязком члене T_n .

Условие стационарности для приземного слоя (с учетом (4.32)) принимает вид

$$\frac{P_{u1}}{P_{u5}} = \frac{\varepsilon_1}{2\omega_z t_0} \leq \varepsilon. \quad (4.34)$$

Из условия (4.34) вытекает следующая оценка

$$t_0 \geq \frac{\varepsilon_1}{2\omega_z \varepsilon} \approx \frac{1}{2\omega_z}. \quad (4.35)$$

На основании (4.35) для средних широт получаем

$$t_0 \geq \frac{1}{10^{-4} \text{ 1/c}} \approx 3 \text{ ч.} \quad (4.36)$$

Такое значение времени релаксации меньше даже масштаба суточной изменчивости внешних воздействий. Это означает, что движение в приземном слое в большинстве случаев может рассматриваться как квазистационарное.

Условие горизонтальной однородности для приземного слоя (с учетом (4.32)) принимает вид

$$\frac{P_{u2}}{P_{u5}} = \frac{u_0}{2\omega_z L_0} \varepsilon_1 \leq \varepsilon. \quad (4.37)$$

Из условия (4.37) вытекает следующая оценка

$$L_0 \geq \frac{u_0}{2\omega_z} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \approx \frac{u_0}{2\omega_z}. \quad (4.38)$$

Подставив характерные значения параметра Кориолиса и скорости, получаем

$$L_0 \geq \frac{10 \text{ м/с}}{10^{-4} \text{ 1/c}} = 10^5 \text{ м} \approx 100 \text{ км.} \quad (4.39)$$

Таким образом, если изменение скорости, характеризуемое ее горизонтальным градиентом, составляет величину, соответствующую ее порядку на расстоянии большем или равном 100 км, то движение в приземном слое можно считать горизонтально квазиоднородным.

В заключение отметим, что для приземного слоя значимость силы барического градиента по отношению к вязкому члену T_n в уравнении (4.33) определяется величиной

$$\frac{P_{u4}}{P_{u5}} = \frac{P_{s0}}{2\omega_z u_0 \rho_0} \varepsilon_1 \quad (4.40)$$

Используя численные значения характерных масштабов ($P_{s0} = 1 \text{ гПа}/100 \text{ км} = 10^{-3} \text{ Па/м}$, $2\omega_z = 10^{-4} \text{ 1/с}$, $u_0 = 10 \text{ м/с}$, $\rho_0 = 1.3 \text{ кг/м}^3$), получаем следующую оценку

$$\frac{P_{u4}}{P_{u5}} = \frac{10^{-3} \text{ Па/м}}{10^{-4} \text{ 1/с} \times 10 \text{ м/с} \times 1.3 \text{ кг/м}^3} \varepsilon_1 \approx 0.7\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ll 1 \quad (4.41)$$

Таким образом, сила барического градиента как минимум на порядок меньше силы трения в приземном слое атмосферы.

4.6. Упрощение третьего уравнения движения

Приведенные выше оценки и критерии упрощения справедливы и для второго уравнения движения (в проекции на ось Oy). Однако для третьего уравнения движения (в проекции на ось Oz) необходимо получить другие критерии упрощения.

Обратимся к уравнению (4.6) и положим в нем индекс $i = 3$. Пренебрегая горизонтальным турбулентным обменом и эффектами молекулярной вязкости, можем записать

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{P_z}{\rho} - g + 2\omega_y u - 2\omega_x v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zz}}{\rho} \right), \quad (4.42)$$

где

$$P_z = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.43)$$

Введем характерный масштаб вертикального градиента давления P_{z0} . Снова представим все функции в виде произведения характерных масштабов и безразмерных функций

$$\frac{\delta w_0}{\delta t_0} \frac{dw_n}{dt_n} = -\frac{P_{z0}}{\rho_0} \frac{P_{zn}}{\rho_n} - g + 2\omega_y u_0 u_n - 2\omega_x u_0 v_n + \frac{\tau_0}{\rho_0 H_0} \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\frac{\tau_{zzn}}{\rho_n} \right). \quad (4.44)$$

Главной геофизической силой, действующей по вертикали, является сила тяжести, поэтому третье уравнение движения обезразмеривают делением на ускорение свободного падения. Это дает

$$\Pi_{w1} \frac{dw_n}{dt_n} = -\Pi_{w2} \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_n}{\partial z_n} - 1 + \Pi_{w3} u_n - \Pi_{w4} v_n + \Pi_{w5} \frac{\partial}{\partial z_n} \left(\frac{\tau_{zzn}}{\rho_n} \right), \quad (4.45)$$

Где

$$\Pi_{w1} = \frac{1}{g} \frac{\delta w_0}{\delta t_0}, \quad \Pi_{w2} = \frac{P_{z0}}{g \rho_0}, \quad \Pi_{w3} = \frac{2\omega_y u_0}{g}, \quad \Pi_{w4} = \frac{2\omega_x u_0}{g}, \quad \Pi_{w5} = \frac{\tau_0}{g \rho_0 H_0}. \quad (4.46)$$

Оценим безразмерные комплексы Π_{w5} , Π_{w4} и Π_{w3} . Итак, подставляя численные значения характерных масштабов, имеем

$$\Pi_{w5} = \frac{\tau_0}{g \rho_0 H_0} = \frac{v_*^2}{g H_0} = \frac{(0.4 \text{ м/с})^2}{9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 10^3 \text{ м}} = 1.6 \cdot 10^{-5}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{w4} &= \frac{2\omega_x u_0}{g} = \frac{2\omega u_0}{g} \cos(\widehat{\vec{\omega}, \vec{i}}) = \\ &= \frac{2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с} \cdot 10 \text{ м/с}}{9,81 \text{ м/с}^2} \cos(\widehat{\vec{\omega}, \vec{i}}) \\ &= 1.5 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(\widehat{\vec{\omega}, \vec{i}}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Аналогично проводится оценка комплекса Π_{w3}

$$\Pi_{w3} = \frac{2\omega_y u_0}{g} = \frac{2\omega u_0}{g} \cos(\widehat{\omega, \vec{j}}) = 1.5 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(\widehat{\omega, \vec{j}}). \quad (4.49)$$

Поскольку косинус по модулю не превосходит единицу, то порядок безразмерных комплексов Π_{w4} и Π_{w3} не превосходит значение $1.5 \cdot 10^{-4}$.

Полученные оценки показывают, что в третьем уравнении движения можно пренебречь силой Кориолиса и силой турбулентного трения по сравнению с силой тяжести. Тогда третье уравнение движения принимает вид

$$\Pi_{w1} \frac{dw_n}{dt_n} = -\Pi_{w2} \frac{P_{zn}}{\rho_n} - 1. \quad (4.50)$$

Далее следует отметить, что уравнение (4.50) может быть использовано для решения двух задач: анализ распределения давления с высотой и анализ вертикальных ускорений воздушных частиц.

Рассмотрим первую задачу, для решения которой уравнение (4.50) следует переписать в виде

$$\frac{\partial p_n}{\partial z_n} = -\frac{1}{\Pi_{w2}} \rho_n \left(1 + \Pi_{w1} \frac{dw_n}{dt_n} \right). \quad (4.51)$$

Для крупномасштабных процессов выполняется условие

$$\Pi_{w1} = \frac{1}{g} \frac{\delta w_0}{\delta t_0} \ll 1. \quad (4.52)$$

Тогда

$$\frac{\partial p_n}{\partial z_n} \approx -\frac{1}{\Pi_{w2}} \rho_n = -\frac{g\rho_0}{P_{z0}} \rho_n. \quad (4.53)$$

Уравнение (4.53) может быть записано в размерном виде в форме, аналогичной уравнению статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (4.54)$$

Известны процессы, когда приближение статики оказывается недостаточным. Например, в грозовых облаках вертикальные струи характеризуются малым диаметром ($L_0 \approx 50\text{м}$) и большими вертикальными скоростями (до $30 \div 40\text{ м/с}$), так что вертикальные ускорения воздушных масс сравнимы с ускорением свободного падения. В таких ситуациях третье уравнение движения должно содержать вертикальное ускорение и используется как раз для его определения в виде

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (4.55)$$

Другим примером, для которого приближения статики неприемлемы, является задача о вертикальных мелкомасштабных движениях, в которых главный интерес представляют вертикальные ускорения отдельных частиц, имеющих плотность, отличающуюся от плотности окружающей среды. Несмотря на то, что для таких движений справедлива оценка (4.52), вертикальное ускорение представляет собой искомую величину и не может быть исключено из уравнения.

Покажем, что при решении такой задачи, использование третьего уравнения движения в форме (4.55) не приводит к цели. Экспериментальные данные позволяют оценить величину $\rho^{-1} \partial p / \partial z$ с точностью до сотых, тогда ускорение определяется как малая разность больших величин

$$g = 9.81 \text{ м/с}^2, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \begin{cases} 9.85 \text{ м/с}^2 \\ 9.81 \text{ м/с}^2 \\ 9.78 \text{ м/с}^2 \end{cases}, \quad \frac{dw}{dt} \quad (4.56)$$

$$= \begin{cases} 0.04 \text{ м/с}^2 \\ 0.00 \text{ м/с}^2 \\ -0.03 \text{ м/с}^2 \end{cases}.$$

Из (4.56) видно, что неточность в определении составляющей силы барического градиента всего лишь в 1 процент может вызвать ошибку в знаке вертикального ускорения dw/dt . Поэтому для такого типа задач уравнение (4.55) при условии близости распределения давления в окружающей среде к условиям статического равновесия преобразуется к виду (4.36):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{T} (T - \bar{T}). \quad (4.57)$$

где T – температура частицы, движущейся в вертикальном направлении, \bar{T} – температура окружающей частицу среды.

Именно такая форма уравнения отражает связь турбулентных вертикальных флуктуаций скорости w' с флуктуациями температуры T' (с силой плавучести):

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} T' . \quad (4.58)$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется величина характерного масштаба явления или физического параметра?
2. Чему равен порядок безразмерной величины при правильном выборе её характерного масштаба?
3. Чем определяется значимость слагаемых в уравнениях, записанных в безразмерном виде?
4. По какому принципу атмосфера делится по высоте на три области: свободная атмосфера, планетарный пограничный слой и приземный слой?
5. Назовите критерии стационарности и горизонтальной однородности для пограничного слоя и для свободной атмосферы.
6. Назовите критерии стационарности и горизонтальной однородности для приземного слоя.
7. К какой форме сводится 3-е уравнение движения для средних условий?

Литература к главе 4

1. Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т, Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. Л.: Гидрометеорологическое изд., 1955.– 647с.
- 2 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.
- 3 Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов /В.М. Радикевич – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.

5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕТРА В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

5.1. Система уравнений динамики для свободной атмосферы

5.2. Геострофический ветер

5.3. Градиентный ветер

5.4. Изменение геострофического ветра с высотой.

Термический ветер

5.1. Система уравнений динамики для свободной атмосферы

Как уже отмечалось, пограничный слой атмосферы — это прилегающая к подстилающей поверхности область, движение в которой существенным образом определяется силой турбулентного трения, постепенно убывающей с высотой. Начиная с некоторого уровня начинается область, в которой сила трения становится пренебрежимо малой по сравнению с другими факторами, определяющими скорость потока. Горизонтальная скорость в этой области, названной свободной атмосферой, формируется без влияния силы трения и определяется уравнением [1]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_k. \quad (5.1)$$

При изучении горизонтальных движений в уравнение (5.1) включены только горизонтальные компоненты векторов скорости, силы барического градиента

$$\vec{V} = \vec{e}_x u + \vec{e}_y v, \quad \vec{F}_{Sp} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_s p = -\frac{1}{\rho} \left(\vec{e}_x \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (5.2)$$

и силы Кориолиса в пренебрежении вертикальными скоростями:

$$\vec{F}_{Sk} = 2\omega_z (\vec{e}_x v - \vec{e}_y u). \quad (5.3)$$

Здесь \vec{e}_x , \vec{e}_y - орты (единичные векторы) направлений Oх и Oу.

Равенства (5.2) и (5.3) и правила векторного произведения

$$\vec{e}_x v - \vec{e}_y u = -[\vec{e}_z \times \vec{V}]. \quad (5.4)$$

позволяют записать уравнение (5.1) в векторной форме

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_s p - 2\omega_z [\vec{e}_z \times \vec{V}], \quad (5.5)$$

и в проекциях на горизонтальные оси Oх и Oу:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v, \quad (5.6)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u, \quad (5.7)$$

Горизонтальные движения в свободной атмосфере, происходящие при обязательном действии силы барического градиента, называются градиентными движениями. Особенностью таких движений в установившемся поле барического градиента является движение вдоль изобар. Выясним основные закономерности, связывающие скорость таких движений с внешними параметрами, формирующими горизонтальные движения в свободной атмосфере. Вывод соответствующих связей излагается во всех доступных учебных пособиях [1]-[5].

6.2. Геострофический ветер

Частным случаем градиентного движения является движение с неизменной по величине и по направлению скоростью, т.е. без ускорения, что возможно только при неизменном по времени и по горизонтали поля градиента давления. Этому условию соответствует поле прямолинейных, параллельных изобар. Такое движение называется геострофическим и его скорость, в соответствии с условием $d\vec{V}/dt = 0$, описывается уравнением

$$0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - [\vec{e}_z \times 2\omega_z \vec{V}], \quad (5.8)$$

из которого следует, что геострофический ветер формируется в результате баланса силы Кориолиса и силы горизонтального барического градиента.

Умножим уравнение (5.8) векторно на орт \vec{e}_z

$$0 = \left[\vec{e}_z \times \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad}p \right) \right] - \left[\vec{e}_z \times \left[\vec{e}_z \times 2\omega_z \vec{V} \right] \right]. \quad (5.9)$$

Применение правил векторного произведения во втором слагаемом правой части (5.9) приводит к результату:

$$\begin{aligned} - \left[\vec{e}_z \times \left[\vec{e}_z \times 2\omega_z \vec{V} \right] \right] &= -\vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot 2\omega_z \vec{V}) + \\ 2\omega_z \vec{V} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) &= 2\omega_z \vec{V}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнение (5.9) принимает вид

$$0 = \left[\vec{e}_3 \times \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad}p \right) \right] + 2\omega_z \vec{V}, \quad (5.11)$$

из которого выражается вектор скорости геострофического ветра

$$\vec{V}_g = \left[\vec{e}_3 \times \left(\frac{1}{2\omega_z \rho} \text{grad}p \right) \right]. \quad (5.12)$$

Индекс « g », примененный к обозначению скорости, здесь и далее отражает, что речь идет о геострофическом ветре.

Поскольку вектор \vec{e}_3 (вдоль вертикального направления) ортогонален горизонтальному градиенту давления, то модуль геострофического ветра определяется соотношением

$$V_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \text{grad}p \quad (5.13)$$

Из (5.13) следует, что на фиксированной широте модуль геострофического ветра однозначно определяется модулем силы барического градиента.

Направление геострофического ветра легко определить, применяя «правило буравчика» для векторного произведения векторов.

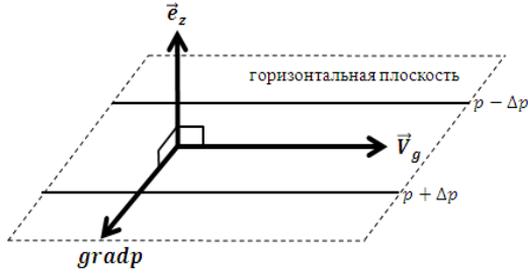


Рисунок 5.1 – Определение направления геострофического ветра

Для северного полушария, где $\omega_z > 0$, вектор геострофического ветра направлен перпендикулярно горизонтальному градиенту давления (параллельно изобарам) так, что слева остается область низкого давления. (рисунок 5.1), что подтверждается и рисунком 5.2.

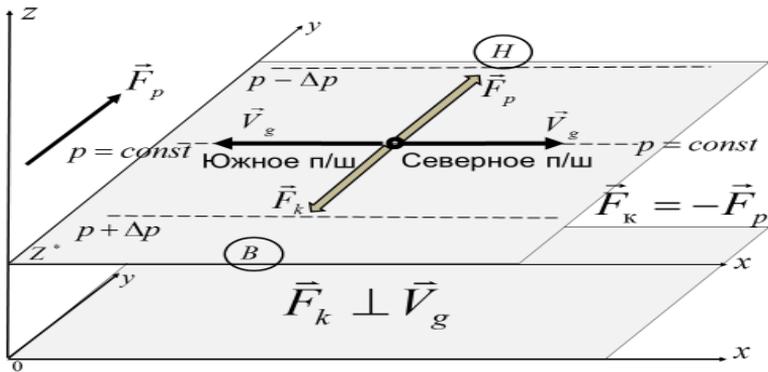


Рисунок 5.2. Схема формирования сил и геострофического ветра на фиксированной высоте.

На основании (5.12) легко определить проекции вектора геострофического ветра на горизонтальные оси Ox и Oy декартовой системы координат.

$$\begin{cases} u_g = -\frac{1}{2\omega_z\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g = \frac{1}{2\omega_z\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \quad (5.14)$$

5.3. Градиентный ветер

Рассмотрим движение в установившемся поле криволинейных изобар, в общем случае определяемое уравнением (5.5). Проведём анализ формирования скорости в точке А, расположенной на изобаре с радиусом кривизны R на рисунке 5.3. При этом ось OX направим вдоль радиуса кривизны r (по нормали к изобаре) в сторону от центра кривизны, а ось OY – в направлении касательной к изобаре в точке А.

Составляющие скорости потока u и v в точке А определяются уравнениями

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v, \quad (5.15)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u. \quad (5.16)$$

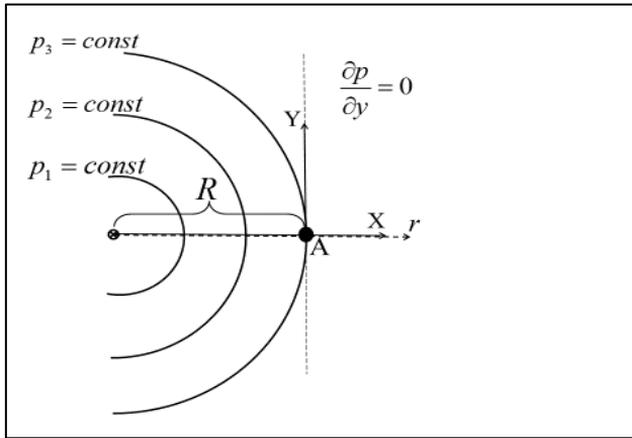


Рис. 5.3. Пример поля криволинейных изобар и выбора системы координат.

В выбранной системе координат выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad u = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0. \quad (5.17)$$

Данные соотношения (5.17) свидетельствует о том, что ускорение формируется только вдоль оси ОХ и при криволинейном движении является по определению центростремительным ускорением так, что

$$\frac{du}{dt} \equiv J_x = -\frac{v^2}{R}. \quad (5.18)$$

Уравнение (5.15) принимает вид

$$-\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v,$$

или иначе

$$v^2 + 2\omega_z R \cdot v - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (5.19)$$

Решение квадратного уравнения (5.19), имеющее вид

$$v = -\omega_z R \pm \sqrt{(\omega_z R)^2 + \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}, \quad (5.20)$$

предполагает возможность существования двух решений в зависимости от выбора знака (+ или -) перед вторым слагаемым в правой части равенства (5.20). Однако, при анализе градиентного ветра, формирование которого, по определению, связано с силой барического градиента, должно выполняться условие отсутствия ветра при отсутствии горизонтального барического градиента. Такое условие требует для северного полушария ($\omega_z > 0$) выбора положительного знака (+)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow (+). \quad (5.21)$$

Решение, определяющее скорость градиентного ветра

$$v = -\omega_z R + \sqrt{(\omega_z R)^2 + \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}, \quad (5.22)$$

характеризует движение вдоль криволинейной изобары в направлении, зависящем от знака (направления) горизонтального барического градиента. Решение справедливо в любой точке на любой изобаре при направлении оси OX вдоль радиуса кривизны изобары. Поэтому, вследствие равенства

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \text{ в дальнейшем используем запись } \frac{\partial p}{\partial r} \text{ вместо } \frac{\partial p}{\partial x}.$$

На рисунке 5.4 приведён пример с циклонической кривизной изобар.

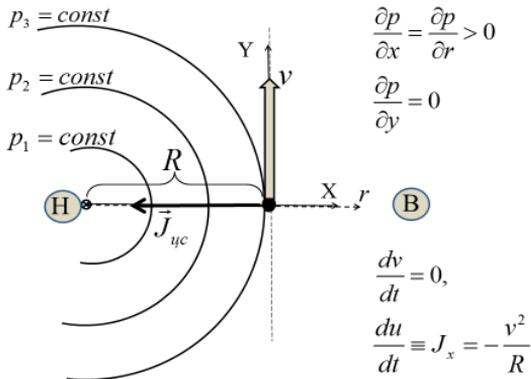


Рис. 5.4. Схема формирования градиентного ветра при циклонической кривизне изобар в северном полушарии.

При положительном барическом градиенте $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$, соответствующем циклонической кривизне изобары, второе слагаемое решения (6.22) больше первого, что приводит в северном полушарии ($\omega_z > 0$) к положительному значению скорости $v > 0$:

$$v = \omega_z R \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R \omega_z^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \right) = \omega_z R (-1 + \sqrt{1 + \delta}). \quad (5.23)$$

При $\frac{\partial p}{\partial r} > 0 \rightarrow \delta > 0 \rightarrow v > 0$,

при $\frac{\partial p}{\partial r} < 0 \rightarrow \delta < 0 \rightarrow v < 0$.

При отрицательном значении горизонтального барического градиента $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ скорость в принятой системе координат отрицательна и имеет антициклоническое направление. Оба случая представлены на рисунке 5.5а, б.

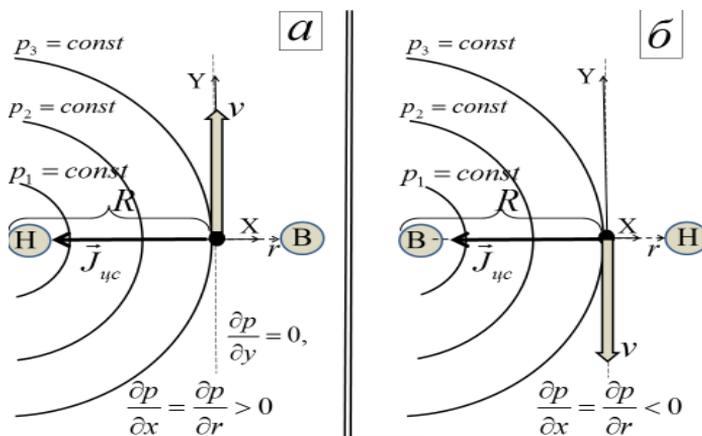


Рис.5.5. а- скорость градиентного ветра в северном полушарии при циклонической кривизне изобар; б- скорость градиентного ветра в северном полушарии при антициклонической кривизне изобар.

5.4. Изменение геострофического ветра с высотой.

Уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (5.24)$$

при замене плотности в соответствии с уравнением состояния

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (5.25)$$

преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\lg p) = -\frac{g}{RT}. \quad (5.26)$$

Продифференцируем соотношение (5.25) по горизонтальным направлениям x и y . Учитывая возможность изменения порядка частных производных, получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{g}{RT^2} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5.27)$$

Выражая в знаменателе левой части равенства (5.27) давление с использованием уравнения состояния и вводя параметр Кориолиса $l = 2\omega_z$ получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{g}{lT^2} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5.28)$$

Приведённые выше геострофические соотношения (5.14) преобразует равенство (5.28) к виду:

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{lT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_g}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{lT} \frac{\partial T}{\partial x} (1 + \delta). \quad (5.29)$$

Величина $\delta = \frac{l}{g} v_g \frac{\partial T}{\partial z} / \frac{\partial T}{\partial x}$ при характерных численных

значениях параметров

$$l \approx 10^{-4} c^{-1}, \quad g \approx 9,81 \text{ мс}^{-2}, \quad v_g \approx 10 \text{ мс}^{-1},$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \approx -0,6 \text{ К/}100 \text{ м} \right| \left. \frac{\partial T}{\partial x} \approx 5 \text{ К/}100 \text{ км} \right|$$

составляет величину, много меньшую единицы ($\delta \ll 1$, по крайней мере на два порядка), так что

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{lT} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (5.30)$$

Аналогичными преобразованиями получим

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{lT} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (5.31)$$

На рисунке 5.6. приведена схема вертикального разреза поля давления при горизонтальной неоднородности поля температуры,

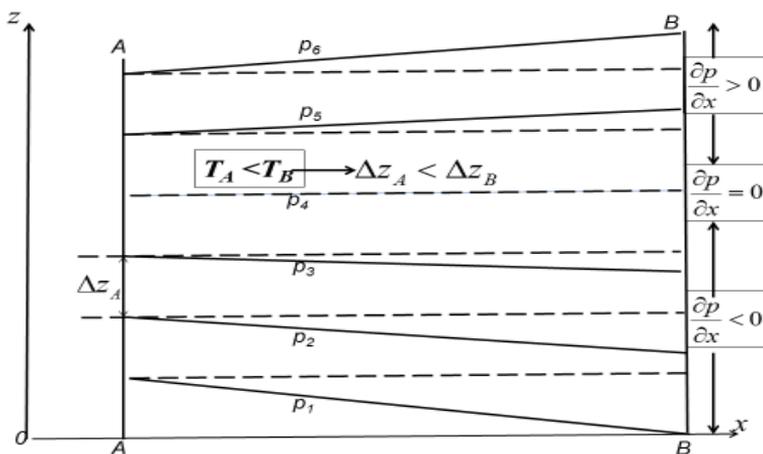


Рис.5.6. Пример вертикального разреза изобарических поверхностей при горизонтальной неоднородности поля температуры.

и на рисунке 5.7 - соответствующее такому полю распределение скорости геострофического ветра по высоте.

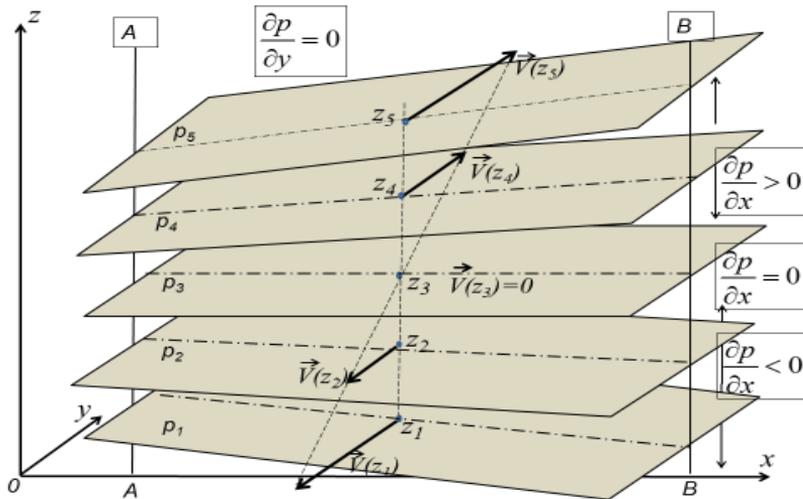


Рис.5.7. Поле изобарических поверхностей и геострофического ветра на различных высотах, соответствующих рисунку 5.6.

Контрольные вопросы

1. Действием какой силы пренебрегают при моделировании динамических процессов в свободной атмосфере?
2. Действием каких сил формируется движение, называемое градиентным. Как происходит движение воздушной массы в таком движении?
3. Как направлен геострофический ветер по отношению к направлению горизонтального барического градиента в северном и в южном полушариях?
4. Почему понятие геострофического ветра неприменимо на экваторе?
5. Каково соотношение по величине сил барического градиента и Кориолиса в циклоне и в антициклоне?
6. Какой фактор может приводить к изменению геострофического ветра с высотой?

Литература к главе 5

1. Динамическая метеорология. Под ред. Лайхтмана Д. Л. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 608с.

2. Русин И. Н. Динамическая метеорология: ознакомительный курс: курс лекций. – СПб: РГГМУ, 2008. – 273 с.

3. Подольская Э. Л. Механика жидкости и газа. Раздел «Геофизическая гидродинамика». Учебное пособие. – СПб. : изд. РГГМУ, 2007. – 154 с.

4. Динамика атмосферы. Клёмин В. В. и др. – СПб: Наука, 2013.- 420 с.

5. Короткова Н. В. Геофизическая гидродинамика (краткий курс лекций). – Саратов: СГУ имени Н. Г. Чернышевского, 2016. – 68 с.

6 СТАЦИОНАРНЫЙ ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

6.1 Замкнутая система уравнений для пограничного слоя

6.2 Постановка задачи о распределении ветра с высотой в стационарном горизонтально однородном пограничном слое

6.3 Модель стационарного горизонтально однородного пограничного слоя с постоянным коэффициентом турбулентности (модель Экмана).

6.4 Анализ распределения ветра в экмановском пограничном слое

6.5 Высота экмановского пограничного слоя

6.6 Баланс сил в экмановском пограничном слое

6.1 Замкнутая система уравнений для пограничного слоя

Выпишем замкнутую систему гидротермодинамики для пограничного слоя атмосферы [1], [2], от которой будем отталкиваться в этой и последующих главах.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z},\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z},\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &\equiv \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (6.4)$$

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (6.5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{C_p} \sum \left(\frac{dQ}{dt} \right)_i \quad (6.6)$$

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/C_p}, \quad (6.7)$$

$$\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = J_q + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (6.8)$$

$$\frac{db}{dt} \equiv \frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z} = k\Psi - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}, \quad (6.9)$$

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{b\sqrt{b}}{l} \quad (6.10)$$

$$\Psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (6.11)$$

$$k = C_k l \sqrt{b}, \quad (6.12)$$

$$l = -2 \tilde{\alpha} \frac{\Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}}, \quad (6.13)$$

В главе 5 было выяснено, как упрощаются уравнения, в частности для стационарных горизонтально однородных процессов. В этой главе будут рассматриваться именно такие процессы в пограничном слое атмосферы.

6.2 Постановка задачи о распределении ветра с высотой в стационарном горизонтально однородном пограничном слое

Одним из наиболее важных вопросов динамики пограничного слоя атмосферы является вопрос о распределении ветра с высотой в этом слое. Рассмотрим случай, когда выполняются условия стационарности и горизонтальной однородности. Условия стационарности позволяют считать, что в уравнениях движения (6.1) и (6.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (6.14)$$

В свою очередь, условия горизонтальной однородности означают, что в уравнениях движения (6.1) и (6.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.15)$$

Для пограничного слоя со скоростями (10м/с-20м/с) много меньшими скорости звука, в кинематических процессах вполне оправдано использование уравнения неразрывности в форме уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6.16)$$

из которого для условий горизонтальной однородности следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \quad (6.17)$$

Из (6.17) сразу вытекает

$$w(z) = Const. \quad (6.18)$$

Поскольку подстилающая поверхность выступает в качестве твердой непроницаемой стенки, то $w(0) = 0$. Это означает, что и на других высотах в горизонтально однородном пограничном слое $w = 0$.

Проведенные рассуждения приводят к тому, что левые части уравнений (6.1) и (6.2) для условий стационарности и горизонтальной однородности обращаются в нуль

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (6.20)$$

Соотношения (6.19) и (6.20) показывают, что составляющие ускорения по осям Ox и Oy воздушной массы равны нулю и движение воздушных масс рассматривается как установившееся. В таком приближении уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (6.21)$$

Сила барического градиента, компоненты которой фигурируют в уравнениях системы (6.21), может быть выражена через внешний по отношению к пограничному слою параметр – геострофический ветер. Действительно, используя известные геострофические соотношения

$$\begin{cases} v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (6.22)$$

получаем

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -2\omega_z v_g \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 2\omega_z u_g \end{cases} \quad (6.23)$$

С учетом выражений (6.23) система (6.21) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2\omega_z(v - v_g) = 0 \\ \frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2\omega_z(u - u_g) = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Так как система уравнений (6.24) содержит только производные по высоте, то частные производные заменены полными.

Уравнения (6.24) положены в основу большинства моделей распределения ветра с высотой в стационарном горизонтально однородном пограничном слое атмосферы. С математической точки зрения уравнения (6.24) представляют собой систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых (интегрирование) требует постановки граничных условий.

Заметим, что уравнения системы (6.24) помимо искомого составляющих скорости ветра u и v содержат еще одну неизвестную – коэффициент турбулентности k , определяемым совместно с определением скорости ветра. Именно в этом заключается существенное отличие от моделей Экмана, Тейлора и других вторых [3], образующих класс моделей с априорным заданием коэффициента турбулентности $k(z)$.

Самыми известными являются: модели с постоянным коэффициентом турбулентности, модели со степенным профилем коэффициента турбулентности, модели с изломом, позволяющие получить аналитические решения для распределения ветра по высоте.

6.3 Модель стационарного горизонтально однородного пограничного слоя с постоянным коэффициентом турбулентности (модель Экмана).

Первое исследование распределения скорости в геофизических пограничных слоях было выполнено Экманом в 1905 году [3]. Он рассматривал задачу о распределении скорости ветрового дрейфового течения в верхнем слое океана. В работе Экмана коэффициент вязкости k принимался не зависящим от вертикальной координаты. На основе аналогичного подхода задача о распределении скорости ветра в атмосферном пограничном слое впервые была рассмотрена Акербломом в 1908 году [3]. Однако, результат для атмосферы фактически содержит

решение задачи Экмана, поэтому, традиционно, и задачу для пограничного слоя атмосферы называют задачей Экмана. Приведем решение этой задачи.

С учетом постоянства по высоте коэффициента турбулентности можно записать, что

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} = k \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} = k \frac{d^2 v}{dz^2}. \quad (6.25)$$

Используя (7.25) и одновременно деля на k , систему уравнений (6.24) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2\omega_z}{k} (v - v_g) = 0 \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{2\omega_z}{k} (u - u_g) = 0 \end{cases}. \quad (6.26)$$

Поскольку оба уравнения системы содержат производную второго порядка, то необходимо четыре граничных условия (по два условия для u и для v). Первые два задаются на $z = 0$, где в силу прилипания $u = v = 0$. Вторые два задаются в свободной атмосфере, то есть при $z > H$. Если считать, что ветер в свободной атмосфере описывается геострофическими соотношениями, то при $z > H$ $u = u_g$, $v = v_g$. Однако в общем случае составляющие геострофического ветра могут зависеть от высоты ($u_g = u_g(z)$, $v_g = v_g(z)$), при этом изменение геострофического ветра с высотой (термический ветер) вызывается горизонтальной неоднородностью температуры. В рассматриваемой горизонтально однородной задаче термический ветер отсутствует, следовательно $u_g(z) = Const$, $v_g(z) = Const$. Это означает, что верхние граничные условия можно поставить на любой высоте в свободной атмосфере. С точки зрения интегрирования системы (7.26) удобно задавать верхние граничные условия при $z \rightarrow \infty$, где, очевидно, $u = u_g$, $v = v_g$.

Итак, граничные условия сводятся к системе

$$\begin{cases} z = 0: & u = 0, \quad v = 0 \\ z \rightarrow \infty: & u = u_g, \quad v = v_g \end{cases}. \quad (6.27)$$

Будем рассматривать процессы в северном полушарии, где $\omega_z > 0$. Это означает, что ω_z/k – величина положительная, поэтому справедлива замена

$$\frac{\omega_z}{k} = a^2. \quad (6.28)$$

Ввиду того, что u_g и v_g не изменяются с высотой, то их можно внести под знаки дифференциалов

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2}(u - u_g) + 2a^2(v - v_g) = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2}(v - v_g) - 2a^2(u - u_g) = 0 \end{cases}. \quad (6.29)$$

Многие задачи физики решаются в отклонениях от какого-либо известного, среднего состояния. Использование отклонений часто позволяет упростить и уравнения, и начальные, и граничные условия. В связи с этим и рассматриваемую задачу целесообразно записать в отклонениях от геострофического ветра. Используя обозначения

$$u' = u - u_g, \quad v' = v - v_g, \quad (6.30)$$

перепишем уравнения (6.29) в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 u'}{dz^2} + 2a^2 v' = 0 \\ \frac{d^2 v'}{dz^2} - 2a^2 u' = 0 \end{cases}. \quad (6.31)$$

Домножим второе уравнение системы (6.31) на мнимую единицу i и сложим с первым

$$\frac{d^2(u' + iv')}{dz^2} + 2a^2(v' - iu') = 0. \quad (6.32)$$

Принимая во внимание, что $i^2 = -1$, преобразуем в (6.32) выражение, стоящее в скобках, следующим образом:

$$v' - iu' = -(iu' - v') = -(iu' + i^2v') = -i(u' + iv').$$

Тогда, записывая сумму производных как производную суммы, можем переписать (6.32) в виде

$$\frac{d^2}{dz^2}(u' + iv') - 2a^2i(u' + iv') = 0. \quad (6.33)$$

Введем комплексную переменную $U' = u' + iv'$, после чего уравнение (6.33) примет вид

$$\frac{d^2U'}{dz^2} - 2a^2iU' = 0. \quad (6.34)$$

В связи с объединением двух уравнений в одно и введением новой функции $U'(z)$ необходимо преобразовать и граничные условия. В соответствии с равенствами (6.30) и условием (6.27) получим следующее

$$\begin{cases} z = 0: & u' = 0 - u_g = -u_g, \quad v' = 0 - v_g = -v_g \\ z \rightarrow \infty: & u' = u_g - u_g = 0, \quad v' = v_g - v_g = 0' \end{cases} \quad (6.35)$$

и тогда

$$\begin{cases} z = 0: & U' = -u_g - iv_g = -U_g \\ z \rightarrow \infty: & U' = 0' \end{cases} \quad (6.36)$$

Уравнение (6.34) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для уравнений такого типа разработана методика решения. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$U' = C_1f_1 + C_2f_2, \quad (6.37)$$

где f_1 и f_2 – частные линейно независимые решения, имеющие вид $\exp(rz)$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, так что

$$U' = C_1 e^{r_1 z} + C_2 e^{r_2 z}. \quad (6.38)$$

Функция $\exp(rz)$ является решением уравнения (6.34), если r есть корень характеристического уравнения. Оно, в свою очередь, представляет собой алгебраическое уравнение той же степени, что и порядок решаемого дифференциального уравнения. Для уравнения (7.34) характеристическое уравнение записывается в виде

$$r^2 - 2a^2 i = 0. \quad (6.39)$$

и имеет два различных комплексно-сопряженных корня $r_1 = a\sqrt{2i}$ и $r_2 = -a\sqrt{2i}$. Преобразуем их прибавляя и вычитая единицу, выделяя полный квадрат и извлекая корень

$$\begin{aligned} \pm a\sqrt{2i} &= \pm a\sqrt{-1 + 2i + 1} = \pm a\sqrt{i^2 + 2i + 1} = \\ &= \pm a\sqrt{(i + 1)^2} = \pm a(i + 1) \end{aligned} \quad (6.40)$$

И тогда

$$U' = C_1 e^{a(i+1)z} + C_2 e^{-a(i+1)z}. \quad (6.41)$$

Определим произвольные постоянные из граничных условий. Если $z \rightarrow \infty$, то в соответствии с граничным условием уравнение (6.41) принимает вид $0 = C_1 e^\infty + C_2 e^{-\infty}$, из которого видно, что второе слагаемое тождественно равно нулю ($C_2 e^{-\infty} \equiv 0$), первое же может быть равно нулю, только если $C_1 = 0$. На основе граничного условия при $z = 0$ имеем, что $-U_g = C_2 e^0$. Следовательно, $C_2 = -U_g$. В результате частное решение уравнения (6.34) с граничными условиями (7.36) принимает вид

$$U'(z) = -U_g e^{-a(i+1)z}. \quad (6.42)$$

По свойству степенных функций равенство (6.42) можно переписать в виде

$$U'(z) = -U_0 e^{-az} e^{-iaz} . \quad (6.43)$$

Чтобы проанализировать полученное решение, вспомним некоторые сведения из теории комплексных чисел. Комплексное число C может быть представлено в трех формах:

- алгебраической

$$C = A + iB, \quad (6.44)$$

где A – вещественная часть комплексного числа, а B – мнимая;
- показательной

$$C = |C|e^{i\varphi}, \quad (6.45)$$

где $|C|$ и φ – соответственно модуль и аргумент комплексного числа;
- тригонометрической

$$C = |C|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (6.46)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Комплексная плоскость представляет собой обычную евклидову плоскость со стандартными декартовыми координатами, при этом ось Ox называется вещественной, а ось Oy – мнимой. На этой плоскости комплексное число изображается радиус-вектором (рисунок 6.1).

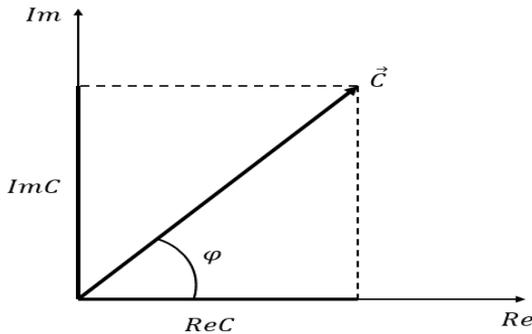


Рисунок 6.1 – Геометрическая интерпретация комплексного числа

Составляющие этого вектора представляют вещественную и мнимую части комплексного числа (проекции на вещественную и мнимую оси соответственно).

Модуль комплексного числа определяется как

$$|C| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (6.47)$$

а его аргумент представляет собой угол, тангенс которого равен отношению мнимой части к вещественной, то есть

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} C}{\operatorname{Re} C} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C}{\operatorname{Re} C}. \quad (6.48)$$

Сопоставляя равенства (6.43) и (6.45) можем записать

$$U'(z) = |U'(z)| e^{i\varphi(z)}. \quad (6.49)$$

где

$$\begin{aligned} |U'(z)| &= |-U_g e^{-az}| \\ &= \sqrt{(-u_g e^{-az})^2 + (-v_g e^{-az})^2} = \\ &= e^{-az} \sqrt{(-u_g)^2 + (-v_g)^2} = |U_g| e^{-az}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\varphi(z) = -az. \quad (6.51)$$

Запишем модули комплексных чисел, соответствующих двум значениям параметра z

$$|U'(z_1)| = |U_g| e^{\varphi(z_1)}, \quad (6.52)$$

$$|U'(z_2)| = |U_g| e^{\varphi(z_2)}. \quad (6.53)$$

Поделив (6.53) на (6.52), получаем

$$\frac{|U'(z_2)|}{|U'(z_1)|} = e^{\Delta\varphi}, \quad (6.54)$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi(z_2) - \varphi(z_1). \quad (6.55)$$

Прологарифмируем выражение (6.54)

$$\Delta\varphi = \ln \frac{|U'(z_2)|}{|U'(z_1)|} \quad (6.56)$$

Из полученного соотношения следует, что угол между радиус-векторами, отвечающим двум значениям комплексной переменной U' , пропорционален логарифму отношения их модулей. Это в свою очередь означает, что радиус-вектор комплексного числа U' при непрерывном изменении параметра z описывает логарифмическую спираль, изображенную на рисунке 6.2.

Поскольку $U'(z) = U(z) - U_g$, то радиус-вектор комплексного числа U при непрерывном изменении параметра z также описывает логарифмическую спираль, но смещенную на постоянный вектор, соответствующий комплексному числу U_g (рисунок 6.2).

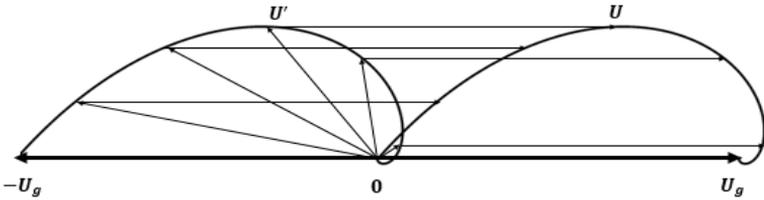


Рисунок 6.2 – Логарифмическая спираль на комплексной плоскости (слева – соответствует соотношению 6.43, справа – смещенная на константу U_g)

Из геометрической интерпретации комплексных чисел вытекает эквивалентность комплексных переменных $U'(z)$ и $U(z)$ вектор-функциям скалярного аргумента $\vec{V}'(z)$ и $\vec{V}(z)$ соответственно. Физический смысл этих функций очевиден: $\vec{V}'(z)$ – векторная разность ветра в пограничном слое на некоторой высоте z и геострофического ветра в свободной атмосфере, $\vec{V}(z)$ – вектор ветра в пограничном слое на некоторой высоте z .

Выражения, описывающие изменение компонент u и v вектора \vec{V} в зависимости от высоты, можно получить, выделяя вещественную и мнимую части комплексной переменной $U'(z)$. Для этого, привлекая соотношения (6.36) и (6.38), в выражении (6.43) возвратимся от комплексной переменной U' обратно к переменным u' и v'

$$u' + iv' = -e^{-az}(u_g + iv_g)(\cos az - i \sin az). \quad (6.57)$$

Раскрывая скобки и группируя вещественные и мнимые слагаемые, имеем

$$u' + iv' = -e^{-az}(u_g \cos az + v_g \sin az) - ie^{-az}(v_g \cos az - u_g \sin az). \quad (6.58)$$

Далее будем исходить из того, что комплексные числа являются равными, если у них соответственно равны вещественные и мнимые части. Тогда выражение (6.58) расщепляется на два

$$\begin{cases} u' = -e^{-az}(u_g \cos az + v_g \sin az) \\ v' = -e^{-az}(v_g \cos az - u_g \sin az) \end{cases} \quad (6.59)$$

Наконец, переходим от отклонений к искомым составляющим ветра

$$\begin{cases} u(z) = u_g - e^{-az}(u_g \cos az + v_g \sin az) \\ v(z) = v_g - e^{-az}(v_g \cos az - u_g \sin az) \end{cases} \quad (6.60)$$

Полученная система уравнений (6.60) описывает распределение ветра с высотой в экмановском пограничном слое. Однако этот вид уравнений не является самым удобным для анализа. Чтобы получить наиболее простой вид уравнений, ось Ox направляют по геострофическому ветру. Тогда геострофический ветер полностью лежит на оси Ox , то есть $u_g = V_g$, а на ось Oy проектируется в точку, то есть $v_g = 0$. В этом случае уравнения выглядят так

$$\begin{cases} u(z) = V_g(1 - e^{-az} \cos az) \\ v(z) = V_g e^{-az} \sin az \end{cases} \quad (6.61)$$

На рисунке 6.3 представлен качественный характер распределения ветра с высотой в соответствии с решением (6.61).

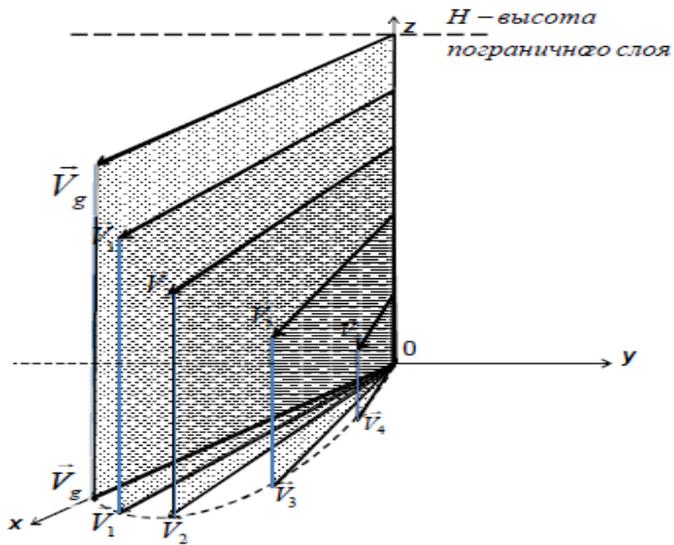


Рисунок 6.3 – Трехмерное изображение вертикального распределения скорости ветра в пограничном слое атмосферы

При изучении вектор-функций вводят понятие годограф вектор-функции, под которым понимают кривую, описываемую концом переменного вектора, начало которого при всех значениях скалярного аргумента – постоянная точка O . Годограф дает наглядное представление об изменении величины, изображаемой переменным вектором, и о скорости этого изменения, направленной по касательной к годографу.

Спроектируем векторы ветра (рисунок 6.3), соответствующие различным высотам z , на горизонтальную плоскость XOY и построим соответствующий годограф (рисунок 6.4). Получаемый при этом годограф, очевидно, представляет собой рассмотренную выше логарифмическую спираль, которая получила название спирали Экмана.

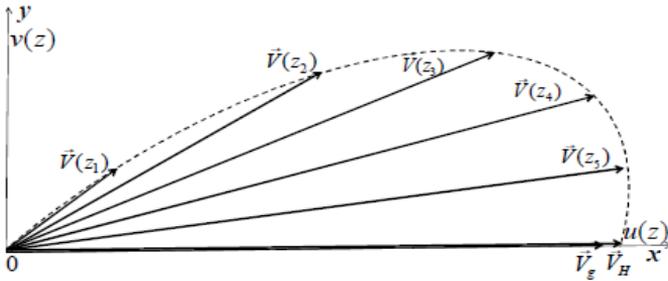


Рисунок 6.4 – Годограф скорости ветра в пограничном слое атмосферы

Именно в таком виде и будут анализироваться уравнения, описывающие распределение ветра в экмановском пограничном слое.

6.4 Анализ распределения ветра в экмановском пограничном слое

Проанализируем распределение ветра с высотой в экмановском пограничном слое, описываемое равенствами (6.61). Вектор ветра, как и любой вектор, характеризуется направлением и модулем.

Направление вектора ветра (угол, отсчитанный от положительного направления оси Ox) в соответствии с равенствами (6.61) определяется как

$$tg\varphi = \frac{v}{u} = \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}. \quad (6.62)$$

Модуль вектора ветра (длина) в соответствии с равенствами (6.61) определяется как

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ &= V_g \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az} \cos^2 az + e^{-2az} \sin^2 az} = \\ &= V_g \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Анализ направления вектора ветра в экмановском пограничном слое

Обратим внимание, что если ось Ox направлена по вектору геострофического ветра, то угол φ представляет собой угол отклонения вектора ветра от вектора геострофического ветра.

Рассмотрим две задачи. Во-первых, выясним для каких высот H' выполняется условие совпадения по направлению вектора ветра \vec{V} с вектором геострофического ветра \vec{V}_g . Во-вторых, определим максимальный угол отклонения вектора ветра от вектора геострофического ветра.

1. В выбранной системе координат условие совпадения направлений векторов \vec{V} и \vec{V}_g , очевидно, выражается равенством

$$\varphi = 0, \quad (6.64)$$

что эквивалентно равенству

$$tg\varphi = 0. \quad (6.65)$$

С учетом условия (6.65) равенство (6.62) принимает вид

$$\frac{e^{-aH'} \sin aH'}{1 - e^{-aH'} \cos aH'} = 0. \quad (6.66)$$

Алгебраическая дробь обращается в ноль, если обращается в ноль ее числитель

$$e^{-aH'} \sin aH' = 0. \quad (6.67)$$

Поскольку $\exp(-aH')$ ни при каком конечном значении aH' не обращается в ноль, то единственный сомножитель, который может быть равен нулю, это $\sin aH'$. Таким образом, условие (6.67) эквивалентно следующему равенству

$$\sin aH' = 0, \quad (6.68)$$

что выполняется, если $aH' = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, n\pi$, то есть

$$aH' = \pi n, \quad n - \text{целое число.} \quad (6.69)$$

Заметим, что решения при $n \leq 0$ могут быть исключены из рассмотрения, так как произведение aH' является неотрицательным исходя из физического смысла величин, входящих в него ($a > 0$, $H' > 0$). Таким образом, физический смысл имеют только решения при $n \geq 1$. На высоте

$$H' = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}, \quad (6.70)$$

соответствующей $n = 1$, модуль ветра согласно первому уравнению системы (7.61) равен

$$\begin{aligned} V(H') &= u(H') = V_g(1 - e^{-aH'} \cos aH') \\ &= V_g(1 - e^{-\pi} \cos \pi) \\ &= V_g(1 + e^{-\pi}) \approx 1,04 \cdot V_g \end{aligned} \quad (6.71)$$

Таким образом, модуль ветра на рассматриваемой высоте H' превосходит модуль геострофического ветра на величину ΔV

$$\Delta V = V(H') - V_g \approx 0,04 \cdot V_g. \quad (6.72)$$

На высотах, соответствующих $n > 1$, относительное изменение модуля вектора ветра $\Delta V/V_g$ не превосходит 4%. При этом расчеты показывают, что на указанных высотах вектор ветра отклоняется от вектора геострофического ветра на угол φ , по модулю не превосходящий величины 0.78° . Это означает, что получаемые в экмановском решении колебания вектора ветра относительно вектора геострофического ветра на высотах больших $H' = \pi/a$ незначительны и лишены физического смысла. По этой причине дальнейший анализ будет проводиться для высот $0 \leq z \leq H'$ ($0 \leq az \leq \pi$).

2. Определим максимальный угол отклонения ветра от вектора геострофического ветра. Очевидно, максимальное отклонение имеет место у поверхности земли, что позволяет записать

$$tg \varphi_{max} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}. \quad (6.73)$$

Подстановка $z = 0$ в числитель и знаменатель дроби в выражении (6.73) приводит к неопределенности вида $\{0/0\}$. Действительно, $\exp(0) \sin(0) = \sin(0) = 0$, $1 - \exp(0) \cos(0) = 1 - 1 = 0$. Для раскрытия полученной неопределенности используем правило Лопиталья, которое состоит в том, что отношение функций можно заменить отношением производных этих функций. Тогда

$$tg \varphi_{max} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{dv}{dz}}{\frac{du}{dz}}. \quad (6.74)$$

Вычислим производные, применяя правило дифференцирования произведения двух функций

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= V_g \frac{d}{dz} (1 - e^{-az} \cos az) \\ &= aV_g e^{-az} (\cos az + \sin az), \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= V_g \frac{d}{dz} (e^{-az} \sin az) \\ &= aV_g e^{-az} (\cos az - \sin az). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Подставим соотношения (6.75) и (6.76) в предел (7.74)

$$\begin{aligned} tg \varphi_{max} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ae^{-az} (\cos az - \sin az)}{ae^{-az} (\cos az + \sin az)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos az - \sin az}{\cos az + \sin az}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Вычислим предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos az - \sin az}{\cos az + \sin az} = \frac{\cos(0) - \sin(0)}{\cos(0) + \sin(0)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \quad (6.78)$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = 1. \quad (6.79)$$

Из равенства (6.79) сразу же вытекает, что

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ. \quad (6.80)$$

Итак, вектор ветра у земли в экмановском пограничном слое отклонен влево от вектора геострофического ветра на 45° . Полученное следствие есть результат использования в данной модели условия постоянства по высоте коэффициента турбулентности. В реальных условиях в большинстве случаев наблюдения показывают изменения угла φ_{\max} в пределах от 20° до 30° .

Анализ модуля вектора ветра в экмановском пограничном слое

Рассмотрим две задачи. Во-первых, выясним, на каких высотах H'' , модуль вектора ветра достигает максимальных значений V_m . Во-вторых, выясним для каких высот H''' выполняется условие совпадения по модулю вектора ветра \vec{V} с вектором геострофического ветра \vec{V}_g .

1. Из математического анализа известно, что необходимым условием экстремума (максимума или минимума) функции является равенство нулю ее первой производной. Таким образом, условие максимума модуля вектора ветра может быть сформулировано в виде

$$\frac{dV}{dz} = 0. \quad (6.81)$$

Дифференцируя по переменной z соотношение (6.60), получим выражение для производной модуля вектора ветра

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(V_g \sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}} \right) = \\
&= \frac{V_g \frac{d}{dz} (1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az})}{2\sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}}} \\
&= \frac{aV_g e^{-az} (\cos az + \sin az - e^{-az})}{\sqrt{1 - 2e^{-az} \cos az + e^{-2az}}}.
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Согласно условию (6.81), приравняв полученный результат к нулю, получим уравнение для определения H''

$$\frac{aV_g e^{-aH''} (\cos aH'' + \sin aH'' - e^{-aH''})}{\sqrt{1 - 2e^{-aH''} \cos aH'' + e^{-2aH''}}} = 0. \tag{6.83}$$

Дробь обращается в ноль, если обращается в ноль ее числитель

$$aV_g e^{-aH''} (\cos aH'' + \sin aH'' - e^{-aH''}) = 0. \tag{6.84}$$

Поскольку произведение aV_g отлично от нуля по условию задачи, а $\exp(-aH'')$ ни при каком конечном значении aH'' не обращается в ноль, то единственный сомножитель, который может быть равен нулю, это выражение, стоящее в скобках

$$\cos aH'' + \sin aH'' - e^{-aH''} = 0. \tag{6.85}$$

Умножая (6.85) на величину $\sqrt{2}/2$ и используя очевидные соотношения $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, , получим

$$\cos aH'' \sin \frac{\pi}{4} + \sin aH'' \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-aH''} = 0. \tag{6.86}$$

Используя известное тригонометрическое соотношение

$$\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta), \tag{6.87}$$

перепишем (6.86) в виде

$$e^{-aH''} = \sqrt{2} \sin\left(aH'' + \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.88)$$

Выражение (6.88) представляет собой трансцендентное уравнение относительно переменной aH'' . Корни уравнения можно оценить приближенно, например, графическим способом. Для этого по оси абсцисс откладываются значения переменной aH'' , а по оси ординат значения двух функций: $f_1(aH'') = \exp(-aH'')$ и $f_2(aH'') = \sqrt{2} \sin(aH'' + \pi/4)$ (рисунок 6.5). Точки пересечения графиков этих двух функций и есть корни уравнения (6.88).

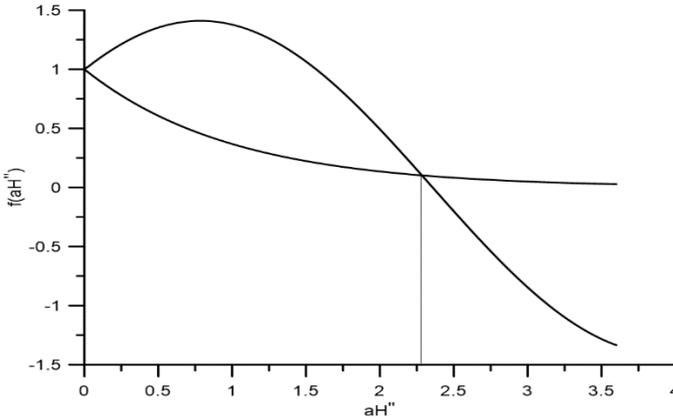


Рисунок 6.5 – Графическое решение трансцендентного уравнения (6.88)

Из рисунка 6.5 видно, что в силу периодичности косинуса трансцендентное уравнение (6.88) имеет бесчисленное множество корней, однако рассматриваемому диапазону переменной az ($0 \leq az \leq \pi$) соответствует только одно решение

$$aH'' \approx 2,28. \quad (6.89)$$

Отсюда

$$H'' \approx \frac{2,28}{a} = 2,28 \cdot \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}. \quad (6.90)$$

Поскольку модуль вектора ветра в указанном диапазоне изменяется от нуля до V_g , то очевидным является, что полученный экстремум функции $V(z)$ является максимумом.

2. Условие совпадения модулей векторов \vec{V} и \vec{V}_g , очевидно, выражается равенством

$$V = V_g, \quad (6.91)$$

которое с учетом соотношения (7.63) принимает вид

$$\sqrt{1 - 2e^{-aH'''} \cos aH'''} + e^{-2aH'''} = 1 \quad (6.92)$$

Возведём равенство (6.92) в квадрат

$$1 - 2e^{-aH'''} \cos aH''' + e^{-2aH'''} = 1. \quad (6.93)$$

Несложные преобразования позволяют переписать равенство (6.93) следующим образом

$$e^{-aH'''}(e^{-aH'''} - 2\cos aH''') = 0. \quad (6.94)$$

Поскольку функция $\exp(-aH''')$ ни при каком конечном значении aH''' не обращается в ноль, то единственный сомножитель, который может быть равен нулю, это выражение, стоящее в скобках

$$e^{-aH'''} - 2\cos aH''' = 0, \quad (6.95)$$

что эквивалентно равенству

$$e^{-aH'''} = 2\cos aH'''. \quad (6.96)$$

Полученное трансцендентное уравнение аналогично рассмотренному ранее уравнению (6.88). Применяв графический метод решения (рисунок 6.6), получаем бесчисленное множество корней. Однако, как и в предыдущем случае, рассматриваемому диапазону переменной az ($0 \leq az \leq \pi$) соответствует только одно решение

$$aH''' \approx 1,46 \quad (6.97)$$

Откуда следует результат

$$H''' \approx \frac{1,46}{a} = 1,46 \cdot \sqrt{\frac{k}{\omega_z}} \quad (6.98)$$

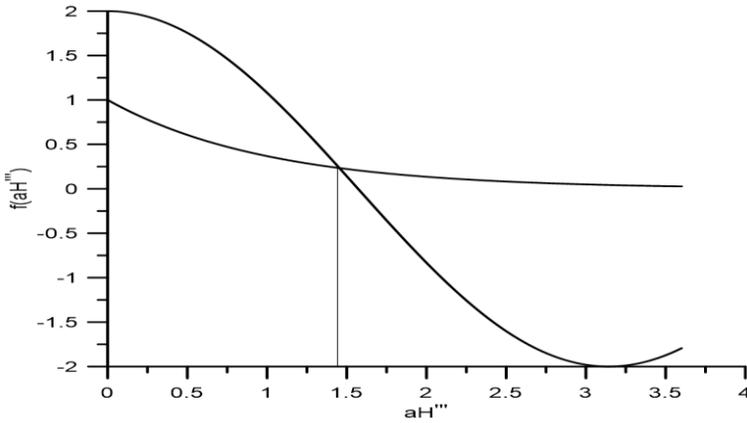


Рисунок 6.6 – Графическое решение трансцендентного уравнения (6.96).

6.5 Высота экмановского пограничного слоя

В предыдущей главе было показано, что эффекты турбулентной вязкости малы по сравнению с силой Кориолиса, если выполняется условие

$$\frac{\tau_0}{2\omega_z u_0 \rho_0 H_0} \ll 1. \quad (6.99)$$

В соответствии с k - гипотезой напряжение трения τ связывается с поперечным градиентом осредненной скорости соотношением

$$\tau = k \frac{dV}{dz} \quad (6.100)$$

Введем в выражении (6.100) характерные масштабы и безразмерные функции

$$\tau_0 \tau_n = k_0 \frac{u_0}{H_0} k_n \frac{dV_n}{dz_n}. \quad (6.101)$$

Из (6.101) вытекает следующая связь масштабов τ_0 , u_0 и H_0

$$\tau_0 = k_0 \frac{u_0}{H_0}. \quad (6.102)$$

Подставив (6.102) в условие (6.99) приходим к известному из механики вращающейся жидкости критерию: эффекты турбулентной вязкости малы по сравнению с проявлениями вращения Земли, если число Экмана (Ek) много меньше единицы [5]

$$Ek = \frac{k_0}{2\omega_z H_0^2} \ll 1. \quad (6.103)$$

Из записанного критерия сразу вытекает следующая оценка вертикального масштаба слоя, выше которого влиянием турбулентной вязкости можно пренебречь

$$H_0 \gg \sqrt{\frac{k_0}{2\omega_z}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{k_0}{\omega_z}}. \quad (6.104)$$

Согласно оценке (6.104), вертикальный масштаб пограничного слоя H_0 определяется величиной $\sqrt{k_0/\omega_z}$. В связи с этим, учитывая пропорциональность рассмотренных ранее высот H' , H'' и H''' величине $\sqrt{k/\omega_z}$, приходим к выводу, что высота пограничного слоя H может быть определена из качественно равноценных предположений [1]:

- как уровень, на котором модуль скорости ветра впервые становится равным модулю скорости геострофического ветра;

- как уровень, в окрестностях которого градиент скорости ветра по высоте равен нулю;

- как уровень, на котором ветер впервые совпадает с геострофическим по направлению.

Как правило, принимается третье условие, и высота пограничного слоя определяется как

$$H = H' = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}. \quad (6.105)$$

Подставляя характерные значения ($k = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $\omega_z = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$), сделаем количественную оценку высоты H

$$H = \pi \sqrt{\frac{10 \text{ м}^2/\text{с}}{0,5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}}} \approx 1400 \text{ м}$$

6.6 Баланс сил в экмановском пограничном слое

Как уже было отмечено, в пограничном слое действуют три силы: сила барического градиента (\vec{F}_p), сила Кориолиса (\vec{F}_k) и сила трения (\vec{F}_t). В рассмотренной модели ускорения воздушных частиц принимаются равными нулю, поэтому эти силы должны находиться в равновесии, что выражается следующим векторным уравнением баланса

$$\vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{F}_t = 0. \quad (6.106)$$

Сила барического градиента направлена в область низкого давления перпендикулярно изобарам (и, соответственно, вектору геострофического ветра). В модели Экмана данная сила является величиной постоянной. Ее модуль (F_p) и составляющие (F_{px} , F_{py}), в зависимости от того известен горизонтальный градиент давления $\partial p / \partial n$ или геострофический ветер V_g , могут быть рассчитаны по формулам

$$F_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 2\omega_z V_g, \quad (6.107)$$

$$F_{px} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -2\omega_z v_g, \quad (6.108)$$

$$F_{py} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 2\omega_z u_g. \quad (6.109)$$

Заметим, что в системе координат, где ось Ox направлена по геострофическому ветру, составляющие силы барического градиента определяются как

$$F_{px} = 0, \quad F_{py} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 2\omega_z V_g. \quad (6.110)$$

Сила Кориолиса в северном полушарии направлена вправо перпендикулярно вектору ветра. По рассчитанным модулю и составляющим вектора ветра модуль (F_k) и составляющие (F_{kx} , F_{ky}) силы Кориолиса могут быть вычислены по следующим формулам

$$F_k = 2\omega_z V(z), \quad (6.111)$$

$$F_{kx} = 2\omega_z v(z), \quad (6.112)$$

$$F_{ky} = -2\omega_z u(z). \quad (6.113)$$

Из соотношения (6.111) следует пропорциональность модуля силы Кориолиса модулю вектора ветра.

Баланс сил (6.106) позволяет по известной силе барического градиента и силе Кориолиса определить силу трения

$$\vec{F}_\tau = -(\vec{F}_p + \vec{F}_k). \quad (6.114)$$

Из соотношения (6.114) следует, что направление силы трения противоположно векторной сумме векторов \vec{F}_p и \vec{F}_k .

Векторное равенство (6.114) эквивалентно двум равенствам в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} F_{\tau x} = -(F_{px} + F_{kx}) = -F_{kx} \\ F_{\tau y} = -(F_{py} + F_{ky}) \end{cases}. \quad (6.115)$$

Если ось Ox направлена по вектору геострофического ветра, то система (6.115) принимает вид

$$\begin{cases} F_{\tau x} = -F_{kx} \\ F_{\tau y} = -(F_{py} + F_{ky}) \end{cases}. \quad (6.116)$$

С учетом равенств (6.110), (6.112), (6.113) система (6.116) переписывается следующим образом

$$\begin{cases} F_{\tau x} = -2\omega_z v, \\ F_{\tau y} = 2\omega_z (u - V_g). \end{cases} \quad (6.117)$$

По известным составляющим модуль (F_τ) и направление (β) силы турбулентного трения определяются по следующим формулам

$$F_\tau = \sqrt{F_{\tau x}^2 + F_{\tau y}^2} = 2\omega_z \sqrt{v^2 + (u - V_g)^2}, \quad (6.118)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{\tau y}}{F_{\tau x}} = \frac{v}{V_g - u}. \quad (6.119)$$

Поскольку вблизи подстилающей поверхности в силу прилипания $u = v = 0$, то разность $u - V_g$ максимальна, и, следовательно, модуль силы трения также максимален. За пределами пограничного слоя как v , так и разность $u - V_g$ асимптотически стремятся к нулю. И тогда из (6.118) следует, что в свободной атмосфере F_τ асимптотически стремится к нулю.

До тех пор пока модуль геострофического ветра V_g превосходит составляющую скорости u , что выполняется для высот $z < H''$, тангенс угла β в соответствии с (6.119) положителен. Тангенс положителен, если вектор расположен либо в первой, либо в третьей координатной четверти. Поскольку обе проекции силы трения отрицательны ($F_{\tau x} < 0$, $F_{\tau y} < 0$), то вектор \vec{F}_τ расположен в третьей координатной четверти.

Как только составляющая скорости u превосходит модуль геострофического ветра V_g , что выполняется для высот $z > H''$, тангенс угла β в соответствии с (6.119) отрицателен. Тангенс отрицателен, если вектор расположен либо во второй, либо в четвертой координатной четверти. Поскольку $F_{\tau x} < 0$, а $F_{\tau y} > 0$, то вектор \vec{F}_τ расположен во второй координатной четверти.

Таким образом, вектор силы трения расположен в третьей координатной четверти в нижней части пограничного слоя, и во второй координатной четверти в верхней части пограничного слоя.

Баланс сил в нижней и верхней частях экмановского пограничного слоя изображен на рисунке 6.7.

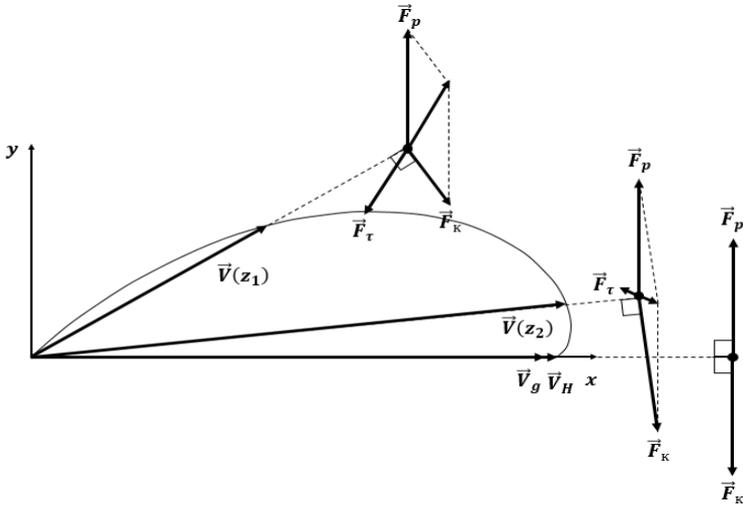


Рис.6.7. Баланс сил в экмановском пограничном слое на различных высотах

Контрольные вопросы

1. Что называется планетарным пограничным слоем атмосферы?
2. Назовите параметры воздушного потока, входящие в замкнутую систему уравнений пограничного слоя.
3. Какое упрощение используется в модели Экмана для описания вертикального распределения ветра?

4. Какое условие принято, согласно предложению Экмана, для определения высоты планетарного пограничного слоя?

5. Как зависит высота планетарного пограничного слоя от широты места?

6. Как направлена сила трения по отношению к силам барического градиента и Кориолиса?

7. Как сила трения меняет направление реального ветра по отношению к геострофическому?

Литература к главе 6

1 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.

2 Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов /В.М. Радикевич – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.

3 Браун, Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя / Перевод с англ. Э.В. Попова; Под ред. Д.В. Чаликова. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 150 с.

4 Методические указания по дисциплине «Динамическая метеорология» для высших учебных заведений. Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология. Квалификация (степень) – бакалавр академический. – СПб.: РГГМУ, 2017. – 44 с

5 Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 576 с

7. ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЭФФЕКТЫ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

7.1 Интегральная модель турбулентности в экмановском пограничном слое

7.2 Определение среднего коэффициента турбулентности по данным наблюдений за распределением скорости ветра по высоте.

7.3 Фрикционные вертикальные скорости на верхней границе экмановского пограничного слоя

7.4 Влияние горизонтальной неоднородности температуры на распределение ветра по вертикали в пограничном слое атмосферы

7.1 Интегральная модель турбулентности в экмановском пограничном слое

В рассмотренной выше модели Экмана постулируется постоянство по высоте коэффициента турбулентности. При этом не делается никаких оговорок о методах расчета этой величины. Указанная проблема может быть решена при помощи интегральной модели турбулентности в экмановском пограничном слое. В рамках данной модели используются все уравнения замыкания (6.9) -(6.12), однако в них характеристики турбулентности $f \sim k, b, \varepsilon, l$ рассматриваются как средние интегральные по всему пограничному слою [1]:

$$\bar{f} = \frac{1}{H} \int_0^H f dz, \quad (7.1)$$

где H – высота пограничного слоя.

Определим средний интегральный путь смешения

$$\bar{l} = \frac{1}{H} \int_0^H l dz. \quad (7.2)$$

Оценим интеграл, используя теорему о среднем, которая формулируется следующим образом. Если функция $l(z)$ непрерывна на интервале $[0, H]$, то внутри этого интервала найдется такая точка ξ , для которой выполняется соотношение

$$\int_0^H l dz = l(\xi)H. \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что интегральный путь смещения пропорционален высоте пограничного слоя

$$\bar{l} = \frac{l(\xi)}{H}H = \alpha H. \quad (7.4)$$

В свою очередь, полуэмпирические зависимости (3.47) и (3.48) позволяют записать скорость диссипации в виде

$$\varepsilon = \tilde{C} \frac{k^3}{l^4}. \quad (7.5)$$

Поскольку полуэмпирическая зависимость (7.5) была получена на основе анализа размерностей, то она сохранится и для средних интегральных величин, изменится лишь полуэмпирическая константа. Принимая во внимание сказанное и используя соотношение (7.4), получим

$$\bar{\varepsilon} = C_* \frac{\bar{k}^3}{\bar{l}^4} = \frac{C_*}{\alpha^4} \frac{\bar{k}^3}{H^4} = C \frac{\bar{k}^3}{H^4} \quad (7.6)$$

Запишем уравнение баланса кинетической энергии турбулентности

$$\frac{db}{dt} \equiv \frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z} = k\Psi - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (7.7)$$

Для условий стационарного горизонтально однородного пограничного слоя после проведения процедуры осреднения (7.1) уравнение баланса кинетической энергии турбулентности принимает вид

$$0 = \bar{k} \bar{\Psi} - \bar{\varepsilon} + \frac{1}{H} \int_0^H \frac{d}{dz} \bar{k} \frac{db}{dz} dz, \quad (7.7a)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \frac{1}{H} \int_0^H \Psi dz = \frac{1}{H} \int_0^H \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \frac{1}{H} \int_0^H \frac{g}{T} \frac{d\theta}{dz} dz \\ &= \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Интеграл в последнем слагаемом (7.7), характеризующий среднюю интегральную диффузию, может быть представлен в виде разности турбулентных потоков кинетической энергии турбулентности на уровнях $z = H$ и $z = 0$

$$\int_0^H \frac{d}{dz} \bar{k} \frac{db}{dz} dz = \left(\bar{k} \frac{db}{dz} \right)_H - \left(\bar{k} \frac{db}{dz} \right)_0. \quad (7.9)$$

Очевидно, что поток энергии турбулентности на подстилающей поверхности $z = 0$ равен нулю. На верхней границе пограничного слоя $z = H$, поскольку в свободной атмосфере нет турбулентности, поток энергии турбулентности также равен нулю. Тогда

$$\int_0^H \frac{d}{dz} \bar{k} \frac{db}{dz} dz = 0, \quad (7.10)$$

а уравнение (7.7) принимает вид

$$0 = \bar{k} \bar{\Psi} - \bar{\varepsilon}. \quad (7.11)$$

Определим величины J_1 и J_2 . Для определения величины J_1 воспользуемся выражениями (6.75) и (6.76) для производных du/dz и dv/dz , возводя их в квадрат

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 &= [aV_g e^{-az} (\cos az + \sin az)]^2 \\ &= V_g^2 a^2 e^{-2az} (\cos^2 az + \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \cos az \sin az + \sin^2 az) \\
 &= V_g^2 a^2 e^{-2az} (1 + 2 \cos az \sin az),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 &= [aV_g e^{-az} (\cos az - \sin az)]^2 \\
 &= V_g^2 a^2 e^{-2az} (\cos^2 az - \\
 -2 \cos az \sin az + \sin^2 az) & \\
 &= V_g^2 a^2 e^{-2az} (1 - 2 \cos az \sin az).
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Сложение выражений (7.12) и (7.13) дает

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 2V_g^2 a^2 e^{-2az}. \tag{7.14}$$

С учетом (7.14) получаем следующее выражение для J_1

$$J_1 = \frac{1}{H} \int_0^H \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \right] dz = \frac{2V_g^2 a^2}{H} \int_0^H e^{-2az} dz. \tag{7.15}$$

Вычислив интеграл

$$\int_0^H e^{-2az} dz = -\frac{1}{2a} (e^{-2aH} - e^0) = \frac{1}{2a} (1 - e^{-2aH}), \tag{7.16}$$

для J_1 имеем

$$J_1 = \frac{V_g^2 a}{H} (1 - e^{-2aH}). \tag{7.17}$$

Для определения величины J_2 выразим вертикальный градиент потенциальной температуры $d\theta/dz$ через турбулентный поток тепла P . В соответствии с k - гипотезой можем записать

$$P(z) = -\rho C_p \bar{k} \frac{d\theta}{dz}. \tag{7.18}$$

Из соотношения (7.18) следует, что

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{P(z)}{\rho C_p \bar{k}} \quad (7.19)$$

Тогда для величины J_2 имеем

$$J_2 = -\frac{1}{H} \int_0^H \frac{g}{\bar{T}} \frac{d\theta}{dz} dz = \frac{1}{\rho C_p \bar{k} H} \frac{g}{\bar{T}} \int_0^H P(z) dz. \quad (7.20)$$

Зададим степенной вертикальный профиль для турбулентного потока тепла так, чтобы при $z = 0$ $P(z) = P_0$, а при $z = H$ $P(z) = 0$

$$P(z) = P_0 \left[1 - \left(\frac{z}{H} \right)^\beta \right]. \quad (7.21)$$

Учитывая соотношение (7.21), выполним интегрирование

$$\begin{aligned} \int_0^H P(z) dz &= P_0 \int_0^H \left[1 - \left(\frac{z}{H} \right)^\beta \right] dz \\ &= P_0 \left(\int_0^H dz + \frac{1}{H^\beta} \int_0^H z^\beta dz \right) = \\ &= P_0 \left(H - \frac{H^{\beta+1}}{(\beta+1)H^\beta} \right) = P_0 \left(H - \frac{H}{(\beta+1)} \right) = \frac{\beta}{1+\beta} P_0 H \end{aligned} \quad (7.22)$$

В результате для J_2 имеем

$$J_2 = \frac{\beta}{1+\beta} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p \bar{k}}. \quad (7.23)$$

Подставив соотношения (7.19) и (7.23) в выражение (7.8), для $\bar{\Psi}$ получаем

$$\bar{\Psi} = \frac{V_g^2 a}{H} (1 - e^{-2aH}) + \frac{\beta}{1+\beta} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p \bar{k}}. \quad (7.24)$$

С учетом равенств (7.6) и (7.24) уравнение баланса кинетической энергии турбулентности принимает вид

$$\frac{\bar{k}a}{H} V_g^2 (1 - e^{-2aH}) + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p} - C \frac{\bar{k}^3}{H^4} = 0. \quad (7.25)$$

Используя соотношение (6.105)

$$H = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{\bar{k}}{\omega_z}}, \quad (7.26)$$

исключим из уравнения (7.25) высоту пограничного слоя H . Во-первых, заметим, что $\exp(-2aH) = \exp(-2\pi) \approx 0,0019 \ll 1$. Во-вторых, произведем следующие преобразования

$$\frac{\bar{k}a}{H} = \frac{\bar{k}a^2}{\pi} = \bar{k} \frac{\omega_z}{\pi \bar{k}} = \frac{\omega_z}{\pi}, \quad (7.27)$$

$$\frac{\bar{k}^3}{H^4} = \bar{k}^3 \frac{\omega_z^2}{\pi^4 \bar{k}^2} = \bar{k} \frac{\omega_z^2}{\pi^4}. \quad (7.28)$$

С учетом проведенных рассуждений перепишем уравнение (7.25)

$$\frac{\omega_z V_g^2}{\pi} + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p} - C \bar{k} \frac{\omega_z^2}{\pi^4} = 0. \quad (7.29)$$

Разрешив (7.29) относительно среднего коэффициента турбулентности, получим следующее соотношение

$$\bar{k} = m \frac{V_g^2}{\omega_z} \left(1 + \pi \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{1}{\omega_z V_g^2} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p} \right), \quad (7.30)$$

где

$$m = \frac{\pi^3}{C}. \quad (7.31)$$

Если рассматривать простейший случай линейного профиля турбулентного потока тепла, то $\beta = 1$. В таком случае $\beta/1 + \beta = 1/2$, и

$$\bar{k} = m \frac{V_g^2}{\omega_z} \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega_z V_g^2} \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \right). \quad (7.32)$$

Заметим, что значение величины Δ

$$\Delta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega_z V_g^2} \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \quad (7.33)$$

в значительной степени определяется термической стратификацией пограничного слоя. При неустойчивой стратификации $P_0 > 0$, значит и $\Delta > 0$, а при устойчивой стратификации $P_0 < 0$, значит и $\Delta < 0$. При нейтральной стратификации $P_0 = 0$, значит $\Delta = 0$, и коэффициент турбулентности рассчитывается по формуле

$$\bar{k}_H = m \frac{V_g^2}{\omega_z}. \quad (7.34)$$

Оценим порядок величины m при безразличной стратификации. С одной стороны \bar{k}_H определяется соотношением (7.34). С другой стороны, из соотношения (7.26) следует, что

$$\bar{k}_H = \frac{\omega_z H^2}{\pi^2}. \quad (7.35)$$

Приравняем равенства (7.34) и (7.35)

$$\frac{m V_g^2}{\omega_z} = \frac{\omega_z H^2}{\pi^2}. \quad (7.36)$$

Из (7.36) вытекает

$$m = \left(\frac{\omega_z H}{V_g \pi} \right)^2. \quad (7.37)$$

Подставив в (7.37) характерные значения величин ($\omega_z = 0,5 \cdot 10^{-4} 1/c$, $H = 1500$ м, $V_g = 10$ м/с), получим следующую оценку

$$m = \left(\frac{0,5 \cdot 10^{-4} 1/c \cdot 1500 \text{ м}}{10 \text{ м/с} \cdot \pi} \right)^2 \approx 10^{-5}.$$

Так как m по условию является величиной постоянной, полученное численное значение может быть использовано при оценке численных значений скорости ветра, коэффициента турбулентности и высоты пограничного слоя при различных наборах внешних параметров задачи.

Умножая равенство (7.29) на высоту H с учётом соотношения (7.26) нетрудно получить выражение для определения такой важной характеристики пограничного слоя, как скорость интегральной диссипации энергии турбулентности. В свою очередь эта величина характеризует скорость диссипации интегральной кинетической энергии средней скорости воздушного потока, генерируемой силой горизонтального барического градиента и силой плавучести

$$\int_0^H \varepsilon dz = H\varepsilon = m^{1/2} u_g^3 (1 + \Delta)^{3/2}.$$

7.2 Определение среднего коэффициента турбулентности по данным наблюдений за распределением скорости ветра по высоте.

Для оценки среднего в пограничном слое коэффициента турбулентности могут быть использованы также данные аэрологических наблюдений за распределением ветра по высотам [2].

Основная идея заключается в таком преобразовании выражений (6.61), описывающих распределение ветра в экмановском пограничном слое, чтобы исключить трансцендентную зависимость от коэффициента турбулентности.

Систему (6.61) целесообразно записать в виде

$$\begin{cases} u - V_g = -V_g e^{-az} \cos az \\ v = V_g e^{-az} \sin az \end{cases} \quad (7.38)$$

Возведем оба уравнения системы (7.38) в квадрат и сложим

$$(u - V_g)^2 + v^2 = V_g^2 e^{-2az}. \quad (7.39)$$

Деление соотношения (7.39) на V_g^2 с последующим логарифмированием приводит его к виду

$$-2az = \ln \frac{(u - V_g)^2 + v^2}{V_g^2}. \quad (7.40)$$

Продифференцируем соотношение (7.40) по переменной z

$$-2a = \frac{dy}{dz}, \quad (7.41)$$

где

$$y = \ln \frac{(u - V_g)^2 + v^2}{V_g^2}. \quad (7.42)$$

Поскольку левая часть равенства (7.42) не зависит от высоты, то и правая часть указанного равенства должна быть величиной постоянной

$$\frac{dy}{dz} = C. \quad (7.43)$$

Интегрируя (7.43), получим

$$y = Cz + C_1. \quad (7.44)$$

По данным наблюдений за вертикальным распределением скорости ветра могут быть определены составляющие u и v , и, следовательно, рассчитаны эмпирические значения величины y для соответствующих высот. Согласно (7.44) эти значения могут быть аппроксимированы прямой линией. Используя графический метод (рисунок 7.1) можно определить тангенс угла наклона указанной прямой

$$tg\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta z}. \quad (7.45)$$

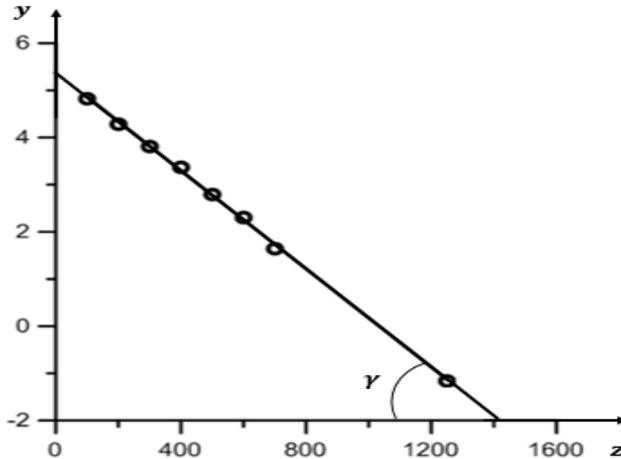


Рисунок 7.1 – Аппроксимация прямой линией зависимости $y(z)$. Кружками обозначены рассчитанные на основании зондирования значения y , а линией – аппроксимирующая прямая.

Сопоставляя (7.45) и (7.41), имеем

$$-2a = tg\gamma. \quad (7.46)$$

Учитывая, что $a = \sqrt{\omega_z/\bar{k}}$, можно получить следующее выражение для коэффициента турбулентности \bar{k}

$$\bar{k} = \frac{4\omega_z}{(tg\gamma)^2} \quad (7.47)$$

Приведённый на рис. 7.1 график построен по результатам расчётов по полученным выше формулам. Построение подобных графиков с использованием серии реальных данных аэрологических измерений скорости ветра позволил бы получить реальные связи коэффициента турбулентности с геострофическим ветром и условиями стратификации в пограничном слое.

7.3 Фрикционные вертикальные скорости на верхней границе экмановского пограничного слоя

Рассмотрим физико-математическую модель формирования вертикальных скоростей на верхней границе пограничного слоя. Предположим, что движение в свободной атмосфере осуществляется в поле круговых изобар. Как известно, при такой ситуации вектор ветра в свободной атмосфере направлен по касательной к изобаре, а его модуль рассчитывается по формулам градиентного ветра (соотношение 6.36). Однако при больших радиусах кривизны модуль градиентного ветра близок к модулю геострофического ветра. Это позволяет с удовлетворительной точностью рассматривать в свободной атмосфере квазигеострофическое приближение.

Согласно рассмотренной ранее модели Экмана, вектор ветра в пограничном слое атмосферы вследствие влияния трения отклоняется влево от вектора геострофического ветра в свободной атмосфере. В результате в пограничном слое атмосферы в циклоне формируется сходящаяся воздушная масса (отрицательная дивергенция), а в антициклоне – расходящаяся воздушная масса (положительная дивергенция). Очевидным является факт, что при данном процессе в пограничном слое атмосферы должен выполняться закон сохранения массы, выражаемый в случае несжимаемой атмосферы уравнением несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7.48)$$

Из (7.48) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7.49)$$

Интегрируя уравнение (7.49) по высоте в пределах от нуля до H и учитывая очевидное нижнее граничное условие на твердой стенке ($w(0) = 0$), получим

$$w(H) = - \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \int_0^H D dz. \quad (7.50)$$

где D – плоская дивергенция вектора ветра.

Выражение (7.50) показывает, что в случае отрицательной интегральной плоской дивергенции (сходимость воздушных потоков, характерная для циклона) формируются положительные вертикальные скорости на верхней границе пограничного слоя, то есть воздушные массы «выталкиваются» из него. Наоборот, в случае положительной интегральной плоской дивергенции (расходимость воздушных потоков, характерная для антициклона) формируются отрицательные вертикальные скорости на верхней границе пограничного слоя, то есть воздушные массы «всасываются» в него (рисунок 7.2).

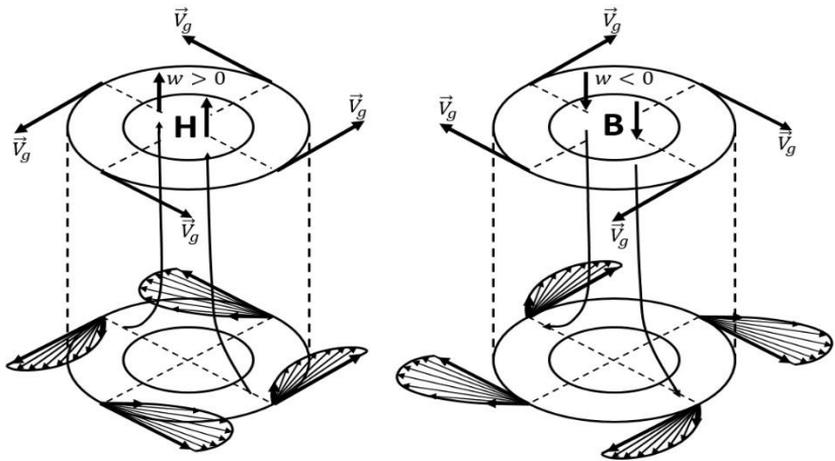


Рисунок 7.2 – Формирование упорядоченных вертикальных скоростей на верхней границе пограничного слоя вследствие дивергенции ветра.

Будем считать, что для пограничного слоя с достаточной точностью выполняются условия стационарности и горизонтальной однородности. Тогда для определения плоской дивергенции можно воспользоваться уравнениями движения в форме (6.20)

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (7.51)$$

Вводя обозначения

$$l = 2\omega_z, \quad \frac{\tau_x}{\rho} = k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\tau_y}{\rho} = k \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (7.52)$$

перепишем систему (7.51)

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) \end{cases} \quad (7.53)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (7.53) по переменной y , а второе уравнение по переменной x . Пренебрегая изменениями плотности, получим

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + l \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) \right] \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - l \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) \right] \end{cases} \quad (7.54)$$

Вычтем из второго уравнения системы (7.54) первое уравнение

$$0 = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial l}{\partial y} - v \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) \right]. \quad (7.55)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках представляет собой вертикальную компоненту ротора вектора $\vec{\tau}/\rho$

$$rot_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right). \quad (7.56)$$

Учитывая соотношение (7.56), выразим из соотношения (7.55) плоскую дивергенцию

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left[rot_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right) \right] - \frac{u}{l} \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{v}{l} \frac{\partial l}{\partial y}. \quad (7.57)$$

Если использовать географическую систему координат, в которой ось Ox направлена вдоль широтного круга, а ось Oy – вдоль меридиана, то

$$\frac{\partial l}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial y} = \beta,$$

где β – параметр Россби. Тогда уравнение (7.57) принимает вид

$$D = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left[rot_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right) \right] - \frac{\beta}{l} v. \quad (7.58)$$

Подставив полученное выражение (7.58) в уравнение (7.50), получим

$$w(H) = w_\tau + w_\beta, \quad (7.59)$$

где

$$w_\tau = -\frac{1}{l} \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left[rot_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right) \right] dz, \quad (7.60)$$

$$w_\beta = \frac{\beta}{l} \int_0^H v dz. \quad (7.61)$$

Используя для $\vec{\tau}$ следующие очевидные граничные условия:

$$\text{при } z = 0 \rightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_0,$$

где $\vec{\tau}_0$ – напряжение трения на подстилающей поверхности;

$$\text{при } z = H \rightarrow \vec{\tau} = 0,$$

вычислим интеграл в выражении (7.61)

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left[\text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right) \right] dz = \text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right)_H - \text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}}{\rho} \right)_0$$

$$= -\text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right). \quad (7.62)$$

И тогда

$$w_\tau = \frac{1}{l} \text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right). \quad (7.63)$$

Оценим w_β для высот порядка H в средних широтах. Поскольку параметр Россби

$$\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{2\omega \cos \varphi}{R}, \quad (7.64)$$

то

$$\frac{\beta}{l} = \frac{2\omega \cos \varphi}{R} \frac{1}{2\omega \sin \varphi} = \frac{\text{ctg} \varphi}{R}. \quad (7.65)$$

Интеграл в (7.61) в соответствии с теоремой о среднем, равен

$$\int_0^H v dz = v(\xi)H. \quad (7.66)$$

И тогда

$$w_\beta = \frac{v(\xi)H}{R} \text{ctg} \varphi. \quad (7.67)$$

Подставляя характерные значения параметров задачи: $v = 5 \text{ м/с}$, $H = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м}$, $R = 6370 \cdot 10^3 \text{ м}$, $\varphi = 60^\circ$, получаем следующую оценку

$$w_\beta = \frac{5 \text{ м/с} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \text{ м}}{6370 \cdot 10^3 \text{ м}} \text{ctg} 60^\circ \approx 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}. \quad (7.68)$$

Поскольку w_τ имеет порядок 10^{-2} м/с, то $w_\beta \ll w_\tau$, и, следовательно, проявления β - эффекта малы по сравнению с эффектами трения в средних широтах. Следует отметить, что на больших высотах в свободной атмосфере ($z > 5$ км) и в области малых широт ($\varphi < 25^\circ$) этот эффект может играть заметную роль в формировании вертикальных скоростей.

Итак, с учетом проведенных рассуждений вертикальные скорости на верхней границе пограничного слоя в средних широтах определяются следующим соотношением

$$w(H) \approx w_\tau = \frac{1}{l} \text{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right). \quad (7.69)$$

Соотношение (7.69) показывает, что рассматриваемые вертикальные скорости на верхней границе пограничного слоя обусловлены турбулентным трением. Именно поэтому их называют фрикционными. Фрикционные вертикальные движения, возникающие в пограничном слое, оказывают существенное влияние на формирование полей вертикальных скоростей в свободной атмосфере и, следовательно, играют роль важного погодообразующего фактора.

7.4 Влияние горизонтальной неоднородности температуры на распределение ветра по вертикали в пограничном слое атмосферы

Одним из упрощающих предположений при построении модели стационарного горизонтально однородного пограничного слоя, рассмотренной в разделе 7.3, является условие постоянства с высотой геострофического ветра. Однако в главе 6 было показано, что геострофический ветер может изменяться с высотой вследствие горизонтальной неоднородности температуры. В [1], [2], [4] отмечается, что влияние этого фактора может быть существенным. Выполним анализ влияния горизонтальной неоднородности поля температуры на вертикальный профиль скорости ветра в пограничном слое. Указанное изменение с высотой (приращение) компонент геострофического ветра описывается формулами термического ветра. Напомним их:

$$\begin{cases} \Delta u_g \equiv u_T = -\frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} (z - z_*) \\ \Delta v_g \equiv v_T = \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} (z - z_*) \end{cases} \quad (7.70)$$

Предполагая, что исходный уровень, относительно которого рассчитываются приращения Δu_g и Δv_g , располагается у подстилающей поверхности ($z_* \rightarrow 0$), компоненты геострофического ветра на произвольной высоте z можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} u_g(z) = u_{g0} - \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} z \\ v_g(z) = v_{g0} + \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} z \end{cases} \quad (7.71)$$

где u_{g0} и v_{g0} – компоненты геострофического ветра, рассчитанные по приземному горизонтальному барическому градиенту. Считая компоненты горизонтального градиента температуры известными и постоянными по высоте величинами, введем обозначения

$$n = \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad m = \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (7.72)$$

Выпишем систему уравнений (6.26) (используя обозначение $a^2 = 2\omega_z/k$)

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + a^2(v - v_g) = 0 \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - a^2(u - u_g) = 0 \end{cases} \quad (7.73)$$

и преобразуем ее с учетом проведенных рассуждений

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + a^2(v - v_{g0}) = a^2 m z \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - a^2(u - u_{g0}) = a^2 n z \end{cases} \quad (7.74)$$

Система (7.74) решается по тому же принципу, что и задача Экмана. В системе координат, где ось Ox направлена по вектору \vec{V}_{g0} , решение имеет вид

$$\begin{cases} u(z) = V_{g0}(1 - e^{-az} \cos az) - mz \\ v(z) = V_{g0} e^{-az} \sin az + nz \end{cases} \quad (7.75)$$

На рисунке 7.3 представлены годографы ветра, построенные для разных значений горизонтального градиента температуры.

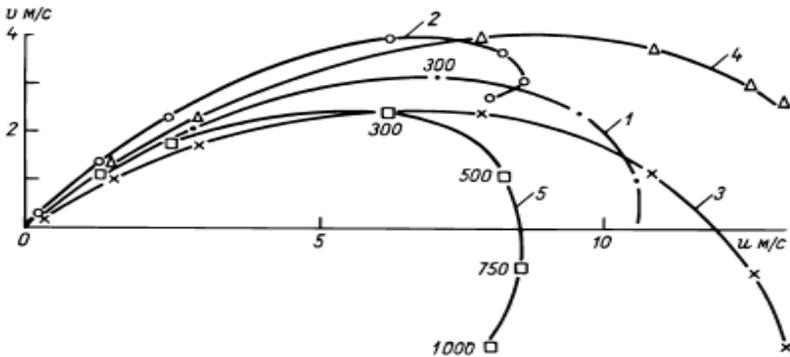


Рисунок 7.3 Влияние горизонтального градиента температуры на годограф ветра в пограничном слое атмосферы ($V_{g0} = 10$ м/с, $k = 8,2$ м²/с, $\varphi = 60^\circ$). 1) $\partial \bar{T} / \partial x = 0$; $\partial \bar{T} / \partial x = \partial \bar{T} / \partial y = 1$ °С/100 км; 3) $\partial \bar{T} / \partial x = \partial \bar{T} / \partial y = -1$ °С/100 км; 4) $\partial \bar{T} / \partial x = 1$ °С/100 км, $\partial \bar{T} / \partial y = -1$ °С/100 км; 5) $\partial \bar{T} / \partial x = -1$ °С/100 км, $\partial \bar{T} / \partial y = 1$ °С/100 км.

Вид кривых сопоставляются с годографом ветра при отсутствии термического ветра. Как и следовало ожидать, на основании формул (7.75) при $\partial \bar{T} / \partial x = \partial \bar{T} / \partial y = \pm 1$ °С/100 км (характерные значения

горизонтального градиента температуры) влияние термического ветра на годограф незначительно до высоты около 100 м. Выше этого уровня при росте температуры вдоль направления геострофического ветра ($\partial\bar{T}/\partial x > 0$) увеличивается перпендикулярная к геострофическому ветру составляющая скорости, а при падении температуры ($\partial\bar{T}/\partial x < 0$) она уменьшается.

Контрольные вопросы

1. Какое положение заключено в понятии «интегральная модель»?
2. Какой фактор отсутствует в уравнении баланса энергии турбулентности в интегральной модели?
3. Как зависит средний по высоте коэффициент турбулентности от скорости геострофического ветра и широты места?
4. Чему равен, согласно интегральной модели, коэффициент турбулентности на экваторе?
5. Почему в циклонической системе в пределах пограничного слоя наблюдается конвергенция (сходимость потоков) скорости?
6. Как направлены упорядоченные вертикальные скорости на верхней границе пограничного слоя в циклонической и в антициклонической системах?
7. Почему горизонтальная неоднородность поля температуры влияет на распределение ветра с высотой в планетарном пограничном слое?

Литература к главе 7

- 1 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.
- 2 Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов / В.М. Радикевич – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.
- 3 Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 292 с.
- 4 Браун, Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя / Перевод с англ. Э.В. Попова; Под ред. Д.В. Чаликова. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 150 с.

8. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

- 8.1 Упрощение уравнений для стационарного горизонтально однородного приземного слоя
- 8.2 Общий вид зависимости коэффициента турбулентности от определяющих параметров (теория турбулентности Монина-Обухова)
- 8.3 Вертикальные профили коэффициента турбулентности при различных типах стратификации
- 8.4 Оценка толщины вязкого и буферного слоев
- 8.5 Вертикальные профили метеорологических величин при нейтральной стратификации
- 8.6 Параметр шероховатости подстилающей поверхности
- 8.7 Вертикальные профили метеорологических величин при стратификации, близкой к нейтральной
- 8.8 Вертикальные профили метеорологических величин при условиях свободной конвекции и инверсии.
- 8.9 Особенности формирования вертикальной структуры воздушного потока в условиях высокой растительности.
- 8.10 Влияние волновых потоков импульса на динамические в приводном слое

8.1 Упрощение уравнений для стационарного горизонтально однородного приземного слоя

Поскольку приземный слой является нижней частью пограничного, то уравнения, описывающие процессы в нем, могут быть получены из уравнений для пограничного слоя, которые в случае принятия условий стационарности и горизонтальной однородности имеют вид формул:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} K \frac{du}{dz} + 2\omega_z(v - v_g) = 0 \\ \frac{d}{dz} K \frac{dv}{dz} - 2\omega_z(u - u_g) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

В главе 4 было отмечено, что вблизи подстилающей поверхности могут проявляться как эффекты турбулентного, так и молекулярного трения. Данное обстоятельство требует представления коэффициента вязкости K как суммы коэффициента турбулентности k и коэффициента кинематической вязкости воздуха ν [1]:

$$K = k + \nu \quad (8.2)$$

Если ввести компоненты касательного напряжения трения

$$\tau_x = \tau_{x_{turb}} + \tau_{x\mu} = \rho k \frac{du}{dz} + \rho \nu \frac{du}{dz}, \quad (8.3)$$

$$\tau_y = \tau_{y_{turb}} + \tau_{y\mu} = \rho k \frac{dv}{dz} + \rho \nu \frac{dv}{dz}, \quad (8.4)$$

и обозначить параметр Кориолиса

$$l = 2\omega_z, \quad (8.5)$$

то уравнения (8.1) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) = -l(v - v_g) \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) = l(u - u_g) \end{cases}. \quad (8.6)$$

Уравнения (8.6) записаны в произвольно ориентированной по горизонтали декартовой системе координат. Для проведения дальнейших преобразований направим ось Ox вдоль касательного напряжения $\vec{\tau}$ на подстилающей поверхности (при $z = 0$). В такой системе координат

$$\tau_{0x} = \tau_0 = \rho K \left(\frac{du}{dz} \right)_0, \quad \tau_{0y} = 0 \quad (8.7)$$

Проанализируем изменение с высотой касательных напряжений, выполнив интегрирование уравнений (8.6) по вертикали от подстилающей поверхности до произвольной высоты. Результат интегрирования, если

считать плотность постоянной (приземный слой атмосферы невысок, поэтому изменением плотности можно пренебречь), примет вид [2]:

$$\begin{cases} \left(\frac{\tau_x}{\rho}\right)_z - \frac{\tau_0}{\rho} = -l \int_0^z (\nu - \nu_g) dz = -l \cdot \overline{(\nu - \nu_g)} \cdot z \\ \left(\frac{\tau_y}{\rho}\right)_z = l \int_0^z (u - u_g) dz = l \cdot \overline{(u - u_g)} \cdot z \end{cases} \quad (8.8)$$

Интегралы в правых частях записаны в соответствии с теоремой о среднем.

Введем величину

$$\nu_* = \sqrt{\tau_0/\rho} \quad (8.9)$$

и определим ее размерность

$$[\nu_*] = \sqrt{\frac{\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)}{\text{кг}/\text{м}^3}} = \sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м}/\text{с}$$

Величина ν_* является характеристикой трения, поскольку ее квадрат равен удельному касательному напряжению на подстилающей поверхности, при этом в силу размерности ее называют динамической скоростью или скоростью трения.

Приведем уравнения системы (8.8) к безразмерному виду делением на квадрат динамической скорости

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu_*^2} \left(\frac{\tau_x}{\rho}\right)_z - 1 = -\frac{l \cdot \overline{(\nu - \nu_g)}}{\nu_*^2} \cdot z \\ \frac{1}{\nu_*^2} \left(\frac{\tau_y}{\rho}\right)_z = \frac{l \cdot \overline{(u - u_g)}}{\nu_*^2} \cdot z \end{cases} \quad (8.10)$$

Оценим разности $\nu - \nu_g$ и $u - u_g$ (пояснения смотри на рисунке 8.1). Как было показано в предыдущей главе, максимальное отклонение ветра от геострофического наблюдается вблизи подстилающей поверхности, что приводит к следующим соотношениям

Проведенные рассуждения позволяют преобразовать систему (8.10) к виду

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu_*^2} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right)_z = 1 - \varepsilon'(z) \\ \frac{1}{\nu_*^2} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right)_z = -\varepsilon'(z) \end{cases} \quad (8.13)$$

где $\varepsilon'(z)$ – величина, характеризующая относительное изменение (уменьшение) касательного напряжения с высотой и определяемая равенством

$$\varepsilon'(z) = \varepsilon \cdot \frac{lV_g}{\nu_*^2} \cdot z > 0 \quad (8.14)$$

Равенства (6.13) позволяют записать еще одно соотношение, характеризующее изменение с высотой направления касательного напряжения, а именно

$$|tg\beta| = \frac{|\tau_y(z)|}{|\tau_x(z)|} = \frac{\varepsilon'(z)}{1 - \varepsilon'(z)} \quad (8.15)$$

Слой от подстилающей поверхности до $z = h'$, в пределах которого этим изменением (величиной ε') можно пренебречь (полагая $\varepsilon' \ll 1$ с определенной точностью), называется приземным слоем. В таком случае, полностью пренебрегая величиной ε' по сравнению с единицей, можем записать соотношения (8.13) и (8.15) в виде, справедливом (с принятой точностью) для всех высот $z \in [0, h']$

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu_*^2} \frac{\tau_x}{\rho} = 1 \\ \frac{1}{\nu_*^2} \frac{\tau_y}{\rho} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\tau_x}{\rho} = \nu_*^2 \\ \frac{\tau_y}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\frac{\tau_y}{\tau_x} = 0 \rightarrow \beta = 0$$

Записанные соотношения свидетельствуют о том, что касательное напряжение (поток импульса) с высотой сохраняется неизменным как по величине, так и по направлению.

Согласно принятому определению, можно оценить высоту приземного слоя h' при выполнении условия $\varepsilon'(h') \ll 1$. Исходя из формулы (8.14) найдем высоту h' при численных значениях параметров, соответствующих их средним значениям: $V_g = 10 \text{ м/с}$, $l = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Заметим, что динамическая скорость для средних условий связана со скоростью геострофического ветра зависимостью вида $v_* = 0,04 \cdot V_g$. Итак,

$$\begin{aligned} h' &= \frac{v_*^2}{\varepsilon l V_g} \varepsilon' = \frac{(0,04 \cdot V_g)^2}{\varepsilon l V_g} \varepsilon' = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V_g}{\varepsilon l} \cdot \varepsilon' = \\ &= 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{0,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}} \cdot \varepsilon' = 320 \text{ м}. \end{aligned}$$

При $\varepsilon' < 0,1$ получаем, что значения h' не превосходят 30 метров.

Принимая во внимание соотношения (8.3) и (8.4), можно записать уравнения движения для приземного слоя в окончательной форме

$$\begin{cases} \frac{\tau_{x \text{ turb}}}{\rho} + \frac{\tau_{x \mu}}{\rho} = v_*^2 = \text{Const} \\ \frac{\tau_{y \text{ turb}}}{\rho} + \frac{\tau_{y \mu}}{\rho} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K \frac{du}{dz} = v_*^2 = \text{Const} \\ K \frac{dv}{dz} = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

Второе равенство системы (8.17) приводит к выводу о том, что компонента скорости v в направлении, перпендикулярном вектору касательного напряжения (оси Ox), неизменна по высоте. Но так как на поверхности она равна нулю, то она равна нулю на всех высотах ($0 \leq z \leq h'$). Это означает, что в пределах приземного слоя вектор скорости и вектор касательного напряжения совпадают по направлению, которое не меняется с высотой.

Таким образом, в пределах приземного движение воздуха можно рассматривать как одномерное.

Отметим, что соотношения (8.17) дают также основание выделить в приземном слое три области.

Во-первых, область, называемая вязким подслоем, непосредственно прилегающая к подстилающей поверхности и удовлетворяющая условию:

$$\frac{\tau_{xturb}}{\tau_{x\mu}} = \varepsilon_{turb} \ll 1, \quad (8.18)$$

что соответствует действию трения только за счет молекулярной вязкости.

Во-вторых, область, в которой молекулярное трение пренебрежимо мало по сравнению с турбулентным трением, и удовлетворяет условию [3], [4]

$$\frac{\tau_{x\mu}}{\tau_{xturb}} = \varepsilon_{\mu} \ll 1, \quad (8.19)$$

В-третьих, область, в которой напряжение трения формируется совместным проявлением молекулярной и турбулентной вязкости, и характеризуется условием

$$O\left(\frac{\tau_{xturb}}{\tau_{x\mu}}\right) = 1 \quad (8.20)$$

Эта область, являющаяся переходной зоной от границы чисто вязкого слоя к началу чисто турбулентной области, носит название буферного слоя.

Оценка численных значений толщины вязкого и буферного слоев будет приведена ниже.

Проведем аналогичные действия с уравнением притока тепла, которое в условиях стационарности и горизонтальной однородности, а также с учетом молекулярного обмена теплом, имеет вид

$$\frac{d}{dz} \rho C_p K_T \frac{d\theta}{dz} + \Phi_T(z) = 0, \quad (8.21)$$

где

$$\Phi_T(z) = \rho \sum (dQ/dt)_i \quad (8.22)$$

– сумма нетурбулентных (радиационного и фазового) притоков тепла, $K_T = k + a$ – сумма коэффициентов турбулентной и молекулярной теплопроводности воздуха соответственно.

Интегрируя уравнение (8.21) от нуля до некоторой произвольной высоты z , запишем результат в виде

$$\begin{aligned} \left(\rho C_p K_T \frac{d\theta}{dz}\right)_z - \left(\rho C_p K_T \frac{d\theta}{dz}\right)_0 &= - \int_0^z \Phi_T(z) dz \\ &= -\bar{\Phi}_T \cdot z. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Разделив равенство (8.23) на величину

$$P_0 = -\rho C_p \left(K_T \frac{d\theta}{dz}\right)_0, \quad (8.24)$$

представляющую собой поток тепла на подстилающей поверхности, запишем

$$\frac{\rho C_p}{P_0} \left(K_T \frac{d\theta}{dz}\right)_z = - \left(1 + \frac{\bar{\Phi}_T}{P_0} \cdot z\right) = -[1 + \varepsilon''(z)]. \quad (8.25)$$

В пределах высот $0 \leq z \leq h''$, для которых выполняется неравенство $\varepsilon'' \ll 1$, указанной величиной можно пренебречь. Окончательный результат принимает вид

$$K_T \frac{d\theta}{dz} = -\frac{P_0}{\rho C_p} = Const \quad (8.26)$$

Аналогичными действиями преобразуем уравнение притока водяного пара

$$\frac{d}{dz} \rho K_q \frac{dq}{dz} + \sum (J_q)_i = 0 \quad (8.27)$$

Здесь $K_q = k + D$ – сумма коэффициентов турбулентной и молекулярной диффузии водяного пара соответственно.

В результате получим уравнение для определения массовой доли водяного пара, справедливое в пределах высот $0 \leq z \leq h'''$, в форме:

$$K_q \frac{dq}{dz} = -\frac{E_0}{\rho} = Const \quad (8.28)$$

Высоты h' , h'' и h''' , ограничивающие слой относительно постоянных по высоте потоков импульса, тепла и водяного пара соответственно, не обязательно равны. Чтобы выполнялось условие постоянства по высоте всех трех потоков, за верхнюю границу приземного слоя целесообразно принять наименьшую из высот, то есть $h = \min(h', h'', h''')$.

Как видно, уравнения (8.17), (8.26) и (8.28) для всех трех субстанций – скорости ветра, температуры и влажности в приземном слое могут быть записаны в единой форме

$$K_f \frac{df}{dz} = F_0 \quad (8.29)$$

Здесь $f = \{u, \theta, q\}$, а F_0 соответствующие этим субстанциям удельные потоки

$$F_0 = \left\{ \sigma_*^2, -\frac{P_0}{\rho C_p}, -\frac{E_0}{\rho} \right\} \quad (8.30)$$

Уравнение (8.29) дает возможность при известных коэффициентах турбулентности и молекулярного обмена получить общий вид вертикальных профилей метеорологических параметров $f = \{u, \theta, q\}$. А именно, разделив обе части равенства (8.30) на коэффициент K_f и интегрируя результат по вертикали в интервале произвольно выбранных высот z_1 и z_2 с учетом постоянства по высоте в пределах указанного слоя величины F_0 , получим:

$$f(z_2) = f(z_1) + F_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{K_f} = F_0 \cdot \varphi(z) \quad (8.31)$$

Конкретный вид зависимости можно получить лишь после определения вертикального профиля коэффициента K_f .

8.2 Общий вид зависимости коэффициента турбулентности от определяющих параметров (теория турбулентности Монина-Обухова)

Для начала запишем уравнение баланса энергии турбулентности и гипотезы замыкания системы уравнений для условий стационарного горизонтально однородного пограничного слоя

$$0 = k\Psi - \varepsilon + \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz}, \quad (8.32)$$

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{b^2}{k}, \quad (8.33)$$

$$k = l_1 \sqrt{b}, \quad (8.34)$$

$$l_1 = -2 \bar{\alpha} \frac{\psi}{\frac{d\psi}{dz}}, \quad (8.35)$$

$$\Psi = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - \frac{g}{T} \frac{d\theta}{dz}, \quad (8.36)$$

Использование условия постоянства с высотой и для потока кинетической энергии турбулентности ($k db/dz = Const$), позволяет исключить из уравнения (8.32) диффузионное слагаемое, то есть полагать

$$\frac{d}{dz} k \frac{db}{dz} = 0 \quad (8.37)$$

Из системы (8.17) следует, что

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{v_*^4}{k^2}, \quad \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 0 \quad (8.38)$$

В свою очередь, умножив уравнение (8.25) на параметр плавучести g/\bar{T} , имеем

$$\frac{g}{\bar{T}} k \frac{d\theta}{dz} = -\frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p}. \quad (8.39)$$

Проведенные рассуждения исходную систему приводят к виду

$$0 = k\Psi - C \frac{b^2}{k} \quad (8.40)$$

$$k = l_1 \sqrt{b}, \quad (8.41)$$

$$l_1 = -2 \bar{\alpha} \frac{\Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \quad (8.42)$$

$$\Psi = \frac{\nu_*^4}{k^2} + \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p k} = C \frac{b^2}{k^2} \quad (8.43)$$

Обратим внимание, что в исходной системе уравнений условия термической стратификации задавались вертикальным градиентом потенциальной температуры $d\theta/dz$. Однако его величина в приземном слое может существенно меняться с высотой. Поэтому в полученной системе уравнений используется более удобная характеристика стратификации – турбулентный поток тепла, величина которого сохраняет постоянное значение по высоте в пределах приземного слоя, равное значению на подстилающей поверхности.

Качественный анализ системы уравнений (8.40) – (8.43) показывает, что коэффициент турбулентности должен однозначно определяться следующими параметрами: ν_* , g/\bar{T} , P_0 , ρC_p , z , то есть представлять собой функцию

$$k = f\left(z, \nu_*, \frac{g}{\bar{T}}, P_0, \rho C_p\right). \quad (8.44)$$

Раскроем функциональную зависимость (8.44) с помощью π -теоремы анализа размерностей, для чего выпишем формулы размерности

Вычислив показатели в знаменателях комплексов Π_1 и Π_2 на основании матрицы размерностей, перепишем (8.44) в виде

$$\frac{k}{v_* z} = F\left(\frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}}{v_*^3} z\right). \quad (8.48)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем в выражении (8.46) безразмерную константу $C = -\alpha$ (напомним, α – постоянная Кармана). Формально это приведёт лишь к замене функции F на некоторую другую функцию (для которой сохраним то же обозначение F от безразмерного параметра

$$\xi = -\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \frac{z}{v_*^3} \quad (8.49)$$

Как видно из соотношения (8.49), величина

$$\frac{v_*^3}{-\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}} = L \quad (8.50)$$

имеет размерность длины и получила название масштаба длины Монина-Обухова. Используя для этой величины общепринятое обозначение L , перепишем равенство (8.48)

$$k = v_* z F\left(\frac{z}{L}\right). \quad (8.51)$$

Поскольку все величины, входящие в формулы (8.49), (8.50), кроме турбулентного потока тепла P_0 , всегда положительны, то знак масштаба L , а следовательно и отношения

$$\xi = \frac{z}{L} = -\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \frac{z}{v_*^3}, \quad (8.52)$$

определяется знаком турбулентного потока тепла. Параметр $\xi = z/L$ представляет собой отношение двух факторов, участвующих в процессе формирования кинетической энергии турбулентности [1]. Это отношение

скорости выделения или поглощения энергии, обусловленной работой силы плавучести (термический фактор), к скорости генерации энергии турбулентности за счет кинетической энергии среднего переноса (динамический фактор). Таким образом, параметр ξ может рассматриваться как основной локальный критерий гидростатической устойчивости в приземном слое.

В зависимости от знака ξ , в приземном слое воздуха возможны два качественно различных режима, соответствующих случаям устойчивой стратификации (поток тепла направлен вниз, то есть $P_0 < 0$ и $\xi > 0$) и неустойчивой стратификации (поток тепла направлен вверх, то есть $P_0 > 0$ и, соответственно, $\xi < 0$). Стратификация с отсутствием турбулентного потока тепла $P_0 = 0$, характеризуется как нейтральная или безразличная. Зависимость параметра ξ от турбулентного потока тепла свидетельствует о том, что уменьшение величины $|P_0|$ при фиксированных значениях высоты и динамической скорости приводит к снижению роли термического фактора по сравнению с динамическим. И при $|P_0| \rightarrow 0$ следует условие $|\xi| \rightarrow 0$, соответствующее нейтральной стратификации. Отметим, что и при фиксированном значении $|P_0|$, но при достаточно малых z (а именно, $z \ll |L|$, так что при $z \rightarrow 0$) также следует условие $|\xi| \rightarrow 0$. Таким образом, абсолютное значение масштаба L определяет толщину слоя, в пределах которого влияние динамических факторов на турбулентность превышает влияние термических факторов (а именно: $z < |L| \rightarrow |\xi| < 1$ преобладающим является динамический фактор; при $z > |L| \rightarrow |\xi| > 1$ термический фактор преобладает над динамическим).

8.3 Вертикальные профили коэффициента турбулентности при различных типах стратификации

Вид функции $F(\xi)$ может быть определён либо на основе обработки специальных метеорологических наблюдений, либо численным решением полной замкнутой системы уравнений, описывающих динамические и термические процессы в приземном слое атмосферы. Однако, для некоторых условий стратификации удается получить явный вид функции $F(\xi)$, а значит, в соответствии с равенством (20), и вид вертикальных профилей метеопараметров $f = \{u(z), \theta(z), q(z)\}$. Такие

ситуации соответствуют асимптотическим поведением функции $F(\xi)$ при больших и малых численных значениях параметра $|\xi| = \left| \frac{z}{L} \right|$ в различных типах стратификации [2].

Безразличная (иначе «нейтральная») стратификация

Следуя результатам, полученным в предыдущем параграфе, для указанного типа стратификации положим $\xi = 0$. Очевидно, что при этом безразмерная функция $F(\xi) = F(0)$ должна иметь конкретное численное значение. Согласно измерениям в аэродинамических трубах и в приземном слое эта величина равна числу $\alpha \approx 0,40$, известному как постоянная Кармана. так что выражение для коэффициента турбулентности при нейтральной стратификации (k_n) принимает вид

$$k_n(z) = \nu_* z F(0) = \nu_* \alpha z. \quad (8.53)$$

Из формулы (8.53) следует, что коэффициент турбулентности при нейтральной стратификации линейно возрастает с высотой.

Стратификация, близкая к нейтральной

Функция $F(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$, соответствующей условию нейтральной стратификации, может быть представлена в виде разложения в ряд Маклорена:

$$F(\xi) = F(0) + \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_0 \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2F}{d\xi^2} \right)_0 \xi^2 + \dots +. \quad (8.54)$$

Будем определять стратификацию, близкую к нейтральной, областью таких малых значений $|\xi| \ll 1$, при которых в принятом разложении слагаемыми с величинами ξ^2 , ξ^3 и т.д. можно пренебречь и с определённой точностью ограничиться двумя первыми слагаемыми, так что:

$$F(\xi) = F(0) + \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_0 \xi. \quad (8.55)$$

Учитывая, что $F(0) = \alpha$, и $\left. \frac{dF}{d\xi} \right|_0 < 0$ (при переходе из области

неустойчивой стратификации ($\xi < 0$) в область устойчивой ($\xi > 0$) функция $F(\xi)$ должна убывать), равенство (8.55) преобразуется к виду:

$$F(\xi) = \alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_0 \xi \right) = \alpha(1 - \beta\xi), \quad (8.56)$$

где $\beta = \frac{1}{\alpha} \left| \frac{dF}{d\xi} \right|_0$.

Выражение для коэффициента турбулентности принимает следующий вид

$$k(z) = \nu_* \alpha z (1 - \beta\xi) = k_n(z) (1 - \beta\xi). \quad (8.57)$$

Здесь $k_n(z)$ – значение коэффициента турбулентности, соответствующее нейтральной стратификации.

Свободная конвекция

Рассмотрим поведение функции $F(\xi)$ в случае сильно неустойчивой стратификации, то есть при больших отрицательных значениях ξ . Асимптотическое поведение $F(\xi)$ при $\xi \rightarrow -\infty$ можно изучать, рассматривая большие значения $z \gg |L|$ при фиксированных $P_0 > 0$, $g/T, \nu_*$ (то есть фиксированном $L < 0$) или же рассматривая при фиксированных $P_0 > 0$, $g/T, z$ предельный переход $\nu_* \rightarrow 0$. Последний предельный переход, очевидно, отвечает приближению к случаю чисто термической турбулентности в условиях так называемой свободной конвекции (характеризуемой наличием неустойчивой стратификации с $P_0 > 0$ и отсутствием ветра и связанного с ним трения воздуха о подстилающую поверхность). При этом турбулентность имеет весьма своеобразный характер – теряя энергию на молекулярное трение, она восполняет её только за счёт работы силы плавучести при температурной неустойчивости, без участия энергии осреднённого движения. С точки зрения теории подобия турбулентный режим на высотах $z \gg |L|$ при фиксированном ν_* не должен отличаться от режима при фиксированном z но очень малом ν_* ; поэтому при неустойчивой стратификации турбулентность на больших высотах всегда определяется в основном термическими факторами, то есть статистические

характеристики поля температуры здесь зависят только от g/T и $P_0/\rho C_p$, но не от ν_* .

В таких условиях соотношение (8.51) не будет содержать величины ν_* . Этому условию отвечает следующее выражение для $F(\xi)$

$$F(\xi) = A \xi^{1/3}. \quad (8.58)$$

Действительно,

$$k(z) = \nu_* z F(\xi) = \nu_* z A \left[z / \left(\frac{\nu_*^3}{-\alpha \frac{g}{T} \rho C_p} \right) \right]^{1/3} = \nu_* z A \left(\frac{-\alpha \frac{g}{T} \rho C_p}{\nu_*^3} \right)^{1/3} z^{1/3} = A_1 z^{4/3}. \quad (8.59)$$

Инверсия

Рассмотрим поведение функции $F(\xi)$ в случае сильно устойчивой стратификации, то есть при больших положительных ξ . Асимптотическое поведение $F(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$ соответствует рассмотрению при фиксированном z случая весьма малых положительных L (то есть очень резких инверсий температуры). При этом, однако, надо иметь в виду, что в предельном случае резкой инверсии при исчезающе слабом ветре турбулентность вырождается, и движения среды приобретают совсем иной характер. А именно, при сильно устойчивой стратификации становится невозможным существование крупных турбулентных возмущений (так как эти возмущения должны были бы затрачивать слишком много энергии на работу против архимедовых сил), и турбулентность может существовать лишь в виде мелких вихрей. При сильной устойчивости турбулентный обмен между различными слоями жидкости очень затруднен, и поэтому турбулентность приобретает локальный характер. Таким образом, при фиксированном $L > 0$ но большой высоте $z \gg |L|$ или же при фиксированной высоте z но очень малом $L > 0$ близость стенки (подстилающей поверхности) перестает влиять на режим турбулентности и, следовательно, коэффициент турбулентности не должен зависеть от высоты z . Это условие выполняется, если

$$F(\xi) = B\xi^{-1}. \quad (8.60)$$

Действительно,

$$k(z) = \nu_* z F(\xi) = \nu_* z B \left(\frac{z}{L}\right)^{-1} = \nu_* z B \frac{L}{z} = \nu_* B L. \quad (8.61)$$

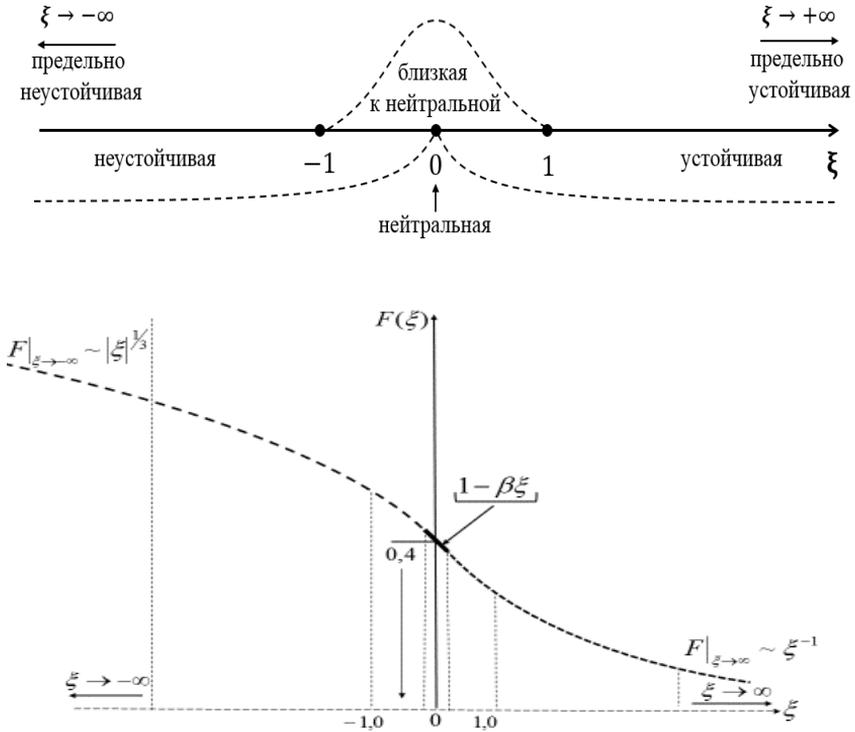


Рисунок 8.2 – Типы термической стратификации и качественный характер зависимости $F(\xi)$ от значения параметра $\xi = z/L$.

8.4 Оценка толщины вязкого и буферного слоев

Напомним, что при малых z (а именно, $z \ll |L|$) режим турбулентного обмена соответствует условиям нейтральной стратификации, что позволяет при оценке толщины вязкого (δ_ν) и буферного (h_δ) слоев

использовать соответствующую формулу (8.52) для коэффициента турбулентности. Указанная формула дает возможность преобразовать полученные выше условия (8.18) – (8.20) в конкретные соотношения.

Определим отношение турбулентного и молекулярного касательных напряжений

$$\frac{\tau_{turb}}{\tau_{\mu}} = \frac{\rho v_* \varepsilon z \frac{du}{dz}}{\rho \nu \frac{du}{dz}} = \frac{v_* \varepsilon z}{\nu} \rightarrow \frac{\tau_{\mu}}{\tau_{turb}} = \frac{\nu}{v_* \varepsilon z}. \quad (8.62)$$

С учетом выражения (8.62) перепишем условие (8.18), определяющее вязкий слой, и определим его толщину

$$\begin{aligned} \frac{v_* \varepsilon z}{\nu} = \varepsilon_{turb} \ll 1 &\rightarrow z = \varepsilon_{turb} \frac{\nu}{v_* \varepsilon} \rightarrow \delta_{\nu} = \\ &= a_{\nu} \frac{\nu}{v_*} \end{aligned} \quad (8.63)$$

Теперь оценим из условия (8.19) высоту расположения верхней границы буферного слоя h_6 , характеризующую переход к чисто турбулентной области

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{v_* \varepsilon z} = \varepsilon_{\mu} \ll 1 &\rightarrow z = \varepsilon_{\mu}^{-1} \frac{\nu}{v_* \varepsilon} \\ \rightarrow h_6 = a_6 \frac{\nu}{v_*} \end{aligned} \quad (8.64)$$

По результатам лабораторных экспериментов установлены численные значения безразмерных констант a_{ν} и a_6 , а именно $a_{\nu} = 5,0 \sim 7,0$; $a_6 \approx 30$ для аэродинамически гладкой поверхности (смотри раздел 8.6)

При характерном диапазоне изменения численного значения динамической скорости $0,1 \text{ м/с} \leq v_* \leq 1,0 \text{ м/с}$ и величины кинематического коэффициента вязкости воздуха, равного $\nu = 0,13 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, высота h_6 , до которой может проявляться влияние молекулярной вязкости, не превышает четырех миллиметров ($h_6 < 4 \text{ мм}$). При скоростях

ветра, меньших 1м/с, и устойчивой стратификации величина h_0 может достигать значения в 1см.

Приведенные оценки позволяют заключить, что эффекты молекулярного трения (за исключением слоя в непосредственной близости к подстилающей поверхности толщиной в несколько миллиметров) могут быть исключены из рассмотрения.

8.5 Вертикальные профили метеорологических величин при нейтральной стратификации

Выражения для профилей метеорологических элементов можно получить, если выполнить интегрирование в уравнении (8.31) от некоторого фиксированного уровня z_1 до z с учетом зависимости (8.52) (эффектами молекулярного обмена по результатам анализа в предыдущем параграфе пренебрежем):

$$f(z_2) - f(z_1) = F_0 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{k(z)} = \frac{F_0}{\nu_* \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} \quad (8.65)$$

$$= \frac{F_0}{\nu_* \alpha} \ln \frac{z_2}{z_1}$$

Анализ зависимости (8.65) приводит к существованию еще одного важного параметра, влияющего на формирование вертикальных профилей метеопараметров. Действительно, если принять в качестве нижнего фиксированного уровня подстилающую поверхность ($z_1 = 0$), а z_2 любая произвольная высота z то получим результат

$$f(z) = f(0) + \frac{F_0}{\nu_* \alpha} \ln \frac{z}{0}, \quad (8.66)$$

из которого следует, что на любой высоте в пределах приземного слоя численное значение любого из метеорологических параметров становится равным бесконечности ($z/0 = \infty \rightarrow \ln(z/0) = \ln(\infty) = \infty$). Абсурдность такого результата требует использовать в качестве уровня, соответствующего подстилающей поверхности в формуле (6.66), некоторое

значение z_0 , отличное от нуля. Введение такого параметр имеет физическое обоснование. Действительно, физически нереальный результат, вытекающий из (8.66), связан с тем, что условие $z_1 = 0$ соответствует абсолютно гладкой поверхности. Однако сопротивление, оказываемое воздушному потоку, формируется внутри некоторого слоя, характеризуемого наличием элементов неровностей (выступов) поверхности, сколь бы малыми они не были. Совокупность неровностей поверхности принято характеризовать понятием «шероховатость. При анализе формирования скорости в непосредственной близости к подстилающей поверхности ($z \rightarrow 0$) необходимо учитывать то, что сцепление частиц воздушного потока с элементами шероховатости затрудняет движение воздуха и приводит к полному отсутствию среднего переноса в пределах некоторого уровня внутри слоя шероховатости. Таким уровнем, названным параметром шероховатости, принимается то значение высоты, на котором скорость в логарифмическом профиле, описываемом формулой (8.66), обращается в ноль, так что $u(z_0) = 0$.

Проведенные рассуждения позволяют с учётом введённого определения параметра шероховатости записать выражение (8.66) для профиля скорости в виде:

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0},$$

Этот же параметр используется и при описании вертикального распределения других характеристик потока (температуры, водного пара и другой примеси) в качестве уровня, на котором значения этих характеристик соответствуют их значениям на поверхности. При таком условии уравнение (8.66) принимает вид:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{F_0}{v_* \kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (8.67)$$

Очевидно, что численное значение этого параметра должно составлять некоторую долю от средней высоты элементов шероховатости конкретной рассматриваемой поверхности. Подробное обсуждение связи величины z_0 с неровностями поверхности и динамическими свойствами потока будет проводиться в следующем параграфе.

Последовательно полагая в формуле (8.67) $f = \{u, \theta, q\}$, получим выражения для вертикальных профилей указанных метеорологических величин в приземном слое при нейтральной стратификации

$$f \equiv u \rightarrow F_0 = v_*^2 \rightarrow u(z) = \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{z}{z_0} \quad (8.68)$$

$$f \equiv \theta \rightarrow F_0 = -\frac{P_0}{\rho C_p} = 0 \rightarrow \theta(z) = \theta(z_0) = \text{Const} \quad (8.69)$$

$$f \equiv q \rightarrow F_0 = -\frac{E_0}{\rho} \rightarrow q(z) = q(z_0) - \frac{E_0}{\rho v_* \alpha} \ln \frac{z}{z_0} \quad (8.70)$$

Из формул (8.68) и (8.70) видно, что при нейтральной стратификации имеют место логарифмические профили скорости ветра и массовой доли водяного пара (рисунок 8.3).

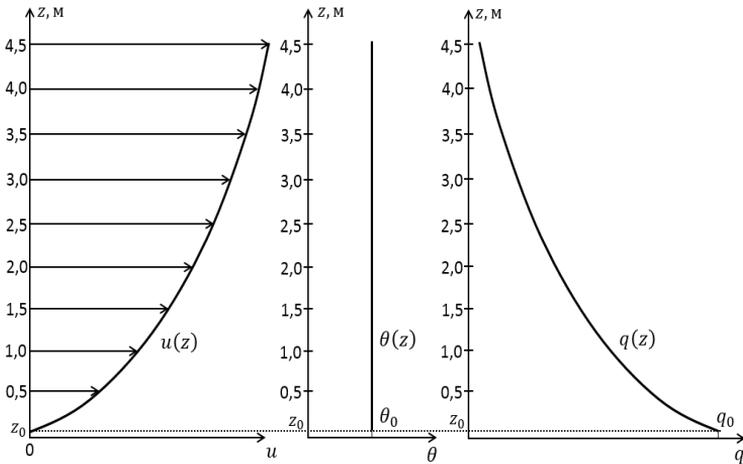


Рисунок 8.3 – Вертикальные профили метеорологических величин в приземном слое при нейтральной стратификации

Обратим внимание, что $v_* > 0$, а $q_* = -E_0/\rho v_* < 0$, а это соответствует увеличению скорости ветра и уменьшению массовой доли водяного пара с высотой. При этом из соотношения (8.69) видно, что при нейтральной стратификации потенциальная температура с высотой не изменяется

.8.6 Параметр шероховатости подстилающей поверхности

Параметр шероховатости отражает характеристику средней высоты неровностей (выступов) h_s подстилающей поверхности, влияющих на сопротивление, которое они оказывают воздушному потоку в приземном слое. Как уже отмечено выше, в качестве параметра шероховатости z_0 принимается тот уровень, на котором средняя скорость потока принимается равной нулю. Однако турбулентные флуктуации скорости на этом уровне отличны от нуля. Это значит, что в общем случае параметр шероховатости должен отражать реакцию поверхности на воздействие касательного напряжения, характеризуемого динамической скоростью v_* , и молекулярной вязкостью, характеризуемой кинематическим коэффициентом вязкости ν , так что

$$z_0 = f(h_s, \nu, v_*). \quad (8.71)$$

Анализ размерностей при рассмотрении сопротивления жесткой неподвижной поверхности воздушному потоку приводит к зависимости параметра шероховатости от числа Рейнольдса шероховатости, определяемой соотношением

$$z_0 = h_s \cdot f_n(Re_s), \quad (8.72)$$

где $Re_s = v_* h_s / \nu$ – число Рейнольдса шероховатости.

По своей реакции на воздействие воздушного потока поверхности могут быть разделены на два типа.

1. Поверхность считается аэродинамически гладкой, если ее реальные неровности полностью находятся в пределах толщины вязкого слоя, то есть $h_s < \delta_\nu$, что соответствует малым значениям числа Рейнольдса ($Re_s \ll 1$). Такие условия могут реализовываться, например, на поверхности воды или гладкого льда при слабых скоростях ветра. В этом случае высота неровностей поверхности не должна влиять на формирование

логарифмического профиля скорости, справедливого только в турбулентной области потока. Следовательно, функция f_n должна быть обратно-пропорциональна числу Рейнольдса ($f_n(Re_s) \sim 1/Re_s$), и выражение для параметра шероховатости принимает вид

$$z_0 = h_s \cdot \frac{m_v}{Re_s} = m_v \cdot h_s \cdot \frac{v}{v_* h_s} = m_v \cdot \frac{v}{v_*}. \quad (8.73)$$

Величина m_v по смыслу и по результатам вывода должна быть постоянной величиной в условиях неподвижной жесткой поверхности.

В книге «Статистическая гидромеханика» Мони́на и Яглома, на основе анализа экспериментальных данных различных авторов, приводится среднее численное значение константы $m_v = 0,11$ с разбросом в диапазоне от $m_v = 0,09$ до $m_v = 0,13$.

Зависимость функции $f_n(Re_s)$ от числа Рейнольдса будет проявляться только для «неполностью шероховатой поверхности» при условии $Re'_s < Re_s < Re''_s$.

2. При высотах неровностей, значительно превышающих толщину вязкого слоя ($h_s \gg \delta_v$ и $Re_s \geq Re''_s$), говорят о предельном режиме развитой шероховатости. В этом случае вязкость перестает влиять на сопротивление поверхности воздушному потоку, и коэффициента молекулярной вязкости не должно быть в числе определяющих параметров в зависимости для параметра шероховатости. В этом случае функция $f_n(Re_s)$ стремится к постоянной величине, и зависимость (8.72) принимает вид

$$z_0 = b \cdot h_s. \quad (8.74)$$

По лабораторным исследованиям $b \approx 1/30$. По наблюдениям в природе z_0 колеблется от $z_0 = h_s/5$ до $z_0 = h_s/100$. Так, порядок величины z_0 для очень гладкой поверхности снега равен 0,001 см; для плотной обнаженной почвы – до 1 см, для газона и полевой травы – от 0,2 см до 10 см в зависимости от высоты и плотности травяного покрова, а также и от скорости ветра.

В таблице 8.2 приведены численные значения параметров шероховатости некоторых типов поверхностей (заимствованные из работ [2], [3]), полученные на основе анализа данных по вертикальному профилю ветра в приземном слое и приведённые в работах.

Таблица 8.2. Характерные значения параметра шероховатости для различных поверхностей (u_2 – скорость ветра на высоте 2 м)

Тип поверхности	z_0 , см
Очень гладкая снежная или ледяная поверхность	0,001
Гладкий снег на невысокой траве	0,005
Пустыня (Пакистан)	0,03
Снежная поверхность при наличии кустарника	0,1
Скошенная трава	-
-высотой 1,5 см	0,2
-высотой 3,0 см	0,7
-высотой 4,5 см	-
- $u_2 = 2$ м/с	2,4
- $u_2 = 6 - 8$ м/с	1,7
Трава высотой 60 – 70 см	-
- $u_2 = 1,5$ м/с	9,0
- $u_2 = 3,5$ м/с	6,1
- $u_2 = 6,2$ м/с	3,7
Неоднородная поверхность с чередующимися участками, покрытыми травой, кустарником и деревьями	10
Парк	50
Город с высокими зданиями	100

В заключение данного параграфа отдельно обсудим вопрос о шероховатости водной поверхности. При отсутствии взаимодействия с воздушным потоком водная поверхность, в отличие от поверхности суши, не содержит неровностей. Шероховатость водной поверхности вызывается действием прилегающего к ней движущегося слоя воздуха, поддерживается за счет передачи импульса и энергии к ней и принимает форму ветроволнового, ветро-ледового взаимодействия. При этом мелкомасштабные шероховатости морской поверхности представляют собой сложную совокупность гравитационных волн и капиллярной ряби. Высота гравитационных волн должна зависеть от динамического воздействия

воздушного потока, характеризуемого динамической скоростью v_* , и от ускорения свободного падения g . Анализ размерностей такой зависимости приводит к соотношению

$$h_s = f_h(v_*, g) \sim \frac{v_*^2}{g}. \quad (8.75)$$

Параметр шероховатости при этом выражается формулой

$$z_0 = m \frac{v_*^2}{g}, \quad (8.76)$$

известной как гипотеза Чарнока-Эллисона [5].

После анализа известных данных наблюдений авторы предложили среднее численное значение параметра m , равное $m = 0,035$. Однако, после более детального анализа данных наблюдений при различном характере волнения обнаружилась зависимость параметра шероховатости от фазовой скорости волн C_ϕ , так что

$$m = f_m(v_*, C_\phi) = f_m(a_g). \quad (8.77)$$

Здесь $a_g \equiv v_*/C_\phi$ – параметр возраста (развития) волны.

8.7 Вертикальные профили метеорологических величин при стратификации, близкой к нейтральной стратификации

Запишем выражение для вертикального профиля коэффициента турбулентности при стратификации, близкой к нейтральной

$$k(z) = v_* \alpha z (1 - \beta \xi) \quad (8.78)$$

Преобразуем выражение (6.78), умножив и разделив на сопряженный двучлен

$$k(z) = v_* \alpha z \frac{(1 - \beta \xi)(1 + \beta \xi)}{1 + \beta \xi} = v_* \alpha z \frac{1 - \beta^2 \xi^2}{1 + \beta \xi}. \quad (8.79)$$

Так при стратификации, близкой к нейтральной $|\xi| \ll 1$, то членом $\beta^2 \xi^2$ можно пренебречь как величиной более высокого порядка малости. И тогда

$$k(z) \approx \frac{\nu_* \alpha z}{1 + \beta \xi}. \quad (8.80)$$

Учитывая полученное выражение, вычислим $\varphi(z)$ в правой части соотношения (8.31):

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{z_1}^z \frac{1 + \beta \xi}{\nu_* \alpha z} dz = \frac{1}{\nu_* \alpha} \int_{z_1}^z \frac{dz}{z(1 - \beta \xi)} = \\ &= \frac{1}{\nu_* \alpha} \left(\int_{z_1}^z \frac{dz}{z} + \frac{\beta}{L} \int_{z_1}^z dz \right) \\ &= \frac{1}{\nu_* \alpha} \left[\ln \frac{z}{z_1} + \frac{\beta}{L} (z - z_1) \right] \end{aligned} \quad (8.81)$$

Введя обозначение

$$\psi(z) = \ln \frac{z}{z_1} + \frac{\beta}{L} (z - z_1), \quad (8.82)$$

запишем общее выражение для профилей метеорологических величин

$$f(z) = f(z_1) + \frac{F_0}{\nu_* \alpha} \psi(z). \quad (8.83)$$

На основании (8.83) запишем выражения для профилей u , θ и q

$$\begin{aligned} f \equiv u \quad \rightarrow \quad F_0 = \nu_*^2 \quad \rightarrow \quad u(z) \\ = u(z_1) + \frac{\nu_*}{\alpha} \psi(z) \end{aligned} \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} f \equiv \theta \quad \rightarrow \quad F_0 = -\frac{P_0}{\rho C_p} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta(z) \\ = \theta(z_1) - \frac{P_0}{\rho C_p \nu_* \alpha} \psi(z) \end{aligned} \quad (8.85)$$

$$\begin{aligned}
 f \equiv q \quad \rightarrow \quad F_0 = -\frac{E_0}{\rho} \quad \rightarrow \quad q(z) \\
 = q(z_1) - \frac{E_0}{\rho \nu_* \kappa} \psi(z)
 \end{aligned}
 \tag{8.86}$$

Функция $\psi(z)$ характеризует тип вертикального профиля метеорологической величины f . Как видно из (8.82), при стратификации, близкой к нейтральной, имеют место линейно-логарифмические профили метеорологических величин. Линейный добавок обусловлен отклонением стратификации от безразличного равновесия. Подтвердим данное утверждение посредством следующего несложного анализа. Поскольку при нейтральной стратификации $|L| \rightarrow \infty$, вычислим предел

$$\begin{aligned}
 \psi_n(z) &= \lim_{L \rightarrow \pm\infty} \psi(z) = \lim_{L \rightarrow \pm\infty} \left[\ln \frac{z}{z_1} + \frac{\beta}{L} (z - z_1) \right] = \\
 &= \lim_{L \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{z}{z_1} + \lim_{L \rightarrow \pm\infty} \frac{\beta}{L} (z - z_1) = \ln \frac{z}{z_1}.
 \end{aligned}
 \tag{8.87}$$

Таким образом, в пределе получается обычная формула теории логарифмического приземного слоя.



Рисунок 8.4 – Сравнение вертикальных профилей скорости при нейтральной стратификации и стратификации, близкой к нейтральной, при фиксированном значении ν_* .

Нетрудно дать и физическую интерпретацию влияния стратификации, рассмотрев, например, профили ветра при одинаковых значениях динамической скорости (рисунок 8.4).

При устойчивой стратификации сила плавучести ослабляет процесс развития турбулентности, что должно приводить к более быстрому росту скорости с высотой, чем логарифмический рост, наблюдающийся при более интенсивном обмене, соответствующем безразличной стратификации. Наоборот, при неустойчивой стратификации еще более интенсивное турбулентное перемешивание должно приводить к выравниванию средней скорости, так что здесь скорость ветра должна возрастать с высотой медленнее, чем при безразличной стратификации.

8.8 Вертикальные профили метеорологических величин при условиях свободной конвекции и инверсии.

Для определения вертикальных профилей метеорологических величин в условиях свободной конвекции вычислим интеграл $I(z)$ в правой части соотношения (6.31), используя выражение для вертикального профиля коэффициента турбулентности в случае режима свободной конвекции (формула (6.59))

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \int_{z_1}^z \frac{1}{A_1} \frac{dz}{z^{4/3}} = \frac{1}{A_1} \int_{z_1}^z z^{-4/3} dz \\
 &= -\frac{3}{A_1} (z^{-1/3} - z_1^{-1/3}).
 \end{aligned}
 \tag{8.88}$$

Тогда для профилей метеорологических величин можем записать следующее общее выражение

$$f(z) = f(z_1) - \frac{3F_0}{A_1} (z^{-1/3} - z_1^{-1/3})
 \tag{8.89}$$

В предельном режиме свободной конвекции средняя горизонтальная скорость отсутствует. Для профилей $\theta(z)$ и $q(z)$ с учетом (8.89) имеем

$$\theta(z) = \theta(z_1) + \frac{3P_0}{A_1\rho C_p} \left(z^{-1/3} - z_1^{-1/3} \right), \quad (8.90)$$

$$q(z) = q(z_1) + \frac{3E_0}{A_1\rho} \left(z^{-1/3} - z_1^{-1/3} \right). \quad (8.91)$$

Итак, при свободной конвекции получаются степенные профили величин $\theta(z)$ и $q(z)$.

Вычислим интеграл в правой части соотношения (8.31), используя выражение для вертикального профиля коэффициента в случае режима инверсии (формула (8.61))

$$I(z) = \int_{z_1}^z \frac{dz}{\nu_* BL} = \frac{1}{\nu_* BL} \int_{z_1}^z dz = \frac{1}{\nu_* BL} (z - z_1). \quad (8.92)$$

Тогда для профилей метеорологических величин можем записать следующее общее выражение

$$f(z) = f(z_1) + \frac{F_0}{\nu_* BL} (z - z_1) \quad (8.93)$$

Или в частности для профилей $u(z)$, $\theta(z)$, $q(z)$

$$u(z) = u(z_1) + \frac{\nu_*}{BL} (z - z_1), \quad (8.94)$$

$$\theta(z) = \theta(z_1) - \frac{P_0}{B\rho C_p \nu_* L} (z - z_1), \quad (8.95)$$

$$q(z) = q(z_1) - \frac{E_0}{B\rho \nu_* L} (z - z_1). \quad (8.96)$$

Таким образом, в случае предельно устойчивой стратификации профили метеорологических величин являются линейными.

8.9 Особенности формирования вертикальной структуры воздушного потока в условиях высокой растительности.

Большие площади, покрытые относительно высокой растительностью (это могут быть поля с сельскохозяйственными культурами или лесные массивы), оказывают определенное аэродинамическое сопротивление воздушному потоку, приводящее к особенностям при описании вертикальных профилей метеорологических параметров. с как и всякая другая подстилающая поверхность.

Полученный ранее результат в разделах 8.1 и 8.3 (формулы (8.17) и (8.52)) для вертикального градиента скорости в турбулентной области потока вблизи подстилающей поверхности для горизонтально однородного приземного слоя в условиях нейтральной стратификации, который может быть записан в виде

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}, \quad \kappa \approx 0,4 \quad (8.97)$$

следует и из анализа размерностей при высотах z , много больших высоты реальных шероховатостей поверхности h_0 . Действительно, при общем виде зависимости вертикального градиента скорости от определяющих параметров

$$\frac{du(z)}{dz} = f(z, u_*, h_0) \quad (8.98)$$

анализ размерностей позволяет записать следующее:

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u_*}{z} \varphi\left(\frac{h_0}{z}\right). \quad (8.99)$$

На высотах намного превосходящих высоту шероховатостей $h_0 \ll z$, что характерно при $h_0 < 50\text{см}$, градиент скорости не должен зависеть от величины h_0 , так что справедливо соотношение:

$$\text{при } \frac{h_0}{z} \rightarrow 0: \quad \varphi(0) = \text{const} = \kappa^{-1}. \quad (8.100)$$

Этот результат и отражён в соотношении (1).

Если высота измерения Z соизмерима с высотой препятствий h_0 , зависимость $\varphi(h_0/z)$ должна быть учтена.

Учитывая очевидное условие $\eta \equiv \left(\frac{h_0}{z}\right) < 1$, запишем функцию $\varphi(\eta)$ в форме ряда Маклорена в окрестности численного значения параметра $\left(\frac{h_0}{z}\right) = 0$:

$$\varphi(\eta) = \varphi(0) + \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta=0} \cdot \eta + \left. \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} \cdot \eta^2 + \dots \quad (8.101)$$

Производные в равенстве (5) представляют собой конкретные численные значения, что позволяет записать соотношение (5) в виде:

$$\varphi(\eta) = \kappa^{-1}(1 + a \cdot \eta + b \cdot \eta^2 + \dots) \quad (8.102)$$

Пренебрегая далее в разложении (8.102) слагаемыми второго порядка малости и меньшими, а также учитывая при этом равенство

$$(1 + \varepsilon) \Big|_{\varepsilon \ll 1} = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

функция $\varphi(\eta)$ запишется в виде

$$\varphi\left(\frac{h_0}{z}\right) = \kappa^{-1} \left(1 - a \frac{h_0}{z}\right)^{-1} \quad (8.103)$$

Выполненные преобразования приводят к результату:

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u_*}{\kappa(z - ah_0)} \quad (8.104)$$

Определяя теперь величину ah_0 , имеющую размерность длины, как толщину d , названную «слоем или высотой вытеснения», получим

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u_*}{\kappa(z - d)} \quad (8.105)$$

Интегрирование последнего выражения по высоте с использованием условия равенства нулю средней скорости ветра на уровне

шероховатости над слоем вытеснения ($u=0$ при $z=d+z_0$) приводит к результату:

$$\text{при } z \geq d + z_0 \Rightarrow u(z) = \frac{u_*}{K} \ln \frac{z-d}{z_0}. \quad (8.106)$$

Последнее соотношение можно записать в виде:

$$u(z_1) = \frac{u_*}{K} \ln \frac{z_1}{z_0}, \quad \text{где } z_1 = z - d. \quad (8.107)$$

Таким образом, вблизи подстилающей поверхности с характеристиками реальных шероховатостей, соизмеримых с уровнем измерения, также выполняется характерный при нейтральной стратификации логарифмический закон вертикального распределения скорости ветра, но высоту следует отсчитывать от уровня d .

Высота вытеснения при небольших численных значениях реальных шероховатостей (вспаханное поле, не слишком высокий травостой и даже кустарник) может быть принята равной нулю. Для лесных массивов согласно данным по скорости ветра, приведённым в работе Мони́на А.С. и Яглома А.М., обобщающим результаты различных авторов, высота вытеснения для различного типа деревьев может меняться в пределах от значения $0,5h_0$ до $0,75h_0$.

При этом предлагается аппроксимационная формула для зависимости параметра шероховатости от высоты реальных шероховатостей подстилающей поверхности [3]:

$$\lg \frac{z_0}{h_0} = -1.24 + 0.29 \lg h_0. \quad (8.108)$$

8.10 Влияние волновых потоков импульса на динамические процессы в приводном слое

Процесс формирования волновых потоков импульса и их влияние на динамику воздушного потока в приводном слое над взволнованной поверхностью океана достаточно подробно рассматривается в работе Китайгородского С. А. [5]. Решение этой проблемы является важным направлением исследований и в настоящее время.

Особенностью динамического взаимодействия воздействия воздушного потока с поверхностью моря является существование в некотором слое над волнами флуктуаций (не связанных с турбулентностью) вертикальной и горизонтальной компонент скорости, обусловленных

волновыми колебаниями поверхности. В результате, аналогично эффектам турбулентных флуктуаций, в приводном слое формируется волновой поток импульса τ_w , направленный к поверхности. Условия неизменности с высотой суммарного потока импульса $\tau_t + \tau_v + \tau_w = \tau_0 = \rho u_*^2$ в приводном слое запишем в виде

$$\frac{\tau_{tx}}{\rho} + \frac{\tau_{vx}}{\rho} + \frac{\tau_w}{\rho} = u_*^2, \quad (8.109)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_t}{\rho} &\equiv \tau_t^* = k \frac{du}{dz}, & \frac{\tau_v}{\rho} &\equiv \tau_v^* = v \frac{du}{dz}, \\ \frac{\tau_w}{\rho} &\equiv \tau_w^*(z) = \tau_{w0}^* f(z) . \end{aligned} \right\} \quad (8.110)$$

$$\tau_{w0}^* = \delta_w \cdot u_*^2 . \quad (8.111)$$

Величина δ_w определяет долю волнового потока импульса непосредственно вблизи волновой поверхности от полной его величины, равной u_*^2 . Функция $f(z)$ является убывающей с высотой, обращаясь в ноль уже в пределах слоя постоянства полного потока импульса.

Для анализа влияния волнового потока импульса на распределение скорости по высоте и на суммарное касательное напряжение на поверхности рассмотрим условия её полной шероховатости. В этом случае из процесса можно исключить проявление молекулярной вязкости, и условие постоянства полных потоков импульса в приводном слое атмосферы принимает вид:

$$\tau_t^* = u_*^2 (1 - \delta_w f_w) . \quad (8.112)$$

Использование при записи турбулентных касательных напряжений основной гипотезы для коэффициента турбулентности

$$k = l^2 \frac{du}{dz}$$

и условия нейтральной стратификации при записи выражения для пути смешения

$l = \kappa \cdot z$, ($\kappa \approx 0,4$ - постоянная Кармана)

приводит уравнение (8.129) к виду:

$$\kappa^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - u_*^2 (1 - \delta_w f_w) = 0. \quad (8.113)$$

В результате получаем выражение для градиента скорости с учётом его положительной величины

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \sqrt{1 - \delta_w f_w(z)}. \quad (8.114)$$

Согласно данным наблюдений значение $\delta_w < 0,3$, что позволяет в выражении (8.114) использовать приближение

$$\sqrt{1 - \delta_w f_w(z)} = 1 - \frac{1}{2} \delta_w f_w(z). \quad (8.115)$$

В этом случае интегрирование уравнения (6) в пределах от z_0 до произвольной высоты h даёт результат

$$u(h) = \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{h}{z_0} - \frac{\delta_w}{2} \int_{z_0}^h f_w(z) dz \right) = u_* \kappa^{-1} \left(\ln \frac{h}{z_0} - \delta_w \varphi(z) \right), \quad (8.116)$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^h f_w(z) dz$

Как видно, учёт волновых потоков импульса приводит к уменьшению скорости на фиксированном уровне по сравнению с известным чисто логарифмическим распределением скорости в приземном слое при идентичных условиях.

Что касается коэффициента сопротивления $C_d = \frac{u_*^2}{u_h^2}$,

используемого для оценки степени сопротивления морской поверхности воздушному потоку, то в соответствии с выражением (8.116), её значение, определяется равенством

$$C_d = 2,5^{-2} \left\{ \ln \frac{h}{z_0} - \frac{\delta_w}{2} \int_{z_0}^h \frac{f(z)}{z} dz \right\}^{-2}. \quad (8.117)$$

Положительное значение величины $\delta_w \int_{z_0}^h \frac{f(z)}{z} dz$ приводит к выводу об увеличении коэффициента сопротивления при росте волнового потока импульса.

Более конкретное влияние волнения на величину $C_d = \frac{u_*^2}{u_h^2}$ можно оценить при конкретном виде функции $f(z)$. Использование аппроксимации

$$f(z) = 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha, \quad \alpha > 1, \quad (8.118)$$

качественно верно отражающей ослабление волнового потока импульса с высотой, даёт результат

$$\int_{z_0}^z \frac{f(z)}{z} dz = \ln \frac{h}{z_0} - \frac{1}{h^\alpha} \int_{z_0}^h z^{\alpha-1} dz = \ln \frac{h}{z_0} - \frac{1}{\alpha} \frac{(h-z_0)^\alpha}{h^\alpha} \cong \ln \frac{h}{z_0} - \frac{1}{\alpha} \approx \ln \frac{h}{z_0} \quad (8.119)$$

$$C_d = 2,5^{-2} \left\{ \ln \frac{h}{z_0} - \frac{\delta_w}{2} \int_{z_0}^h \frac{f(z)}{z} dz \right\}^{-2} = \left(2,5 \cdot (1 - 0,5 \delta_w) \ln \frac{h}{z_0} \right)^{-2} \quad (8.120)$$

Контрольные вопросы

1. Какое условие (как основное свойство) должно выполняться в приземном слое?

2. Назовите основные параметры, от которых зависит коэффициент турбулентности в приземном слое?

3. Что характеризует безразмерный параметр $\frac{z}{L}$ и чему он равен при нейтральной стратификации?

4. Какими зависимостями описываются вертикальные профили скорости ветра и водяного пара при нейтральной стратификации и близкой к нейтральной.

5. В чём различие между аэродинамически гладкой и шероховатой поверхностями?

6. Что характеризует параметр шероховатости? Какое условие должно выполняться на уровне, равном параметру шероховатости?

7. Какое упрощение применимо при выборе определяющих параметров в условиях свободной конвекции?

8. Какой дополнительный параметр определяет функциональные связи в приземном слое в условиях высокой растительности?

9. Объясните причину дополнительных потоков импульса (кроме молекулярных и турбулентных) в приземном слое атмосферы.

10. Что называется коэффициентом сопротивления поверхности, и к каким изменениям в его величине приводят волновые потоки импульса?

Литература к главе 8

1 Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: «Наука», 1965. – 639 с

2 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.

3 Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 292 с.

4 Зилитинкевич, С.С. Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои / С.С. Зилитинкевич. – Москва: Физматлит, 2013. – 246 с.

5 Китайгородский С.А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. - Л.: Гидрометиздат, 1970. – 284 с.

9. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

9.1 Задача параметризации при описании физических процессов

9.2 Внешние параметры, определяющие турбулентный режим стационарного горизонтально однородного пограничного слоя

9.3 Определение связи между внутренними и внешними параметрами пограничного слоя

9.4 Законы сопротивления для термически стратифицированного пограничного слоя

9.1 Задача параметризации при описании физических процессов

В настоящее время прогноз эволюции полей метеорологических величин основывается, как правило, на интегрировании уравнений гидротермодинамики атмосферы. Независимо от типа гидродинамической модели, в некоторый момент вычисления атмосфера представляется трехмерным множеством узлов, называемым сеткой и покрывающим интересующий регион (например, страна, континент, или весь земной шар). Эти узлы, как правило, регулярно расположены по горизонтали и по вертикали и представляют состояние атмосферы в ячейке, окружающей рассматриваемую точку. Легко видеть, что число дискретных узлов сетки определяет, насколько точно атмосферные структуры представляются моделью. С увеличением числа дискретных узлов сетки пространственно-временные структуры параметров атмосферы представляются (или разрешаются) с возрастающей точностью. Тем не менее, для заданного числа узлов сетки всегда есть физические процессы и структуры настолько малые, что они не могут быть представлены численной моделью, независимо от ее разрешения.

Так как в атмосфере существует множество очень важных для человеческой деятельности мелкомасштабных явлений, такие как морские бризы, грозы, полосы снега, одним из последовательных улучшений численных моделей было увеличение способности модели разрешать все более мелкие и мелкие структуры. Важно это и потому, что мелкомасштабные структуры могут влиять на крупномасштабные циркуляции и, таким образом, для получения более точного прогноза лучше, чтобы мелкомасштабные структуры были учтены. Все мелкомасштабные волновые процессы, имеющие масштаб, меньший двух шагов сетки, приходится учитывать косвенно, связывая их с параметрами,

описывающими свойства крупномасштабных полей, получаемых при расчетах непосредственно. Таким образом, разработка более совершенных гидродинамических моделей атмосферы стимулировала развитие нового направления – параметризации атмосферных процессов подсеточного масштаба, которая необходима для описания воздействия этих процессов на крупномасштабные поля, эволюция которых рассчитывается при интегрировании прогностических уравнений. Параметризации основываются на предположении, что эффекты подсеточных масштабов могут быть связаны с параметрами прогнозируемых в модели полей метеорологических параметров. Параметризация – это установление вида функциональной связи между искомыми и внешними параметрами процесса без процедуры решения уравнений, описывающих внутреннюю непрерывную пространственную или временную структуру параметров процесса. С увеличением разрешения модели, казалось бы, потребность в параметризациях должна уменьшаться, поскольку все больше и больше процессов представляются в моделях явным образом. Однако далеко не для всех процессов подсеточного масштаба получены точные динамические уравнения, описывающие их пространственно-временную изменчивость, что делает практически невозможным непосредственное описание этих процессов в моделях крупномасштабных атмосферных движений. Следует отметить, что даже при наличии соответствующих уравнений они могут быть чрезвычайно сложны. Таким образом, задача параметризации остается по-прежнему актуальной, однако распадается на два направления: параметризация процессов подсеточного масштаба и параметризация физически сложных процессов.

Атмосферный пограничный слой изменяется с течением времени и в пространстве. В связи с этим его параметризация является отнюдь не простой задачей. Наиболее простые теории и модели построены для пограничного слоя, возникающего при течении стационарного горизонтально однородного потока воздуха. При указанных упрощениях сравнительно небольшое число внешних параметров определяет основные свойства пограничного слоя, в связи с чем естественно ожидать эффективных результатов, применяя методы анализа размерностей. Разумеется, информация в этом случае окажется менее конкретной, чем для приземного слоя, в связи с увеличением количества размерных параметров при переходе от слоя постоянных турбулентных потоков ко всему пограничному слою.

9.2 Внешние параметры, определяющие турбулентный режим стационарного горизонтально однородного пограничного слоя

Попытаемся перечислить и в какой-то степени обосновать выбор размерных величин, которые определяют режим стационарного горизонтально однородного пограничного слоя.

Во-первых, сила горизонтального барического градиента ($\rho^{-1} \partial p / \partial n$). Это основная сила, вызывающая движения. Его значение и направление обусловлены крупномасштабными атмосферными процессами, и в теории планетарного пограничного слоя горизонтальный градиент давления можно считать заданным внешним параметром. В пределах пограничного слоя, как правило, он мало меняется. Исключением являются ситуации, связанные с фронтами; они требуют особого рассмотрения (вряд ли в таких случаях целесообразно использовать методы анализа размерностей). Горизонтальный градиент давления может быть связан со скоростью ветра за пределами пограничного слоя на основе геострофических соотношений.

Во-вторых, параметр Кориолиса ($2\omega_z$). Поскольку имеются в виду процессы, характерный горизонтальный масштаб которых достаточно велик, то естественно полагать, что влияние вращения Земли должно оказывать влияние, во всяком случае в верхней части пограничного слоя. Здесь условия приближаются к свободной атмосфере, где ускорение Кориолиса имеет тот же порядок величины, что и горизонтальный градиент давления.

В-третьих, шероховатость подстилающей поверхности (z_0). Она определяет характерный масштаб вихрей вблизи подстилающей поверхности и интенсивность генерации вихревой энергии в этой области. Параметр шероховатости в значительной мере регулирует обмен между подстилающей поверхностью и атмосферой.

В-четвертых, стратификация. Она оказывает существенное влияние на процессы в пограничном слое. В первую очередь ее целесообразно охарактеризовать разностью значений потенциальной температуры на верхней и нижней границах рассматриваемого слоя $\Delta\theta$. На первый взгляд кажется достаточным принять перепад температуры по всему пограничному слою как единственную размерную величину, отражающую влияние стратификации на режим пограничного слоя. Такое предположение является, однако, ошибочным, если иметь в виду, что роль стратификации в разных частях пограничного слоя существенно различна. Известно, что в

нижней части пограничного слоя стратификация сравнительно мало влияет на турбулентный обмен, но она оказывается решающим фактором в верхней части слоя. Поскольку фиксированный перепад может иметь место при разном распределении температуры по высоте, то ясно, что одним указанным параметром влияние стратификации отражается не в полной мере. В работах [1] и [2] предлагаются несколько различающиеся варианты учёта стратификации. В работе Лайхтмана Д. Л. [1] предлагается рассматривать два параметра – разность потенциальных значений потенциальной температуры на верхней и нижней границах пограничного слоя $\Delta\theta$ и вертикальный градиент потенциальной температуры на верхней границе пограничного слоя γ_H . В работе Зилитинкевича С. С. [2] учёт влияния стратификации ограничивается только одним параметром $\Delta\theta$. Далее при выводе параметрических связей мы будем пользоваться только одним параметром $\Delta\theta$.

В-пятых, параметр плавучести (g/\bar{T}). Его значение существенно влияет на работу вихрей против силы плавучести.

Перечисленные параметры называются внешними параметрами пограничного слоя. Наша основная гипотеза состоит в том, что любая физическая характеристика пограничного слоя определяется пятью перечисленными внешними параметрами: $V_g(\rho^{-1}\partial p/\partial n)$, $2\omega_z$, z_0 , $\Delta\theta$, g/\bar{T} , если речь идет об интегральных характеристиках для всего слоя.

9.3 Определение связи между внутренними и внешними параметрами пограничного слоя

Используя π - теорему анализа размерностей, определим связь перечисленных выше внешних параметров с такими внутренними параметрами пограничного слоя, как например скорость трения v_* , угол между изобарой и направлением касательного напряжения трения у подстилающей поверхности β (отрицательный в северном и положительный в южном полушарии), масштаб температуры T_* (пропорциональный вертикальному турбулентному потоку тепла P_0) и высота пограничного слоя H .

Составим формулы размерностей для внешних и внутренних параметров

$$\begin{aligned}
[v_*] &= LT^{-1}, & [\tilde{P}_0] &= \vartheta LT^{-1}, & [H] &= L, & [F_p] &= LT^{-2}, & [2\omega_z] &= T^{-1}, \\
[z_0] &= L, & [\Delta\theta] &= \vartheta, & [g/\bar{T}] &= LT^{-2}\vartheta^{-1}, & [\gamma_H] &= L^{-1}\vartheta
\end{aligned} \quad (9.1)$$

Безразмерная величина β не включается в анализ размерностей, так как вычеркивание соответствующего нулевого столбца не изменяет ранг матрицы размерностей.

На основании формул размерностей заполним матрицу размерностей (таблица 9.1).

Таблица 9.1 – Матрица размерностей

	Внутренние			Внешние					
	v_*	\tilde{P}_0	H	z_0	$\Delta\theta^*$	γ_H	F_p	$2\omega_z$	g/\bar{T}
L	1	1	1	1	0	-1	1	0	1
T	-1	-1	0	0	0	0	-2	-1	-2
ϑ	0	1	0	0	1	1	0	0	-1

Число столбцов этой матрицы $n = 9$, а число строк $m = 3$. Тогда $n - m = 6$, и, следовательно, можно составить шесть безразмерных комплексов.

Если в качестве совокупности трех параметров с независимыми размерностями выбрать V_g , $2\omega_z$ и g/\bar{T} , то можно записать следующие безразмерные комплексы

$$\Pi_{v_*} = \frac{v_*}{F_p^{\alpha_{11}} (2\omega_z)^{\alpha_{21}} (g/\bar{T})^{\alpha_{31}}}, \quad (9.2)$$

$$\Pi_{P_0} = \frac{\tilde{P}_0}{F_p^{\alpha_{12}} (2\omega_z)^{\alpha_{22}} (g/\bar{T})^{\alpha_{32}}}, \quad (9.3)$$

$$\Pi_H = \frac{H}{F_p^{\alpha_{13}} (2\omega_z)^{\alpha_{23}} (g/\bar{T})^{\alpha_{33}}}, \quad (9.4)$$

$$\Pi_{z_0} = \frac{z_0}{F_p^{\alpha_{14}} (2\omega_z)^{\alpha_{24}} (g/\bar{T})^{\alpha_{34}}}, \quad (9.5)$$

$$\Pi_{\Delta\theta^*} = \frac{\Delta\theta^*}{F_p^{\alpha_{15}} (2\omega_z)^{\alpha_{25}} (g/\bar{T})^{\alpha_{35}}}, \quad (9.6)$$

$$P_{\gamma_H} = \frac{\gamma_H}{F_p^{\alpha_{16}} (2\omega_z)^{\alpha_{26}} (g/\bar{T})^{\alpha_{36}}}. \quad (9.7)$$

На основании матрицы размерностей имеем следующие значения показателей степени α_{ij} : $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{13} = 1$, $\alpha_{23} = -2$, $\alpha_{33} = 0$, $\alpha_{14} = 1$, $\alpha_{24} = -2$, $\alpha_{34} = 0$, $\alpha_{15} = 1$, $\alpha_{25} = 0$, $\alpha_{35} = -1$, $\alpha_{16} = 0$, $\alpha_{26} = 2$, $\alpha_{36} = -1$. В результате приходим к следующим выражениям для безразмерных комплексов (9.2 – (9.7)

$$\begin{aligned} P_{v_*} &= \frac{2\omega_z}{F_p} v_*, & P_H &= \frac{4\omega_z^2}{F_p} H, & P_{z_0} &= \frac{4\omega_z^2}{F_p} z_0, \\ P_{\Delta\theta^*} &= \frac{g}{\bar{T}} \cdot \frac{\Delta\theta^*}{F_p}, & P_{\gamma_H} &= \frac{1}{4\omega_z^2} \cdot \frac{g}{\bar{T}} \cdot \gamma_H \end{aligned} \quad (9.8)$$

Напомним, что сила барического градиента может быть выражена через геострофический ветер при помощи равенства

$$V_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{F_p}{2\omega_z} \rightarrow F_p = 2\omega_z V_g \quad (9.9)$$

что дает возможность записать безразмерные комплексы (9.8) в другой форме

$$P_{v_*} = \frac{v_*}{V_g} \equiv \chi, \quad P_H = \frac{2\omega_z}{V_g} H, \quad P_{z_0} = \frac{2\omega_z}{V_g} z_0 \equiv Ro^{-1}, \quad (9.10)$$

$$P_{\Delta\theta^*} = \frac{g}{\bar{T}} \cdot \frac{\Delta\theta^*}{2\omega_z V_g} \equiv M, \quad P_{\gamma_H} = \frac{1}{4\omega_z^2} \cdot \frac{g}{\bar{T}} \cdot \gamma_H \equiv \Gamma. \quad (9.10a)$$

Безразмерные величины χ , Ro и M получили названия геострофический коэффициент трения, число Россби и внешний интегральный параметр стратификации соответственно. В свою очередь число Γ представляет собой квадрат безразмерной частоты Вайсяля-Брента ($N = [(g/\bar{T}) \cdot d\theta/dz]^{1/2}$).

Из проведенного анализа размерностей вытекает, что внутренние характеристики турбулентного режима в пограничном слое могут зависеть от внешних условий только через параметры Ro , M и Γ . В частности, это означает, что, они во всем пограничном слое должны удовлетворять следующим соотношениям

$$\frac{v_*}{V_g} = \eta_{v_*}(Ro, M, \Gamma) \quad (9.11)$$

$$\beta = \eta_{\beta}(Ro, M, \Gamma) \quad (9.12)$$

$$\frac{T^*}{\Delta\theta^*} = \eta_{T^*}(Ro, M, \Gamma) \quad (9.13)$$

$$\frac{\omega_z}{V_g} H = \eta_H(Ro, M, \Gamma) \quad (9.14)$$

Для отыскания вертикальных профилей метеорологических величин к указанным параметрам добавляется безразмерная высота $\tilde{z}_n = (2\omega_z \cdot z)/V_g$. Тогда любая искомая безразмерная характеристика пограничного слоя f_n , изменяющаяся с высотой, может быть в общем случае определена в соответствии с выражением

$$f_n = \eta_f(Ro, M, \Gamma, z_n) \quad (9.15)$$

В учебном пособии [3] приводятся рассчитанные безразмерные профили характеристик турбулентности. В качестве примера представим на рисунке 9.1 безразмерные профили коэффициента турбулентности и ее кинетической энергии.

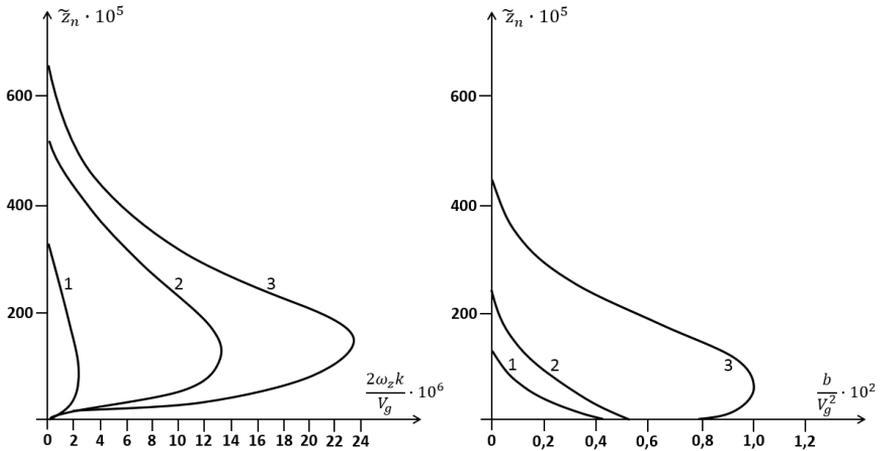


Рисунок 9.1 – Безразмерные вертикальные профили коэффициента турбулентности и ее кинетической энергии при значениях $Ro = 10^7$ и $\Gamma = 400$.

На рисунке 9.1 условия термической стратификации задаются параметром μ (его смысл и связь с числом M будут объяснены в следующем параграфе). Кривые «1» соответствуют значению $\mu = 50$ (устойчивая

стратификация), кривые «2» $\rightarrow \mu = 0$ (нейтральная стратификация), кривые «3» $\rightarrow \mu = -50$ (неустойчивая стратификация).

Для сравнения в качестве еще одного примера на рисунке 9.2 представлен вертикальный профиль коэффициента турбулентности, взятый из работы [4], рассчитанный по эмпирическим данным профиля ветра (методику расчета смотри в [4]).

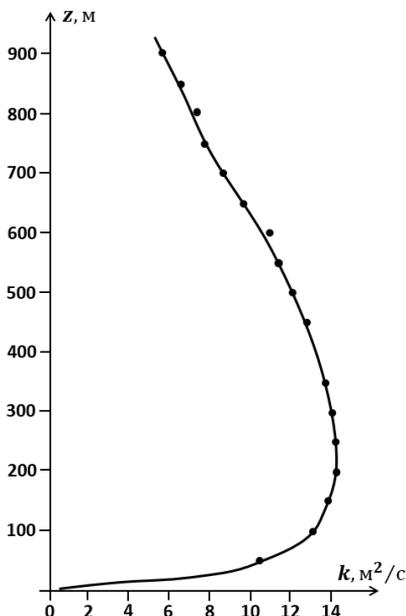


Рисунок 9.2 – Вертикальный профиль коэффициента турбулентности, полученный по результатам наблюдений за распределением вектора ветра с высотой.

Вертикальные профили коэффициента турбулентности имеют хорошо выраженный максимум на некоторой высоте в пограничном слое атмосферы, величина которого возрастает с ростом термической неустойчивости. Аналогичный максимум имеет и кинетическая энергия турбулентности, однако лишь при неустойчивой термической стратификации.

9.4 Универсальные профили характеристик турбулентности в пограничном слое

К характеристикам турбулентности относятся следующие параметры: коэффициент турбулентности $k(z)$, кинетическая энергия турбулентности $b(z)$, турбулентный путь смешения $l(z)$ и касательное напряжение трения (турбулентные потоки импульса)

$$k \frac{du}{dz} = \frac{\tau_x}{\rho} \equiv \eta(z), \quad k \frac{dv}{dz} = \frac{\tau_y}{\rho} \equiv \sigma(z). \quad (9.16)$$

Покажем, что существуют такие безразмерные функции, соответствующие приведенным параметрам, которые не должны зависеть ни от геострофического ветра, ни от параметра шероховатости. По этой причине указанные функции называются универсальными.

Дифференцирование исходных уравнений движения для стационарного горизонтально однородного пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2\omega_z(v - v_g) &= 0, \\ \frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2\omega_z(u - u_g) &= 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

по вертикали z при неизменности геострофического ветра с высотой (отсутствие термического ветра), и введение обозначений (9.16) приводит к результату

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{2\omega_z}{k} \sigma &= 0, \\ \frac{d^2\sigma}{dz^2} - \frac{2\omega_z}{k} \eta &= 0. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Уравнения решаются с граничными условиями для касательных напряжений при $z \rightarrow 0$ и при $z \rightarrow \infty$.

При $z \rightarrow \infty$ имеем очевидное условие

$$\eta(z \rightarrow \infty) = 0, \quad \sigma(z \rightarrow \infty) = 0, \quad (9.19)$$

соответствующее свободной атмосфере.

Для постановки условий при $z \rightarrow 0$ обратимся к выводам, вытекающим из понятия приземного слоя и его основного свойства: касательное напряжение на малых z не зависит от высоты и равно его значению на подстилающей поверхности

$$\left| \frac{\vec{\tau}(z)}{\rho} \right|_{z \rightarrow 0} = \sqrt{\left(\frac{\tau_x}{\rho} \right)_{z \rightarrow 0}^2 + \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right)_{z \rightarrow 0}^2} \equiv \sqrt{\sigma_0^2 + \eta_0^2} = \frac{\tau_0}{\rho} = v_*^2. \quad (9.20)$$

При этом данное соотношение выполняется независимо от численного значения параметра шероховатости подстилающей поверхности. При выборе направления оси Ox вдоль вектора касательного напряжения на подстилающей поверхности $\vec{\tau}_0$ граничные условия для уравнений (9.18) при $z \rightarrow 0$ принимают вид

$$\eta(z \rightarrow 0) = v_*^2, \quad \sigma(z \rightarrow 0) = 0, \quad (9.21)$$

В результате приходим к выводу, что в данной постановке задачи геострофический ветер и параметр шероховатости подстилающей поверхности не входят в общее число физических величин, участвующих в процессах турбулентного обмена. Уравнения (9.18), а также уравнения замыкания, принимающие вид

$$\begin{aligned} k &= l\sqrt{b} \\ \frac{\eta^2 + \sigma^2}{k} + \frac{g}{T} \frac{P(z)}{\rho C_p} - C \frac{b^2}{k} + \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz} &= 0 \\ l &= -2\alpha C^{1/4} \frac{\psi}{d\psi/dz}, \quad \psi = \frac{1}{k} \left(\frac{\eta^2 + \sigma^2}{k} + \frac{g}{T} \frac{P(z)}{\rho C_p} \right) \\ \frac{P(z)}{\rho C_p} &= -k \frac{d\theta}{dz} = k \left(\frac{P_0}{\rho C_p \alpha v_* z} - \gamma_H \right), \quad \gamma_H = \gamma_a - \gamma_p, \end{aligned} \quad (9.22)$$

позволяют записать всю группу физических величин, участвующих в данной задаче. Ее составляют одиннадцать размерных параметров: $z, \omega_z, v_*, \eta, \sigma, k, b, l, g/\bar{T}, P_0/\rho C_p, \gamma_H$. Среди них, согласно системе из пяти уравнений (9.22), пять величин η, σ, k, b, l являются искомыми параметрами задачи.

Остальные шесть величин z , ω_z , v_* , g/\bar{T} , $P_0/\rho C_p$, γ_H по отношению к искомому являются внешними определяющими параметрами.

Нетрудно увидеть, что в размерности этих величин входят три элементарных размерности: L , T и ϑ (размерности длины, времени и температуры соответственно). Следовательно, в этой группе должно быть три параметра с независимыми размерностями. Выбрав в качестве последних динамическую скорость v_* , параметр Кориолиса (или его половину ω_z) и параметр плавучести g/\bar{T} , при помощи известного метода анализа размерностей, получим восемь безразмерных комплекса. Во-первых, три безразмерных комплекса, составленных из внешних определяющих параметров

$$\begin{aligned} z_n = \frac{2\omega_z}{\varkappa v_*} z = \frac{z}{\lambda}, \quad \mu = -\frac{g}{\bar{T}} \varkappa^2 \frac{P_0/\rho C_p}{2\omega_z v_*^2} = \frac{\lambda}{L}, \\ \tilde{\Gamma} = \varkappa^4 \frac{g}{\bar{T}} \frac{\gamma_H}{(2\omega_z)^2} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Здесь μ – внутренний параметр стратификации, связанный с внешним параметром стратификации M равенством

$$\begin{aligned} \mu = \varkappa \frac{v_*}{2\omega_z} \left(\frac{-\varkappa \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p}}{v_*^3} \right) = -\varkappa^2 \frac{1}{2\omega_z v_*^2} \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p} \frac{V_g}{V_g} \frac{\Delta\theta^*}{\Delta\theta^*} = \\ = -\frac{\varkappa^3}{2} \frac{1}{\omega_z V_g} \frac{g}{\bar{T}} \Delta\theta^* \frac{T_*}{\Delta\theta^*} \frac{V_g}{v_*} = -\frac{\varkappa^3}{2} M \frac{T_*/\Delta\theta^*}{v_*/V_g}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

а L и λ – масштабы длины Монино-Обухова и Россби-Монтгомери соответственно. Названные величины задаются соотношениями

$$L = \frac{v_*^3}{-\varkappa \frac{g}{\bar{T}} \frac{P_0}{\rho C_p}}, \quad \lambda = \varkappa \frac{v_*}{2\omega_z}. \quad (9.25)$$

Во-вторых, пять комплексов, задающих искомые функции в безразмерном виде

$$\eta_n = \frac{\eta}{v_*^2}, \quad \sigma_n = \frac{\sigma}{v_*^2}, \quad b_n = C^{1/2} \frac{b}{v_*^2}, \quad k_n = \frac{k}{\alpha \sigma_* \lambda}, \quad l_n = \frac{l}{\alpha C^{1/4} \lambda} \quad (9.26)$$

Безразмерные константы в вышеперечисленных безразмерных комплексах введены для согласования коэффициентов в уравнениях при их приведении к безразмерному виду.

Замена размерных величин на соответствующие им безразмерные в уравнениях задачи и в граничных условиях приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta_n}{dz_n^2} + \frac{\sigma_n}{k_n} &= 0, \\ \frac{d^2 \sigma_n}{dz_n^2} - \frac{\eta_n}{k_n} &= 0. \\ k_n &= l_n \sqrt{b_n} \\ \frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{k_n} - k_n \left(\frac{\mu}{z_n} + \tilde{\Gamma} \right) - \frac{b_n^2}{k_n} + \alpha^2 C^{-1/2} \frac{d}{dz_n} k_n \frac{db_n}{dz_n} &= 0 \\ l_n &= -2 \frac{\psi_n}{d\psi_n/dz_n}, \quad \psi_n = \frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{k_n^2} - \left(\frac{\mu}{z_n} + \tilde{\Gamma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

(Известна модель с включением в турбулентный путь смешения влияния диффузии энергии турбулентности. В этом случае функции ψ_n и l_n принимают вид: $\psi_n = \frac{b_n^2}{k_n^2}, l_n = -\frac{\psi_n}{d\psi_n/dz_n}$.)

с граничными условиями

$$z_n \rightarrow 0: \quad \eta_n = 1, \quad \sigma_n = 0, \quad b_n = 1 \quad (9.28)$$

$$z_n \rightarrow \infty: \quad \eta_n = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad b_n = 0 \quad (9.29)$$

Замкнутая система уравнений (7.43) – (7.47) с граничными условиями (7.48) и (7.49) позволяет получить безразмерные вертикальные профили характеристик турбулентности. Как видно, они не зависят от внешних динамических параметров пограничного слоя V_g и z_0 , и зависят только от параметров, характеризующих условия стратификации вблизи подстилающей поверхности μ и на верхней границе пограничного слоя $\tilde{\Gamma}$.

При нейтральной стратификации как $\mu = 0$, так и $\tilde{\Gamma} = 0$, и безразмерные профили оказываются полностью универсальными.

В учебнике по динамической метеорологии [1] приводятся рассчитанные по рассмотренной модели безразмерные профили характеристик турбулентности. В качестве примера представим на рисунке 9.3 безразмерные профили коэффициента турбулентности и кинетической энергии турбулентности.

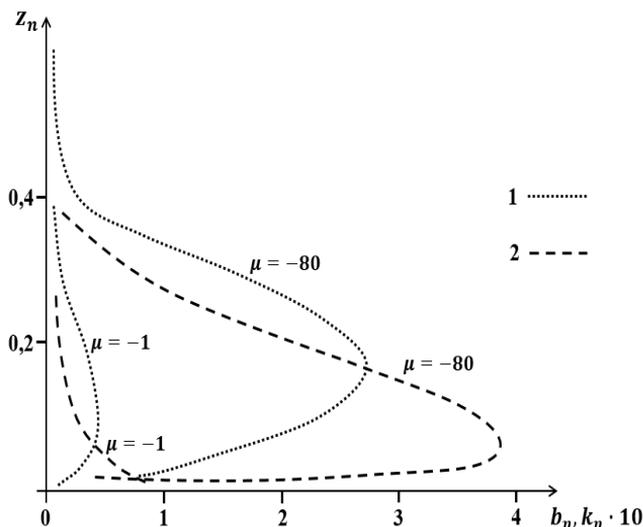


Рисунок 9.3 – Безразмерные вертикальные профили коэффициента турбулентности (кривые 1) и кинетической энергии турбулентности (кривые 2) при значениях внутреннего параметра стратификации $\mu = -1$ и $\mu = -80$. Приведенные графики демонстрируют наличие максимумов указанных величин на некоторой высоте в пределах пограничного слоя. Величина максимумов существенно возрастает при отдалении термической стратификации от равновесных условий.

Полученные результаты приводят к выводу относительно разности одноименных проекций скоростей реального и геострофического ветра. Уравнения (9.17) с введением безразмерных проекций скоростей

$$u_n = \frac{u}{v_*}, \quad v_n = \frac{v}{v_*}, \quad u_{gn} = \frac{u_g}{v_*}, \quad v_{gn} = \frac{v_g}{v_*} \quad (9.30)$$

могут быть записаны в виде

$$u_n(z_n) - u_{gn} = \frac{d\sigma_n}{dz_n} \equiv \sigma'_n(z_n, \mu, \tilde{\Gamma}), \quad (9.31)$$

$$v_n(z_n) - v_{gn} = -\frac{d\eta_n}{dz_n} \equiv \eta'_n(z_n, \mu, \tilde{\Gamma}). \quad (9.32)$$

Уравнения (9.31) и (9.32) свидетельствуют также об универсальности безразмерного вертикального профиля отклонения реального ветра от геострофического.

9.4 Законы сопротивления для термически стратифицированного пограничного слоя

Полученные выше общие зависимости внутренних параметров пограничного слоя от внешних параметров могут быть конкретизированы и сформулированы в виде так называемых законов сопротивления и теплообмена, впервые сформулированных Мониным А. С. [5], [6] для нейтральной стратификации. Ограничимся выводом законов сопротивления с учётом стратификации, предложенным в работе [2]. Основная идея при их получении заключается в том, чтобы распространить теорию подобия для термически стратифицированного приземного слоя атмосферы на весь пограничный слой атмосферы. В случае стационарного горизонтально однородного течения этот слой отличается от приземного слоя атмосферы лишь действием силы Кориолиса, и, следовательно, к определяющим параметрам, перечисленным в 8.4, достаточно добавить параметр Кориолиса $2\omega_z$. В таком случае для составляющих отклонения скорости ветра на высоте z от геострофического можно записать:

$$\begin{cases} u' = u - u_g = f_1 \left(z, v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}, \omega_z \right) \\ v' = v - v_g = f_2 \left(z, v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}, \omega_z \right) \end{cases} \quad (9.33)$$

Для краткости перепишем систему (9.33) в следующем виде

$$u'_i = f_i \left(z, v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}, \omega_z \right), \quad i = 1, 2 \quad (9.34)$$

Запишем формулы размерности для величин, входящих в выражение (9.34)

$$\begin{aligned} [u'_i] = LT^{-1}, \quad \left[\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \right] = \vartheta, \quad [\omega_z] = L^{-1}, \\ [z] = L, \quad [v_*] = LT^{-1} \end{aligned} \quad (9.35)$$

и заполним матрицу размерностей (таблица 9.2)

Таблица 9.2 – Матрица размерностей

	u'_i	$\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}$	ω_z	z	v_*
L	1	2	0	1	1
T	-1	-3	-1	0	-1

Поскольку $n = 5$, $m = 2$, то разность $n - m = 3$, и, следовательно, искомая зависимость может быть представлена в виде безразмерной функции, связывающей три безразмерных комплекса

$$\Pi_1 = \eta_n(\Pi_2, \Pi_3). \quad (9.36)$$

Если в качестве совокупности двух параметров с независимыми размерностями выбрать z и v_* , то

$$\Pi_1 = \frac{u'_i}{z^{\alpha_{11}} v_*^{\alpha_{21}}}, \quad (9.37)$$

$$\Pi_2 = \frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}}{z^{\alpha_{12}} v_*^{\alpha_{22}}}, \quad (9.38)$$

$$\Pi_3 = \frac{\omega_z}{z^{\alpha_{13}} v_*^{\alpha_{23}}}, \quad (9.39)$$

Равенство размерностей числителей и знаменателей безразмерных комплексов позволяет составить следующие системы уравнений для определения показателей степени α_{ij}

$$\begin{cases} L: 1 = \alpha_{11} + \alpha_{21}, \\ T: -1 = 0\alpha_{11} - \alpha_{21}; \end{cases} \quad (9.40)$$

$$\begin{cases} L: 2 = \alpha_{12} + \alpha_{22}, \\ T: -3 = 0\alpha_{12} - \alpha_{22}; \end{cases} \quad (9.41)$$

$$\begin{cases} L: 0 = \alpha_{13} + \alpha_{23}, \\ T: -1 = 0\alpha_{13} - \alpha_{23}; \end{cases} \quad (9.42)$$

Разрешив эти две системы алгебраических уравнений, получаем, что $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{21} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{22} = 3$, $\alpha_{13} = -1$, $\alpha_{23} = 1$ Тогда

$$\Pi_1 = \frac{u'_i}{v_*}, \quad (9.43)$$

$$\Pi_2 = z \frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}}{v_*^3} \quad (9.44)$$

$$\Pi_3 = z \frac{\omega_z}{v_*}, \quad (9.45)$$

С учетом полученных безразмерных комплексов, выражение (9.36) можно переписать в виде

$$\frac{u'_i}{v_*} = \eta_{nu_i} \left(z / \frac{v_*^3}{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}}, z / \frac{v_*}{\omega_z} \right) \quad (9.46)$$

Традиционно в безразмерные аргументы функции η_{nu_i} вводится постоянная Кармана κ . Тогда можно прийти к полученному в 8.4 масштабу длины Монино-Обухова

$$L = \frac{v_*^3}{-\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}} \quad (9.47)$$

а также масштаб длины Россби-Монтгомери

$$\lambda = \alpha \frac{v_*}{\omega_z} \quad (9.48)$$

Таким образом величина u'_i/v_* определяется двумя безразмерными аргументами: z/L и z/λ .

В рассматриваемой задаче удобно характеризовать тип термической стратификации не параметром z/L , а так называемым внутренним параметром стратификации μ

$$\mu = \frac{\lambda}{L} \quad (9.49)$$

Нетрудно связать внутренний параметр стратификации μ с внешним параметром стратификации M

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha \frac{v_*}{\omega_z} \left(\frac{-\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p}}{v_*^3} \right) = -\alpha^2 \frac{1}{\omega_z v_*^2} \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho C_p} \frac{V_g \Delta \theta}{V_g \Delta \theta} = \\ &= -\alpha^3 \frac{1}{\omega_z V_g} \frac{g}{T} \Delta \theta \frac{T_* V_g}{\Delta \theta v_*} = -\alpha^3 M \frac{T_*/\Delta \theta}{v_*/V_g} \end{aligned} \quad (9.50)$$

Преобразуем безразмерный аргумент z/L так, чтобы прийти к μ

$$\frac{z}{L} = \frac{z \lambda}{L \lambda} = \frac{\lambda z}{L \lambda} = \mu \frac{z}{\lambda} \quad (9.51)$$

Поскольку безразмерный аргумент z/L может быть представлен в виде произведения $\mu z/\lambda$, и поскольку при этом z/λ уже является аргументом функции, то достаточно рассматривать в качестве аргументов

функции только μ и z/λ . Формально после такой замены лишь изменится вид неизвестной функции ($\eta_{nu_i} \rightarrow \widetilde{\eta}_{nu_i}$)

$$\frac{u'_i}{v_*} = \widetilde{\eta}_{nu_i} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \quad (9.52)$$

Полагая индекс i сначала равным единице, а потом двум, приходим к следующей системе

$$\begin{cases} u - u_g = v_* \widetilde{\eta}_{nu} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \\ v - v_g = v_* \widetilde{\eta}_{nv} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \end{cases} \quad (9.53)$$

Таким образом, отклонения составляющих ветра являются функциями безразмерной высоты $z_n = z/\lambda$ и внутреннего параметра стратификации μ .

Выражения (9.53) справедливы во всем пограничном слое, то есть, в частности, и при малых z . Вспомним теперь, что при ориентации оси Ox по направлению касательного напряжения у подстилающей поверхности в приземном слое при нейтральной стратификации справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} u_g &= V_g \cos \beta, & v_g &= V_g \sin \beta \\ u &= \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{z}{z_0}, & v &= 0 \end{aligned} \quad (9.54)$$

Из записанных соотношений следует, что

$$\begin{cases} u - u_g = \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{z}{z_0} - V_g \cos \beta \\ v - v_g = -V_g \sin \beta \end{cases} \quad (9.55)$$

Так как при достаточно малых z ($z \ll |L|$) термические факторы не играют заметной роли, то записанные выражения должны выполняться асимптотически при любой стратификации в области малых z . Кроме того,

при малых z должны выполняться одновременно формулы (9.53) и (9.55). Комбинируя их, получаем следующие соотношения

$$\begin{cases} \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{z}{z_0} - V_g \cos \beta = v_* \widetilde{\eta}_{nu} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \\ -V_g \sin \beta = v_* \widetilde{\eta}_{nv} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right), \end{cases} \quad (9.56)$$

справедливые лишь асимптотически в пределах логарифмического слоя.

Разделив оба уравнения системы (9.56) на v_*/\varkappa , имеем

$$\begin{cases} \ln \frac{z}{z_0} - \varkappa \frac{V_g}{v_*} \cos \beta = \varkappa \widetilde{\eta}_{nu} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \\ -\varkappa \frac{V_g}{v_*} \sin \beta = \varkappa \widetilde{\eta}_{nv} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \end{cases} \quad (9.57)$$

В выражение под логарифмом искусственно введем параметр λ , умножая и деля на него и произведем несложные преобразования

$$\ln \frac{z}{z_0} = \ln \frac{z \lambda}{\lambda z_0} = \ln \frac{z}{\lambda} + \ln \frac{\lambda}{z_0} \quad (9.58)$$

Отношение λ/z_0 может быть представлено через χ и Ro следующим образом

$$\frac{\lambda}{z_0} = \varkappa \frac{v_*}{\omega_z} \frac{1}{z_0} \frac{V_g}{V_g} = \varkappa \frac{v_*}{V_g} \frac{V_g}{\omega_z z_0} = \varkappa \chi Ro \quad (9.59)$$

В таком случае

$$\ln \frac{\lambda}{z_0} = \ln(\varkappa \chi Ro) = \ln \varkappa + \ln \chi + \ln Ro \quad (9.60)$$

Принимая во внимание проведенные преобразования, перепишем систему (9.57)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln \alpha + \ln \chi + \ln R_0 - \frac{\alpha}{\chi} \cos \beta = \alpha \tilde{\eta}_{nu} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) - \ln \frac{z}{\lambda} \\ -\frac{\alpha}{\chi} \sin \beta = \alpha \tilde{\eta}_{nv} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \end{array} \right. \quad (9.61)$$

Теперь, поскольку левые части выписанных равенств от z не зависят, необходимо принять, что и правые части также не зависят от z , а следовательно, являются функциями только от μ . Обозначив далее

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z_n \rightarrow 0} \left[\alpha \tilde{\eta}_{nu} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) - \ln \frac{z}{\lambda} \right] = B(\mu) + \ln \alpha \\ \lim_{z_n \rightarrow 0} \left[\alpha \tilde{\eta}_{nv} \left(\frac{z}{\lambda}, \mu \right) \right] = A(\mu) \end{array} \right. \quad (9.62)$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ – безразмерные функции аргумента μ , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln \chi + \ln R_0 - \frac{\alpha}{\chi} \cos \beta = B(\mu) \\ -\frac{\alpha}{\chi} \sin \beta = A(\mu) \end{array} \right. \quad (9.63)$$

Из второго уравнения системы следует, что

$$\sin \beta = -\frac{\chi}{\alpha} A(\mu) \quad (9.64)$$

Тогда угол β можно найти как

$$\beta = -\arcsin \left[\frac{A(\mu)}{\alpha} \chi \right] \quad (9.65)$$

Чтобы формула была справедлива для обоих полушарий, необходимо в выражение (9.65) ввести функцию $\text{sign}(\omega_z)$, представляющую собой знак параметра ω_z (+ или -)

$$\beta = -\arcsin \left[\frac{A(\mu)}{\alpha} \chi \right] \text{sign}(\omega_z) \quad (9.56)$$

Используя выражение (9.64) и основное тригонометрическое тождество, можно привести первое уравнение системы (9.63) к виду

$$\ln\chi + \ln Ro = B(\mu) + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\chi^2} - A^2(\mu)} \quad (9.67)$$

Объединяя полученные результаты, окончательно получим

$$\begin{cases} \ln\chi + \ln Ro = B(\mu) + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\chi^2} - A^2(\mu)} \\ \beta = -\arcsin\left[\frac{A(\mu)}{\alpha}\chi\right] \operatorname{sign}(\omega_z) \end{cases} \quad (9.68)$$

Эти соотношения представляют собой законы сопротивления для планетарного пограничного слоя, по физическому смыслу вполне аналогичные известным законам сопротивления, скажем, при течениях в трубах, установленным Прандтлем и Карманом. Итак, если знать вид функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$, то формулы (9.68) дают нам систему уравнений для установления связи между геострофическим коэффициентом трения χ и углом β отклонения приземного ветра от направления геострофического ветра, с одной стороны, и параметрами Ro и μ с другой.

Безразмерные функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ могут быть определены эмпирически из наблюдений или численных экспериментов.

Заметим, что при нейтральной стратификации ($\mu = 0$) функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ имеют конкретные численные значения.

Полученные законы сопротивления могут быть обобщены на случай учета стратификации влажности. Формально вид зависимостей (9.68) не изменяется, однако вместо внутреннего параметра стратификации μ используется параметр $\widetilde{\mu}$, определяемый как

$$\widetilde{\mu} = \frac{\lambda}{L}, \quad (9.69)$$

где

$$\widetilde{L} = \frac{L}{1 + \frac{a}{Bo}} \quad (9.70)$$

масштаб длины Мони́на-Обухова с учетом стратификации влажности, введенный в 8.7. Тогда безразмерные функции A и B будут зависеть от аргумента $\tilde{\mu}$.

Контрольные вопросы

1. Перечислите внешние параметры, определяющие структуру пограничного слоя.
2. Какой комбинацией внешних параметров определяется высота пограничного слоя?
3. Составьте безразмерный параметр, отражающий зависимость от высоты.
4. Составьте безразмерный комплекс, отражающий влияние динамического фактора.
5. Составьте безразмерный комплекс, характеризующий влияние стратификации.
6. Что связывают между собой законы сопротивления?

Литература к главе 9

- 1 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 607 с.
- 2 Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1970. – 292 с.
- 3 Попов А.М., под редакцией Лайхтмана Д.Л. Расчётные профили метеорологических характеристик в планетарном пограничном слое атмосферы. -ЛГМИ, Л. 1975.-97с.
- 4 Браун, Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя / Перевод с англ. Э.В. Попова; Под ред. Д.В. Чаликова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 150 с.
- 5 Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 424 с.
- 6 Монин А.С. Гидродинамика атмосферы, океана и земных недр. - Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1999.-524 с.

10 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНО ОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

- 10.1 Общая постановка задачи о суточном ходе метеорологических величин в пограничном слое атмосферы**
- 10.2 Модельная задача о суточном ходе температуры в пограничном слое атмосферы**
- 10.3 Приведение уравнений и граничных условий к безразмерному виду**
- 10.4 Решение задачи о суточном ходе температуры**
- 10.5 Анализ решения задачи о суточном ходе температуры**
- 10.6 Ночное понижение температуры подстилающей поверхности. Радиационные заморозки.**
- 10.7 Особенности суточного хода характеристик влажности**

10.1 Общая постановка задачи о суточном ходе метеорологических величин в пограничном слое атмосферы

Нестационарные процессы в пограничном слое могут существовать либо за счёт изменения динамических или термических условий, формирующихся в свободной атмосфере (на верхней границе пограничного слоя), либо за счёт изменения термических характеристик подстилающей поверхности, связанных главным образом с изменчивостью поступающих на поверхность радиационных потоков [1].

Между изменениями различных метеорологических величин существует тесная связь. Так, изменение вертикального градиента температуры приводит к изменению интенсивности турбулентного обмена и как следствие, к изменению коэффициента турбулентности. Тем самым будет происходить обратное влияние суточного хода интенсивности турбулентного обмена на суточный ход температуры воздуха и её вертикального градиента. Учет таких взаимосвязей суточных изменений метеорологических величин возможен лишь при совместном рассмотрении их временного хода.

Математическое описание нестационарных процессов в пограничном слое атмосферы должно основываться на замкнутой системе уравнений, сформулированной в разделе 7.1. В уравнениях указанной системы должны присутствовать локальные производные $\partial f / \partial t$. При этом

будем анализировать нестационарные процессы в условиях горизонтальной однородности. Кроме этого можно дополнительно полагать достаточно малыми и слагаемые, связанные с лучистым притоком тепла в воздухе, фазовыми превращениями и вертикальными движениями. В таком случае система основных уравнений запишется следующим образом [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = k\Psi - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}, \quad (10.5)$$

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{b\sqrt{b}}{l}, \quad (10.6)$$

$$\Psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{T} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (10.7)$$

$$k = C_k l \sqrt{b}. \quad (10.8)$$

$$l = -2\tilde{\alpha} \frac{\Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}}. \quad (10.9)$$

Важно отметить, что термодинамические характеристики, участвующие в общем нестационарном процессе, зависят от температуры подстилающей поверхности T_0 . Однако, последняя определяется не только процессами в атмосфере, но и теплообменом поверхности с нижележащей областью (сушей или водой). При такой неопределённости температуры подстилающей поверхности необходимо добавить к системе (10.1) -(10.9) уравнение теплообмена в почве (или в воде):

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z_1} a \frac{\partial T_1}{\partial z_1}, \quad (10.10)$$

где T_1 температура почвы, z_1 – глубина, a – коэффициент молекулярной теплопроводности почвы.

Заметим, что в атмосфере вертикальная ось z (ось высоты) направлена от подстилающей поверхности ($z = 0$) вверх, а в почве вертикальная ось z_1 (ось глубин) направлена от подстилающей поверхности ($z_1 = 0$) вниз.

В общем случае поставленная задача является достаточно сложной и может быть решена только численно. Однако, при втором варианте результат задачи можно получить последовательными решениями: сначала решаются нестационарные уравнения теплообмена при заданных динамических параметрах задачи для определения изменений температуры, с их последующим использованием для решения динамической части задачи,

Далее рассмотрим именно первую, термическую часть общей задачи нестационарных процессов в пограничном слое атмосферы.

10.2 Модельная задача суточного хода температуры в пограничном слое атмосферы

В модельной задаче суточным ходом температуры в пограничном слое будем считать изменения температуры, вызываемые только изменениями поступающей на подстилающую поверхность потока солнечной радиации [2].

Изменения теплового режима пограничного слоя в течение суток обусловлены таким геофизическим фактором, как вращение Земли вокруг собственной оси. Оно определяет основной характер изменения в течение суток потока солнечной радиации к земной поверхности и атмосфере, В

дневные часы земная поверхность вследствие потока солнечной радиации нагревается, а ночью при отсутствии солнечной радиации охлаждается под влиянием собственного излучения. В то же время непосредственное поглощение воздухом коротковолновой солнечной радиации днем и собственное излучение атмосферы ночью сравнительно мало влияют на температуру воздуха.

Будем полагать постоянство по вертикали коэффициента турбулентной теплопроводности воздуха (коэффициента турбулентности для переноса тепла) $k = Const$, а также коэффициента молекулярной теплопроводности почвы ($a = const$). Такой подход позволяет выяснить ряд наиболее существенных особенностей процесса и, кроме того, дает возможность получить связь между характеристиками нестационарного процесса и физическими параметрами воздуха и почвы (или воды).

В этом случае достаточно рассмотреть два уравнения: уравнение притока тепла (10.3) и уравнение теплопроводности почвы (10.10) в форме:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2}. \quad (10.12)$$

К записанной системе уравнений необходимо добавить начальные и граничные условия.

Начальные условия отражают известное вертикальное распределение температуры в атмосфере и в почве (в воде) в начальный момент при $t=0$:

$$\theta(z)|_{t=0} = \bar{\theta}(z), \quad T_1(z)|_{t=0} = \bar{T}_1(z_1). \quad (10.13)$$

Заметим, что, если изучается установившийся периодический процесс, задача может быть рассмотрена без начальных условий.

Напомним, что количество граничных условий, необходимых для решения дифференциальных уравнений, определяется порядком производных по пространственным координатам. В данной задаче два уравнения содержат производные второго порядка по вертикальной

координате (одна по высоте, другая по глубине). Это означает, что необходимо сформулировать четыре граничных условия.

Два граничных условия – должны отражать затухание колебаний температуры за пределами пограничного слоя атмосферы при $z > H$, ($z \rightarrow \infty$) и деятельного слоя почвы при $z_1 > H_1$, ($z_1 \rightarrow \infty$).

Суть указанных граничных условий состоит в том, что на высотах $z > H$ и глубинах $z_1 > H_1$ суточные колебания температуры отсутствуют, а сами температуры равны некоторым средним значениям: \bar{T} и \bar{T}_1 соответственно. С точки зрения решения задачи, целесообразно задавать указанную пару граничных условий при $z \rightarrow \infty$ и $z_1 \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{array}{l} z \rightarrow \infty: \quad \theta = \bar{\theta}(z), \\ z_1 \rightarrow \infty: \quad T_1 = \bar{T}_1(z_1) \end{array} \right\} \quad (10.14)$$

Два других граничных условия должны отражать так называемые «условия склейки» решений, относящихся к двум различным средам (атмосфера и почва) с отличающимися физическими свойствами, и разделённых границей $z = z_1 = 0$.

Условия склейки отражают выполнение на границе раздела областей двух физически понятных требований: 1) – непрерывность температуры при переходе из одной области в другую, и 2) – непрерывность потока тепла, заключающаяся в равенстве потока тепла через поверхность раздела со стороны почвы и суммы всех потоков тепла со стороны атмосферы:

$$B_0 = R_0 - (P_0 + LE_0).$$

Такое условие выражается уравнением теплового баланса на границе раздела [3].

Полагая, что при $z = 0$ с достаточной точностью выполняется равенство $\theta_0(t) = T_0(t)$, математически эти условия формулируются следующим образом

$$z = z_1 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_0(t) = T_{10}(t), \quad (10.15) \\ R_0(t) = P_0(t) + LE_0(t) + B_0(t). \quad (10.16) \end{array} \right.$$

Напомним, что радиационный баланс $R_0(t)$ представляет собой разность между суммарным потоком коротковолновой J_K^\downarrow и длинноволновой радиации E_A^\downarrow , поступающим на поверхность из атмосферы, и потоком длинноволнового излучения E_S^\uparrow от подстилающей поверхности в атмосферу.

Величина $R_0(t)$ может быть принята известной заданной величиной, независимой от искомых характеристик задачи $\theta(z)$ и $T_1(z_1)$, и её можно выразить следующей формулой [3]

$$R_0(t) = J_K^\downarrow(t) - E_A^\downarrow(t) - E_S^\uparrow(t) = J_K^\downarrow(t) - E_{эф}(t).$$

Величина $E_{эф} = E_S^\uparrow - E_A^\downarrow$, равная разности между длинноволновым излучением поверхности и противоизлучением атмосферы называется эффективным излучением земной поверхности.

Изменения радиационного баланса подстилающей поверхности приводят к тому, что температура подстилающей поверхности отличается от температуры прилегающих к ней слоев атмосферы и почвы. На подстилающей поверхности происходит теплообмен между атмосферой и почвой и в результате формируются меняющиеся с течением времени турбулентные потоки явного P_0 и скрытого тепла испарения LE_0 с поверхности в атмосфере и молекулярный поток тепла в почве B_0 .

Суммарная величина этих трёх потоков регулируется меняющимся в течении суток радиационным балансом, что и зафиксировано уравнением теплового баланса подстилающей поверхности, которое с учётом связи потоков с вертикальными градиентами соответствующих величин, запишется в виде

$$\rho C_p k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} + \rho k \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z=0} + \rho_1 C_1 a \left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right)_{z_1=0} = -R(t). \quad (10.17)$$

Преобразуем величину $\left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z=0}$ полагая, что массовую долю водяного пара q можно с определённым приближением представить в виде

$$q = r_0 q_{max}(T)$$

где q_{max} – насыщающее значение массовой доли водяного пара, r_0 – относительная влажность подстилающей поверхности (то есть отношение влажности на подстилающей поверхности к насыщающей при ее температуре), полагаемая постоянной в течение суток.

В таком случае

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{z=0} &= r_0 \left(\frac{dq_{max}}{dT}\right)_{T=\bar{T}_0} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} \\ &\approx r_0 \left(\frac{dq_{max}}{dT}\right)_{T=\bar{T}_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} \end{aligned} \quad (10.18)$$

так что

$$R(t) = -\rho \tilde{C} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} - \rho_1 C_1 a \left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=0}. \quad (10.19)$$

где

$$\tilde{C} = C_p + L r_0 \left(\frac{dq_{max}}{dT}\right)_{T=\bar{T}_0} \quad (10.20)$$

Запишем граничные условия (10.15-10.16) в окончательном виде

$$z = z_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0(t) = T_{10}(t) \\ \rho \tilde{C} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} + \rho_1 C_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=0} = -R_0(t). \end{cases} \quad (10.21)$$

Четвертое граничное условие определяет теплообмен на границе контакта двух сред и формулируется через рассмотренное выше уравнение теплового баланса. При этом суточный ход радиационного баланса представим в виде суммы его среднесуточного значения \bar{R}_0 и отклонения $R'_0(t)$, меняющегося в течение суток по периодическому закону в виде гармонической волны [2]

$$R'_0(t) = A_R e^{i\omega\tau} = A_R (\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau), \quad (10.22)$$

где

$$\tau = (t - 12) \text{час}, \quad \omega\tau = \omega t - \frac{\pi}{2}. \quad (10.23)$$

Выбор в равенстве (10.22) реальной части ($A_R \cos \omega\tau$) или мнимой ($A_R \sin \omega\tau$) зависит от выбора начала отсчёта времени. Если функция $R'_0(\tau)$ отсчитывается от $t=0$, соответствующему моменту начала астрономических суток (полночь), то для суточного хода отклонения радиационного баланса следует выбрать мнимую часть равенства (10.22), т.е. функцию ($\sin \omega\tau$). Это соответствует максимальному по величине, но отрицательному отклонению радиационного баланса R'_0 . Если же радиационный баланс отсчитывать от $\tau = (t - 12) \text{час} = 0$, $t = 12 \text{час}$, что соответствует моменту максимального положительного значения величины R'_0 (истинный астрономический полдень), то следует выбрать реальную часть равенства (10.22), т.е. функцию ($\cos \omega\tau$).

В соотношениях (10.22) и (10.23) приняты следующие обозначения: A_R – амплитуда суточного хода радиационного баланса, \bar{R} – среднесуточное значение радиационного баланса, t – время, отсчитываемое от начала астрономических суток, τ – время, отсчитанное от момента максимального значения радиационного баланса подстилающей поверхности, соответствующее максимуму потока коротковолновой радиации, то есть моменту истинного полудня. С учётом того, что $\delta\tau = \delta t$, в дальнейшем в уравнениях используется переменная времени t .

С учетом принятой аппроксимации суточного хода радиационного баланса уравнение теплового баланса принимает вид

$$-\rho\tilde{c}k \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)_{z=0} - \rho_1 C_1 a \left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right)_{z_1=0} = \bar{R} + A_R e^{i\omega\tau}. \quad (10.24)$$

По аналогии с изложенными в предыдущих главах задачах (задача Экмана и задача о трансформации параметров потока) решение удобно искать в отклонениях температуры от некоторой известной, не меняющейся в течении времени, величины. Поскольку в задаче о суточном ходе рассматривается периодический процесс, то целесообразно в качестве постоянной составляющей принять среднесуточные значения температуры атмосферы и почвы, являющиеся функциями только вертикальной

координаты (высоты, глубины). Представив температуры в виде суммы соответствующих среднесуточных значений $(\bar{\theta}, \bar{T}_1)$ и отклонений от них (θ', T'_1)

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta}(z) + \theta'(\tau, z) \\ T_1 = \bar{T}_1(z_1) + T'_1(\tau, z_1) \end{cases} \quad (10.25)$$

перепишем систему (10.19)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\theta}(z)}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta'(\tau, z)}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 \bar{\theta}(z)}{\partial z^2} + k \frac{\partial^2 \theta'(\tau, z)}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \bar{T}_1(z_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial T'_1(\tau, z_1)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \bar{T}_1(z_1)}{\partial z_1^2} + a \frac{\partial^2 T'_1(\tau, z_1)}{\partial z_1^2} \end{cases} \quad (10.26)$$

При этом система (10.26) распадается на две самостоятельные задачи.

Одна из них – это стационарная задача о распределении среднесуточных значений с уравнениями

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = 0 \rightarrow k \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = 0, \quad (10.27)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \tau} = 0 \rightarrow a \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial z_1^2} = 0 \quad (10.28)$$

и граничными условиями

$$z \rightarrow \infty (z > h): \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}(z), \quad (10.29)$$

$$z_1 \rightarrow \infty (z > h): \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_1(z_1), \quad (10.30)$$

$$z = z_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{\theta}_0 = \bar{T}_{10} \\ \bar{R}_0 = -\rho \tilde{C} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_{z=0} - \rho_1 C_1 \left(\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z_1} \right)_{z_1=0} \end{cases} \quad (10.31)$$

$$\quad (10.32)$$

Другая задача – это задача о суточном ходе отклонений температуры от её среднесуточных значений, уравнения которой и

граничные условия в соответствии с равенствами (10.27-10.32) принимают вид:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}, \quad (10.33)$$

$$\frac{\partial T'_1}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T'_1}{\partial z_1^2}, \quad (10.33a)$$

$$z \rightarrow \infty: \theta' = 0, \quad (10.34)$$

$$z_1 \rightarrow \infty: T'_1 = 0, \quad (10.34a)$$

$$z = z_1 = 0: \theta'_0(\tau) = T'_{10}(\tau) = w'(\tau), \quad (10.35)$$

$$z = z_1 = 0: R(t) = A_R e^{i\omega t} = -\rho \tilde{C} k \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z} \right)_{z=0} - \rho_1 C_1 a \left(\frac{\partial T'_1}{\partial z_1} \right)_{z_1=0}. \quad (10.36)$$

Данная задача представляет собой двухслойную задачу теплопроводности.

10.3 Приведение уравнений и граничных условий к безразмерному виду

Приведём уравнения задачи к безразмерному виду используя безразмерные переменные и функции:

$$\left. \begin{aligned} z_n &= \frac{z}{\sqrt{k/\omega}}, & z_{1n} &= \frac{z_1}{\sqrt{a/\omega}}, & \tau_n &= \tau \cdot \omega, \\ \theta_n &= \frac{\theta'}{T_*}, & T_{1n} &= \frac{T'_1}{T_*} \end{aligned} \right\}. \quad (10.37)$$

Здесь T_* некоторый характерный масштаб температуры, величина которого будет определена при дальнейшем анализе уравнений и граничных условий.

С использованием безразмерных величин (10.37) уравнения задачи и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial \theta'_n}{\partial \tau_n} = \frac{\partial^2 \theta'_n}{\partial z_n^2}, \quad (10.38)$$

$$z_n \rightarrow \infty: \theta'_n = 0, \quad (10.39)$$

$$z_n = 0: \theta'_{n0}(\tau) = w'_{n0}(\tau), \quad (10.40)$$

$$\frac{\partial T'_{1n}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T'_{1n}}{\partial z_{1n}^2}, \quad (10.41)$$

$$z_{1n} \rightarrow \infty: T'_{1n} = 0, \quad (10.42)$$

$$z_{1n} = 0: T'_{1n0}(\tau) = w'_{n0}(\tau). \quad (10.43)$$

$$R(t) = A_R e^{i\omega\tau} = -T_* \sqrt{\omega} \left[\rho \tilde{C} \sqrt{k} \left(\frac{\partial \theta'_n}{\partial z_n} \right)_{z_n=0} + \rho_1 C_1 \sqrt{a} \left(\frac{\partial T'_{1n}}{\partial z_{1n}} \right)_{z_{1n}=0} \right]. \quad (10.44)$$

Обратим внимание на следующие тождественность уравнения для атмосферы (10.38) с граничными условиями (10.39) -(10.40) и уравнения для почвы (10.41) с граничными условиями (10.42) -(10.43).

Из тождественности систем для атмосферы и почвы следует, что решения для безразмерных функций температуры должны быть равны

$$\theta'_n(\tau_n, z_n) \equiv T'_{1n}(\tau_n, z_{1n}) = w'_n(\tau_n, \zeta_n), \quad (10.45)$$

и, следовательно, равны производные по вертикальной координате

$$\left(\frac{\partial \theta'_n}{\partial z_n} \right)_{z_n=0} = \left(\frac{\partial T'_{1n}}{\partial z_{1n}} \right)_{z_{1n}=0} = \left(\frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} \right)_{\zeta_n=0}. \quad (10.46)$$

С учетом (10.46), условие (10.44) принимает вид

$$A_R e^{i\omega\tau} = -T_* \sqrt{\omega} (\rho \tilde{C} \sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a}) \cdot \left(\frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} \right)_{\zeta_n=0}. \quad (10.47)$$

Выразим из (10.49) производную по вертикальной координате

$$\left. \frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} \right|_{\zeta_n=0} = -\frac{1}{T^*} \frac{A_R}{\sqrt{\omega}(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})} e^{i\omega\tau}. \quad (10.48)$$

Соотношение (10.50) даёт основание для определения масштабов температуры T^* и радиационного баланса R^* :

$$\left. \begin{aligned} T^* &= \frac{A_R}{\sqrt{\omega}(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})}, \\ R^* &= A_R. \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

В результате получили уравнение и граничные условия в окончательном безразмерном виде:

$$\frac{\partial w'_n}{\partial \tau_n} = \frac{\partial^2 w'_n}{\partial \zeta_n^2}, \quad (10.50)$$

$$\zeta_n \rightarrow \infty: w'_n = 0, \quad (10.51)$$

$$\zeta_n = 0: \frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} = -\frac{R'_0(\tau_n)}{A_R} = -R'_n(\tau_n) = -e^{i\tau_n}. \quad (10.52)$$

Проведенный выше анализ позволил двухслойную задачу теплопроводности свести к однослойной задаче теплопроводности для полуограниченной среды относительно безразмерной переменной

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n) \equiv \theta'_n(\tau_n, z_n) = T'_{1n}(\tau_n, z_{1n})$$

Согласно уравнению (10.50) и граничным условиям (10.51)-(10.52) безразмерное решение должно иметь вид

$$w'_n = F(\tau_n, \zeta_n), \quad (10.53)$$

или

$$w' = T^* F(\tau_n, \zeta_n) = \frac{A_R}{\sqrt{\omega}(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})} F(\tau_n, \zeta_n). \quad (10.54)$$

10.4 Решение задачи о суточном ходе температуры

Учитывая то, что источник возмущения (радиационный баланс поверхности) процесса теплообмена атмосферы и почвы имеет волновой характер с частотой ω , решение также должно иметь волновой вид с такой же частотой ω , и его можно искать в следующем виде

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n) = e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \beta\zeta_n)}. \quad (10.55)$$

Здесь β и φ_0 – неопределенные пока величины, из которых β имеет смысл волнового числа на вертикальном направлении, а φ_0 – характеризует фазу волны в начальный момент времени.

Вычислим производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w'_n}{\partial \tau_n} &= i e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \beta\zeta_n)}, \\ \frac{\partial^2 w'_n}{\partial \zeta_n^2} &= \beta^2 e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \beta\zeta_n)} \end{aligned} \right\} \quad (10.56)$$

Подставляя решение (10.55) в уравнение системы (10.52) получим равенство

$$i e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \beta\zeta_n)} = \beta^2 e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \beta\zeta_n)},$$

из которого следует

$$\beta = \pm\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(i+1). \quad (10.57)$$

Учитывая граничное условие

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n)\Big|_{\zeta_n=\infty} = 0,$$

которое будет выполняться только при выборе в формуле для β знака (+), а также тот факт, что решение не должно содержать мнимой части, запишем

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n) = \operatorname{Re}(e^{i(\tau_n + \varphi_0)} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(i+1)\zeta_n}) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} \operatorname{Re}(e^{i(\tau_n + \varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n)}),$$

или в более конкретной форме

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} \cos(\tau_n + \varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n). \quad (10.58)$$

Выражение для производной принимает вид

$$\frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} (\cos \psi - \sin \psi), \quad (10.59)$$

где $\psi = \tau_n + \varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n$

С учётом равенств

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

запишем соотношение (10.59) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'_n}{\partial \zeta_n} &= -e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} (\cos \psi \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \psi \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = \\ &= -e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} \cos[\tau_n + (\varphi_0 + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n] \end{aligned} \quad (10.60)$$

Примем за начало отсчёта времени $\tau = 0 \rightarrow \tau_n = 0$ момент максимального значения радиационного баланса в его периодическом изменении. Это означает, что

$$R'_0(t) = A_R \cos \omega t.$$

В таком случае граничное условие (10.54) при $\zeta_n = 0$ с учётом равенства (10.60) даёт результат

$$-\cos \tau_n = -\cos\left[\tau_n + \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (10.61)$$

Равенство (10.61) приводит к выводу

$$\varphi_0 + \frac{\pi}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{4}. \quad (10.62)$$

Окончательно решение (10.58) принимает вид

$$w'_n(\tau_n, \zeta_n) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_n} \cdot \cos\left[\tau_n - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta\right)\right]. \quad (10.63)$$

Переходя к размерным величинам, получим для отклонения температуры воздуха от её среднесуточного распределения $\bar{\theta}(z)$ [3]:

$$\theta'(t, z) = \frac{A_R e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z}}{\sqrt{\omega(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})}} \cdot \cos\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right)\right]. \quad (10.64)$$

Решение для почвы имеет аналогичный вид

$$T'(t, z_1) = \frac{A_R e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}z_1}}{\sqrt{\omega(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})}} \cdot \cos\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2a}}z_1\right)\right]. \quad (10.65)$$

10.5 Анализ решения задачи о суточном ходе температуры

Анализ формул (10.64) свидетельствует о том, что отклонение температуры от среднесуточного значения на высоте z в конкретный момент времени τ имеет вид гармонической функции

$$\theta'(\tau, z) = A(z)\cos[\psi(\tau, z)]. \quad (10.66)$$

В соотношении (10.89) множитель, стоящий перед функцией косинуса, представляет собой амплитуду колебаний температуры на произвольной высоте z

$$A(z) = \frac{A_R}{\sqrt{\omega(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z}, \quad (10.67)$$

а аргумент функции косинуса – фазу колебаний температуры на произвольной высоте z

$$\psi(\tau, z) = \omega\tau - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right). \quad (10.68)$$

Имея ввиду сказанное, анализ распространения тепловой волны в атмосфере следует разделить на два этапа: анализ факторов, определяющих величину амплитуды тепловой волны и ее затухание с высотой, а также анализ сдвига фазы тепловой волны.

Анализ факторов, определяющих величину амплитуды тепловой волны и ее затухание с высотой

Из соотношения (10.67) следует, что амплитуда колебаний температуры на подстилающей поверхности ($z = z_1 = 0$) равна

$$A_0 = \frac{A_R}{\sqrt{\omega(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})}}. \quad (10.69)$$

Как видно, амплитуда суточного хода температуры подстилающей поверхности прямо пропорциональна амплитуде колебаний радиационного баланса A_R . Соответственно, на суточный ход влияют все факторы, влияющие на амплитуду радиационного баланса. Например, существенное влияние на амплитуду радиационного баланса оказывает облачность.

Амплитуда колебаний температуры подстилающей поверхности существенным образом зависит от коэффициента турбулентности k . Чем больше его величина, тем интенсивнее отток тепла от поверхности,

уменьшая её нагрев в дневные часы, а в ночное время потоки тепла из нагретого днём воздуха уменьшают величину выхолаживания поверхности. Благодаря этому при сильно развитой турбулентности амплитуда суточных колебаний температуры поверхности оказывается сравнительно малой.

Амплитуда колебаний температуры подстилающей поверхности зависит от увлажненности подстилающей поверхности и прилегающего к ней слоя воздуха. Суточный ход над увлажненными поверхностями оказывается сглаженным по отношению к суточному ходу над сухой поверхностью.

Амплитуда колебаний температуры подстилающей поверхности зависит от теплофизических свойств почвы: объемной теплоемкости $\rho_1 C_1$ и теплопроводности a . Чем выше теплопроводность и теплоёмкость почвы, тем интенсивнее отток тепла от поверхности, что уменьшает её нагрев в дневные часы. Ночью поток тепла в почве направлен к поверхностному слою и частично компенсирует потери тепла поверхностью на излучение, что несколько повышает минимальную температуру. Таким образом, суточный ход температуры над хорошо проводящей почвой оказывается более сглаженным, чем над почвой с малой теплопроводностью. Отметим, что так как у воды объёмная теплоёмкость и коэффициент теплопроводности существенно больше, чем у почвы, над водоёмами суточный ход температуры практически отсутствует.

Согласно формуле (10.67) амплитуда колебаний температуры убывает с высотой по экспоненциальному закону

$$A(z) = A_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z}. \quad (10.70)$$

Скорость затухания колебаний температуры с высотой характеризуется коэффициентом затухания

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2k}}. \quad (10.71)$$

Чем больше величина β , тем быстрее убывает амплитуда колебаний температуры с высотой. Согласно формуле (10.71) величина β обратно пропорциональна корню квадратному из коэффициента турбулентности. Таким образом, чем больше коэффициент турбулентности, тем медленнее убывает амплитуда колебаний, увеличивая высоту их распространения.

Несмотря на то, что суточные колебания температуры воздуха должны распространяться на весь пограничный слой, для задачи о суточном ходе температуры вводится понятие теплового пограничного слоя. Под этим понятием принимается часть динамического (Экмановского) пограничного слоя, в которой суточные колебания температуры хорошо выражены. Количественную оценку высоты теплового пограничного слоя H позволяет получить формула (10.70). Перепишем указанную формулу, выражая отношение амплитуды A_0 к амплитуде $A(z)$

$$\frac{A(z)}{A_0} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z}. \quad (10.72)$$

На некоторой высоте $z = H$ суточными колебаниями температуры с определённой точностью можно пренебречь. Практически, колебаниями можно пренебречь, если их амплитуда будет составлять заданную малую долю ε от амплитуды колебаний температуры на подстилающей поверхности, та что

$$\frac{A(H)}{A_0} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}H} = \varepsilon = \frac{1}{n} \quad (10.73)$$

(полагая, например, $n = 10 \div 50$). С учетом этого условия перепишем формулу (10.72) в виде

$$n = \frac{A_0}{A(H)} = e^{\sqrt{\frac{\omega}{2k}}H},$$

из которого получаем выражение для величины H

$$H = \sqrt{\frac{2k}{\omega}} \ln(n). \quad (10.74)$$

Из формулы (10.74) следует, что чем больше коэффициент турбулентности, тем на большую высоту нужно подняться, чтобы амплитуда уменьшилась до заданной малой величины.

Анализ сдвига фазы тепловой волны

Тепловая волна распространяется в среде с конечной скоростью, следовательно, воздух нагревается от подстилающей поверхности с некоторым инерционным запаздыванием, что и определяет сдвиг фазы колебаний температуры с изменением высоты.

Запишем выражение (10.68), описывающее фазу колебаний температуры применительно к двум высотам z_1 и z_2

$$\psi(\tau, z_1) = \omega\tau - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z_1\right), \quad (10.75)$$

$$\psi(\tau, z_2) = \omega\tau - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z_2\right). \quad (10.76)$$

Очевидно, что наступление одной и той же фазы колебаний температуры (например, фазы её максимального значения) на двух разных высотах z_1 и z_2

$$\psi(\tau, z_1) = \psi(\tau, z_2) \quad (10.77)$$

возможно только в разные моменты времени.

Действительно, раскроем равенство с учётом (10.75) и (10.76)

$$\omega\tau_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z_1\right) = \omega\tau_2 - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z_2\right). \quad (10.78)$$

Здесь τ_1 и τ_2 – время наступления фиксированной фазы на высотах z_1 и z_2 соответственно.

Равенство (10.78) позволяет выразить разность $\Delta\tau$ моментов наступления фиксированной фазы на высоте z_2 по отношению к высоте z_1

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{2\omega k}} = \frac{\Delta z}{\sqrt{2\omega k}}. \quad (10.79)$$

Если в (10.79) положить $z_2 = z$, а $z_1 = 0$, то, в частности, определим запаздывание наступления фиксированной фазы на высоте z по отношению к подстилающей поверхности

$$\Delta\tau_0 = \frac{z}{\sqrt{2\omega k}}. \quad (10.79a)$$

Запаздывание тем больше, чем больше высота рассматриваемого уровня в атмосфере, и тем меньше, чем интенсивнее турбулентный обмен.

Отметим далее, что в общем определении фазы (10.68)

$$\psi(\tau, z) = \omega\tau - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right)$$

величина $\omega\tau = \varphi_{Rad}$ представляет собой фазу колебаний радиационного баланса на поверхности $\varphi_{Rad}(\tau)$, так что

$$\psi(\tau, z) = \varphi_{Rad}(\tau) - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right). \quad (10.80)$$

Из соотношения (10.80) следует, что разность между фазой колебаний радиационного баланса и фазой колебаний температуры равна

$$\varphi_{Rad}(\tau) - \psi(\tau, z) = \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right), \quad (10.81)$$

и разность фаз на поверхности равна $\pi/4$.

Интерес представляет момент наступления максимальной температуры на различных высотах. Согласно общему виду зависимости температуры от времени и высоты (формула 10.66)

$$\theta'(\tau, z) = A(z)\cos[\psi(\tau, z)],$$

максимум температуры наступает в момент, когда фаза равна нулю, так что

$$\psi(\tau, z) = \omega\tau - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z\right) = 0. \quad (10.82)$$

Равенство позволяет определить момент наступления максимума температуры на любой высоте

$$\omega\tau_{\theta_{MAX}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z, \quad (10.83)$$

или

$$\tau_{\theta_{MAX}}(\theta_{MAX}) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\sqrt{2k\omega}}. \quad (10.84)$$

Как видно, на поверхности земли ($z=0$), где

$$\psi(\tau, 0) = \omega\tau - \frac{\pi}{4}.$$

максимум температуры имеет место, когда отклонение температуры равно амплитудному значению ($T'(\tau, 0) = A_0$), что выполняется при условии

$$\cos[\psi(\tau_{max}, 0)] = 1.$$

Здесь τ_{max} – время наступления фазы максимума (относительно истинного полудня).

Это в свою очередь выполняется, если

$$\psi(\tau_{max}, 0) = \omega\tau_{max} - \frac{\pi}{4} = 0. \quad (10.87)$$

Отсюда следует, что

$$\tau_{max}(0) = \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{4} = 3 \text{ ч.} \quad (10.88)$$

Таким образом, максимум температуры подстилающей поверхности наступает при $\tau_{max} = 3$ ч, то есть через три часа после максимума радиационного баланса, наблюдающегося в истинный полдень.

С учетом формулы (10.82) время наступления максимума температуры на произвольной высоте z можно определить следующим образом

$$\tau_{max}(z) = \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{4} + \Delta\tau_0 = \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\sqrt{2\omega k}} \quad (10.89)$$

Принимая во внимание соотношение $\tau = t - t_{пол}$, в формуле (10.89) перейдем к астрономическому времени t . Тогда

$$t_{max}(z) = t_{пол} + \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{4} + \frac{z}{\sqrt{2\omega k}} \quad (10.90)$$

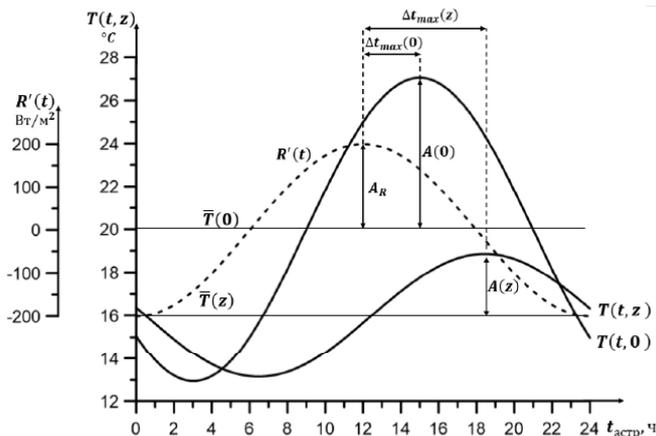


Рисунок 10.1 – Пример графического изображения суточного хода радиационного баланса подстилающей поверхности $R'(t)$, температуры воздуха на поверхности земли $T(t, 0)$ и на произвольной высоте $T(t, z)$.

10.6 Ночное понижение температуры подстилающей поверхности. Радиационные заморозки.

Ночное понижение температуры подстилающей поверхности, хотя оно и является частью суточного хода, целесообразно рассматривать как самостоятельный процесс. Оно является следствием радиационного выхолаживания подстилающей поверхности, происходящего за счет эффективного излучения.

Ночная часть суточной кривой температуры представляет особый практический интерес, так как ночное понижение температуры в переходные сезоны может приводить к формированию радиационных туманов в приземном слое и заморозков на почве. Как известно, заморозком называется понижение температуры поверхности почвы ниже $^{\circ}\text{C}$ при среднесуточной положительной температуре. Заморозки представляют большую опасность для сельского хозяйства. В настоящее время сравнительно хорошо разработаны пути защиты растений от заморозков. Но для того чтобы успешно применять эти пути, прежде всего, необходимо достаточно надежно прогнозировать заморозки.

Заморозки обычно делят на адвективные, то есть вызываемые адвекцией холодных воздушных масс, и радиационные, то есть происходящие при отсутствии адвекции вследствие охлаждения подстилающей поверхности благодаря ее излучению. В действительности обычно действуют оба фактора. Однако в ночное время суток излучение подстилающей поверхности обычно влияет на ее температуру сильнее, чем адвекция. Поэтому, даже включая дни, когда адвекция существенно сказывается на дневном ходе температуры, ночное понижение температуры можно в большинстве случаев рассматривать как чисто радиационное.

Рассматриваемая задача может быть решена на основе уравнения теплопроводности при соответствующих начальных и граничных условиях. Однако мы воспользуемся более простым подходом, основанном на полученных ранее результатах анализа размерностей.

В данной задаче отсчет времени ведется от момента $t_{\text{зах}}$ захода солнца (начала ночи) и прекращения потока коротковолновой солнечной радиации, то есть

$$\tau = t - t_{\text{зах}}. \quad (10.91)$$

Температуру поверхности $\theta_0(\tau)$ представим в виде разности температуры в момент захода солнца θ_{00} и отклонения от этого значения температуры $\theta'_0(\tau)$

$$\theta_0(\tau) = \theta_{00} - \theta'_0(\tau). \quad (10.92)$$

Поскольку ночное понижение температуры является частью суточного хода воспользуемся формулами (10.54), которая для температуры поверхности запишется в виде

$$w'(\tau, 0) \equiv \theta'_0(\tau) = T^* F(\omega\tau) = \frac{A_R}{\sqrt{\omega}(\rho\tilde{C}\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a})} F(\omega\tau). \quad (10.93)$$

Следует отметить, что используемые соображения получены на основе анализа размерностей, поэтому нет особого значения по отношению к какой температуре рассматривается отклонение. Это может быть отклонение температуры от её среднесуточного значения, а может быть отклонение от температуры начала ночи.

Ночное понижение, как самостоятельный процесс, вовсе не обязательно трактовать как часть периодического изменения, поэтому оно может рассматриваться и как аperiodический процесс. При таком подходе $\theta'_0(\tau)$ не должно зависеть от угловой скорости вращения Земли ω . Это выполняется, если функция $F(\omega\tau)$ представляет собой квадратный корень

$$F(\omega\tau) = C\sqrt{\omega\tau}. \quad (10.94)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \theta'_0(\tau) &= C \frac{R^*}{\sqrt{\omega}[\rho(C_p + D)\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a}]} \sqrt{\omega\tau} = \\ &= C \frac{R^*}{\rho(C_p + D)\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a}} \sqrt{\tau}. \end{aligned} \quad (10.95)$$

Эффективное излучение, являясь ключевым параметром, характеризующим ночное понижение температуры, очевидно, выступает в роли характерного масштаба радиационного баланса ($R^* = E_{\text{эф}}$). И тогда

$$T'_0(\tau) = C \frac{E_{\text{эф}}}{\rho(C_p + D)\sqrt{k} + \rho_1 C_1 \sqrt{a}} \sqrt{\tau}. \quad (10.96)$$

Основным недостатком полученной формулы является то, что эффективное излучение считается постоянным в течение ночи. При этом используется значение эффективного излучения на момент начала ночи (при максимальной за ночь температуре подстилающей поверхности), что искусственно увеличивает поток эффективного излучения в последующие ночные часы и переопределяет понижение температуры подстилающей

поверхности и, соответственно, формирование заморозка. Однако, как известно, для потребителя значительно более опасны ошибки пропуска, чем ошибки ложной тревоги.

Эта формула приводится лишь потому, что, давая не вполне корректные абсолютные значения, она удовлетворительно описывает характер изменения температуры со временем – пропорциональность ее убывания квадратному корню из длительности временного интервала от момента захода солнца.

Проанализируем полученную формулу. Как видно из формулы, интенсивность ночного понижения температуры подстилающей поверхности зависит от эффективного излучения, интенсивности турбулентного обмена и теплофизических характеристик почвы. Чем больше эффективное излучение, тем больше процесс выхолаживания. Турбулентный обмен приводит к тому, что подстилающая поверхность обменивается с еще не остывшими вышележащими слоями воздуха, и выхолаживание ослабевает. В случае хорошо проводящей почвы, поток тепла, направленный к поверхностному слою, существенно компенсирует потери тепла за счет эффективного излучения.

Само эффективное излучение главным образом зависит от наличия облачности. Самый очевидный способ выразить эту зависимость (получить эффективное излучение при облачном небе $E_{эф,о}$) – умножить эффективное излучение при ясном небе $E_{эф,я}$ на коэффициент N , меньший чем единица

$$E_{эф,о} = NE_{эф,я} . \quad (10.97)$$

Сам коэффициент N может быть связан эмпирической формулой с количеством облаков трех ярусов [1], а именно

$$N = 1 - n(c_n n_n + c_c n_c + c_v n_v), \quad (10.98)$$

где n – общее количество облаков в долях единицы; n_n, n_c, n_v – количество облаков соответственно нижнего, среднего и верхнего ярусов; c_n, c_c, c_v – коэффициенты, определяющие степень влияния облаков каждого яруса (они равны соответственно 0.80, 0.65, 0.25).

Из проведенных рассуждений можно сформулировать наиболее благоприятные условия для формирования радиационного заморозка:

- сильное эффективное излучение при безоблачном небе;

- устойчивое состояние атмосферы (практически отсутствующий турбулентный обмен);

- сухая плохо проводящая тепло почва.

Кроме того, можно указать и методы предотвращения радиационных заморозков. Главным образом это методы уменьшения эффективного излучения и методы изменения теплофизических свойств почвы.

Одним из методов уменьшения эффективного излучения является такой распространенный способ защиты растений от заморозков как дымление. Из-за температурной инверсии дым не уходит вверх, растекаясь над поверхностью. При этом обогревается воздух, дымовая завеса уменьшает эффективное излучение и конденсируется влага на частицах дыма, а значит, выделяется тепло. Рисунок 10.2 иллюстрирует то, как ночное понижение согласно рассмотренной модели зависит от эффективного излучения.

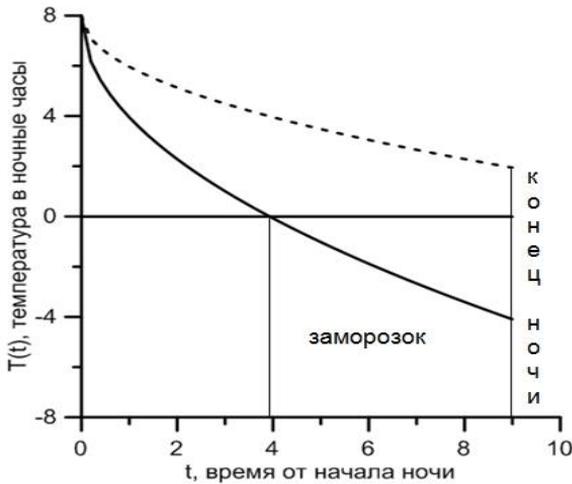


Рисунок 10.2 – Зависимость ночного понижения температуры от эффективного излучения.

На рисунке 10.2 сплошная кривая изображает ночное понижение при заданном достаточно большом эффективном излучении, а штрихованная кривая изображает ночное понижение при эффективном излучении в два раза меньшем при прочих равных условиях.

Видно, что в некоторый момент ночи сплошная кривая пересекает линию нулевой температуры – наступает заморозок. Ночь длится девять часов. За это время штрихованная кривая не пересекает линию нулевой температуры – заморозок не наступает.

Примером методов изменения теплофизических свойств почвы является увлажнение. Поэтому для борьбы с заморозками часто используют полив. Полив перед наступлением заморозков не только изменяет теплофизические характеристики почвы, но и повышает температуру воздуха у земли за счет выделения скрытой теплоты парообразования при испарении поливной воды, а также повышает температуру точки росы, что задерживает заморозки и ослабляет их на 1,5 – 2°С. Рисунок 10.3 иллюстрирует влияние увлажнения на ночное понижение температуры.

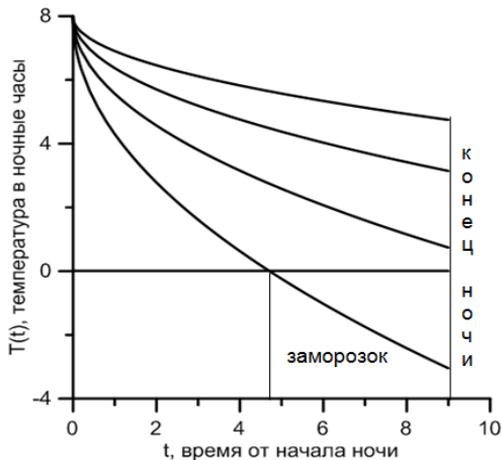


Рисунок 10.3 – Влияние увлажнения на ночное понижение температуры.

На рисунке 10.3 четыре кривые, если смотреть с низу вверх, изображают соответственно ночное понижение поверхностной температуры сухой почвы, слабо увлажненной, умеренно увлажненной и сильно увлажненной при прочих равных условиях.

Как видно, на сухой почве в некоторый момент ночи наступает заморозок. Увлажнение позволяет избежать заморозка, причем чем оно сильнее, тем ночное понижение меньше.

10.7 Особенности суточного хода характеристик влажности

Задача о суточном ходе влажности [3] может быть решена на основе уравнения (10.4), которое также целесообразно записать в отклонениях от некоторого среднесуточного значения массовой доли водяного пара \bar{q}

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = k \frac{\partial^2 q'}{\partial z^2}. \quad (10.99)$$

Поставим граничные условия. Как и при решении задачи о суточном ходе температуры, одним из таких граничных условий является условие затухания суточных колебаний массовой доли водяного пара при удалении от подстилающей поверхности

$$z \rightarrow \infty: \quad q'(t, z) = 0 \quad (10.100)$$

Обычно принимается, что в непосредственной близости от водной или сильно увлажненной поверхности водяной пар находится в насыщенном состоянии, то есть

$$z = 0: \quad q(t, z) = q_m(t, T_0, p_0) \quad (10.101)$$

где T_0 – температура водной поверхности или сильно увлажненной поверхности, p_0 – давление воздуха вблизи нее.

Воспользуемся связью между насыщающей массовой долей водяного пара и парциальным давлением насыщенного водяного пара E

$$q_m(t, T_0, p_0) = 0,622 \frac{E(T_0)}{p_0} \quad (10.102)$$

По формуле Магнуса [1]

$$E = E_* \exp \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right] \quad (10.103)$$

где $E_* = 6,1 \text{ гПа}$, $a = 17,1$, $b = 38$. Тогда

$$\begin{aligned}
 q_m(t, T_0, p_0) &= 0,622 \frac{E_*}{p_0} \exp \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right] \\
 &= 0,622 \frac{E_*}{p_0} F(T_0)
 \end{aligned}
 \tag{10.104}$$

Запишем это выражение для среднесуточной влажности \bar{q}_m

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_m(\bar{T}_0, p_0) &= 0,622 \frac{E_*}{p_0} \exp \left[\frac{a(\bar{T}_0 - 273)}{\bar{T}_0 - b} \right] \\
 &= 0,622 \frac{E_*}{p_0} F(\bar{T}_0)
 \end{aligned}
 \tag{10.105}$$

вычтем (10.105) из (10.104))

$$q'_m(t, T_0, p_0) = 0,622 \frac{E_*}{p_0} [F(T_0) - F(\bar{T}_0)]
 \tag{10.106}$$

Разложим $F(T_0)$ в ряд Тейлора в окрестности \bar{T}_0 .

$$F(T_0) = F(\bar{T}_0) + \left(\frac{dF}{dT} \right)_{\bar{T}_0} T'_0 + \left(\frac{d^2F}{dT^2} \right)_{\bar{T}_0} \frac{(T'_0)^2}{2} + \dots
 \tag{10.107}$$

Поскольку $T'/\bar{T} \ll 1$, достаточно ограничиться линейными членами и тогда

$$q'_m(t, T_0, p_0) = 0,622 \frac{E_*}{p_0} \left(\frac{dF}{dT} \right)_{\bar{T}_0} T'_0
 \tag{10.108}$$

Получим выражение для dF/dT

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dT} &= \frac{d}{dT} \left\{ \exp \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right] \right\} = \\
&= \frac{d}{dT} \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right] \exp \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right] = \\
&= \frac{a(273 - b)}{(T_0 - b)^2} \exp \left[\frac{a(T_0 - 273)}{T_0 - b} \right]
\end{aligned} \tag{10.109}$$

В таком случае

$$\begin{aligned}
q'_m(t, T_0, p_0) &= \\
&= 0,622 \frac{E_*}{p_0} \frac{a(273 - b)}{(\bar{T}_0 - b)^2} \exp \left[\frac{a(\bar{T}_0 - 273)}{\bar{T}_0 - b} \right] T'_0 \\
&= \mu T'_0(t)
\end{aligned} \tag{10.110}$$

Используя полученное выражение и соотношение (10.34) для $T'_0(t)$, нижнее граничное условие можно записать в виде

$$z = 0 : \quad q'(t, z) = \mu T'_0(t) = \mu A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{10.111}$$

Тогда задача принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q'}{\partial t} = k \frac{\partial^2 q'}{\partial z^2} \\ z \rightarrow \infty: \quad q'(t, z) = 0 \\ z = 0: \quad q'_0(t) = \mu A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \end{array} \right. \tag{10.112}$$

Полученная задача совершенно аналогична задаче о суточном ходе температуры и, следовательно, имеет такое же решение

$$q(t, z) = \bar{q}(z) + \mu A_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}z} \cos \left(\omega t - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\omega}{2k}}z \right) \right) \tag{10.113}$$

Таким образом, над водной или сильно увлажненной поверхностью суточный ход массовой доли водяного пара и соответственно парциального давления водяного пара параллелен суточному ходу температуры с максимумом в 15 часов после полудня и минимумом в ночные часы.

Если идет речь о слабо увлажненной поверхности (обычно такие условия наблюдаются летом над сушей), то граничное условие (10.101) является некорректным. Соответственно некорректным является и решение (10.112).

Действительно, как показывают наблюдения, над слабо увлажненными поверхностями суточный ход массовой доли водяного пара и парциального давления имеет два максимума и два минимума. Максимумы в среднем наблюдаются в 9 и 20 – 21 часа, а минимумы – в 6 и в 16 часов.

Утренний минимум перед восходом Солнца объясняется слабым испарением в ночные часы. С увеличением поступления солнечной радиации испарение растет, парциальное давление водяного пара достигает максимума первого максимума. В результате разогрева поверхности развивается турбулентный обмен, перенос влаги происходит быстрее, чем поступление ее с испаряющейся поверхности, поэтому возникает второй минимум. К вечеру турбулентный обмен ослабевает, а испарение с нагретой поверхности еще достаточно интенсивно и в нижних слоях накапливается влага, обеспечивая второй максимум.

Суточный ход относительной влажности зависит от суточного хода фактического парциального давления пара и от суточного хода давления насыщенного пара. Парциальное давление меняется в суточном ходе не очень значительно; гораздо резче меняется вместе с температурой давление насыщенного пара. Поэтому суточный ход относительной влажности с достаточным приближением обратен суточному ходу температуры, то есть суточный минимум относительной влажности совпадает с суточным максимумом температуры воздуха, а суточный максимум относительной влажности совпадает с суточным минимумом температуры.

Решение задачи суточного хода ветра представлена в работе [4]. В ней показано, как изменение профиля ветра следует за изменением потоков тепла как характеристики стратификации, влияющей на коэффициент турбулентности.

Контрольные вопросы

1. Объясните процесс формирования суточных изменений метеорологических параметров в пограничном слое.
2. Какие упрощения используются в постановке задачи о суточном ходе температуры?
3. Как меняется с высотой (функциональная зависимость) амплитуда колебаний температуры в её суточном ходе?
4. Как отличается время наступления максимума температуры на поверхности от времени наступления максимума радиационного баланса?
5. Объясните влияние свойств почвы на амплитуду суточного хода температуры.
6. Почему в пограничном слое над морем суточный ход температуры практически не проявляется?
7. Какой внешний параметр исключается из рассмотрения при формировании функциональной зависимости в задаче ночного понижения температуры подстилающей поверхности?
8. Что называется эффективным излучением поверхности и от чего оно зависит?
9. Какими мерами можно ослабить ночное выхолаживание поверхности. Объяснить их действие

Литература к главе 10

- 1 Матвеев Л.Т. Основы общей метеорологии: Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1965. – 876
- 2 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.
- 3 Методические указания по дисциплине «Динамическая метеорология» для высших учебных заведений. Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология. Профиль подготовки – Прикладная метеорология. Квалификация (степень) – Бакалавр академический. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2017. – 44 с.
- 4 М. Е. Берлянд. К теории изменения ветра в приземном слое атмосферы

11. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ НАД ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕХНОСТЬЮ

- 11.1. Общая постановка задачи о трансформации воздушной массы**
- 11.2. Постановка задачи о трансформации полей температуры и влажности под влиянием изменения свойств подстилающей поверхности**
- 11.3. Анализ задачи о трансформации полей температуры и влажности с использованием π -теоремы**
- 11.4. Модельная задача о трансформации полей температуры и влажности со степенными профилями скорости и коэффициента турбулентности**
- 11.5. Модельная задача о трансформации полей температуры и влажности при постоянных по высоте значениях скорости ветра и коэффициента турбулентности.**
- 11.6. Применение теории трансформации к расчету скорости испарения и теплоотдачи с ограниченной водной поверхности.**

11.1 Общая постановка задачи о трансформации воздушной массы

В предыдущих главах рассматривалось строение пограничного слоя атмосферы при условии, что он является горизонтально однородным, то есть уделялось внимание только изменениям метеорологических величин по вертикали. Поскольку внутри пограничного слоя, как правило, вертикальные градиенты значительно больше горизонтальных, при решении ряда проблем такое приближение можно считать удовлетворительным. Однако известны явления, в которых горизонтальная неоднородность является существенной особенностью; подчас само возникновение таких явлений вызвано горизонтальной неоднородностью.

Воздушная масса при своем движении всегда взаимодействует с подстилающей поверхностью. В процессе взаимодействия подстилающей поверхности и расположенной над ней воздушной массы в последней устанавливается определенное распределение метеорологических величин. Если в дальнейшем воздушная масса сместится на другую поверхность (назовем ее новой) с существенно иными свойствами, в результате

турбулентного обмена теплом, влагой и импульсом между поверхностью и воздухом вертикальные профили метеорологических величин изменятся. Так, например, если воздушная масса натекает с более холодной подстилающей поверхности на более теплую, то эта масса будет прогреваться, то есть будет определенным образом перераспределяться температура воздушной массы. Если, например, сухая воздушная масса перемещается с суши на водную поверхность (море, озеро, искусственный водоём), то вследствие турбулентных потоков водяного пара с водной поверхности, над ней будет формироваться поле влажности, переменное по высоте и по горизонтали. Кроме того, если условия трения на старой и новой подстилающей поверхности различны, то будет меняться также и ветер, и интенсивность турбулентного обмена. На каком-то достаточно большом расстоянии от границы раздела старой и новой подстилающих поверхностей воздушная масса полностью потеряет свои первоначальные свойства и будет целиком определяться свойствами новой поверхности.

Изменение свойств воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности называется трансформацией. Таким образом, предметом и задачей теории трансформации является изучение изменения свойств воздушного потока под влиянием изменяющихся свойств подстилающей поверхности. Кроме того, теория трансформации может дополнительно ответить на вопросы, касающиеся связанных с ней процессов образования и рассеивания облаков и туманов.

Процесс трансформации, при котором характеристики воздушного потока изменяются под влиянием свойств новой подстилающей поверхности, вообще говоря в соответствии со свойством установившегося диффузионного процесса (каковым является процесс турбулентного переноса субстанции), захватывает весь пограничный слой атмосферы, высотой H . Однако, заметные изменения, составляющие, величину, не меньшую заданной доле ε от вносимых изменений у поверхности, проявляются в слое $h \leq H$, называемым внутренним пограничным слоем.

Постановка задачи формирования поля температуры в процессе трансформации с различными вариантами заданных вертикальных профилей коэффициента турбулентности и скорости ветра изложены в учебном пособии [1]. В настоящем пособии приведём решения задачи при заданных $k(z)$ и $u(z)$ в форме, позволяющей получить решения, которые выражаются через известные функции. Некоторые из этих решений приведены в пособиях [2], [3].

Рассмотрим трансформацию параметров воздушного потока при его перемещении с одной подстилающей поверхности на другую с резко отличными свойствами (температурой, влажностью). Полагая, что характерный временной масштаб процесса трансформации, обусловленный турбулентным обменом, много меньше временного масштаба изменений параметров, обусловленных изменениями внешних факторов, формирующих профили скорости ветра, коэффициента турбулентности и температуру подстилающей поверхности, будем рассматривать процесс трансформации в условиях стационарности и пренебрегать в уравнениях локальными производными:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (11.1)$$

Полагая границу раздела поверхностей прямолинейной, направим ось Ox в перпендикулярном ей направлении, так что

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

В таком случае адвекция может быть описана одним слагаемым

$$A = u \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (11.2)$$

Поскольку процесс трансформации воздушной массы происходит над новой подстилающей поверхностью, то область решения в горизонтальном направлении представляет собой полуограниченную область. В связи с чем логично поместить начало координат на границе раздела между двумя поверхностями. Тогда участок $x \leq 0$ подстилающей поверхности $z = 0$ представляет собой старую подстилающую поверхность, и свойства воздушной массы при $x \leq 0$ считаются, следовательно, известными. Участок $x > 0, z = 0$ есть новая подстилающая поверхность, над которой подлежит определению распределение параметра $f(x, z)$ (смотри рисунок 9.1). При этом новая подстилающая поверхность может рассматриваться как безграничная, так и конечных размеров.

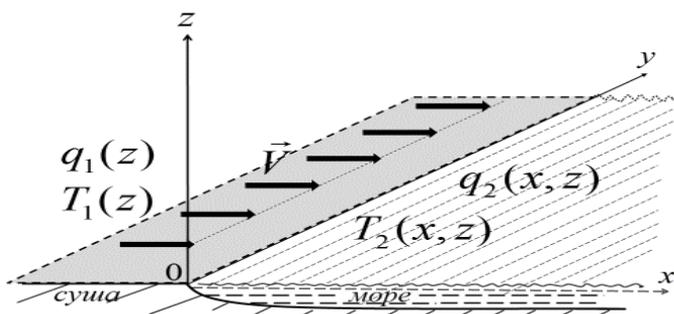


Рисунок 11.1 – Схема положения поверхностей с различными свойствами и системы координат.

С учетом всех сделанных выше предположений и допущений система уравнений гидротермодинамики пограничного слоя атмосферы (5.1) – (5.13) может быть записана в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.4)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Phi_\theta + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (11.5)$$

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \Phi_q + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial q}{\partial z} \quad (11.6)$$

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} = k\Psi - C_\epsilon \frac{b\sqrt{b}}{l} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z} \quad (11.7)$$

$$\Psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (11.8)$$

$$k = C_k l \sqrt{b} \quad (11.9)$$

$$l = -2 \tilde{\alpha} \frac{\Psi}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \quad (11.10)$$

Систему уравнений можно считать замкнутой, если рассматривать силу барического градиента заданным внешним параметром.

11.2 Постановка задачи о трансформации полей температуры и влажности под влиянием изменения свойств подстилающей поверхности

Из физических соображений очевидно, что нельзя, в общем случае, рассматривать изменение одного свойства воздушного потока без учета изменения других свойств. Так например, если над поверхностью с однородной шероховатостью, но неоднородной температурой будет происходить трансформация поля температуры воздуха, то вследствие изменения характеристик устойчивости воздушного потока произойдет и изменение поля скорости ветра, характеристик турбулентности, влажности и так далее. Принимая во внимание такую последовательность термических и динамических процессов, с целью выяснения основного вида взаимосвязей характеристик трансформации профилей температуры и влажности с внешними параметрами, будем решать задачу при заданных, неизменных по горизонтали профилях скорости ветра и коэффициента турбулентности. Такая постановка сводится к решению только двух уравнений (11.5) и (11.6), которые при неизменной по горизонтали скорости ветра (что приводит к условию $w=0$) принимают вид:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Psi_{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (11.11)$$

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = \Psi_q + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial q}{\partial z} \quad (11.12)$$

Обратимся теперь к граничным условиям задачи о трансформации воздушной массы. В обоих уравнениях содержится одна производная по координате x и две производные по координате z , следовательно, необходимо задать три пары граничных условий.

Первая пара граничных условий задает вертикальные профили температуры и влажности над старой подстилающей поверхностью

$$x = 0, z \geq 0: \quad \theta = \theta_1(z), \quad q = q_1(z) \quad (11.13)$$

Другие две пары граничных условий должны быть поставлены при $x > 0$ на нижней границе (новая подстилающая поверхность) и верхней границе ($z > h$) слоя трансформации.

На нижней границе заданы значения функций $\theta_0(x)$ и $q_0(x)$ при $x > 0$:

$$x > 0, z = 0: \quad \theta = \theta_0(x), \quad q = q_0(x) \quad (11.14)$$

Заметим, что функции $\theta_0(x)$ и $q_0(x)$, вообще говоря, не являются известными. Температура и влажность деятельного слоя почвы, в том числе и ее поверхности, изменяются весьма существенно, и при корректной постановке задачи следовало бы в качестве граничного условия у поверхности привлечь условие баланса тепла, а величины $\theta_0(x)$ и $q_0(x)$ относить к числу искомым функций. Иначе говоря, распределение температуры на подстилающей поверхности является не внешним для трансформации воздушной массы фактором, а одним из результатов этой трансформации. Однако, в первом приближении можно полагать $\theta_0(x)$ и $q_0(x)$ заданными функциями. Такое допущение вполне справедливо, например, при переходе на поверхность водоема, в силу сравнительной консервативности температуры водоема. В данной постановке будем полагать, что при $x = 0$ температура и влажность подстилающей поверхности изменяются скачком от значения θ_{01} до $\theta_{02} = Const$ и от q_{01} до $q_{02} = Const$. При этом граничное условие (9.14) принимает вид:

$$\text{при } x > 0, z = 0: \quad \theta = \theta_{02}, \quad q = q_{02} \quad (11.14a)$$

В процессе вертикального турбулентного обмена новые изменившиеся значения исследуемой субстанции на подстилающей поверхности приводят к изменениям в воздушном потоке. Однако, область вносимых изменений ограничена верхней границей пограничного слоя, т.е. свободной атмосферой. Следовательно, при принятом условии горизонтальной однородности её параметров, значения исследуемых субстанций на этой границе над новой подстилающей поверхностью такие

же, как и над поверхностью до границы раздела. Соответствующее граничное условие запишется в виде:

$$x > 0, z \rightarrow \infty \quad \theta = \theta_1(z), \quad q = q_1(z) \quad (11.15)$$

Отметим, что уравнения (11.11) и (11.12), а также соответствующие им граничные условия полностью аналогичны друг другу. Это означает, что процессы формирования полей температуры и влажности в рассматриваемой постановке полностью аналогичны, и, следовательно, соответствующие математические решения должны быть одинаковы. Такая аналогия позволяет ввести для температуры и влажности единое обозначение $f \equiv \{\theta, q\}$ и объединить уравнения (11.11), (11.12) и граничные условия (11.13)-(11.15) общей записью:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial f}{\partial x} = \Psi_f + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial f}{\partial z} \\ x = 0, z \geq 0: f = f_1(z) \\ x > 0, z = 0: f = f_{02} \\ x > 0, z \rightarrow \infty: f = f_1(z) \end{array} \right. \quad (11.16)$$

В дальнейшем будем полагать отсутствие фазовых притоков влажности, т.е. $\Psi_q = 0$.

Представляя переменную $f(x, z)$ в виде суммы значения над старой поверхностью $f_1(z)$ и соответствующего отклонения $f'(x, z)$

$$f(x, z) = f_1(z) + f'(x, z) \quad (11.17)$$

перепишем дифференциальное уравнение системы (11.16)

$$\begin{aligned} u \frac{\partial f_1(z)}{\partial x} + u \frac{\partial f'(x, z)}{\partial t} &= \\ &= \Psi_f + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial f'(x, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

С учётом выполнения равенств, определяющих распределение с высотой функции $f_1(z)$,

$$u \frac{\partial f_1(z)}{\partial x} = 0 \quad (11.19)$$

и

$$0 = \Psi_f + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial f_1(z)}{\partial z}, \quad (11.20)$$

задача о трансформации величины f , формулируется как задача в отклонениях с уравнением

$$u \frac{\partial f'(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial f'(x, z)}{\partial z}. \quad (11.21)$$

и граничными условиями:

$$x = 0, \quad z \geq 0: f' = f_1(z) - f_1(z) = 0$$

$$x > 0, \quad z = 0: f' = f_{02} - f_1(0) = f_{02} - f_{01} = \Delta f_0$$

$$z \rightarrow \infty: f' = f_1(z) - f_1(z) = 0. \quad (11.22)$$

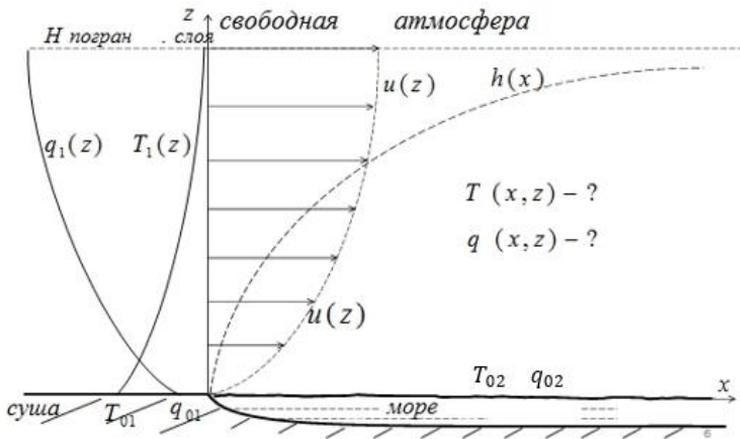


Рисунок 11.2 – Схема процесса трансформации с обозначением параметров воздушного потока при его переходе с поверхности суши на водную поверхность

Таким образом, пространственное распределение температуры или влажности над новой подстилающей поверхностью определяется решением задачи в следующей постановке

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z) \frac{\partial f'(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial f'(x, z)}{\partial z} \\ x = 0, z \geq 0: f' = 0 \\ x > 0, z = 0: f' = \Delta f_0 \\ x > 0, z \rightarrow \infty: f' = 0 \end{array} \right. \quad (11.23)$$

11.3 Анализ общего вида решения задачи

Любые произвольно заданные профили скорости ветра и коэффициента турбулентности могут быть представлены в виде:

$$u(z) = u_1 \varphi_u(z/z_1), \quad k(z) = k_1 \varphi_k(z/z_1).$$

Здесь $u_1 \equiv u|_{z=z_1}$, $k_1 \equiv k|_{z=z_1}$ - заданные конкретные значения скорости ветра и коэффициента турбулентности на фиксированной высоте Z_1

Уравнение (11.21) при этом можно записать в виде:

$$u_1 \varphi_u(\tilde{z}) \frac{\partial f'}{\partial x} = k^* \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \varphi_k(\tilde{z}) \frac{\partial f'}{\partial \tilde{z}}, \quad (11.24)$$

$$\text{где } \tilde{z} = \frac{z}{z_1}, \quad k^* = \frac{k_1}{z_1^2}$$

Уравнение (11.24) и записанные выше граничные условия (11.22) позволяют выявить группу определяющих параметров для искомой функции f' , а именно:

$$f' = f'(x, \tilde{z}, u_1, k^*, \Delta f_0).$$

Анализ размерностей с учётом размерности параметра k^* , равной

$$[k^*] = L^2 T^{-1} \cdot L^{-2} = T^{-1},$$

позволяет получить три безразмерных комплекса

$$\Pi_1 \equiv \frac{f'}{\delta f_0} = f_n \quad , \quad \Pi_2 = x \left(\frac{k_1}{z_1^2 u_1} \right) = \tilde{x} \quad , \quad \Pi_3 \equiv \tilde{z} = \frac{z}{z_1} \quad ,$$

между которыми должна существовать функциональная связь, так что решение уравнения должно будет представляться в виде зависимости от двух безразмерных параметров:

$$f_n = f_n(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad . \quad (11.25)$$

Производная по вертикали от функции f' , принимающая вид:

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = \Delta f_0 \frac{\partial f_n}{\partial z} = \Delta f_0 \frac{df_n}{d\tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\Delta f_0}{z_1} \psi(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad (11.26)$$

позволяет определить связь дополнительных вертикальных турбулентных потоков субстанции над новой подстилающей поверхностью

$$P'(x, z) = P(x, z) - P_1(z) = -k(\tilde{z}) \frac{\partial f'}{\partial z}$$

с внешними параметрами процесса $x, z, z_1, u_1, k_1, \delta f_0$:

$$P'(x, z) = -k_1 \varphi_k(\tilde{z}) \frac{\Delta f_0}{z_1} \psi(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad . \quad (11.27)$$

Для турбулентных потоков непосредственно на подстилающей поверхности зависимость от высоты должна быть исключена, т.е.

$$\varphi_k(\tilde{z}) \cdot \psi(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) \quad ,$$

что приводит к результату:

$$P'_0(x) = -\frac{k_1}{z_1} \Delta f_0 \tilde{\psi}(\tilde{x}) \quad . \quad (11.28)$$

Введение функции

$$\Psi(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \tilde{\psi}(\tilde{x})$$

преобразует выражение для турбулентного потока к виду

$$P'_0(x) = -\Delta f_0 \frac{k_1}{z_1 \tilde{x}^{1/2}} \Psi(\tilde{x}) = -\Delta f_0 \left(\frac{k_1 u_1}{x} \right)^{1/2} \Psi(\tilde{x}) , \quad (11.29)$$

отражающему основной характер его зависимости от скорости ветра, коэффициента турбулентности и расстояния от границы раздела поверхностей.

Выполнение условия для высоты слоя трансформации

$$\frac{f'(h)}{\delta f_0} \equiv f_n \left(\tilde{x}, \frac{h}{z_1} \right) = \tilde{\varepsilon} ,$$

где $\tilde{\varepsilon}$ произвольно заданная малая величина, даёт основание для записи:

$$h = C(\tilde{\varepsilon}) z_1 \varphi_h(\tilde{x}) .$$

Введение функции

$$\Psi_h = \frac{\varphi_h(\tilde{x})}{\sqrt{\tilde{x}}}$$

приводит к следующему выражению для высоты h

$$h = C(\tilde{\varepsilon}) z_1 \sqrt{\tilde{x}} \Psi_h(\tilde{x}) = C_\varepsilon \sqrt{\frac{x k_1}{u_1}} \Psi_h(\tilde{x}) , \quad \tilde{x} \equiv \frac{x k_1}{z_1^2 u_1} , \quad (11.30)$$

которое отражает основной характер его зависимости от размерных параметров x, k_1, u_1 .

При произвольно заданных профилях скорости ветра и коэффициента турбулентности конкретные значения функции \tilde{f} и высоты слоя трансформации могут быть получены с применением численного метода решения.

Однако, некоторые, достаточно реалистичные виды вертикальных профилей $u(z)$ и $k(z)$ позволяют получить аналитические решения уравнения с конкретными видами функции $\tilde{f}(x, z)$, высоты слоя трансформации $h(x)$ и турбулентных потоков субстанции над новой

подстилающей поверхностью $P_0(x)$. Такими профилями являются степенные вертикальные профили, которые в общем случае могут быть записаны в виде:

$$u = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n, \quad k = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m, \quad (11.31)$$

где $m < 1$ и $n < 1$ – числа, зависящие от стратификации с их частными случаями:

$$u(z) = \text{const}, \quad k = \text{const} \rightarrow n = 0, \quad m = 0, \quad (11.31a)$$

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon, \quad k = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon} \rightarrow n = \varepsilon, \quad m = 1 - \varepsilon. \quad (11.31б)$$

Ниже приводится подробная процедура получения таких решений для трёх видов зависимостей (11.31): 1) профили с произвольно заданными величинами $n < 1$ и $m < 1$ и частные случаи: 2) $n = \varepsilon$, $m = 1 - \varepsilon$; 3) $n = 0$, $m = 0$.

11.4. Модельная задача о трансформации полей температуры и влажности со степенными профилями скорости и коэффициента турбулентности

11.4.1. Решение задачи с вертикальными профилями скорости и коэффициента турбулентности, определяемыми соотношениями (11.31)

В модельной задаче о трансформации полей температуры и влажности со степенными профилями скорости ветра и коэффициента турбулентности решается система (11.21) с учетом соотношений (11.31):

$$u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m \frac{\partial f'}{\partial z} \quad (11.32)$$

и с граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 x = 0, z \geq 0: \quad f' &= f_1(z) - f_1(z) = 0 \\
 x > 0, \quad z = 0: \quad &\left\{ \begin{array}{l} f' = \Delta f_0 \\ f' = 0 \end{array} \right. \\
 z \rightarrow \infty: \quad &
 \end{aligned}
 \tag{11.33}$$

Перенос параметров k_1 и z_1 в левую часть уравнения (11.32) преобразует его к виду

$$\frac{u_1}{k_1 \cdot z_1^{n-m}} z^n \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(z^m \frac{\partial f'}{\partial z} \right)
 \tag{11.34}$$

Далее вводя новую переменную

$$x_1 = \frac{k_1 \cdot z_1^{n-m}}{u_1} \cdot x
 \tag{11.35}$$

получим уравнение

$$\frac{\partial f'}{\partial x_1} = z^{-n} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^m \frac{\partial f'}{\partial z} \right)
 \tag{11.36}$$

позволяющее выявить группу определяющих параметров для искомой функции f' , а именно:

$$f' = \varphi(z, x_1, \Delta f_0).
 \tag{1.37}$$

Вводя размерность длины L и времени T , составим формулы размерностей

$$\begin{aligned}
 [z] = L, \quad [x_1] &= \frac{[k_1] \cdot [z_1^{n-m}]}{[u_1]} \cdot [x] = \\
 &= \frac{L^2 T^{-1} \cdot L^{n-m}}{L T^{-1}} \cdot L = L^{n+2-m} = L^p
 \end{aligned}
 \tag{11.38}$$

Из двух параметров z и x_1 , размерности которых выражены только через размерность длины L , можно составить один безразмерный комплекс

$$\xi = \frac{z}{(x_1)^{1/p}} = \frac{z}{x^{1/p}} \left(\frac{u_1}{k_1 z_1^{p-2}} \right)^{1/p}, \quad p = 2 + n - m. \quad (11.39)$$

Таким образом, исходная зависимость $\varphi(z, x_1, \Delta f_0)$ может быть переформулирована следующим образом

$$f' = \varphi(z, x_1, \Delta f_0) \rightarrow f'_n = F[\xi(z, x_1, p)], \quad (11.40)$$

где параметр p отвечает за тип вертикальных профилей динамических характеристик. В частности, для модели (11.31a) $m = n = 0$, $p = 2$, а для модели (9.31б) $n = \varepsilon$, $m = 1 - \varepsilon$, $p = 1 + 2\varepsilon$.

С учётом полученного вывода (11.40) выразим в уравнении (11.36) частные производные по переменным x_1 и z через полные производные по ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'_n}{\partial x_1} &= \frac{df'_n}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = -\frac{z}{p} \cdot \frac{x_1^{-1}}{(x_1)^{1/p}} \frac{df'_n}{d\xi} = -\frac{x_1^{-1}}{p} \xi \frac{df'_n}{d\xi} \\ z^{-n} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^m \frac{\partial f'_n}{\partial z} \right) &= \frac{mz^{m-n-1}}{(x_1)^{1/p}} \frac{df'_n}{d\xi} + \frac{z^{m-n}}{(x_1)^{2/p}} \frac{d^2 f'_n}{d\xi^2} \end{aligned}$$

в результате чего уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 f'_n}{d\xi^2} + \Phi(\xi) \frac{df'_n}{d\xi} = 0, \quad (11.41)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{m}{\xi} + \frac{\xi^{1-m+n}}{p}. \quad (11.42)$$

Для записанного уравнения на основе исходных граничных условий необходимо сформулировать новые граничные условия по переменной ξ . В области $x > 0$ при $z = 0$:

$$\xi(x, 0) = \left(\frac{u_1}{k_1 z_1^{n-m}} \right)^{1/p} \frac{0}{x^{1/p}} = 0,$$

а при $z \rightarrow \infty$:

$$\xi(x, \infty) = \frac{\infty}{x^{1/p}} \left(\frac{u_1}{k_1 z_1^{n-m}} \right)^{1/p} \rightarrow \infty$$

Таким образом, граничные условия для безразмерных функций запишутся в форме:

$$\xi = 0, \quad f'_n(\xi) = 1 \quad (11.43)$$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad f'_n(\xi) = 0 \quad (11.44)$$

Введение обозначения $\frac{df'_n}{d\xi} \equiv \varphi(\xi)$ позволяет записать уравнение в форме:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi} = -\Phi(\xi) \quad \text{или} \quad \frac{d(\ln \varphi)}{d\xi} = -\Phi(\xi).$$

Его интегрирование приводит к соотношению:

$$\ln \varphi = C \int (-\Phi(\xi)) d\xi,$$

которое с учётом соотношения (11.42) даёт явный вид функции для первой производной

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \frac{df'_n}{d\xi} &= C_1 \cdot \exp \left[- \int \Phi(\xi) d\xi \right] \\ &= C_1 \cdot \xi^{-m} \exp \left(-\frac{\xi^p}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (11.45)$$

Введём новую переменную

$$\tau = \frac{\xi^p}{p^2}, \quad (11.46)$$

так что

$$\xi = p^{2/p} \tau^{1/p},$$

и

$$\frac{df'_n}{d\xi} = \frac{df'_n}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\xi^{p-1}}{p} \frac{df'_n}{d\tau}. \quad (11.46a)$$

Из последнего равенства с учётом (9.45) следует соотношение:

$$\frac{df'_n}{d\tau} \equiv \psi(\tau) = C_1 p \xi^{-p(\frac{p+m-1}{p})} \exp\left(-\frac{\xi^p}{p^2}\right) = C(m, n) \tau^{-S} e^{-\tau}, \quad (11.47)$$

$$S = \frac{1+n}{p}$$

Интегрирование функции $\psi(\tau)$, определяемой формулой (11.47), в пределах от 0 до произвольного значения $\tau = \varphi = \xi^p / p^2$ с учётом граничного условия (11.43), принимающего вид

$$\text{при } \xi = 0 \rightarrow \tau = 0, f'_n(0) = 1,$$

приводит к выражению для определения самой функции $f'_n(\sigma)$:

$$f'_n(\varphi) - 1 = C(m, n) \cdot \int_0^\varphi \tau^{S-1} e^{-\tau} d\tau. \quad (11.48)$$

Используя второе граничное условие (11.44)

$$\text{при } \xi = \infty \rightarrow \varphi = \infty, f'_n(\infty) = 0$$

получаем выражение для определения величины $C(m, n)$:

$$C(m, n) = - \left(\int_0^{\infty} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau \right)^{-1}. \quad (11.49)$$

Интеграл в равенстве (11.49) представляет собой гамма-функцию

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau,$$

тогда как интеграл в равенстве (11.48) является нижней неполной гамма-функцией

$$\Gamma(s, \varphi) = \int_0^{\varphi} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau.$$

Используя равенства (11.49) и принятые обозначения для гамма-функций приходим к результату:

$$f'_n(\varphi) = 1 - \frac{\Gamma(s, \varphi)}{\Gamma(s)}. \quad (11.50)$$

где

$$\varphi \equiv \varphi(x, z, p) = \frac{\xi^p}{p^2}, \quad s \equiv s(m, n) = \frac{1+n}{p}. \quad (11.51)$$

Численные значения полной и неполной гамма-функций в зависимости от параметров φ и s затабулированы.

Рассмотрим частные случаи зависимости (11.50). Полагая $u_1 = u = \text{Const}$, $k_1 = k = \text{Const}$, что соответствует условию $m=0$, $n=0$, $p=2$, а также учитывая, что в этом случае $p = 2$, приходим к выводу

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, 2) &= \frac{(z/z_1)^2}{2^2} \cdot \frac{u_1}{k_1} \cdot \frac{z_1^2}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u}{k} \cdot \frac{z^2}{x} \\ &\equiv \tilde{\sigma}^2(x, z), \quad s = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11.52)$$

Так как при значении аргумента равном $1/2$ гамма-функция имеет известное частное значение (а именно, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$), отношение $\Gamma[1/2, \tilde{\sigma}^2(x, z)]/\Gamma(1/2)$ принимает вид:

$$\frac{\Gamma[1/2, \bar{\sigma}^2(x, z)]}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{\sigma}^2} (\bar{\sigma}')^2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \exp[-(\bar{\sigma}')^2] d(\bar{\sigma}')^2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{\sigma}} \exp[-(\bar{\sigma}')^2] d\bar{\sigma}' \equiv \text{erf}(\bar{\sigma}) \quad (11.53)$$

В частном случае степенной модели при $n=\varepsilon$, $m=1-\varepsilon$, $p=1+2\varepsilon$ параметр φ и решение f'_n принимают вид:

$$\varphi(x, z, 1 + 2\varepsilon) = \frac{(z/z_1)^{1+2\varepsilon}}{(1 + 2\varepsilon)^2} \cdot \frac{u_1}{k_1} \cdot \frac{z_1^2}{x} \equiv \chi^2, \quad s \quad (11.54)$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \cdot$$

$$f'_n(x, z) = 1 - \frac{\Gamma(s, \chi^2)}{\Gamma(n/2)} \equiv \mathcal{P}(\chi^2, \varepsilon) \quad (11.55)$$

В задачнике по динамической метеорологии [4] приводится график функции $\mathcal{P}(\chi^2, \varepsilon)$ для трех стандартных значений параметра стратификации ε (смотри рисунок 11.6)

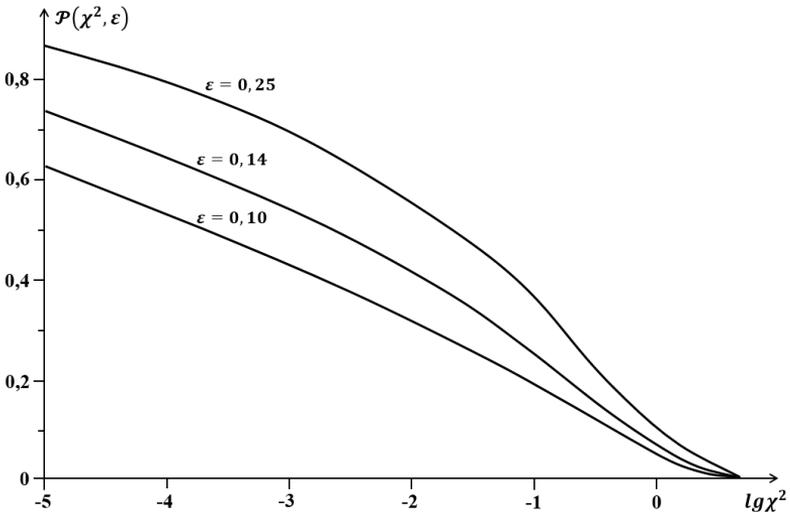


Рисунок 11.3 – График функции $\mathcal{P}(\chi^2, \varepsilon)$ для различных значений параметров ε

Наконец, запишем решение (11.50) в размерном виде

$$f(x, z) = f_{02} + \Delta f_1(z) + (f_{01} - f_{02}) \frac{\Gamma[s, \varphi(x, z, p)]}{\Gamma(\alpha - 1)}, \quad (11.56)$$

где $\Delta f_1(z) = f_1(z) - f_{01}$.

11.4.2. Турбулентные потоки с подстилающей поверхности при степенных вертикальных профилях скорости ветра и коэффициента турбулентности. Общий вид зависимости.

Практический интерес представляют формирующиеся над новой подстилающей поверхностью в процессе трансформации дополнительные турбулентные потоки субстанции \tilde{f} (количества тепла или водяного пара)

$$\begin{aligned} P'_f(x, z) &= P_{f_2}(x, z) - P_{f_1}(z) = -k(z) \frac{\partial(f_2 - f_1)}{\partial z} = -k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = \\ &= -k_1 \left(\frac{x_1^{1/p}}{z_1} \right)^m \xi^m \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} \mathcal{J}_0, \quad \xi = \frac{z}{x_1^{1/p}} \quad (\text{смотри (11.35)}). \end{aligned}$$

Учитывая следующие равенства

$$\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial z} = \frac{d \tilde{f}_n}{d \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{x_1^{1/p}}, \quad x_1 = x \frac{k_1 \cdot z_1^{n-m}}{u_1}$$

и очевидную зависимость безразмерной производной искомой функции от безразмерных переменных

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}_n(\xi, q) \rightarrow \frac{d \tilde{f}_n}{d \xi} = \tilde{f}'_n(\xi, q),$$

получим следующее соотношение

$$P'_f(x, z) = -\delta'_0 k_1 \left(\frac{x_1^{1/p}}{z_1} \right)^m \frac{1}{x_1^{1/p}} \xi^m \frac{d\tilde{f}_n}{d\xi} = -\delta'_0 \frac{k_1}{z_1^m} x_1^{\frac{m-1}{p}} \cdot \left[\xi^m \tilde{f}'_n(\xi, q) \right].$$

Турбулентный поток непосредственно на подстилающей поверхности (при $z=0$, $\xi=0$) должен иметь конкретное численное значение, независящее от высоты и, следовательно,

$$\text{при } z = 0: \left[\xi^m \tilde{f}'_n(\xi, q) \right] = C(m, n).$$

Таким образом, выражение для турбулентного потока субстанции \tilde{f} с новой подстилающей поверхности принимает вид конкретной функциональной зависимости:

$$P'_{0f}(0, x) = -\delta'_0 \frac{k_1}{z_1^m} x_1^{\frac{1-m}{p}} \cdot C(m, n)$$

Раскрывая введённое обозначение для X_1 запишем выражения для турбулентного потока в окончательном виде:

$$P'_{0f}(0, x) = -C(m, n) \delta'_0 \frac{k_1}{z_1^{\frac{n-m}{p}}} \left(\frac{u_1}{k_1 x} \right)^{\frac{1-m}{p}} = -C(m, n) \delta'_0 \left(\frac{k_1}{z_1} \right)^{\frac{m+n}{p}} \left(\frac{k_1 u_1}{x} \right)^{\frac{1-m}{p}},$$

или иначе

$$P'_{0f}(0, x) = -C(m, n) \delta'_0 u_1 \left(\frac{k_1}{u_1 z_1} \right)^{\frac{1+n}{p}} \left(\frac{z_1}{x} \right)^{\frac{1-m}{p}}. \quad (11.57)$$

Что касается высоты слоя трансформации, то при выполнении условия

$$f'(h) = \varepsilon \Delta f_0 = \varphi(h, x_1, m, n, \Delta f_0),$$

можно записать следующую функциональную связь:

$$h = f_h(x_1, \Delta f_0, m, n, \varepsilon)$$

Анализ размерностей требует исключить зависимость от величины Δf_0 и приводит к следующему выражению:

$$h = C_h(m, n, \varepsilon) x_1^{1/p} = C_h(m, n, \varepsilon) z_1^{\frac{n-1}{p}} \left(\frac{k_1 x}{u_1} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (11.58)$$

В случае модели с неизменными по высоте скоростью ветра и коэффициентом турбулентности

$$u(z) = u = const, \quad k(z) = k = const.$$

безразмерные постоянные параметры равны

$$m = 0, \quad n = 0, \quad p = 2, \quad b = 0,$$

и выражение для потока принимает вид:

$$P'_{0f}(0, x) = -C \cdot \delta f_0 \cdot \left(\frac{k \cdot u}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11.59)$$

$$h = C_h(\varepsilon) \left(\frac{k \cdot x}{u} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.60)$$

Вид полученных зависимостей для P'_{0f} и h позволяют сделать следующие выводы: а)- турбулентные потоки усиливаются и при увеличении коэффициента турбулентности, так и при увеличении скорости ветра; б)- высота слоя трансформации, увеличиваясь при увеличении коэффициента турбулентности, уменьшается с усилением скорости ветра.

На рисунке 11.4, на котором представлена схема процесса трансформации, видна причина возникновения дополнительных турбулентных потоков тепла и влаги с новой поверхности. Вид вертикального профиля функции $f_1(z)$ (температуры или влаги), оставаясь неизменным в области высот вне внутреннего слоя трансформации, резко меняет свой характер вблизи новой подстилающей поверхности. В данном примере градиент функции меняет знак с отрицательной величины на положительную за счёт более тёплой и влажной поверхности воды. Изменение вертикального градиента функции $f_1(z)$ и создаёт новые дополнительные потоки тепла и влаги.

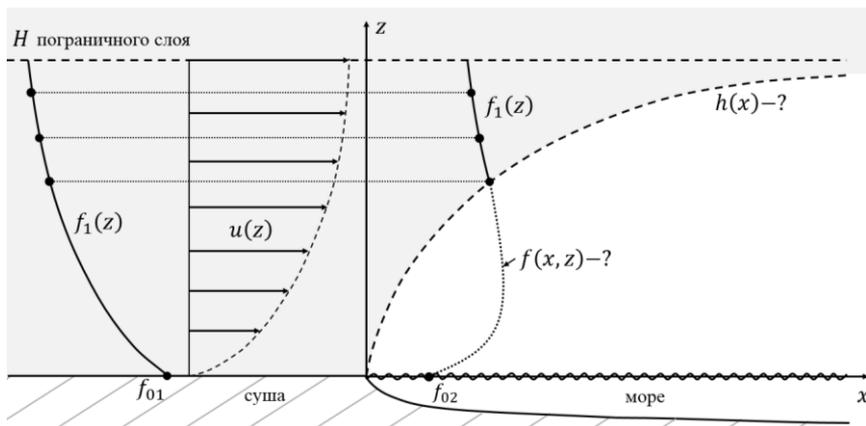


Рисунок 11.4 – Схема процесса трансформации с обозначением параметров воздушного потока при его переходе с поверхности суши на водную поверхность.

Следует отметить, что приведённые выводы справедливы только в том случае, если между профилями коэффициента $k(z)$ турбулентности и скорости ветра $u(z)$ (или их средними интегральными значениями) нет никакой функциональной связи. В действительности, как это следует из теории и приземного и пограничного слоя, связь между этими параметрами существует.

Рассмотрим, к каким изменениям в полученных выше выводах приведёт использование полученных ранее (в разделе 8) соотношений для коэффициента турбулентности $k(z)$ (8.53) и скорости ветра $u(z)$ (8.68).

Отметим, что для высот от подстилающей поверхности до $z=z_1$ в пределах приземного слоя (может быть принята равной одному метру $z_1=1\text{ м}$), выполняется условие неизменности с высотой касательного напряжения, т.е.

$$k \frac{\partial u}{\partial z} = \text{const} = v_*^2 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*^2}{k(z)},$$

При степенной зависимости $k(z)$ интегрирование последнего соотношения по z от уровня шероховатости $z=z_0$ до $z=z_1$ даёт выражение для величины u_1 (с принятым приближением $1 - \frac{z_0}{z_1} \cong 1$):

$$u_1 = \frac{v_*^2 z_1}{(1-n)k_1}. \quad (11.61)$$

При этом для коэффициента турбулентности справедливы одновременно два соотношения:

$$\text{при } z = z_0 \rightarrow k(z_0) = k_1 \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^n,$$

и в то же время $k(z_0) = \kappa v_* z_0$.

Сравнение двух выражений для $k(z_0)$ приводит к равенству:

$$k_1 = \kappa v_* z_0 \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^n. \quad (11.62)$$

Выражения для k_1 (11.62) и u_1 (11.61) дают результат

$$\frac{k_1}{u_1} = \kappa^2 (1-n) z_1 \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{2(1-n)}. \quad (11.63)$$

Использование последнего выражения (11.63) в формулах (11.57) и (11.58) позволяет получить формулы для турбулентного потока и для высоты слоя трансформации в виде:

$$P'_{0f}(0, x) = -C_p(m, n) \delta f_0 u_1 \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{\frac{2(1-n)(1+m)}{p}} \left(\frac{z_1}{x} \right)^{\frac{1-n}{p}}, \quad (11.64)$$

$$h = C(m, n, \varepsilon) z_1^{\frac{m-n}{p}} \left(\frac{k_1 x}{u_1} \right)^{\frac{1}{p}} = C_h(m, n, \varepsilon) z_1 \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{\frac{2(1-n)}{p}} \left(\frac{x}{z_1} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (11.65)$$

Как видно, расчётные формулы при известной стратификации содержат только измеряемые параметры: скорость ветра на фиксированной

высоте измерения и параметр шероховатости подстилающей поверхности. Возможны и другие варианты преобразования исходных формул для P_0 и h .

Для более успешного усвоения применимости методов анализа размерностей и преобразования уравнений с изменением их переменных ниже приводится подробный вывод решения уравнения модели с постоянными по высоте значениями скорости ветра и коэффициента турбулентности. Получены приближённые расчётные формулы для турбулентных потоков и высоты слоя трансформации.

11.5. Модельная задача о трансформации полей температуры и влажности при постоянных по высоте значениях скорости ветра и коэффициента турбулентности.

11.5.1. Анализ задачи о трансформации полей температуры и влажности с использованием π –теоремы

Согласно системе (11.23) величину f' определяют пять размерных параметров $u = const$, $k = const$, z , x , и $\Delta f_0 = const$, что позволяет записать следующую зависимость

$$f' = \varphi(z, x, u, k, \Delta f_0) \quad (11.66)$$

Применим несколько другой подход к определению группы элементарных размерностей.

В данной модели принимается условие о независимости между собой скорости ветра и коэффициента турбулентности и, следовательно, независимости двух процессов- формирование притоков за счёт горизонтальной адвекции и притоков, обусловленных вертикальным турбулентным обменом. Данное обстоятельство позволяет ввести разные размерности длины: L_x -для параметров горизонтальной адвекции, и L_z -для параметров вертикального турбулентного обмена. Такой прием в анализе размерностей известен как дополнение Хантли. С учетом этого запишем формулы размерности для перечисленных выше величин

$$\begin{aligned} [u] &= L_x T^{-1}, & [x] &= L_x, & [z] &= L_z, & [k] &= L_z^2 T^{-1}, \\ [f'] &= f_*, & [\Delta f_0] &= f_* \end{aligned} \quad (11.67)$$

и заполним матрицу размерностей (таблица 11.1).

Таблица 11.1 – Матрица размерностей

	z	x	u	k
L_x	0	1	1	0
L_z	1	0	0	2
T	0	0	-1	-1

Поскольку $n = 4$, $m = 3$, то разность $n - m = 1$, и из величин u , x , z и k можно составить два безразмерных комплекса:

$$\Pi_1 = \frac{f'}{\Delta f_0} \equiv f'_n, \quad \Pi_2 = \frac{z}{x^{\alpha_1} u^{\alpha_2} k^{\alpha_3}}, \quad (11.68)$$

Равенство размерности числителя и знаменателя безразмерного комплекса Π_2 позволяет получить следующие значения показателей степени α_i : $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = -1/2$, $\alpha_3 = 1/2$. Тогда получаем следующий комплекс, имеющий смысл безразмерной высоты,

$$\Pi_2 = \frac{z}{x^{1/2} u^{-1/2} k^{1/2}} = z \sqrt{\frac{u}{kx}} \quad (11.69)$$

В таком случае зависимость (11.66) может быть переписана в следующем виде

$$f'_n = F\left(z \sqrt{\frac{u}{kx}}\right)$$

Или для размерной переменной f'

$$f' = \Delta f_0 \cdot F\left(z \sqrt{\frac{u}{kx}}\right) \quad (11.70)$$

Оценим высоту внутреннего пограничного слоя h . Нетрудно понять, что она зависит от тех же параметров, что и f'_n за исключением высоты z :

$$h = h(u, k, x, \Delta f_0) \quad (11.71)$$

Учитывая формулы размерности (11.67) и $[h] = L_z$, заполним матрицу размерностей

Таблица 11.2 – Матрица размерностей

	h	u	x	k
L_x	0	1	1	0
L_z	1	0	0	2
T	0	-1	0	-1

Поскольку $n = 4$, $m = 3$, то разность $n - m = 1$, и зависимость (11.71) может быть представлена в виде

$$\frac{h}{u^{\beta_1} x^{\beta_2} k^{\beta_3}} = C \quad (11.72)$$

Из матрицы размерностей легко определить значения β_j , а именно: $\beta_1 = -1/2$, $\beta_2 = 1/2$, $\beta_3 = 1/2$. Тогда

$$h = C \sqrt{\frac{kx}{u}} \quad (11.73)$$

В соотношении (11.73) прямая зависимость h от \sqrt{x} и обратная от \sqrt{u} связаны с продолжительностью взаимодействия движущегося воздуха с новой подстилающей поверхностью. Чем большее расстояние воздушная масса проходит над новой подстилающей поверхностью, чем больший ее нижний слой успевает трансформироваться. Однако при больших скоростях ветра воздух меньше успевает взаимодействовать с подстилающей поверхностью и, следовательно, трансформация охватит меньший по вертикали слой. Прямая зависимость от \sqrt{k} объясняется тем, что чем больше интенсивность турбулентного перемешивания, тем до больших высот распространяется влияние подстилающей поверхности. Зависимость высоты

внутреннего пограничного слоя от перечисленных параметров демонстрирует рисунок 11.5.

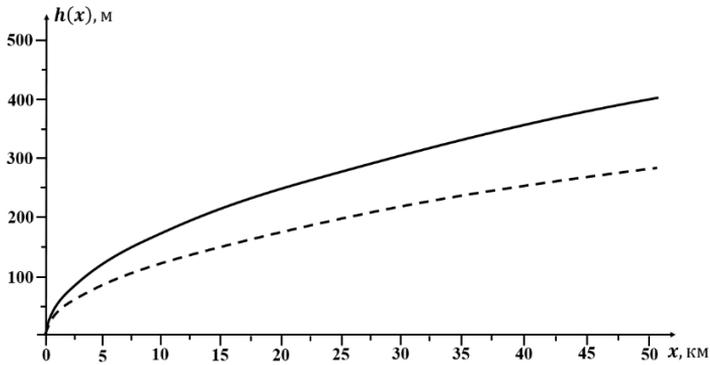


Рис. 11.5. Пример зависимости высоты внутреннего пограничного слоя от параметров x , u , k .

На рисунке 11.5 сплошная линия представляет зависимость $h(x)$ при некотором конкретном значении величины $\frac{k}{u} = M$; пунктирная линия изображает высоту внутреннего пограничного слоя при $\frac{k}{u} = \frac{M}{2}$, т.е. при условиях, когда коэффициенте турбулентности в два раза меньше, либо скорость переноса в два раза больше.

11.5.2. Решение уравнения.

Используя предположение $u = const$, $k = const$, перепишем систему (11.23)

$$\begin{cases} u \frac{\partial f'_n}{\partial x} = k \frac{\partial^2 f'_n}{\partial z^2} \\ x \leq 0, z \geq 0 & f'_n = 0 \\ x > 0, z = 0 & f'_n = 1 \\ x > 0, z \rightarrow \infty & f'_n = 0 \end{cases} \quad (11.74)$$

Одним из методов решения уравнений в частных производных является сведение их к обыкновенному дифференциальному уравнению путем замена переменной. Воспользуемся данным методом. В рассматриваемом случае необходимая замена переменной следует из анализа размерностей, проведенного выше (формула (11.69)). Для удобства преобразований будем использовать переменную

$$\sigma(x, z) = \Pi^2 = \frac{u z^2}{k x} \quad (11.75)$$

Приведём подробно все необходимые преобразования. Перепишем частные производные по x и z через полные по σ . Для этого будем пользоваться правилом дифференцирования сложной функции (так как $f = f[\sigma(x, z)]$)

$$\frac{\partial f'_n}{\partial x} = \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial f'_n}{\partial z} = \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (11.76)$$

Вычислим производные $\partial \sigma / \partial x$ и $\partial \sigma / \partial z$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{u z^2}{k x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2 \frac{u z}{k x} \quad (11.77)$$

Подставляя соотношения (11.77) в равенства (11.76), получим выражения для производных $\partial f'_n / \partial x$ и $\partial f'_n / \partial z$

$$\frac{\partial f'_n}{\partial x} = -\frac{u z^2}{k x^2} \frac{df'_n}{d\sigma}, \quad (11.78)$$

$$\frac{\partial f'_n}{\partial z} = 2 \frac{u z}{k x} \frac{df'_n}{d\sigma} \quad (11.79)$$

Получим выражение для второй производной по высоте, руководствуясь вышеприведенными выкладками и правилом дифференцирования произведения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f'_n}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f'_n}{\partial z} \right) = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial f'_n}{\partial z} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{df'_n}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\ &= \frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 + \\ &+ \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = \frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

Преобразуем подчеркнутые слагаемые по отдельности

$$\frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 = 4 \left(\frac{u z}{k x} \right)^2 \frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} \quad (11.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{2} \frac{df'_n}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(4 \frac{u^2 z^2}{k^2 x^2} \right) \\ &= \frac{u}{k x} \frac{2 df'_n}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma} = \frac{u}{k x} \frac{2 df'_n}{d\sigma} \end{aligned} \quad (11.81)$$

Объединяя (11.80) и (11.81), запишем

$$\frac{\partial^2 f'_n}{\partial z^2} = 4 \left(\frac{u z}{k x} \right)^2 \frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} + \frac{u}{k x} \frac{2 df'_n}{d\sigma} \quad (11.82)$$

Подставим выражения (11.78) и (11.82) в дифференциальное уравнение системы (11.74)

$$-\frac{u^2 z^2}{k x^2} \frac{df'_n}{d\sigma} = 4k \left(\frac{u z}{k x} \right)^2 \frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} + \frac{2u}{x} \frac{df'_n}{d\sigma} \quad (11.83)$$

Располагая в уравнении (11.83) слагаемые по старшинству производных с одновременным делением на коэффициент при производной второго порядка, получим:

$$\frac{d^2 f'_n}{d\sigma^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sigma} \right) \frac{df'_n}{d\sigma} = 0 \quad (11.84)$$

С учётом очевидных соответствий граничных значений z и σ в области интегрирования $x > 0$

$$\sigma(x, z = 0) = 0 \text{ и } \sigma(x, z = \infty) = \infty$$

граничные условия запишутся в виде:

$$\text{при } \sigma = 0: f'_n(\sigma) = 1, \quad (11.85)$$

$$\text{при } \sigma \rightarrow \infty: f'_n(\sigma) = 0 \quad (11.86)$$

Уравнение (11.84) второго порядка путем вспомогательной замены

$$\lambda = \frac{df'_n}{d\sigma}$$

сводится к уравнению первого порядка относительно функции λ

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sigma}\right)\lambda = 0 \quad (11.87)$$

Разделив переменные λ и σ , проинтегрируем (9.87)

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = - \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sigma}\right) d\sigma \quad (11.88)$$

Интеграл в левой части (11.88), очевидно, дает $\ln\lambda$. Вычислим интеграл в правой части

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sigma}\right) d\sigma &= \frac{1}{4} \int d\sigma + \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &= \frac{\sigma}{4} + \frac{1}{2} \ln\sigma - \ln C, \end{aligned} \quad (11.89)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

С учетом (9.89) получаем

$$\ln \lambda = -\frac{\sigma}{4} - \frac{1}{2} \ln \sigma + \ln C = -\frac{\sigma}{4} + \ln \frac{C}{\sqrt{\sigma}}, \quad (11.90)$$

откуда следует:

$$\lambda = \exp\left(-\frac{\sigma}{4} + \ln \frac{C}{\sqrt{\sigma}}\right) = \frac{C}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\sigma}{4}\right)$$

При принятом выше соотношении $\lambda = df'_n/d\sigma$ получим выражение для производной

$$\frac{df'_n}{d\sigma} = \frac{C}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\sigma}{4}\right) \quad (11.91)$$

Проинтегрируем (11.91) от 0 до σ

$$\int_0^{\sigma} \frac{df'_n}{d\sigma'} d\sigma' = C \int_0^{\sigma} \exp\left(-\frac{\sigma'}{4}\right) \frac{d\sigma'}{\sqrt{\sigma'}} \quad (11.92)$$

Здесь σ' – переменная интегрирования.

Используя граничное условие (11.85), для левой части (11.92) имеем

$$\int_0^{\sigma} \frac{df'_n}{d\sigma'} d\sigma' = f'_n(\sigma) - f'_n(0) = f'_n(\sigma) - 1 \quad (11.93)$$

Введем новую переменную $\tilde{\sigma}^2 = \sigma/4$ и выразим подынтегральное выражение в правой части (11.92) через $\tilde{\sigma}$

$$\sigma = 4\tilde{\sigma}^2, \quad \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} = \frac{4d\tilde{\sigma}^2}{2\tilde{\sigma}} = 4d\tilde{\sigma} \quad (11.94)$$

Пересчитаем пределы интегрирования. При $\sigma' = 0$ получаем, что $\tilde{\sigma} = 0$, а при $\sigma' = \sigma$ получаем, что $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma}/2$. С учетом полученного перепишем (11.92)

$$f'_n(\sigma) - 1 = C_1 \int_0^{\sqrt{\sigma}/2} \exp[-(\sigma')^2] d\sigma', \quad (11.95)$$

где $C_1 = 4C$.

Определим константу C_1 из граничного условия (11.86)

$$\begin{aligned} -1 &= C_1 \int_0^{\infty} \exp[-(\sigma')^2] d\sigma' \quad \rightarrow \quad C_1 \\ &= -\frac{1}{\int_0^{\infty} \exp[-(\sigma')^2] d\sigma'} \end{aligned} \quad (11.96)$$

Известно, что несобственный интеграл в выражении (11.96) сходится к $\sqrt{\pi}/2$, что дает: $C_1 = -2/\sqrt{\pi}$. В результате (9.95) принимает вид

$$f'_n(\sigma) - 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\sigma}/2} \exp[-(\sigma')^2] d\sigma'. \quad (11.97)$$

Функция

$$erf(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sigma} \exp[-(\sigma')^2] d\sigma' \quad (11.98)$$

в литературе называется функцией Крампа. Ее значения для разных значений аргумента затабулированы.

Используя функцию Крампа, можем записать

$$f'_n(\sigma) - 1 = -erf\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}}\right) \quad (11.99)$$

Возвращаясь к размерной переменной $f' = f'_n \cdot \Delta f_0 = f'_n(f_{02} - f_{01})$, имеем

$$\frac{f'}{f_{02} - f_{01}} - 1 = -erf\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}}\right) \quad (11.100)$$

Наконец, переходя от отклонения к искомой переменной $f(x, z)$, получим:

$$\frac{f(x, z) - f_1(z)}{f_{02} - f_{01}} = 1 - \operatorname{erf}(\sigma) = \operatorname{erfc}(\sigma). \quad (11.101)$$

И окончательно

$$f(x, z) = f_{02} + \Delta f_1(z) + (f_{01} - f_{02}) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}}\right). \quad (11.102)$$

На основе полученного решения можно дать количественную оценку высоты внутреннего пограничного слоя. При фиксированном x по мере удаления от поверхности $f(x, z)$ стремится к $f_1(z)$. Поэтому высоту внутреннего пограничного слоя можно определить как уровень, где с заданной точностью $f(x, h)$ равно $f_1(h)$. Зададим определенное малое различие между $f(x, h)$ и $f_1(h)$ в виде

$$\frac{f(x, h) - f_1(h)}{f_{02} - f_{01}} = \varepsilon \ll 1 \quad (11.101a)$$

и введём для соответствующего аргумента функции Крампа обозначение

$$\tilde{\sigma}_h = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}}. \quad (11.103)$$

В таком случае в соответствии с из (11.100) можем записать

$$1 - \varepsilon = \operatorname{erf}(\tilde{\sigma}_h) \quad (11.104)$$

Отсюда, пользуясь таблицами функции Крампа, можно определить величину $\tilde{\sigma}_h$, а затем из (11.103) найти h

$$h = 2\bar{\sigma}_h \sqrt{\frac{kx}{u}} \quad (11.105)$$

Сопоставляя с проведенным ранее анализом размерностей, делаем вывод, что в формуле (11.73) $C = 2\bar{\sigma}_h$.

Сделаем оценки по формуле (11.105). Если $\varepsilon = 0,01$ величина $\bar{\sigma}_h = 1,8$, то при $u = 10$ м/с и $k = 2$ м²/с на расстоянии 1 км от границы раздела $h \approx 50$ м, а на расстоянии 10 км – $h \approx 160$ м.

В заключение параграфа приведем пример расчета трансформации вертикального профиля потенциальной температуры (смотри рисунок 11.6)

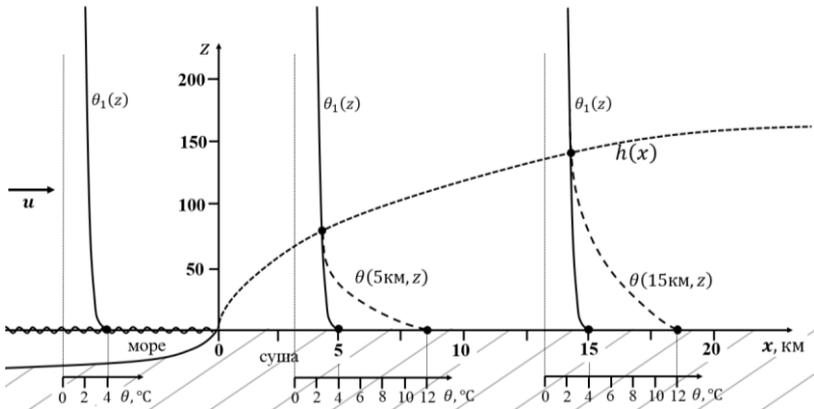


Рисунок 11.6 – Пример расчета трансформации вертикального профиля потенциальной температуры и высоты слоя трансформации.

Вычисления проводились по формуле (11.105) для $x = 5$ км и $x = 15$ км при следующих значениях параметров: $\theta_1(z) = 4 - 0,5 \cdot z^{1/4}$, $\theta_{02} = 12^\circ\text{C}$, $u = 5$ м/с, $k = 5$ м²/с. Оценка высоты внутреннего пограничного слоя сделана по формуле (11.80) при $\varepsilon = 0,01$.

Рисунок отражает качественный характер деформации профиля температуры в процессе перемещения воздушной массы над новой поверхностью. Однако количественные характеристики этих изменений по порядку соответствуют результатам численных расчётов по модели с полной системой уравнений пограничного слоя и данными натуральных наблюдений, приведённых в монографии [5]. В ней же приведён обширный обзор работ по данной проблеме и анализ выполненного численного решения задачи.

Отметим, что в учебном пособии [3] приведено приближённое решение задачи о трансформации поля скорости ветра при переходе воздушной массы на поверхность с изменившейся шероховатостью поверхности.

11.5.3. Турбулентные потоки тепла и водяного пара в зоне трансформации воздушной массы

Проанализируем турбулентные потоки тепла и влаги в зоне трансформации. Для начала запишем выражение для турбулентного потока тепла со старой и с новой подстилающей поверхности

$$P_{01} = -\rho C_p k \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (11.106)$$

$$P_{02} = -\rho C_p k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (11.107)$$

Представляя турбулентный поток P_{02} в виде суммы P_{01} и соответствующего отклонения $P'_0(x)$, а также используя соотношение (11.17), представим выражение (11.107) в виде:

$$P_{01} + P'_0(x) = -\rho C_p k \left(\frac{\partial \theta_1(z)}{\partial z} \right)_{z=0} - \rho C_p k \left(\frac{\partial \theta'(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (11.108)$$

Вычтем из (11.108) равенство (11.107)

$$P'_0(x) = -\rho C_p k \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (11.109)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для турбулентного потока влаги

$$E'_0(x) = -\rho k \left(\frac{\partial q'}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (11.110)$$

Величины $P'_0(x)$ и $E'_0(x)$ представляют собой дополнительные турбулентные потоки тепла и влаги соответственно, обусловленные процессом трансформации воздушной массы.

Как следует из соотношений (11.109) и (11.110), для определения дополнительных турбулентных потоков необходимо вычислить производную по вертикальной координате от функции $f'[\bar{\sigma}(x, z)]$, задаваемой формулой (11.100). В соответствии с правилом дифференцирования сложных функций сначала ищется производная от внешней функции $f'(\bar{\sigma})$ по ее аргументу, а затем $\bar{\sigma}$ дифференцируется по высоте z , что дает

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = \frac{df'}{d\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \quad (11.111)$$

Вычислим производную $df'/d\bar{\sigma}$

$$\begin{aligned} \frac{df'}{d\bar{\sigma}} &= \frac{d}{d\bar{\sigma}} [(f_{01} - f_{02}) \operatorname{erf}(\bar{\sigma})] \\ &= \frac{2(f_{01} - f_{02})}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\bar{\sigma}} \int_0^{\bar{\sigma}} \exp[-(\bar{\sigma}')^2] d\bar{\sigma}' \end{aligned} \quad (11.112)$$

Вспомним, что производная от интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{\sigma}} \int_0^{\bar{\sigma}} \exp[-(\bar{\sigma}')^2] d\bar{\sigma}' &= \exp(-\bar{\sigma}^2) \\ \frac{df'}{d\bar{\sigma}} &= \frac{2(f_{01} - f_{02})}{\sqrt{\pi}} \exp(-\bar{\sigma}^2) \end{aligned} \quad (11.113)$$

Вычислим производную $\partial \bar{\sigma} / \partial z$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{kx}} \quad (11.114)$$

Объединяя результаты (11.113) и (11.114), имеем

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = \frac{f_{01} - f_{02}}{\sqrt{\pi}} \exp(-\tilde{\sigma}^2) \sqrt{\frac{u}{kx}} \quad (11.115)$$

$$\frac{df'_n}{d\sigma} = \frac{C}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\sigma}{4}\right)$$

Определим значение производной при $z = 0$ (чему соответствует значение $\tilde{\sigma} = 0$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f'}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{f_{01} - f_{02}}{\sqrt{\pi}} \exp(0) \sqrt{\frac{u}{kx}} \\ &= \frac{f_{01} - f_{02}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u}{kx}} \end{aligned} \quad (11.116)$$

Полагая $f' = (\theta', q')$, для турбулентных потоков тепла и водяного пара можем записать

$$P'_0(x) = -\rho C_p k \cdot \frac{\theta_{01} - \theta_{02}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{u}{kx}} = \quad (11.117)$$

$$\rho C_p (\theta_{02} - \theta_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi x}}.$$

$$E'_0(x) = \rho (q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi x}}. \quad (11.118)$$

Анализ полученных соотношений позволяет сделать следующие выводы:

- величина дополнительных турбулентных потоков тем больше, чем больше свойства поступающего воздуха отличаются от свойств подстилающей поверхности;

- величина дополнительных турбулентных потоков увеличивается с ростом скорости ветра, что объясняется тем, что при больших скоростях ветра частицы воздушной массы не успевают долго взаимодействовать с новой подстилающей поверхностью;

- величина дополнительных турбулентных потоков увеличивается с увеличением интенсивности вертикального турбулентного обмена;
- с удалением от границы раздела дополнительные турбулентные потоки с единичной площадки уменьшаются, поскольку свойства воздуха по мере его продвижения над новой поверхностью все больше приближаются к свойствам этой поверхности.

11.6 Применение теории трансформации к расчету скорости испарения и теплоотдачи с ограниченной поверхности

Важной задачей является оценка испарения в процессе трансформации с поверхности водоема или орошаемой поверхности ограниченной площади. Считая поверхность плоской, скорость суммарного испарения определится интегрированием по всей её площади

$$\bar{E}_0 = \iint_{(S)} E'_0(x, y) dS \quad (11.119)$$

Вычисление интеграла по площади в (11.119) сводится к объединению двух последовательных действий. Сначала производится интегрирование вдоль каждой полосы шириной dy в направлении ветра (вдоль оси OX) в пределах произвольно ориентированных границ, описываемых уравнениями от $x=\xi_1(y)$ до $x=\xi_2(y)$:

$$E_{0y}(y) = \int_{\xi_1(y)}^{\xi_2(y)} E'_0(x, y) dx .$$

Затем производится интегрирование от функции $E_{0y}(y)$ по направлению (OY) в пределах участка (суммирование испарений со всех полос) в границах от $\alpha(x)$ до $\beta(x)$, что и даёт величину испарения со всего рассматриваемого участка:

$$\tilde{E}_0 = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} E_{0y}(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\xi_1(y)}^{\xi_2(y)} E'_0(x, y) dx \right) dy . \quad (11.120)$$

Здесь $\xi_1(y)$ и $\xi_2(y)$ - уравнения первой по направлению ветра и второй границ водоема, соответственно.

Подставим в (11.120) выражение (11.118) для E'_0 , которое при произвольной форме границы $\xi_1(y)$ должно иметь вид

$$E'_0(x) = \rho(q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi \tilde{x}}},$$

где $\tilde{x} = x - \xi_1(y)$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_0 &= \rho(q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{\delta\xi} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}}} \\ &= 2\rho(q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi}} \times \\ &\times \int_{\alpha}^{\beta} (\sqrt{\delta\xi}) dy = 2\rho(q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi}} G = A_q \times G. \end{aligned} \quad (11.121)$$

Здесь $\delta\xi = \xi_2(y) - \xi_1(y)$, $A_q = 2\rho(q_{02} - q_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi}}$, а величина G

определяется геометрией водоема.

Аналогичный результат может быть получен для теплоотдачи с поверхности водоема

$$\widetilde{P}_0 = \iint_{(S)} P'_0(x) dS = 2\rho C_p (\theta_{02} - \theta_{01}) \sqrt{\frac{uk}{\pi}} G = A_{\theta} \times G \quad (11.122)$$

На практике при проведении оценочных расчетов полезно рассмотреть модельные водоемы правильной формы (например, в форме прямоугольника (полоски) или треугольника). Водоемы более сложной формы могут быть представлены, например, при помощи прямоугольного покрытия, либо триангуляции.

Рассмотрим два прямоугольных водоема одинаковой площади $S = ab$, а также треугольный водоем площади $S/2$ (пояснения на рисунке 11.7).

Для первого водоема, вытянутого вдоль оси Oy , можно записать следующие соотношения: $\xi_1(y) = 0$, $\xi_2(y) = a$ и $\delta\xi = a$. В результате выражение для скорости испарения с первого водоёма принимает вид

$$I'_{S_1} = A \cdot \int_0^b \sqrt{a} dy = A \cdot \frac{S}{\sqrt{a}} \quad (11.123)$$

Для второго водоема, вытянутого вдоль оси Ox , можно записать следующие соотношения: $\xi_1(y) = 0$, $\xi_2(y) = b$ и $\delta\xi = b$. В результате приходим к равенству

$$I'_{S_2} = A \cdot \int_0^a \sqrt{b} dy = A \cdot \frac{S}{\sqrt{b}} \quad (11.124)$$

Наконец, для третьего треугольного водоема: $\xi_1(y) = 0$, а $\xi_2(y)$ – линейная функция, уравнение которой удобно представить в форме уравнения прямой в отрезках

$$\begin{aligned} \frac{\xi_2(y)}{b} + \frac{y}{a} = 1 &\rightarrow \xi_2(y) = \frac{b}{a}(a - y) \\ &\rightarrow \delta\xi(y) = \frac{b}{a}(a - y) \end{aligned} \quad (11.125)$$

С учетом (11.122) вычислим интеграл

$$\begin{aligned} I'_{S_3} &= A \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \int_0^a \sqrt{(a - y)} dy = \\ &= -A \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \int_0^b \sqrt{a - y} \cdot d(a - y) = A \cdot \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{b} \\ &= \frac{2A}{3} \cdot \frac{S}{\sqrt{b}} \end{aligned} \quad (11.126)$$

Для случая, когда $b = 2a$ результаты принимают вид:

$$\begin{aligned}
 I'_{S_1} &= A \cdot \frac{2a^2}{\sqrt{a}} = A \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} S_0; & I'_{S_2} &= A \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \\
 &= A \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} S_0; \\
 I'_{S_3} &= A \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} = A \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} S_0
 \end{aligned}
 \tag{11.127}$$

где S_0 – площадь квадрата размером $a \times a$.

Сопоставление результатов приводит к соотношению: $I'_{S_3} < I'_{S_2} <$

I'_{S_1} .

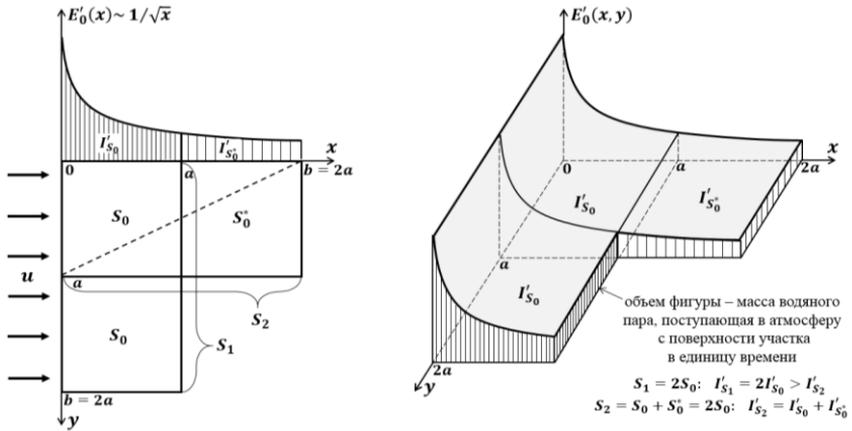


Рис. 11.7. Пример модельных прямоугольных водоемов с различным расположением по отношению к скорости ветра и дополнительный турбулентный поток водяного пара в зависимости от удаления от границы раздела.

Из анализа полученных результатов следует, что испарение с водоема зависит не только от его геометрии, но и от ориентации водоема по отношению к вектору скорости ветра. Если обратиться к графику зависимости дополнительного турбулентного потока водяного пара от координаты x , то нетрудно заметить, что наибольшие потоки наблюдаются вблизи границы раздела подстилающих поверхностей. Это означает, что область с максимальными потоками у водоема, вытянутого вдоль

направления перпендикулярного вектору скорости ветра, больше, чем у водоема вытянутого вдоль вектора скорости ветра.

Контрольные вопросы

1. Какие упрощения используются в постановке модельной задачи о трансформации полей температуры и важности воздушного потока.

2. По какому условию определяется высота внутреннего слоя трансформации?

3. Объяснить зависимость высоты слоя трансформации от скорости ветра и коэффициента турбулентности.

4. При каком направлении ветра по отношению к ограниченному бассейну прямоугольной формы скорость суммарного испарения максимальна?

5. Какова функциональная зависимость турбулентных потоков тепла и влаги от расстояния от границы раздела участков с различными свойствами?

Литература к главе 11

1 Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т, Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. Л.: Гидрометеизд., 1955. – 647 с.

2 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.

3 Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов /В.М. Радикевич – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.

4 Задачник по динамической метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1984 – 166 с

5 Вагер Б.Г., Надёжина Е.Д. Пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности. – Л.:Гидрометеиздат, 1979-135с

6 Методические указания. «Динамическая метеорология» для высших учебных заведений. Специальность Метеорология.: Изд. РГГМУ, 2017. – 29 с.

12. ПРОЯВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ В ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

12.1 Циркуляция скорости и ее ускорение

12.2 Факторы, приводящие к изменению циркуляции по замкнутому контуру

12.3 Влияние трения на изменение циркуляции по замкнутому контуру

12.4 Влияние трения на циклоническую (антициклоническую) циркуляцию

12.5 Анализ влияния трения на формирование бароклинной циркуляции по замкнутому контуру

12.6 Оценка скорости фрикционных вертикальных токов с использованием циркуляции векторного поля

12.1 Циркуляция скорости и ее ускорение

Напомним, что циркуляцией скорости по замкнутому контуру L , выделенному в пространстве с полем скорости, называется величина Γ , определяемая соотношением [1], [2]

$$\Gamma = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (V_l)_i \delta l_i = \oint_L V_l dl \quad (12.1)$$

Равенство

$$\vec{V} \cdot d\vec{l} = V_l dl$$

позволяет представить циркуляцию скорости в другой форме:

$$\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (12.2)$$

В выражении (12.1) суммирование и интегрирование производится по всему жидкому контуру L . При этом приняты обозначения: V_l – проекция вектора скорости на направление контура в заданной точке, δl_i – бесконечно малый элемент жидкого контура, α – угол между вектором скорости и направлением, касательным к контуру. По определению самого понятия «циркуляции скорости по замкнутому контуру» вектор касательного направления в любой точке контура соответствует направлению его обхода против часовой стрелки. Принятое направление обхода контура отражает вывод известной теоремы Стокса, согласно

которой циркуляция равна среднему интегральному по площади внутри контура вектору ротора скорости. При этом, разумеется, каждый раз надо оговорить смысл этого понятия. Например, для контура, расположенного в горизонтальной плоскости, направление обхода берется против часовой стрелки, если смотреть сверху.

Анализ примера, представленного на рисунке 12.1, с использованием соотношения

$$V_i = |\vec{V}| \cos \alpha, \quad (12.3)$$

приводит к следующему выводу: если $|\alpha| < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, что соответствует положительному знаку проекции на направление обхода контура, и $(V_i)_i \delta l_i > 0$; если $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, то $\cos \alpha < 0$, что соответствует отрицательному знаку проекции на направление обхода контура, и $(V_i)_i \delta l_i < 0$. В результате суммирования (с учетом знаков) мы получаем общую характеристику вдоль жидкого контура. Таким образом, $\Gamma > 0$ означает, что суммарная вращательная (касательная к контуру) составляющая скорости направлена против часовой стрелки, а $\Gamma < 0$ – по часовой стрелке.

Контур L , по которому производится интегрирование, называется жидким, если он движется вместе с жидкостью (газом) так, что любая принадлежащая контуру точка движется вместе с жидкой частицей. Это значит, что жидкий контур состоит из одних и тех же частиц жидкой среды.

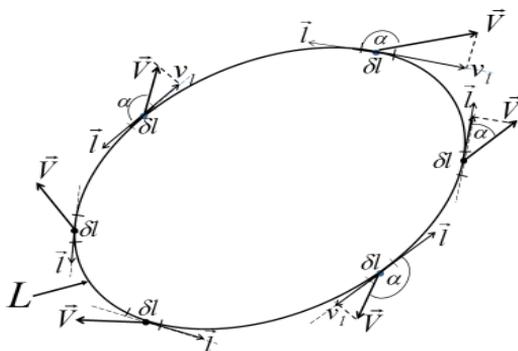


Рисунок 12.1 – Пояснение к определению циркуляции скорости

При исследовании и анализе циркуляционных процессов интерес представляют именно циркуляции скорости по жидкому замкнутому контуру и их индивидуальные изменения (полные производные от циркуляции по времени). Это величина

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_{(L)} \vec{V} \cdot \overline{\delta l} \right), \quad (12.4)$$

которую обычно называют ускорением циркуляции. Смысл ее следующий. Выделим мысленно в некоторый начальный момент времени частицы, образующие некоторый замкнутый контур. В силу непрерывности движения эти же самые частицы воздуха будут в дальнейшем также образовывать замкнутый контур, но уже другой – смещенный в пространстве и деформированный. Циркуляция по рассматриваемому контуру также изменится. Скорость этого изменения циркуляции по движущемуся контуру и представляет собой величину $d\Gamma/dt$. Последняя является важной характеристикой, используемой при анализе динамики атмосферных циркуляционных систем, обусловленных разными факторами, различных масштабов и ориентаций.

Далее будем рассматривать формирование циркуляции именно по жидкому замкнутому контуру.

Согласно теореме Кельвина (Томсона) равенство (12.4) преобразуется к виду [2]:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{(L)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \overline{\delta l} \quad (12.5)$$

Как видно, правая часть последнего равенства представляет собой циркуляцию индивидуального изменения скорости, иными словами – циркуляцию ускорения, что сразу видно из сопоставления ее с правой частью равенства (12.4). Поэтому формулу (12.5) иногда читают так: «ускорение циркуляции равно циркуляции ускорения».

Соотношение (12.5), как будет показано ниже, дает возможность качественно проанализировать проявление различных сил в динамике циркуляционных процессов.

12.2 Факторы, приводящие к изменению циркуляции по замкнутому контуру

Анализ причин, вызывающих изменение (ускорение) циркуляции скорости, согласно итогам предыдущего параграфа, сводится к анализу причин, вызывающих ускорение элементов жидкого контура. Так как в соответствии с основным законом динамики – вторым законом Ньютона – ускорение определяется действием сил, то для анализа изменения циркуляции необходимо обратиться к векторному уравнению движения воздушных масс в атмосфере

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{F}_\tau + \vec{F}_g. \quad (12.6)$$

Здесь \vec{F}_p – сила барического градиента, \vec{F}_k – сила Кориолиса, \vec{F}_τ – сила трения, \vec{F}_g – сила тяжести.

Подставим уравнение движения (12.6) в равенство (12.5)

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_{(L)} (\vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{F}_\tau + \vec{F}_g) \cdot \vec{\delta l} \\ &= \oint_{(L)} \vec{F}_p \cdot \vec{\delta l} + \oint_{(L)} \vec{F}_k \cdot \vec{\delta l} + \\ &+ \oint_{(L)} \vec{F}_\tau \cdot \vec{\delta l} + \oint_{(L)} \vec{F}_g \cdot \vec{\delta l} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Из соотношения (12.9) видно, что анализ причин, вызывающих изменение циркуляции, сводится к последовательному анализу каждого из четырех факторов J_1, J_2, J_3, J_4 , действующих независимо от других. Действительная картина может быть получена в результате суперпозиции (сложения) проявленных эффектов. Прежде всего заметим, что слагаемые в правой части последнего равенства представляют собой циркуляцию вектора соответствующей силы, то есть суммарную работу, совершаемую силой при движении вдоль замкнутого контура L .

Что касается силы тяжести, которая является консервативной массовой силой, то работа, совершаемая данной силой, не зависит от пути, а зависит лишь от начальной и конечной точек этого пути и, следовательно, в случае замкнутого контура равна нулю. Это значит, что сила тяжести не может приводить к изменениям циркуляции по жидкому замкнутому контуру.

Величина J_3 представляет собой работу силы трения

$$J_3 = \oint_{(L)} \vec{F}_\tau \cdot \vec{\delta l} \quad (12.8)$$

Работа силы трения тем больше, чем больше путь перемещения (даже при одинаковой начальной и конечной точках), поскольку именно при движении кинетическая энергии воздушной массы тратится на преодоление силы трения с переходом в тепло. Следовательно, в общем случае величина J_3 может быть отлична от нуля, и ее вклад в изменение циркуляции должен быть учтен.

Величина J_2 связана с действием силы Кориолиса – массовой силы, не имеющей потенциала

$$J_2 = \oint_{(L)} \vec{F}_k \cdot \vec{\delta l} = -2 \oint_L (\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot \vec{\delta l} = -2 \oint_L \vec{\omega} \cdot (\vec{V} \times \vec{\delta l}). \quad (12.9)$$

Как видно, величина под интегралом равна нулю только в том случае, когда направление вектора скорости на контуре совпадает с направлением касательной к контуру в этой точке. Следовательно, в общем случае величина J_2 может быть отлична от нуля.

Величина J_1 связана с работой силы барического градиента и с учетом ее определения

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (12.10)$$

принимает вид

$$J_1 \equiv \frac{d\Gamma_p}{dt} = - \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot \vec{\delta l} = - \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} \delta l = - \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \delta p. \quad (12.11)$$

Из последнего равенства следует вывод, что для жидкостей и газов с баротропными условиями или постоянной плотностью ($\rho = \text{Const}$) ускорение циркуляции равно нулю

$$\frac{d\Gamma_p}{dt} = - \frac{1}{\rho} \oint_{(L)} \delta p = 0. \quad (12.12)$$

поскольку вычисляется интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала.

Аналогичный вывод следует и в случае баротропного состояния жидкости, заключающемся в существовании однозначной зависимости плотности от давления $\rho = \rho(p)$. Для таких сред может быть введена следующая скалярная функция давления [2], [3]

$$\Pi(p) = \int \frac{\delta p}{\rho(p)}, \quad (12.13)$$

дифференциал которой равен

$$\delta \Pi = \frac{\delta p}{\rho(p)}, \quad (12.14)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\Gamma_p}{dt} = - \oint_{(L)} \frac{\delta p}{\rho(p)} = - \oint_{(L)} \delta \Pi = 0. \quad (12.15)$$

Из уравнения состояния для воздуха

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (12.16)$$

следует, что и температура T (в случае влажного воздуха это виртуальная температура $T_v = T(1 + 0,608q)$), как и плотность, в случае баротропных условий должна быть также функцией только давления. Если температура может меняться независимо от давления, то в соответствии с уравнением состояния условие баротропности не выполняется. Такое состояние среды называется бароклинным.

Таким образом, ускорение циркуляции, связанное с работой силы барического градиента отлично от нуля только в области, характеризующейся бароклинностью.

В соответствии с проведенными рассуждениями ускорение циркуляции обуславливается тремя факторами:

- работой силы барического градиента в условиях бароклинности,
- работой силы Кориолиса,
- работой силы трения.

Полученный результат согласуется с известной из гидромеханики теоремой Томсона (Кельвина): циркуляция скорости по жидкому замкнутому контуру сохраняется, если жидкость идеальная (без вязкости) и баротропная, а массовые силы имеют потенциал.

В заключение заметим, что значимость влияния вращения Земли (второго фактора J_2) на изменение циркуляции зависит от пространственного масштаба рассматриваемых циркуляционных систем. Если рассматриваются циркуляционные системы малых горизонтальных масштабов (например, бризовая и горно-долинная циркуляции, $L \approx (1 \div 5)10^4$ м), то влиянием вращения Земли можно пренебречь и считать, что основное влияние оказывают только бароклинность и сила трения. Если же рассматриваются циркуляционные системы больших горизонтальных масштабов (например, такие циркуляционные системы, как циклоны, антициклоны, муссоны, пассаты), то обязателен учет совместного влияния бароклинности и вращения Земли.

12.3 Влияние трения на изменение циркуляции по замкнутому контуру

Предположим, что существует постоянно действующий фактор формирования циркуляции, обусловленный силой барического градиента и/или силой Кориолиса так, что

$$J_1 + J_2 \equiv B = \text{Const} \quad \rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{dt} = B + \oint_{(L)} \vec{F}_\tau \cdot \vec{\delta l}. \quad (12.17)$$

Точное описание влияния вязкости весьма затруднительно, однако для качественного анализа влияния сил вязкого трения достаточно оценить приближенно, используя следующую аппроксимацию [2]

$$\vec{F}_\tau = -n\vec{V}, \quad n = \text{Const}. \quad (12.18)$$

В таком представлении модуль силы трения пропорционален модулю скорости, а направление противоположно.

Подставляя (12.18) в соотношение (12.17), получим

$$J_3 \equiv \frac{d\Gamma_\tau}{dt} - n \oint_{(L)} \vec{V} \cdot \vec{\delta l} = -n\Gamma \quad \rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{dt} = B - n\Gamma. \quad (12.19)$$

Зададим начальное условие: пусть в момент времени $t_0 = 0$ существовала некоторая циркуляция $\Gamma(0) = \Gamma_0$. Преобразуем последнее уравнение к виду:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -n \left(\Gamma - \frac{B}{n} \right) \quad (12.20)$$

и введем новую функцию

$$\Gamma^* = \Gamma - \frac{B}{n} \quad (12.21)$$

Учитывая тот факт, что B/n величина постоянная, введение функции Γ^* позволяет записать уравнение (12.20) в виде

$$\frac{d\Gamma^*}{\Gamma^*} = -ndt. \quad (12.22)$$

с соответствующим граничным условием $\Gamma^*(0) = \Gamma_0 - B/n \equiv \Gamma_0^*$.

Решение данного уравнения при этом граничном условии имеет вид

$$\Gamma^*(t) = \Gamma_0^* e^{-nt}. \quad (12.23)$$

Переходя к исходной функции Γ , получим окончательный вид решения

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 e^{-nt} + B \frac{1 - e^{-nt}}{n}. \quad (12.24)$$

При отсутствии трения, с учетом разложения функции $\exp(-nt) \equiv \exp(y)$ в ряд

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^k}{k!} \quad (12.25)$$

при $n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[1 - 1 - (-nt) - \frac{(-nt)^2}{2} - \dots - \frac{(-nt)^k}{k!} \right] = t \quad (12.26)$$

что позволяет записать решение (12.24) в виде

$$\Gamma(t)_{n=0} = \Gamma_0 + Bt \quad (12.27)$$

Последнее соотношение указывает на бесконечный рост модуля циркуляции независимо от ее знака при $t \rightarrow \infty$. Такой вывод свидетельствует о необходимости учитывать силу трения, которая должна ограничивать развитие циркуляции любого типа.

Проанализировать, как ведет себя $\Gamma(t)$ при протекании достаточно продолжительного промежутка времени ($t \rightarrow \infty$) удобнее, записав решение (12.24) в другом виде

$$\Gamma(t) = \frac{B}{n} + \left(\Gamma_0 - \frac{B}{n} \right) e^{-n\Delta t}, \quad (12.28)$$

приводящему к результату

$$\Gamma(t \rightarrow \infty) = \frac{B}{n}. \quad (12.29)$$

Нетрудно увидеть, что при больших t циркуляция перестает зависеть от времени и стремится к некоторой постоянной величине B/n ,

соответствующий равновесию между влиянием фактора, ее обуславливающего, и вязкости.

12.4 Влияние трения на циклоническую (антициклоническую) циркуляцию

Рассмотрим влияние трения на циркуляционное движение в циклоне (рисунок 12.2). Указанный циркуляционный режим формируется в результате действия трех факторов: бароклинности, проявления сил Кориолиса и трения.

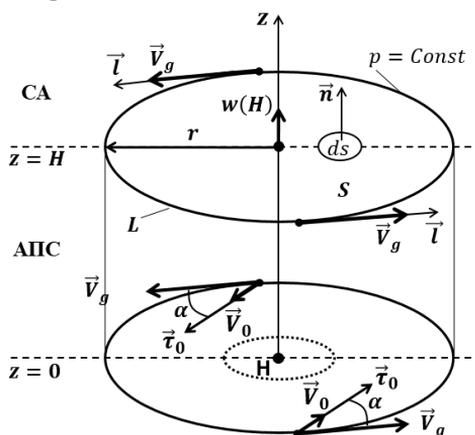


Рисунок 12.2 – Схематическое изображение циклонической циркуляции в северном полушарии.

Исходным соотношением для анализа будет формула (12.17) из предыдущего параграфа.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = B + \oint_{(L)} \vec{F}_\tau \cdot \vec{dl}, \quad (12.30)$$

где величина B отражает совместное влияние бароклинности и вращения Земли и для простоты полагается по-прежнему постоянной.

Действие трения сосредоточено в пограничном слое атмосферы, при этом наглядные результаты можно получить, рассматривая интегральный эффект в указанном слое. Применяя операцию интегрирования от подстилающей поверхности ($z = 0$) до верхней границы

пограничного слоя ($z = H$), введем среднюю интегральную циркуляцию некоторой величины \vec{f}

$$\bar{\Gamma}_f = \frac{1}{H} \int_0^H \left(\oint_{(L)} \vec{f} \cdot \vec{dl} \right) dz = \oint_{(L)} \left(\frac{1}{H} \int_0^H \vec{f} dz \right) \cdot \vec{dl} = \Gamma_{\bar{f}}. \quad (12.31)$$

Из записанного равенства следует, что средняя интегральная циркуляция $\bar{\Gamma}_f$ равна циркуляции $\Gamma_{\bar{f}}$ средней интегральной величины. В таком случае равенство (12.30) для средней интегральной циркуляции примет вид

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{dt} = \bar{B} + \oint_{(L)} \left(\frac{1}{H} \int_0^H \vec{F}_\tau dz \right) \cdot \vec{dl}. \quad (12.32)$$

Используя принятую нами в предыдущих главах форму представления силы трения

$$\vec{F}_\tau = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}, \quad (12.33)$$

вычислим циркуляцию средней интегральной силы трения

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{F}_\tau} &= \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} dz \right) \cdot \vec{dl} = \frac{1}{H} \oint_{(L)} \left(\frac{\vec{\tau}_H}{\rho} - \frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) \cdot \vec{dl} \\ &= -\frac{1}{H} \oint_{(L)} \frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \cdot \vec{dl}. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Поскольку в свободной атмосфере эффекты трения пренебрежимо малы, то на верхней границе пограничного слоя принимается $\vec{\tau}_H = 0$. И тогда

$$\Gamma_{\vec{F}_\tau} = -\frac{1}{H} \oint_{(L)} \frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \cdot \vec{dl}. \quad (12.35)$$

На самой подстилающей поверхности (при $z = 0$) скорость ветра равна нулю. Однако в непосредственной близости к подстилающей поверхности ($z \rightarrow 0$) скорость отлична от нуля и равна V_0 , а ее направление совпадает с направлением касательного напряжения τ_0 . Такие рассуждения позволяют использовать параметризацию для касательного напряжения в виде следующей формулы

$$\vec{\tau}_0 = c\rho\vec{V}_0, \quad (12.36)$$

где c – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность м/с.

Подстановка (12.36) в формулу (12.35) дает

$$\Gamma_{\vec{F}_\tau} = -\frac{c}{H} \oint_{(L)} \vec{V}_0 \cdot \vec{dl} = -\frac{c}{H} \oint_{(L)} V_0 \cdot dl \cdot \cos\alpha, \quad (12.37)$$

где α представляет собой угол между направлением касательной к изобаре при ее обходе против часовой и вектором приземного ветра. Кроме того, для оценочных расчетов можно принять скорость V_0 пропорциональной некоторому среднему значению: $V_0 \approx \varepsilon\bar{V}$. С учетом сказанного, а также используя свойство (12.31), получим

$$\Gamma_{\vec{F}_\tau} = -\frac{\varepsilon c}{H} \oint_{(L)} \bar{V} \cdot dl \cdot \cos\alpha = -\frac{\varepsilon c}{H} \Gamma_{\bar{V}} = -\frac{\varepsilon c}{H} \bar{\Gamma} = -n\bar{\Gamma}, \quad (12.38)$$

где величина $n = \frac{\varepsilon c}{H}$ играет роль коэффициента трения.

Проведенные рассуждения привели к результату, аналогичному формуле (12.19)

$$\frac{d\bar{\Gamma}}{dt} = \bar{B} - n\bar{\Gamma} \quad (12.39)$$

с тем лишь отличим, что речь идет о средних интегральных по пограничному слою величинах, и параметр $-n$ имеет более обоснованный физический смысл. Это означает, что для данной задачи справедливы все выводы, сделанные в предыдущем параграфе.

12.5 Анализ влияния бароклинности на развитие циркуляции по замкнутому контуру

Основной причиной появления бароклинных условий в атмосфере является неодинаковый нагрев различных участков подстилающей поверхности. Возникающая температурная неоднородность обусловлена целой совокупностью причин: различным альбедо отдельных участков поверхности, различным наклоном подстилающей поверхности по отношению к падающим солнечным лучам, различными теплофизическими свойствами сред, располагающихся ниже подстилающей поверхности.

Типичным примером бароклинной циркуляционной ячейки, возникающей за счет различия теплофизических свойств суши и моря, является ячейка бриза. Примером бароклинной циркуляционной ячейки, обусловленной различным наклоном подстилающей поверхности по отношению к падающим солнечным лучам, служит ячейка горно-долинной циркуляции.

Для дальнейшего анализа формирования скорости ветра в циркуляционных системах введём среднее по всему замкнутому контуру, имеющему длину L , значение касательной к контуру проекции скорости

$\bar{V}_l = \frac{1}{L} \oint \bar{V}_l dl$, так что циркуляция по замкнутому контуру может быть

представлена в виде:

$$\Gamma = \oint_L \bar{V}_l dl = \bar{V}_l L. \quad (12.40)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\bar{V}_l \equiv \bar{V}$.

В качестве примера рассмотрим бризовую циркуляцию вокруг области, ограниченной по вертикали двумя изобарами p_1 , и p_2 , а по горизонтали двумя вертикалями с разностью средних по высоте температур $\Delta\bar{T}$ (рисунок 12.3). Будем полагать, что формирование средняя скорость бризовой циркуляции происходит под влиянием двух факторов- фактора

бароклинности, определяемого в общем случае формулой (12.11), и фактора, связанного с силой трения (12.18).

Развитие циркуляции за счёт бароклинного фактора в результате преобразований, которые изложены в учебных пособиях [1] и [2], определяется соотношением

$$|J_p| = R|\Delta\bar{T}|\ln\frac{p_1}{p_2}, \quad (12.41)$$

так, что формула (12.39) запишется в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = R\Delta\bar{T}\ln\frac{p_1}{p_2} - n\Gamma.$$

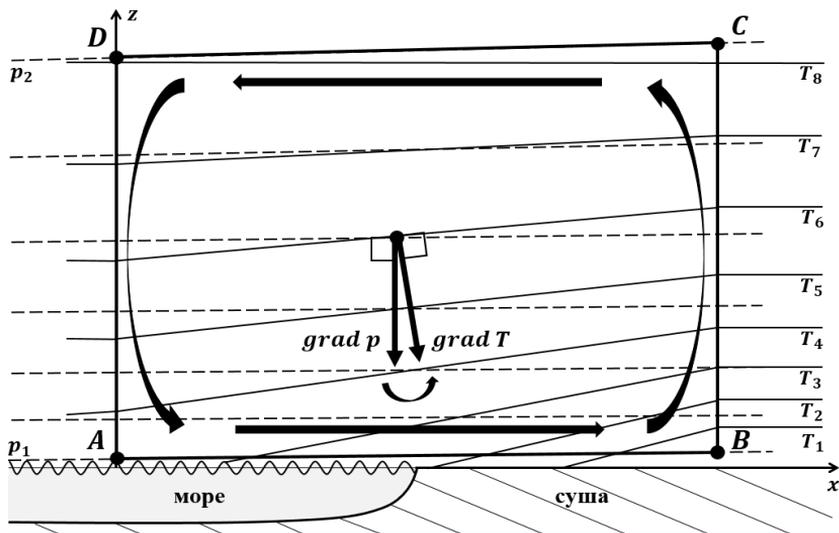


Рисунок 12.3 – Схема дневной вертикальной бризовой циркуляции вокруг бароклинной области, охватываемой замкнутым контуром ABCD

Зная ускорение циркуляции, а также ее начальное значение $\Gamma(t_0)$, можно определить значение циркуляции в произвольный момент времени $t_0 + \Delta t$

$$|\Gamma(t)| = |\Gamma(t_0)| + \left| \frac{d\Gamma_p}{dt} \right| \Delta t. \quad (12.42)$$

Тогда для средней скорости циркуляции по контуру в момент времени t имеем

$$\bar{V}(t) \approx \frac{1}{L} \left[|\Gamma(t_0)| + \left| \frac{d\Gamma_p}{dt} \right| \Delta t \right]. \quad (12.43)$$

Из записанной формулы следует, что для определения средней скорости необходимо определить ускорение циркуляции (если известно начальное значение $\Gamma(t_0)$), а также длину контура. Что касается второго параметра, то стоит исходить из того факта, что бризовая циркуляция обычно охватывает область несколько десятков километров вглубь суши и моря, а по вертикали располагается в пределах пограничного слоя (1,5 – 2 км). Таким образом, между горизонтальными отрезками контура L_x и вертикальными L_z выполняется соотношение: $L_x/L_z \ll 1$. Следовательно, при расчетах можно полагать $L \approx 2L_x$.

Анализируя формулу (12.43), нетрудно заметить, что средняя скорость бароклинной циркуляции будет неограниченно возрастать с увеличением времени. Это означает, что указанную формулу можно использовать только для небольших промежутков времени. Обозначенная проблема возникает из-за того, что изначально было не учтено несколько существенных факторов:

- во-первых, как было выяснено в параграфе 12.4, фактором, противодействующим развитию циркуляции, является трение;

- во-вторых, бризовая циркуляция обладает суточной периодичностью (то есть изменение знака разности средних температур над сушей и морем определяет смену знака ускорения циркуляции).

Для учета указанных факторов воспользуемся соотношением (12.19), отказываясь при этом от постоянства фактора B ,

$$B = R\Delta\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} \neq \text{Const}, \quad \frac{d\Gamma_p}{dt} = R\Delta\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} - n\Gamma_p. \quad (12.44)$$

Используя соотношение (12.40), перейдем к уравнению относительно средней скорости

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + n\bar{V} = \frac{R}{L} \Delta\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (12.45)$$

Теперь возмущающую функцию в правой части (12.45) зададим в виде гармонической функции с суточным периодом

$$\frac{R}{L} \Delta\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} = A \cos \omega \tau, \quad (12.46)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли, τ – время, отсчитанное от фиксированного момента t_0 , соответствующего моменту наступления максимальной разности средних температур над сушей и морем, A – амплитуда возмущающей функции, что приводит (12.45) к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau} + n\bar{V} = A \cos \omega \tau, \quad (12.47)$$

которое имеет решение

$$\bar{V}(\tau) = e^{-n\tau} \left(\bar{V}_0 + \frac{\omega A}{n^2 + \omega^2} \right) + \frac{A}{\sqrt{n^2 + \omega^2}} \cos(\omega\tau - \gamma). \quad (12.48)$$

Здесь $\bar{V}_0 = \bar{V}(t_0)$ – значение скорости в начальный момент времени t_0 ;

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\omega}{n}.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ решение должно соответствовать установившемуся, чисто периодическому циркуляционному процессу (фактически это будет выполняться при условии $n\tau \geq 2\pi$), и принимает вид:

$$\bar{V}(\tau) = \frac{A}{\sqrt{n^2 + \omega^2}} \cos(\omega\tau - \gamma). \quad (12.48a)$$

Как видно, суточный ход скорости циркуляции формируется с запаздыванием по отношению к суточному ходу бароклинного фактора (горизонтальной разности температур на границах контура) на величину γ .

При отсутствии трения запаздывание согласно полученному решению равно

$$n = 0 \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad (12.49)$$

или шести часам, что существенно превосходит реальные значения этой величины. Проведём анализ влияния силы трения на величину запаздывания максимальной скорости циркуляции в её суточном ходе по отношению к моменту максимального значения горизонтального градиента температуры. Решение (12.48а) преобразуется к виду:

$$\bar{V}(t) = A(n^2 + \omega^2)^{-1}(\omega \sin \omega t + n \cos \omega t). \quad (12.50)$$

Оценим величину коэффициента трения n . Модуль силы трения, действующей на частицу воздуха, может быть определен выражением

$$F_\tau = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \rho k \frac{\partial V}{\partial z} \quad (12.51)$$

Считая плотность воздуха ρ и коэффициент турбулентности k неизменными во всех точках контура, а также вводя характерные масштабы и безразмерные функции, получим

$$F_{\tau 0} F_{\tau n} = \frac{k_0}{H_0^2} V_0 k_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial z_n^2}. \quad (12.52)$$

Из записанного выражения вытекает следующая связь масштабов $F_{\tau 0}$ и V_0

$$F_{\tau 0} = \frac{k_0}{H_0^2} V_0. \quad (12.53)$$

Сопоставляя формулу (12.53) с (12.38), а также используя значения $k_0 = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ и $H_0 = 300 \text{ м}$, получаем оценку коэффициента трения

$$n \sim \frac{k_0}{H_0^2} = \frac{10 \text{ м}^2/\text{с}}{(300 \text{ м})^2} \approx 10^{-4} \frac{1}{\text{с}}$$

Приведенная оценка позволяет заключить, что величины n и ω ($\omega = 0,73 \times 10^{-4} 1/\text{с}$) имеют один порядок: $n \approx \omega = \alpha = O(10^{-4})$. С учетом полученной оценки преобразуем выражение (12.49)

$$\bar{V}(t) \approx \frac{A}{2\alpha} (\sin\alpha t + \cos\alpha t) = \frac{A}{\alpha\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha t\right). \quad (12.54)$$

Для определения момента наступления экстремума скорости вычислим производную и приравняем ее к нулю

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\tau\right) = 0. \quad (12.55)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\pi}{4} + \alpha\tau = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \tau_{\bar{V}_m} = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{4} \approx 3\text{ч}. \quad (12.56)$$

Сопоставляя полученный результат с оценкой (12.49), делаем вывод, что учет трения привел к сокращению времени запаздывания в два раза. В действительности, по данным наблюдений, максимум средней скорости может быть достигнут еще раньше. Использование в рассмотренных выше формулах значений $n > \omega$ (по некоторым данным $n \approx 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) приведёт к уменьшению величины анализируемого времени запаздывания ($\tau_{\bar{V}_m} < 3\text{час}$).

12.6 Оценка скорости фрикционных вертикальных токов с использованием циркуляции векторного поля

Совместное действие силы Кориолиса и силы трения в пограничном слое атмосферы формирует сходимость воздушных течений в циклоне и их расходимость в антициклоне [4]. Названный эффект, как было показано в параграфе 5.7, ответственен за формирование вертикальных

токов на верхней границе H пограничного слоя. В указанном параграфе было получено следующее соотношение для определения скорости вертикальных токов

$$w(H) = \frac{1}{2\omega_z} \operatorname{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right), \quad (12.57)$$

Выберем замкнутую изобару, охватывающую область S на верхней границе пограничного слоя (смотри рисунок 10.5 в предыдущем параграфе). Средняя по выбранной области скорость вертикальных токов может быть определена как

$$\bar{w}(H) = \frac{1}{2\omega_z S} \int_{(S)} \operatorname{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) ds \quad (12.58)$$

Вектор $\vec{\tau}_0/\rho$ располагается в горизонтальной плоскости, следовательно, проекция ротора указанного вектора на местную вертикаль равна по модулю длине вектора $\operatorname{rot}(\vec{\tau}_0/\rho)$. Задавая ориентацию поверхности S ортом нормали \vec{n} (его направление совпадает с направлением вертикали), можно получить

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_z \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) ds &= \left| \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) \right| ds = \left(\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) \cdot \vec{n} \right) ds \\ &= \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) \cdot \vec{ds}, \end{aligned} \quad (12.59)$$

что позволяет использовать формулу Стокса и перейти к циркуляции вектора $\vec{\tau}_0/\rho$ по совпадающему с изобарой замкнутому контуру L

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \right) \cdot \vec{ds} &= \oint_{(L)} \frac{\vec{\tau}_0}{\rho} \cdot \vec{dl} = \oint_{(L)} \frac{\tau_{0l}}{\rho} dl \\ &= \oint_{(L)} \frac{\tau_0}{\rho} \cdot dl \cdot \cos\alpha \end{aligned} \quad (12.60)$$

Здесь α – угол между направлением касательной к изобаре при ее обходе против часовой и вектором $\vec{\tau}_0/\rho$, совпадающим по направлению с вектором приземного ветра. Обратим внимание, что в циклоне северного полушария воздух циркулирует против часовой стрелки, следовательно, $\alpha < 90^\circ, \cos\alpha > 0$, и циркуляция положительна. В антициклоне северного полушария воздух циркулирует по часовой стрелке, следовательно, $\alpha > 90^\circ, \cos\alpha < 0$, и циркуляция отрицательна.

Пользуясь моделью Экмана, будем полагать, что $\alpha = 45^\circ$ ($\cos\alpha = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$) в циклоне и $\alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ($\cos\alpha = \cos 135^\circ = -1/\sqrt{2}$) в антициклоне.

Для модуля вектора $\vec{\tau}_0/\rho$ можем записать

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 = k \sqrt{\left(\frac{du}{dz} \right)_0^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)_0^2} \quad (12.61)$$

В параграфе 7.6 было показано, что в экмановском пограничном слое

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 = 2V_g^2 a^2 e^{-2az} \quad (12.62)$$

где $a = \sqrt{\omega_z/k}$.

Устремляя z к нулю, имеем

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k \sqrt{2V_g^2 a^2} = \sqrt{2}akV_g \quad (12.63)$$

Считая модуль геострофического ветра постоянной величиной, а также оценивая коэффициент турбулентности в соответствии с интегральной моделью в условиях нейтральной стратификации

$$k = m \frac{V_g^2}{\omega_z}, \quad (12.64)$$

продолжим равенство (12.60)

$$\begin{aligned}
 \oint_{(L)} \frac{\tau_0}{\rho} \cdot dl \cdot \cos\alpha &= \sqrt{2}akV_g \cos\alpha \oint_{(L)} dl = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}akV_g L \\
 &= \\
 &= \pm akV_g L = \pm \sqrt{\frac{\omega_z}{k}} kV_g L = \pm \sqrt{\omega_z} \sqrt{k} V_g L = \pm \sqrt{m} V_g^2 L
 \end{aligned}
 \tag{12.65}$$

Подставим полученное выражение в соотношение (12.58)

$$\bar{w}(H) = \pm \frac{L \sqrt{m}}{S 2\omega_z} V_g^2
 \tag{12.66}$$

Считая контур окружностью радиуса r , придем к результату

$$\bar{w}(H) = \pm \frac{2\pi r \sqrt{m}}{\pi r^2 2\omega_z} V_g^2 = \pm \frac{\sqrt{m}}{\omega_z r} V_g^2
 \tag{12.67}$$

Согласно формуле (12.57) знак плюс (+) в (12.67) соответствует циклонической системе, а знак минус (-) - антициклонической.

Оценка порядка величины $w(H)$ на основании выражения (12.67) на широте 60° для циклонической области радиусом 500 км при $m=10^{-5}$ и $V_g=10\text{м/с}$ приводит к результату

$$w(H) \approx 1 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Различные примеры с конкретными определяющими параметрами рассмотренных задач приведены в пособиях [5] и [6].

Контрольные вопросы

1. Какой замкнутый контур называется жидким?
2. Назовите факторы, приводящие к изменению циркуляции скорости по жидкому замкнутому контуру.
3. Объясните, почему сила тяжести не может привести к изменению циркуляции скорости по замкнутому контуру?
4. По какому правилу формируется направление циркуляции по замкнутому контуру?

5. Какие факторы приводят к формированию бризовой и горно-долинной циркуляций?
6. Как влияет трение на процесс формирования бризовой циркуляции?

Литература к главе 12

1 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - ДРОФА, Москва, 2003. - 840 с

2 Палагин Э. Г., Славин И. А. Основы гидромеханики – Л.: ЛГМИ, 1974. - 244 с.

3 Гандин Л .С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т, Юдин М. И. Основы динамической метеорологии. – Л.: Гидрометеорологическое изд., 1955. – 647 с.

4 Радикевич В..М. Динамическая метеорология для океанологов – Л.: ЛПИ, 1985. – 195 с.

5 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д. Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеоздат, 1976. – 607 с.

6 Методические указания по дисциплине «Динамическая метеорология» для высших учебных заведений. Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология. Профиль подготовки – Прикладная метеорология. Квалификация (степень) – Бакалавр академический. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2017. – 44 с.

7 Задачник по динамической метеорологии. – Л.: Гидрометеоздат, 1984. – 166 с.

13. ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

13.1 Система уравнений для мезометеорологических процессов.

13.2 Модель суточной изменчивости вертикальной структуры бриза.

13.3 Запись системы уравнений в системе координат, связанной со склоном и постановка модельной задачи.

13.4 Решение стационарной задачи о вертикальной структуре горно-долинного ветра.

13.5 Задача о стоковом ветре.

13.1 Система уравнений для мезометеорологических процессов

Понятие мезометеорологического диапазона вводилось в главе 2 при рассмотрении спектра атмосферных движений. Напомним, что пространственные масштабы мезометеорологических неоднородностей составляют от 1 – 10 км до 100 – 500 км, причем границы не могут быть определены точно и зависят от конкретных условий. К мезодиапазону относят возникающие за счет бароклининой неустойчивости такие образования как молодые циклоны (относящиеся к мезодиапазону вследствие малых своих начальных размеров), тропические циклоны (тайфуны), бризовая циркуляция. К мезодиапазону относят также формирующиеся за счет конвективной неустойчивости термики, ячеистые облачные структуры, грозы и сопутствующие им опасные явления. Наконец, орографические неоднородности подстилающей поверхности формируют целую группу специфических атмосферных явлений (подветренные волны, бора, горнодолинные ветры), которые также относятся к мезодиапазону. В учебном пособии [1] приводится обзор схем местных ветров с применением теории подобия к их анализу.

Основной целью данной главы является анализ влияния трения в формировании местных ветровых систем различного масштаба и оценка возможного проявления трения.

При постановке задач полагается, что отсутствуют все притоки тепла, кроме турбулентного, уравнение неразрывности записано в форме уравнения несжимаемости. Кроме того, будем рассматривать процессы с

горизонтальной неоднородностью только в одном направлении, совпадающем с осью OX .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial} k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (13.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial} k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (13.4)$$

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{1 \cdot c_v / c_p} = B \frac{p^{c_p / c_p}}{\rho}, \quad B = \frac{1000^{R / c_p}}{R}, \quad (13.5)$$

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (13.6)$$

Проведём анализ формирования вертикального распределения параметров потока (местного ветра), формирующегося из-за горизонтальной неоднородности поля температуры, полагая коэффициент турбулентности постоянным по высоте $k(z) = const$. Пусть состояние при отсутствии движения ($\bar{u} = 0, \bar{w} = 0$) характеризуется параметрами $\bar{\rho}(z), \bar{p}(z), \bar{T}(z), \bar{\theta}(z)$ так, что

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = 0, \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g \bar{\rho}, \quad (13.8)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{RT}, \quad (13.9)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \Gamma = const. \quad (13.10)$$

Будем рассматривать состояние параметров потока f' как результат наложения их отклонений f' на значения \bar{f} , соответствующие условиям статики, так что

$$\left. \begin{aligned} \rho(t, x, z) &= \bar{\rho}(z) + \rho'(t, x, z), & p(t, x, z) &= \bar{p}(z) + p'(t, x, z), \\ \theta(t, x, z) &= \bar{\theta}(z) + \theta'(t, x, z), & T(t, x, z) &= \bar{T}(z) + T'(t, x, z), \\ u(t, x, z) &= u'(t, x, z), & w(t, x, z) &= w'(t, x, z), \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Подставляя принятые соотношения в уравнение (13.2) с учётом соотношения (13.8), получим

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho' = -g\bar{\rho} \frac{\rho'}{\bar{\rho}}. \quad (13.12)$$

Соотношение (13.5) позволяет записать

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{c_v}{c_p} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}}. \quad (13.13)$$

Используя для определения давления и его отклонения на любой высоте выражение

$$p(z) = g \int_z^{\infty} \rho(z) dz, \quad (13.14)$$

нетрудно убедиться, что

$$\left| \frac{p - \bar{p}}{\bar{p}} \right| = \left| \frac{p'}{\bar{p}} \right| \ll \left| \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right|.$$

Действительно, ограничивая высоту атмосферы величиной $Ha \approx 10$ км со средней плотностью $\bar{\rho} \approx 1 \text{ кг} / \text{м}^3$, а толщину слоя с суточными колебаниями температуры - высотой пограничного слоя $h \approx 1000$ м, получим соотношение

$$\left| \frac{p'}{\bar{p}} \right| \ll \left| \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right| ,$$

и как следствие $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \cong -\frac{\theta'}{\bar{\theta}}$.

В результате получим следующую систему уравнений для отклонений параметров изучаемых мезомасштабных процессов, формирующихся в пределах пограничного слоя атмосферы:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} , \quad (13.15)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \beta \bar{\rho} \theta' , \quad \beta = \frac{g}{\bar{\theta}} , \quad (13.16)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 , \quad (13.17)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z} + \Gamma \right) = k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} , \quad \Gamma = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} . \quad (13.18)$$

13.2 Вертикальная структура нестационарной бризовой циркуляции

За основу построения аналитической модели бриза возьмем систему уравнений в приближении свободной конвекции (13.15) – (13.18). Ось Ox направлена по нормали к берегу, а ось Oy вдоль берега (начало координат на поверхности земли), тогда система уравнений примет следующий вид (штрихи над функциями далее опущены).

Скорость горизонтального движения формируется силой горизонтального барического градиента, который может быть выражен с помощью уравнения (13.16) через температурные возмущения. Учитывая то, что температурные возмущения распространяются от подстилающей поверхности по высоте лишь в пределах толщины пограничного слоя h , с достаточным приближением можно использовать условие постоянства средней плотности $\bar{\rho} = const$, а также условия

$$\text{при } z \geq h \rightarrow \theta' = 0, p' = 0 .$$

При этом из уравнения (13.16) получим выражение для возмущения давления

$$p'(z) = -\beta\bar{\rho} \int_z^h \theta' dz \quad ,$$

и его горизонтального градиента, входящего в уравнение (13.15)

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\beta\bar{\rho} \int_z^h \frac{\partial \theta'}{\partial x} dz \quad . \quad (13.19)$$

Пространственное и временное изменение внешнего термического фактора, приводящего к формированию бризовой циркуляции, будем описывать следующей моделью.

Бризовая циркуляция охватывает область по горизонтали на расстоянии $L/2$ в обоих направлениях от береговой линии. Начало координатной оси Ox установлено на перпендикулярной к ней береговой линии. Вблизи подстилающей поверхности при $z \rightarrow 0$ температура при $x < -L/2$ температура стремится к постоянному значению

$\theta_w(t) = const$, равному неизменной в течении суток температуре поверхности моря. При $x > +L/2$ температура периодически меняется в течении суток по гармоническому закону с амплитудой

$$A_{\theta 0} = |\theta_w - \theta_{S \max}| = |\theta_w - \theta_{S \min}| = \frac{1}{2}(\theta_{S \max} - \theta_{S \min})$$

в соответствии с моделью суточного хода в пограничном слое атмосферы, изложенной в главе 10.

Введём безразмерные величины функции $\theta_0(x)$ и переменной x так, что

$$\theta_{0n}(x_n) = \frac{\theta'_0(x_n)}{A_{\theta 0}}, \quad x_n = x / \left(\frac{\tilde{L}}{2} \right), \quad \tilde{L} = \frac{L}{2}. \quad (13.20)$$

В таком случае

$$\theta'_n(t_n, x_n) = \theta_n(t_n, x_n) - \theta_{wn} = \frac{1}{2} A_\theta(t) \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x_n\right). \quad (13.25)$$

Действительно, такая функция удовлетворяет требованиям граничных условий:

$$x_n \rightarrow (-\infty): \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}; \quad \theta'_n(x_n) = \frac{1}{2} A_{\theta_n} \left(1 + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0,$$

$$x_n = 0: \operatorname{arctg}(0) = 0; \quad \rightarrow \theta'_n(0) = \frac{1}{2} A_{\theta_n}(t),$$

$$x_n \rightarrow +\infty: \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}; \quad \theta'_n(\infty) = \frac{1}{2} A_{\theta_n}(1+1) = A_{\theta_n}(t_n, z_n)$$

Кроме того, отметим, что

при $x_n = 1: \theta(t) = \theta_w + \frac{3}{4} A_\theta(t), \rightarrow \theta'_n(t_n) = \frac{3}{4} A_{\theta_n}(t_n).$

Функция (13.25) позволяет определить горизонтальный градиент возмущения температуры при $z \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta'_n}{\partial x_n} \right|_{z \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi} A_{\theta_n}(t_n, x_n) \frac{1}{1+x_n^2} \rightarrow \\ \left. \frac{\partial \theta'}{\partial x} \right|_{z \rightarrow 0} &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{\tilde{L}} A_\theta(t, x) \left(1 + \left(\frac{2x}{\tilde{L}}\right)^2\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Как видно, максимальное значение этого градиента, зависящего от x , фиксируется при $x=0$, и равно

$$\gamma_{0\max}(t) = \left. \frac{\partial \theta'_0}{\partial x} \right|_{\max} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\tilde{L}} A_\theta(t) = \frac{4}{\pi} \frac{A_\theta(t)}{L} = \frac{4}{\pi} \frac{(\theta_0(t)_s - \theta_w)}{L}.$$

Приведённые рассуждения могут быть приняты для любой высоты в пределах области $0 < z < h$, так что

$$\left. \frac{\partial \theta'(t, x, z)}{\partial x} \right|_{MAX} = \gamma_{max}(t, z) = \frac{4}{\pi} \frac{(\theta(t, z)_s - \theta_w)}{L},$$

где $\theta(t, z)_s$ - периодически меняющееся с течением времени вертикальное распределение температуры над сушей за пределами бароклинной области.

Очевидно, что скорость ветра также, как и горизонтальный градиент температурных возмущений, убывает при удалении от береговой линии. Вблизи берега скорость принимает максимальное значение, характеризуемое равенством нулю её производной по x . Будем искать решение уравнений (13.15) и (13.18) в области вблизи берега, в пределах которой можно пренебречь изменениями по оси ox горизонтального градиента температуры ($\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$) и скорости ветра ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$), полагая их постоянными величинами.

Анализ рисунка .. показывает, что в пределах области $-1 \leq x_n \leq +1$ ($-L/4 \leq x \leq +L/4$) можно ввести среднее по горизонтали, но зависящее от времени и высоты, значение горизонтального градиента температуры, меньшее максимального значения и равное

$$\frac{\partial \theta'(t, z)}{\partial x} \equiv \gamma(t, z) = \frac{\theta'(t, z)_s}{L}. \quad (13.26)$$

Принятое выше условие $\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$ в соответствии с уравнением неразрывности (13.17) приводит к выводу об отсутствии вертикальных скоростей ($w' = 0$). При таких условиях дифференцирование уравнения (13.18) по x приводит его к виду:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}, \quad (13.27)$$

или с учётом (13.26)

$$\frac{\partial \theta'_s}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta'_s}{\partial z^2}, \quad (13.27a)$$

а уравнение (13.15) с учётом (13.19) принимает вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\beta}{L} \int_0^h \theta'_s(t, z) dz + k \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}. \quad (13.28)$$

Как видно, для решения уравнения (13.28) для скорости бриза вблизи береговой линии необходимо предварительно решить задачу о вертикальном распределении возмущения температуры $\theta'(t, z)_s$ (уравнение (13.27a)) над сушией.

Приведём это решение, полагая, что температура на поверхности суши меняется в течении суток по гармоническому закону с суточным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, установив начало отсчёта времени $t=0$ в момент начала развития положительного возмущения температуры (а, следовательно, и положительного горизонтального температурного градиента). Этому условию соответствует функция:

$$\text{при } z=0 \rightarrow \theta'_0(t)_s = A_\theta \sin \omega t = \theta_0 \sin \omega t. \quad (13.29)$$

Равенство (13.29) отражает одно из граничных условий. Второе граничное условие, необходимое для интегрирования уравнения (13.27) должно отражать отсутствие возмущения температуры на высотах, превышающих турбулентный пограничный слой, так что

$$\text{при } z \rightarrow \infty (z > h): \theta'_s(t) = 0. \quad (13.30)$$

Если \mathcal{Y}_0 принимается постоянным по горизонтали, то эта функция от t и z известна, и определяется суточным ходом температуры над сушией (решение $\theta'(t, z)_s$ известно!):

$$\theta'(t, z)_S = \theta_0 e^{-az} \sin(\omega t - az), \quad a = \sqrt{\frac{\omega}{2k}}. \quad (13.31)$$

Отсюда следует выражение для определения горизонтального градиента температуры

$$\gamma(t, z) \equiv \frac{\partial \theta'(t, z)}{\partial x} = \frac{\theta_0}{L} e^{-az} \sin(\omega t - az) = \gamma_0 e^{-az} \sin(\omega t - az) \quad (13.32)$$

и горизонтального барического градиента

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\beta \bar{\rho} \int_z^h \frac{\partial \theta'}{\partial x} dz = -\beta \bar{\rho} \gamma_0 \int_z^\infty e^{-az} \sin(\omega t - az) dz. \quad (13.33)$$

Выполним интегрирование в выражении (13.33):

$$\begin{aligned} \int_z^\infty e^{-az} \sin(\omega t - az) dz &= \frac{1}{a} \int_z^\infty e^{-az} d \cos(\omega t - az) = \\ &= \frac{1}{a} [e^{-az} \cos(\omega t - az)]_z^\infty - \frac{1}{a} \int_z^\infty \cos(\omega t - az) de^{-az} = \\ &= -\frac{1}{a} e^{-az} \cos(\omega t - az) + \int_z^\infty e^{-az} \cos(\omega t - az) dz \\ \int_z^\infty e^{-az} \cos(\omega t - az) dz &= \frac{1}{a} e^{-az} \sin(\omega t - az) - \int_z^\infty e^{-az} \sin(\omega t - az) dz \\ 2 \int_z^\infty e^{-az} \sin(\omega t - az) dz &= \frac{1}{a} e^{-az} [\sin(\omega t - az) - \cos(\omega t - az)] \\ \int_z^\infty e^{-az} \sin(\omega t - az) dz &= \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-az} \sin[\omega t - (\frac{\pi}{4} + az)] = \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-az} \cos[\omega t + (\frac{\pi}{4} - az)] \end{aligned}$$

Результат интегрирования

$$\int_z^{\infty} e^{-az} \sin(\omega t - az) dz = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-az} \cos[\omega t + (\frac{\pi}{4} - az)] \quad (13.34)$$

приводит к выражению для силы барического градиента

$$F_p = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} B \cdot e^{-az} \cos[\omega t + (\frac{\pi}{4} - az)] \quad (13.35)$$

$$B = \beta \gamma_0 \sqrt{\frac{2k}{\omega}}. \quad (13.36)$$

Уравнение (13.28) принимает вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} B \cdot e^{-az} \cos[\omega t + (\frac{\pi}{4} - az)]. \quad (13.37)$$

В соответствии с принятой моделью для градиента температуры выражение для самой температуры в интервале $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ имеет вид:

$$\theta'(t, x, z) = 0 + \gamma(x + \frac{1}{2}) = \theta_0 \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) e^{-az} \sin(\omega t - az). \quad (13.38)$$

Исходя из анализа уравнений (13.37) – (13.38) перейдём к безразмерным переменным (обозначены индексом n):

$$t_n = \frac{t}{\omega}, \quad z_n = z \sqrt{\frac{\omega}{2k}}, \quad u_n = \frac{u'}{B} \omega = u' \left(\frac{\omega}{\beta \gamma_0} \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right), \quad \theta_n = \frac{\theta'}{\theta_0}. \quad (13.39)$$

В результате уравнение (13.37) принимает вид

$$\frac{\partial u_n}{\partial t_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z_n} \cos \left(t_n - z_n + \frac{\pi}{4} \right) \quad (13.40)$$

Будем искать решение в виде

$$u_n = M(z_n)\text{cost}_n + N(z_n)\text{sint}_n \quad (13.41)$$

Подставляя (13.41) в уравнение (13.40) и выполняя требование равенства коэффициентов слагаемых с функцией cost_n и соответственно, слагаемых с функцией sint_n , получим следующую систему уравнений для определений функций $M(z_n)$ и $N(z_n)$:

$$\begin{cases} -M - \frac{1}{2} \frac{d^2 N}{dz_n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z_n} \sin\left(\frac{\pi}{4} - z_n\right) \\ N - \frac{1}{2} \frac{d^2 M}{dz_n^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z_n} \cos\left(\frac{\pi}{4} - z_n\right) \end{cases} \quad (13.42)$$

Умножим первое соотношение на i и сложим со вторым, и вводя обозначение $W = M + iN$, получим

$$\frac{d^2 W}{dz_n^2} + 2iW = \sqrt{2} e^{-z_n} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - z_n\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - z_n\right) \right] \quad (13.43)$$

Решим сначала однородное уравнение $d^2 W/dz_n^2 + 2iW = 0$, которому соответствует характеристическое уравнение $r^2 + 2ir = 0$ с комплексно-сопряженными корнями $r = \sqrt{-2i} = \pm(1 - i)$. В таком случае, решение однородного уравнения запишется следующим образом

$$W_0(z_n) = C_1 e^{(1-i)z_n} + C_2 e^{-(1-i)z_n} \quad (13.44)$$

Частное решение неоднородного уравнения (13.43) будем искать в виде

$$W_q(z_n) = z_n e^{-z_n} (A \cos z_n + B \sin z_n) \quad (13.45)$$

так как $m + in = -(1 - i)$ является однократным корнем характеристического уравнения; m – показатель степени у экспоненты, n – коэффициент при аргументе функций синуса и косинуса.

Подставив (13.45) в (13.43) и приравняв коэффициенты при $z_n \sin z_n$, $z_n \cos z_n$, $\sin z_n$ и $\cos z_n$, получим систему уравнений для определения A и B

$$\begin{cases} 2A + 2iB = 0 \\ -2(A + B) = 1 + i \\ -2B + 2iA = 0 \\ 2(B - A) = 1 - i \end{cases} \quad (13.46)$$

В этой системе алгебраических уравнений независимыми являются только два уравнения:

$$\begin{cases} B + A = \frac{1 + i}{2} \\ B - A = \frac{1 - i}{2} \end{cases} \quad (13.47)$$

откуда находим

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{i}{2} \quad (13.48)$$

и тогда

$$W_ч(z_n) = -z_n e^{-z_n} \frac{1}{2} (\cos z_n + i \sin z_n) \quad (13.49)$$

Общее решение уравнения (13.43) можно, представить в виде суммы W_0 и $W_ч$:

$$\begin{aligned} W(z_n) = & C_1 e^{(1-i)z_n} + C_2 e^{-(1-i)z_n} \\ & - z_n e^{-z_n} \frac{1}{2} (\cos z_n \\ & + i \sin z_n) \end{aligned} \quad (13.50)$$

Для определения C_1 и C_2 используем граничные условия (13.31) и выражение (13.41)

$$\begin{cases} z_n = 0: & 0 = M(0) \cos t_n + N(0) \sin t_n \\ z_n \rightarrow \infty: & 0 = M(\infty) \cos t_n + N(\infty) \sin t_n \end{cases} \quad (13.51)$$

откуда следует, что $M(0) = N(0) = M(\infty) = N(\infty) = 0$ и при $z_n = 0$: $W(0) = 0$, $C_1 + C_2 = 0$; при $z_n \rightarrow \infty$: $W(\infty) = 0$, $C_1 = 0$, и следовательно: $C_2 = -C_1 = 0$.

Таким образом, решение принимает вид:

$$\begin{aligned} W(z_n) &= M(z_n) + iN(z_n) \\ &= -z_n e^{-z_n} \frac{1}{2} (\cos z_n + i \sin z_n) \end{aligned} \quad (13.52)$$

Разделив действительную, и мнимую часть уравнения, найдем, что

$$M(z_n) = -\frac{z_n}{2} e^{-z_n} \cos z_n, \quad N(z_n) = -\frac{z_n}{2} e^{-z_n} \sin z_n \quad (13.53)$$

С учетом выражений для $M(z_n)$ и $N(z_n)$ общее решение уравнения (13.40) будет иметь следующий вид

$$u_n(t_n, z_n) = -\frac{z_n}{2} e^{-z_n} \cos(t_n - z_n) \quad (13.54)$$

Запишем решение для скорости ветра, переходя к размерным переменным,

$$u'(t, z) = -\frac{\gamma_0 \beta z}{\omega} \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k} z}} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k} z}\right) \quad (13.55)$$

или

$$u'(t, z) = U^* \frac{az}{2} e^{-az} \sin\left(\omega t - az - \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (13.55a)$$

Здесь величина

$$U^* = \frac{\beta \gamma_0}{\omega} \sqrt{\frac{2k}{\omega}}$$

является масштабом скорости.

Пример вертикальных профилей скорости ветра, рассчитанных по формуле), изображены на рисунке 13.2.

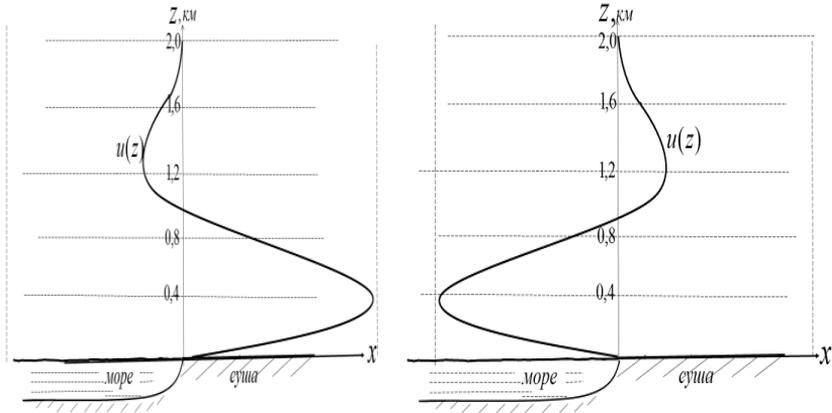


Рисунок 13.2 – Пример расчётных вертикальных профилей скорости ветра (дневной бриз – слева, ночной бриз – справа)

Как видно на рис. 13.2 основной воздушный поток бриза (днём-с моря на сушу, ночью-с суши на море), захватывает по высоте чуть больше половины высоты общей циркуляционной системы. При характерной разности температуры $\Delta T=10\sim 15$ градусов основной поток распространяется до высоты $\approx 800\text{м}$; выше- до 1500м формируется противотечение.

Определим время наступления максимума скорости ветра в зависимости от высоты. Для этого возьмём производную по времени от скорости (13.55) и приравняем её нулю:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta \gamma e^{-az} \sin(\omega t - az) = 0. \quad (13.56)$$

Связь момента наступления максимального значения скорости с высотой в соответствии с равенством (13.56), определяется соотношением:

$$\sin(\omega t - az) = 0 \rightarrow \omega t - az = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi. \quad (13.57)$$

Моменты времени с периодичностью 2π , характеризуемые в формуле (13.57) числами $0, 2\pi, 4\pi\dots$, соответствуют скоростям в часы с положительной разностью температур между поверхностями суши и воды, а с числами $\pi, 3\pi, 5\pi$ соответствуют времени с отрицательной разностью температур. Первые, после момента начала развития

положительной разности температур между поверхностями суши и воды, максимальные значения скорости определяются соотношением

$$\omega t = az .$$

При этом следует отметить, что направление скорости в области её максимальных значений определяется знаком второй производной

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \beta \gamma z e^{-az} \omega \cos(\omega t - az) , \quad (13.58)$$

что приводит к следующим выводам:

положительным направлениям скорости (с моря на сушу) соответствует условие

$$\cos(\omega t - az) < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < (\omega t - az) < \frac{3\pi}{2} ; \quad (13.59)$$

отрицательным направлениям соответствует условие

$$\cos(\omega t - az) > 0 \rightarrow 0 < (\omega t - az) < \pm \frac{\pi}{2} . \quad (13.60)$$

Как видно из сравнения формул (13.55а) и (13.32), а также соотношения (13.59), суточный ход скорости ветра идёт с отставанием от суточного хода горизонтального градиента температуры на величину

$$\omega t = \frac{\pi}{2} , \text{ что соответствует шести (6) часам.}$$

Аналогичный вывод следует и из анализа производной $\frac{\partial u'}{\partial z}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = & -\frac{a_1 \beta}{2\omega} \left[\left(1 - \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}} z} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}} z} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}} z \right) \right] \end{aligned} \quad (13.61)$$

Значение этой производной при $z = 0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{a_1 \beta}{2\omega} \cos \omega t , \quad (13.62)$$

показывает, что её положительное значение, которое соответствует развитию ветра в направлении с моря на сушу вблизи поверхности, выполняется если

$$\cos \omega t < 0 \quad (13.63)$$

что выполняется при условии

$$\omega t > \frac{\pi}{2}, \quad t \geq \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2} = 6 \text{ ч} \quad (13.64)$$

Таким образом, запаздывание скорости ветра при бризовой циркуляции по сравнению с ходом температуры почвы, описываемом выражением (13.29), равно 6 часам (наблюдения показывают запаздывание 2 – 5 часов).

Затухание бриза с высотой, так же как, например, затухание суточных колебаний температуры, характеризуется параметром $a = \sqrt{\omega/2k}$. Затухание тем меньше, чем больше интенсивность вертикального турбулентного обмена.

(Отметим, что в главе 12 получен вывод о том, что время запаздывания суточного хода бризовой циркуляции по отношению к суточному ходу формирующего её фактора меньше трёх часов, что на порядок меньше периода (24 часа) изменений внешнего воздействия – солнечной радиации и, как следствие, изменение радиационного баланса поверхности. Это обстоятельство позволяет получить качественный характер вертикальной структуры бриза и горно-долинного ветра решая задачи в квазистационарном приближении (с выполнением условия в уравнениях $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$))

13.3 Запись системы уравнений в системе координат, связанной со склоном и постановка модельной задачи

В долинах горных регионов, особенно в теплое время года, наблюдается довольно регулярная смена воздушных течений, получивших название горно-долинных ветров. Днем ветер дует вверх по долине и по склонам гор, ночью – вниз вдоль них. Таким образом, горно-долинная циркуляция имеет суточную периодичность. К появлению горно-долинной циркуляции приводит так называемый склоновый эффект – наличие

составляющей подъемной силы плавучести, параллельной подстилающей поверхности. Поскольку масштаб явления мал (несколько километров), можно пренебречь влиянием силы Кориолиса [1], [2] и рассматривать только движение в плоскости XOZ .

В выше изложенном разделе 13.1 получена следующая система уравнений для отклонений параметров изучаемых мезомасштабных процессов, формирующихся в пределах пограничного слоя атмосферы:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (13.65)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \beta \bar{\rho} \theta', \quad \beta = \frac{g}{\theta}, \quad (13.66)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (13.67)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z} + \Gamma \right) = k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}, \quad \Gamma = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (13.68)$$

Используем полученную систему уравнений для решения задачи о формировании ветра вдоль плоского склона, обращённого на южное направление.

Для решения задачи о их вертикальной структуре и суточной изменчивости удобно использовать систему координат, связанную со склоном. Чтобы система координат повторяла форму склона, она в общем случае является наклонной и криволинейной. В простейшем случае можно рассматривать плоский склон, наклоненный к плоскости горизонта под углом α . Примем новую систему координат, ось OX_1 которой направлена вдоль склона от его подножья к вершине, а ось OZ_1 ему перпендикулярна (рисунок 13.3).

Процесс формирования возмущений определяется действием трёх сил- силы барического градиента $\vec{F}'_p = -\frac{1}{\bar{\rho}} \text{grad} p'$, силы плавучести

$\vec{F}'_{nn} = -\bar{g} \frac{\theta'}{\theta}$ и силы трения. Проекции действующих сил и скорости в новой

системе координат определяются следующим образом (смотри рисунок 13.3):

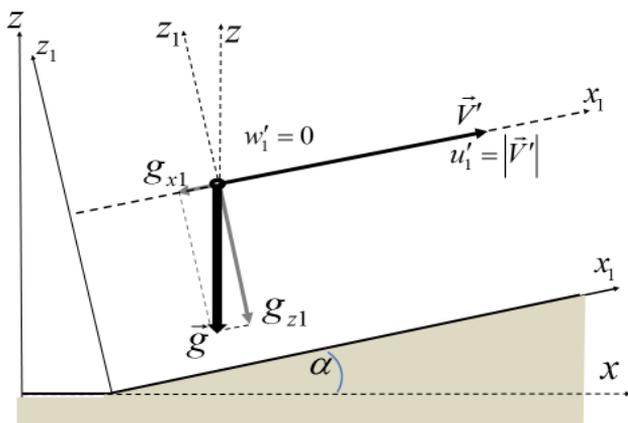


Рис 13.3. Преобразование координат при описании процессов, связанных со склоном

$$\vec{F}'_p = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p' = -\frac{1}{\rho} \left(\vec{i} \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \vec{k} \frac{\partial p'}{\partial z_1} \right) \quad (13.69)$$

$$F'_{px} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1}, \quad F'_{pz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z_1}, \quad (13.70)$$

$$\vec{F}'_{nl} = \vec{i} (\beta \theta' \sin \alpha) + \vec{k} (\beta \theta' \cos \alpha) \quad (13.71)$$

$$F'_{nlx} = \beta \theta' \sin \alpha, \quad F'_{nlz} = \beta \theta' \cos \alpha, \quad (13.72)$$

$$F'_{Tpx1} = k \frac{\partial^2 u'_1}{\partial z_1^2}, \quad F'_{Tpz1} = 0. \quad (13.73)$$

Адвективные слагаемые в левой части уравнений (13.65), (13.68) и уравнение неразрывности принимают вид:

$$\vec{V}' \text{grad} \vec{V}' = u' \frac{\partial u'}{\partial x_1} + w' \frac{\partial u'}{\partial z_1}, \quad (13.74)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}' \text{grad} (\theta' + \bar{\theta}) &= u' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1} \right) + w' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z_1} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z_1} \right) = \\ &= u' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_1} + \Gamma \sin \alpha \right) + w' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z_1} + \Gamma \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (13.75)$$

$$\operatorname{div}_1 \vec{V}' = \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{\partial w'}{\partial z_1} = 0. \quad (13.76)$$

С учётом соотношений (13.69) -(13.76) запишем систему уравнений в новой системе координат:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x_1} + w' \frac{\partial u'}{\partial z_1} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \beta \theta' \sin \alpha + k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2}, \quad (13.77)$$

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z_1} + \beta \theta' \cos \alpha, \quad (13.78)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x_1} + \frac{\partial w'}{\partial z_1} = 0, \quad (13.79)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_1} + \Gamma \sin \alpha \right) + w' \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z_1} + \Gamma \cos \alpha \right) = k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2}. \quad (13.80)$$

В известной модели [3] суточной изменчивости горно-долинного ветра рассматривается склон с неизменными в направлении оси X_1 свойствами. В этом случае на некотором удалении от подножья склона начинается область, в которой возмущения свойств θ' , p' , u' и коэффициент турбулентности в потоке не должны зависеть от переменной X_1 , так что

$$\frac{\partial \theta'}{\partial x_1} = \frac{\partial p'}{\partial x_1} = \frac{\partial u'}{\partial x_1} = 0.$$

Уравнение неразрывности при выполнении условия $\frac{\partial u'}{\partial x_1} = 0$

приводит к выводу об отсутствии вертикальных скоростей $w' \equiv 0$. Система уравнений для описания процесса формирования скорости и температуры в системе горно-долинного ветра принимает вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \beta \theta' \sin \alpha + k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2}, \quad (13.81)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -u' \Gamma \sin \alpha + k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2}, \quad (13.82)$$

с граничными условиями

$$\text{при } z=0: \quad u' = 0, \quad \theta' = \theta'_0(t), \quad (13.83)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty: \quad u' = \theta' = 0. \quad (13.83a)$$

Совместное решение уравнений (13.81) и (13.82) определяет вид функций $u'(t, z)$ и $\theta'(t, z)$, что позволяет по уравнению (13.78) определить распределение давления $p(t, z)$.

При $\theta'_0(t)$, заданной в виде периодической функции с суточным периодом $\frac{2\pi}{\omega}$:

$$\theta'_0(t) = A_T \sin \omega t,$$

решение задачи можно найти в [1] и [3].

13.4. Решение стационарной задачи о вертикальной структуре горно-долинного ветра

Анализ роли слагаемых в уравнениях (13.81) и (13.82) при характерных численных значениях параметров $u' \approx 5 \text{ м/с}$, $\theta' \approx 5 \text{ град}$, $\Gamma \approx 0,01 \text{ К/м}$ с периодом, равным 24 часа и наклоном $\sin \alpha \sim 0,1$, приводит к выводу:

$$\left| \frac{\partial u'}{\partial t} \right| \ll |\beta \theta' \sin \alpha|, \quad \left| \frac{\partial \theta'}{\partial t} \right| \ll |u' \Gamma \sin \alpha|, \quad (13.84)$$

что позволяет решать уравнения (13.81) и (13.82) в квазистационарном приближении

$$k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2} + \beta \sin \alpha \cdot \theta' = 0, \quad (13.85)$$

$$k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2} - \Gamma \sin \alpha \cdot u' = 0 \quad (13.86)$$

с граничными условиями

$$\text{при } z=0: u' = 0, \quad \theta' = \theta'_0(t), \quad (13.87)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty: u' = \theta' = 0. \quad (13.88)$$

Далее выполним следующие преобразования: умножим уравнение (13.86) на произвольную величину m и сложим с уравнением (13.85). В результате получим уравнение

$$k \frac{\partial^2 (u' + m\theta')}{\partial z_1^2} - m\Gamma \sin \alpha \left(u' - \frac{\beta}{m\Gamma} \theta' \right) = 0. \quad (13.89)$$

Определим величину m таким образом, чтобы выполнялось условие

$$u' - \frac{\beta}{m\Gamma} \theta' = u' + m\theta', \quad (13.90)$$

откуда следует равенство

$$-\frac{\beta}{m\Gamma} = m$$

и

$$m^2 = -\frac{\beta}{\Gamma} \rightarrow m = \pm i \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}}. \quad (13.91)$$

В таком случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 (u' + m\theta')}{\partial z_1^2} - 2i \cdot \frac{\sqrt{\beta\Gamma} \sin \alpha}{2k} (u' + m\theta') = 0 \quad (13.92)$$

и позволяет ввести комплексную функцию

$$\Phi = u' + i \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta', \quad (13.93)$$

так что уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} - 2i \cdot b^2 \Phi = 0, \quad (13.94)$$

где $b^2 = \frac{\sqrt{\beta \Gamma}}{2k} \sin \alpha.$ (13.95)

С учётом (13.87) и (13.88) запишем граничные условия для функции $\Phi(z)$:

на $z=0 \rightarrow \Phi = i \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta'_0(t) \equiv \Phi_0,$ (13.96)

на $z=\infty \rightarrow \Phi = 0.$ (13.97)

Уравнение (13.94) аналогично уравнению задачи Экмана (смотри раздел 7.3), решение которого имеет вид

$$\Phi(z_1) = C_1 e^{r_1 z_1} + C_2 e^{r_2 z_1}. \quad (13.98)$$

Здесь r_1 и r_2 - корни характеристического уравнения

$$r^2 - 2i \cdot b^2 = 0,$$

равные

$$r_{1,2} = \pm b \sqrt{-2i} = \pm b(1+i), \quad (13.99)$$

так что

$$\Phi(z_1) = C_1 e^{b(1+i)z_1} + C_2 e^{-b(1+i)z_1}. \quad (13.100)$$

Условие (13.97), требующее равенство нулю функции Φ при $z \rightarrow \infty$, выполняется, если

$$C_1 = 0. \quad (13.101)$$

Из условия при $z=0$ определяется вторая константа C_2

$$\Phi_0 \equiv i \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta'_0(t) = C_2. \quad (13.102)$$

Решение принимает вид

$$\Phi(z_1) = i\sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}}\theta'_0(t)e^{-bz_1}e^{-ibz_1}. \quad (13.103)$$

Раскрывая комплексные функции $\Phi(z_1)$ и e^{-ibz_1}

$$u'(z_1) + i\sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}}\theta'(z_1) = i\sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}}\theta'_0(t)e^{-bz_1}(\cos bz_1 - i \sin bz_1), \quad (13.104)$$

и приравнявая слева и справа отдельно действительные части и мнимые, получим окончательный результат:

$$u'(z_1) = \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}}\theta'_0(t)e^{-bz_1} \sin bz_1, \quad (13.105)$$

$$\theta'(z_1) = \theta'_0(t)e^{-bz_1} \cos bz_1. \quad (13.106)$$

Рассчитанные по формулам (13.105) и (13.106) вертикальные профили $u(z)$ и $\theta(z)$ представлены на рисунке 13.4.

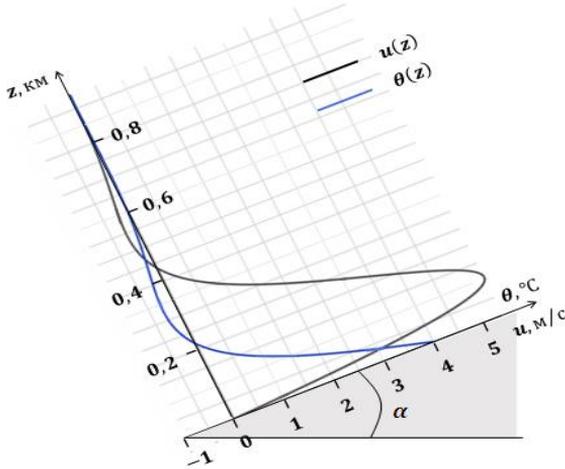


Рисунок 13.4 – Вертикальные профили скорости ветра и потенциальной температуры при дневной горно-долинной циркуляции

Проанализируем полученное решение. Затухание горно-долинной циркуляции по вертикали характеризуется параметром

$$b = \sqrt{\frac{\sin \alpha \sqrt{\beta \Gamma}}{2k}}. \quad (13.107)$$

Сравним параметр b с параметром $a = \sqrt{\omega/2k}$ в задаче о скорости бриза. Угловая скорость вращения земли равна $7,29 \cdot 10^{-5}$ 1/с. Примем следующие характерные значения: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 0,035$ м/(с² · К), $\partial \hat{T}/\partial z = -0,65$ К/100м.

При таких значениях параметров получим

$$\begin{aligned} \chi &= \sin \alpha = \sin 30^\circ = 0,5, \quad \Gamma = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} \approx \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + \gamma_a = (-0,65 + 0,98) \text{ К/100м} = \\ &= 0,33 \text{ К/100м} = 0,0033 \text{ К/м}, \quad \chi \sqrt{\beta \Gamma} = 0,5 \cdot \sqrt{0,035 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{К}} \cdot 0,0033 \frac{\text{К}}{\text{м}}} = \\ &= 5,4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{с}} \end{aligned}$$

Так как $\chi \sqrt{\beta \Gamma}$ существенно больше ω , то $b \gg a$. Следовательно, ветер склонов затухает с высотой значительно быстрее, чем бриз.

Определим высоту H' , на которой горно-долинный ветер достигает максимума. Как известно, для определения экстремума необходимо вычислить первую производную. Используя правило дифференцирования произведения двух функций и ряд тригонометрических соотношений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 e^{-bz} \sin bz \right) = \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 b e^{-bz} (\cos bz - \sin bz) \\ \frac{du}{dz} &= \sqrt{\frac{2\beta}{\Gamma}} \theta_0 b e^{-bz} \cos \left(bz + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (13.108)$$

Чтобы найти H' , приравняем производную к нулю

$$\sqrt{\frac{2\beta}{\Gamma}} \theta_0 b e^{-bH'} \cos\left(\frac{\pi}{4} + bH'\right) = 0 \quad (13.109)$$

Поскольку $\exp(-bH')$ ни при каком конечном значении bH' не обращается в ноль, то единственным сомножителем, который может обеспечить равенство нулю левой части (13.109), является косинус. Таким образом,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + bH'\right) = 0 \quad (13.110)$$

что выполняется, если

$$\frac{\pi}{4} + bH' = \frac{\pi}{2} n, \quad n - \text{целое число} \quad (13.111)$$

Из физических соображений ясно, что $bH' > 0$. И тогда $n > 0$. Так как скорость ветра возрастает с высотой вблизи поверхности склона, то первому максимуму соответствует $n = 1$. Полагая $n = 1$, выразим из (12.149) H'

$$H' = \frac{\pi}{4b} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2k}{\chi\sqrt{\beta\Gamma}}} \quad (13.112)$$

Оценим H' при следующих значениях параметров: $\alpha = 30^\circ$ ($\chi = \sin\alpha = \sin 30^\circ = 0,5$), $k = 3 \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta = 0,035 \text{ м}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$, $\Gamma = 0,0033 \text{ К}/\text{м}$:

$$H' = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ м}^2/\text{с}}{0,5 \cdot \sqrt{0,035 \text{ м}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})} \cdot 0,0033 \text{ К}/\text{м}}} = 26 \text{ м}$$

Подставив в уравнение (13.105) величину $H' = \pi/4b$, найдем значение максимальной скорости

$$\begin{aligned}
 u_{max} &= \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 e^{-b \cdot \frac{\pi}{4b}} \sin\left(b \cdot \frac{\pi}{4b}\right) = \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 e^{-\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 \approx 0,322 \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0
 \end{aligned}
 \tag{13.113}$$

Как следует из (13.113), максимальная скорость ветра u_{max} пропорциональна перегреву поверхности склона и быстро возрастает с уменьшением устойчивости атмосферы (рисунок 13.5); при сделанных предположениях она не зависит от уклона α .

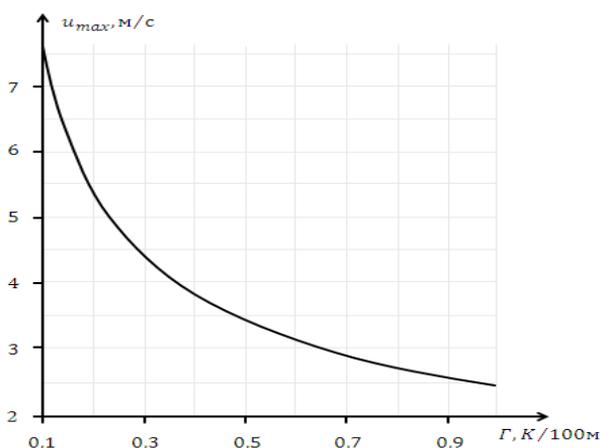


Рисунок 13.5 – Зависимость максимальной скорости горно-долинного ветра от устойчивости атмосферы

Определим уровень обращения горно-долинного ветра. Напомним, что уровнем обращения называется та высота H'' , где скорость меняет направление на противоположное и, следовательно, равна нулю, так что

$$\sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \theta_0 e^{-bH''} \sin bH'' = 0
 \tag{13.114}$$

Левая часть (13.114) обращается в ноль лишь при условии, что

$$\sin bH'' = 0 \quad (13.115)$$

которое, в свою очередь, выполняется, если

$$bH'' = \pi n, \quad n - \text{целое число} \quad (13.116)$$

Из физических соображений ясно, что $bH'' > 0$. И тогда $n \geq 0$. Первому обращению ветра соответствует $n = 1$. Полагая $n = 1$, выразим из (13.116) H''

$$H'' = \frac{\pi}{b} = \pi \sqrt{\frac{2k}{\chi\sqrt{\beta\Gamma}}} \quad (13.117)$$

Оценим H'' при тех же значениях параметров, которые использовались для оценки H' . Тогда

$$H'' = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ м}^2/\text{с}}{0,5 \cdot \sqrt{0,035 \text{ м}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})} \cdot 0,0033 \text{ К}/\text{м}}} = 104 \text{ м}$$

Проанализируем зависимость высоты обращения от уклона α и устойчивости атмосферы, характеризуемой величиной Γ . В таблице приведены значения H'' для некоторых α и Γ (при расчетах полагалось $k = 0,8 \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta = 0,035 \text{ м}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$).

$\alpha, ^\circ$	0,5	2	10
$\Gamma = 0,33 \text{ К}/100\text{м}$	410	205 м	92 м
	м		
$\Gamma = 0,03 \text{ К}/100\text{м}$	747	374 м	167 м
	м		

Как видно из таблицы, H'' быстро растет с уменьшением устойчивости и уменьшается при увеличении крутизны склона.

Различные варианты задач о местных циркуляциях приведены в [4] и [5].

13.5 Задача о стоковом ветре.

Большой интерес представляют собой нисходящие холодные, так называемые стоковые ветры [6], [7], [8], наиболее сильные и устойчивые на ледниковом побережье Антарктиды [9]. Здесь на склоне материка с уклоном до шести градусов во многих местах, особенно при ясной погоде, зимой возникают направленные вниз по склону к морю холодные ветры от востоко-северо-восточного до юго-юго-восточного.

Поскольку такой материковый стоковый ветер охватывает пространство, соответствующее синоптическому масштабу, при его математическом моделировании нельзя пренебречь силой Кориолиса (а следовательно, и движением по направлению оси Oy , перпендикулярно направлению уклона) [1]. В отличие от горно-долинного ветра стоковый ветер формируется фактором с временным масштабом изменчивости на два порядка превышающем суточную периодичность. Это позволяет с большей корректностью использовать для описания стокового ветра уравнения в стационарной форме. Выпишем систему уравнений для рассматриваемого случая в соответствующей ему системе координат (рис.13.6):

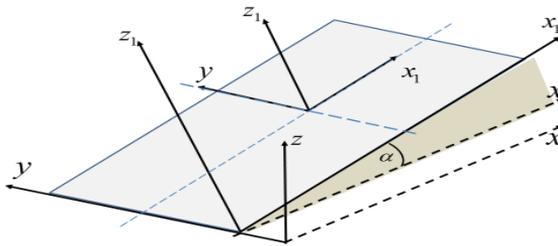


Рис. 13.6 Схема плоского склона с системами координат.

$$k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2} + \beta \sin \alpha \cdot \theta' + 2\omega_z v' = 0, \quad (13.118)$$

$$k \frac{\partial^2 v'}{\partial z_1^2} - 2\omega_z u' = 0, \quad (13.119)$$

$$k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2} - \Gamma \sin \alpha \cdot u' = 0. \quad (13.120)$$

Для решения системы уравнений (13.118) -(13.120) необходимо некоторые преобразования, которые можно выполнить в двух различных вариантах.

Вариант 1.

Опуская в дальнейших выкладках штрихи в обозначениях искомых возмущений скорости, запишем уравнение (13.118) в виде

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \beta \sin \alpha \cdot (\theta + pv) = 0, \quad (13.118a)$$

где

$$p = \frac{2\omega_z}{\beta \sin \alpha} = \frac{1}{\beta \tilde{\chi}} = \frac{2\tilde{\omega}_z}{\beta}, \quad \tilde{\omega}_z = \frac{\omega_z}{\sin \alpha}, \quad (13.121)$$

Умножив уравнение (13.119) на величину p и сложив с уравнением (13.120) получим

$$k \frac{\partial^2 (\theta + pv)}{\partial z_1^2} - \Gamma(1 + q^2) \sin \alpha \cdot u = 0. \quad (13.122)$$

Здесь

$$q^2 = \frac{1}{\beta \Gamma} \left(\frac{2\omega_z}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{\beta \Gamma \tilde{\chi}^2} = \left(\frac{2\tilde{\omega}_z}{\sigma} \right)^2, \quad q = \frac{2\tilde{\omega}_z}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{\beta \Gamma}. \quad (13.123)$$

Введя обозначения

$$\tilde{\theta} = \theta + pv, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma(1 + q^2), \quad (13.124)$$

можем записать уравнения (13.118a) и (13.122) в виде

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \beta \sin \alpha \cdot \tilde{\theta} = 0, \quad (13.125)$$

$$k \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z_1^2} - \tilde{\Gamma} \sin \alpha \cdot u = 0. \quad (13.126)$$

Как видно, уравнения (13.125) и (13.126) по виду совпадают с соответствующими уравнениями (13.85) и (13.86) задачи горно-долинного ветра при замене θ' на $\tilde{\theta}$ и Γ на $\tilde{\Gamma}$.

Граничные условия рассматриваемой задачи также аналогичны соответствующим условиям задачи горно-долинного ветра:

$$\text{при } z_1=0: u=0, v=0, \theta=\theta_0 \rightarrow \tilde{\theta}=\theta_0 < 0, \quad (13.127)$$

$$\text{при } z_1 \rightarrow \infty: u=0, v=0, \theta=0 \rightarrow \tilde{\theta}=0. \quad (13.128)$$

В результате приходим к следующему решению задачи

$$u(z) = \sqrt{\frac{\beta}{\tilde{\Gamma}}} \theta_0 e^{-\tilde{b}z} \sin \tilde{b}z, \quad (13.129)$$

$$\tilde{\theta}(z) = \theta_0 e^{-\tilde{b}z} \cos \tilde{b}z, \quad (13.130)$$

где

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{(\beta \tilde{\Gamma})^{1/2} \sin \alpha}{2k}} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma} \sin \alpha}{2k}}, \quad \tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{1+q^2}. \quad (13.131)$$

Как видно, формулы для компоненты скорости стокового ветра вдоль оси ОХ (13.129) и для скорости горно-долинного ветра (13.105) аналогичны по своей функциональной зависимости от новой координаты z , и отличаются только наличием в формуле (13.129) по сравнению с формулой (13.105) множителя $\sqrt{1+q^2}$, входящего в параметры $\tilde{\Gamma}$ и \tilde{b} .

Это позволяет определить отношение максимальных значений ледникового стокового ветра и горно-долинного ветра, соответствующих высотам \tilde{h} и h , определяемых условием

$$\tilde{b}\tilde{h} = bh = \frac{\pi}{4}, \quad (13.132)$$

и даёт результат

$$\frac{u_{\text{сток}}}{u_{\text{з.дол}}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} < 1. \quad (13.133)$$

Результат (13.133) свидетельствует о том, что при равных условиях выхолаживания поверхности склона установившаяся

максимальная скорость стока на ледниковом склоне меньше максимальной скорости в суточных колебаниях на горном склоне. Причина этого заключается в том, что величина $u(z)$ в задаче стокового ветра является лишь проекцией на ось Ox полной скорости $V(z)_{сток} = \sqrt{u^2 + v^2}$ (рисунок 13.7), в которой проекция скорости $v(z)$ определяется результатом двойного интегрирования уравнения (13.119) при уже найденной функции $u(z)$.

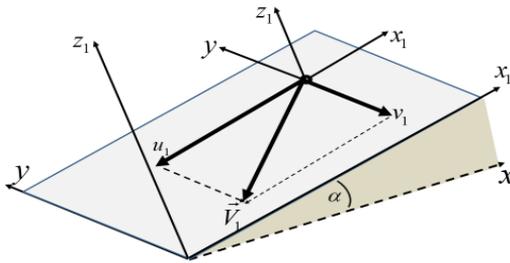


Рис. 13.7. Схема распределения составляющих вектора скорости стокового ветра.

Вариант 2.

Возможна и другая интерпретация решения исходной системы уравнений (13.118) -(13.120).

$$\left. \begin{array}{l} k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2} + \beta \sin \alpha \cdot \theta' + 2\omega_z v' = 0, \\ k \frac{\partial^2 v'}{\partial z_1^2} - 2\omega_z u' = 0, \\ k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2} - \Gamma \sin \alpha \cdot u' = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} (13.118) \\ (13.119) \\ (13.120) \end{array}$$

Так, сложив уравнение (13.119) с уравнением (13.120), умноженным на величину $\beta \sin \alpha$, и введя обозначения

$$v' + \beta \tilde{\chi} \cdot \theta' = \tilde{v}, \quad \tilde{\chi} = \frac{\sin \alpha}{2\omega_z}, \quad 1 + \beta \Gamma \tilde{\chi}^2 = \tilde{q}, \quad (13.134)$$

система уравнений (13.118) -(13.120) запишется в виде

$$k \frac{\partial^2 u'}{\partial z_1^2} + 2\omega_z \tilde{v} = 0 \quad (13.135)$$

$$k \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z_1^2} - 2\omega_z \tilde{q} u' = 0, \quad (13.136)$$

$$k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z_1^2} - \Gamma \sin \alpha \cdot u' = 0. \quad (13.137)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } z_1=0: u' = 0, \quad \tilde{v} = \beta \tilde{\chi} \cdot \theta_0, \quad \theta' = \theta_0 < 0, \quad (13.138)$$

$$\text{при } z_1 \rightarrow \infty: u' = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \theta' = 0. \quad (13.139)$$

Заметим, что при $\Gamma=0$ величина \tilde{q} в уравнении (13.136) равна единице ($\tilde{q} = 1$) и величина $\frac{\partial \theta'}{\partial z_1} = \gamma_{z_1} = const$. В этом случае уравнения

(13.135) -(13.136) с граничными условиями соответствуют задаче Экмана, величина $\beta \tilde{\chi} \theta' = \beta \tilde{\chi} \cdot (\theta_0 + \gamma_1 z')$ в уравнении (13.118) является аналогом линейно меняющегося с высотой геострофического ветра, а $u(z_1)$ и $\tilde{v}(z_1)$ есть проекции вектора скорости, соответственно, на оси OX и OY.

Используя для решения системы при отличном от нуля значении величины q приём, аналогичный приёму в задаче ветра склона, умножим уравнение (13.136) на величину $m = i \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}}$ и сложим с уравнением (13.135).

В результате получим уравнение для комплексной функции

$$U = u' + m \tilde{v} = u' + i \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \tilde{v}, \quad (13.140)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} - 2i \frac{\omega_z}{k} \sqrt{\tilde{q}} \cdot U = 0. \quad (13.141)$$

Отмечая, что задача имеет отношение к стоковому ветру в южном полушарии, где $\omega_z < 0$, введём обозначение

$$-\frac{\omega_z}{k} \sqrt{\tilde{q}} = a^2, \quad (13.142)$$

так что уравнение (13.141) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} + 2ia^2 \cdot U = 0 \quad (13.143)$$

с граничными условиями

$$\text{при } z'_1=0: U = -i\beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \cdot \theta_0 = -iU_0, \quad (13.144)$$

$$\text{при } z'_1=\infty: U = 0. \quad (13.145)$$

Решение уравнения имеет вид

$$U(z) = C_1 e^{r_1 z} + C_2 e^{r_2 z} \quad (13.146)$$

Здесь $r_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} r^2 + 2ia^2 = 0, \quad r^2 = -2ia^2, \\ r_{1,2} = \pm a\sqrt{-2i} = \pm a(1-i), \end{aligned} \quad (13.147)$$

так что

$$U(z) = C_1 e^{a(1-i)z_1} + C_2 e^{-a(1-i)z_1}. \quad (13.148)$$

Для выполнения условия при $z=\infty$ необходимо, чтобы $C_1=0$, а условие при $z=0$ приводит к равенству

$$C_2 = -iU_0 = -i\beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \cdot \theta_0. \quad (13.149)$$

Решение для комплексной функции $U(z)$ принимает вид

$$U(z_1) \equiv u' + i \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \tilde{v} = -i\beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \cdot \theta_0 e^{-(1-i)az_1}, \quad (13.150)$$

$$u' + i \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \tilde{v} = -\beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \cdot \theta_0 e^{-az_1} (i \cos az_1 - \sin az_1), \quad (13.151)$$

откуда следуют решения для отдельных компонент функции $U(z_1)$:

$$u'(z_1) = \beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \cdot \theta_0 e^{-az_1} \sin az_1 < 0, \quad \tilde{q} = 1 + \beta\Gamma \tilde{\chi}^2, \quad (13.152)$$

$$\tilde{v}(z_1) = -\beta\chi \cdot \theta_0 e^{-az_1} \cos az_1. \quad (13.153)$$

Нетрудно убедиться, что справедливо преобразование

$$\beta\chi \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} = \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \frac{1}{\sqrt{1+p}}, \quad p = \frac{1}{\beta\Gamma \chi^2}, \quad (13.154)$$

так что решение принимает вид

$$u'(z) = \sqrt{\frac{\beta}{\Gamma}} \frac{\theta_0}{\sqrt{1+p}} e^{-az} \sin az, \quad p = \frac{1}{\beta\Gamma \chi^2}, \quad (13.155)$$

аналогичный полученному выше (формула (13.129))

Заметим, что коэффициент затухания $-a$ в экспоненциальной зависимости в формуле (13.152) и (13.155) для стокового ветра аналогичен коэффициенту $-b$ в формуле (13.105) для горно-долинного ветра:

$$a = \sqrt{\frac{(\beta\tilde{\Gamma})^{1/2} \sin \alpha}{2k}} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma} \sin \alpha}{2k}}, \quad \tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{1+q^2}.$$

$$\text{Сравнивая параметр } a \text{ с параметром } b = \sqrt{\frac{(\beta\Gamma)^{1/2} \chi}{2k}} \quad (\chi = \sin \alpha)$$

из задачи о горнодолинном ветре, видим, что при фиксированных значениях параметров β , α , k и Γ

$$a > b = \sqrt{\frac{(\beta \Gamma)^{1/2} \chi}{2k}} .$$

Это означает, что область по высоте, охваченная стоковым ветром, меньше чем область с горно-долинным потоком.

Контрольные вопросы

1. Почему при моделировании бризовой циркуляции, в отличие от муссонной, можно пренебречь влиянием силы Кориолиса?
2. Объяснить качественный характер вертикального распределения ветра в бризовой циркуляции?
3. Почему в течение суток бризовая циркуляция меняет направление?
4. Объяснить процесс формирования горно-долинного (ветра склона) ветра.
5. Чем отличается постановка задачи ледникового стокового ветра от задачи горно-долинного ветра?

Литература к главе 13

- 1 Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И. Основы динамической метеорологии. – Л.: Гидрометеорологическое изд., 1955. – 647 с.
- 2 Динамическая метеорология. Учебное пособие / под редакцией Д.Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 607 с.
- 3 Монин А.С. Модель ветра склонов. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
- 4 Методические указания по дисциплине «Динамическая метеорология» для высших учебных заведений. Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология. Профиль подготовки – Прикладная метеорология. Квалификация (степень) – Бакалавр академический. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2017. – 44 с.
- 5 Задачник по динамической метеорологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 166 с.
- 6 Хромов С.П. Метеорология и климатология. – 2-е изд. – Л.: Гидрометеиздат, 1968.

7 Хромов С.П., Мамонтова Л.И. Метеорологический словарь. – Л.: Гидрометеиздат, 1074.

8 Физическая география материков и океанов /Под общ. Ред. А.М. Рябчикова.-М : Высш. Шк., 1988.

9 Emslie, S, Coats, L., and Licht, K. (2007). A 45,000 year record of Adelie penguins and climate change in the Ross Sea, Antarctica. – *Geology*, 35(1), p. 61-64.

Учебное издание

К.Л.Егоров, Е.А.Потеряйко. «Пограничный слой атмосферы. Основы теории и аналитические решения».

Ответственный редактор К.Л. Егоров

Подписано в печать . Форма 60 X 90 1/16. Гарнитура Times New Roman.