

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Для заочной формы обучения

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по дисциплине  
«МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА  
(ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА)»

Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология  
Профиль подготовки – Прикладная метеорология  
Квалификация (степень) – бакалавр академический

*(Подлежит возврату  
на метеорологический факультет)*

Санкт-Петербург  
РГГМУ  
2016

УДК [532.5+533]:550.3(072)

ББК 26.2я73

М54

Составители: К.Л. Егоров, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ДАКЗ, (РГГМУ);  
Н.С. Еремина, доцент каф. ДАКЗ (РГГМУ).

Ответственный редактор: К.Л. Егоров, канд. физ.-мат. наук, доцент, и.о. зав. каф.  
ДАКЗ (РГГМУ)

*Одобрено Ученым советом метеорологического факультета  
Протокол №140 от 15.11.2016*

**Методические указания** по дисциплине «Механика жидкости и газа (Геофизическая гидродинамика)» для высших учебных заведений. Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология. Профиль подготовки – Прикладная метеорология. Квалификация (степень) – бакалавр академический / Сост. К.Л. Егоров, Н.С. Еремина. – СПб.: РГГМУ, 2016. – 36 с.

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Механика жидкости и газа (Геофизическая гидродинамика)». В пособии даются рекомендации по изучению дисциплины; приводятся вопросы для самопроверки, рекомендуемая литература, примеры решения задач, варианты контрольной работы.

© Егоров К.Л., 2016

© Еремина Н.С., 2016

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2016

# Общие указания

Геофизическую гидродинамику студенты, обучающиеся по заочной форме, изучают на III курсе, после того, как ими пройдены курсы высшей математики, физики, основ классической гидромеханики и физики атмосферы.

Основная задача дисциплины «Механика жидкости и газа (геофизическая гидродинамика)» связана с освоением студентами:

– теоретических основ математического описания гидродинамических процессов во вращающейся системе координат;

– теоретических принципов упрощения уравнений в задачах по изучению гидродинамических явлений с различными характерными масштабами, свойственными динамике атмосферных и океанических движений;

– результатов анализа взаимосвязей между параметрами составных элементов сложной структуры течений в атмосфере и в океанах и упомянутыми выше геофизическими факторами;

– практических навыков решения задач по определению конкретных значений физических параметров в различных гидрометеорологических явлениях.

Дисциплина изучается всеми студентами, обучающимися по программе подготовки бакалавров гидрометеорологии на метеорологическом факультете.

В процессе самостоятельного освоения дисциплины следует иметь в виду, что при выводе формул ряд промежуточных выкладок в книгах часто опускается, так как предполагается наличие у читателей необходимой физико-математической подготовки и способности восстанавливать детали вывода в процессе чтения. Такое умение для каждого студента является обязательным. Перечень тем и вопросов, подлежащих изучению, изложен в рабочей программе дисциплины.

Программой предусмотрено выполнение одной контрольной работы, содержащей задачи по разным разделам курса.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующих разделов курса по рекомендованной литературе. Также необходимо разобраться с приведенными в методических указаниях примерами решения задач.

Контрольная работа представлена в четырех вариантах. Выбор варианта определяется следующим образом: студенты, у которых номера зачетных книжек заканчиваются цифрами 0, 1, 2, выполняют

вариант № 1; цифрами 3, 4, 5 – выполняют вариант № 2; цифрами 6, 7 – вариант № 3; цифрами 8, 9 – вариант № 4.

В результате изучения дисциплины «Механика жидкости и газа (Геофизическая гидродинамика)» формируются следующие компетенции:

**ОК-5** – способность к самообразованию, саморазвитию и самоконтролю, приобретению новых знаний, повышению своей квалификации;

**ОПК-1** – способность представить современную картину мира на основе знаний основных положений, законов и методов естественных наук, физики и математики;

**ОПК-3** – способность анализировать и интерпретировать данные натуральных и лабораторных наблюдений, теоретических расчетов и моделирования;

**ПК-2** – способность анализировать явления и процессы, происходящие в природной среде, на основе экспериментальных данных и массивов гидрометеорологической информации, выявлять в них закономерности и отклонения;

**ПК-4** – способность к решению гидрометеорологических задач, достижению поставленных критериев и показателей.

## Литература

1. *Подольская Э.Л.* Механика жидкости и газа. Раздел «Геофизическая гидродинамика»: уч. пос. – СПб.: РГГМУ, 2007. – 154 с.
2. *Клемин В.В., Кулешов Ю.В., Суворов С.С., Волконский Ю.Н.* Динамика атмосферы: учебник. – СПб.: Наука, 2013. – 421 с.
3. *Педоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. Т. 1 и 2. – М.: Мир, 1984. – 398 с.
4. *Динамическая метеорология* / под ред. Д.Л. Лайхтмана – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 608 с.
5. *Монин А.С.* Гидродинамика атмосферы, океана и земных недр. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1999. – 524 с.
6. *Доронин Ю.П.* Динамика океана. – Л.: РГГМУ, 1980. – 304 с.
7. *Воробьев В.Н., Смирнов Н.П.* Общая океанология. Ч. II. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1999. – 230 с.
8. *Задачник по динамической метеорологии.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 166 с.

# Указания по разделам

## Основные уравнения динамики жидкости на вращающейся Земле и их анализ

При изучении этого раздела студенты должны получить четкое представление об основных уравнениях гидродинамики в системе координат, связанной с поверхностью вращающейся Земли; понимать динамические проявления вращения Земли; знать физический смысл отдельных членов уравнений.

Осваивая данный раздел необходимо обратить внимание на приложения 1-го и 2-го начал термодинамики к атмосферным процессам: на изменение состояния воздушной массы сухого и влажного воздуха при его вертикальных перемещениях, получить ясное представление об условиях вертикальной устойчивости и изменении кинетической энергии перемещающейся в вертикальном направлении частицы при этих условиях.

**Литература:** [1] – гл. 2, с. 28–35. [4] – гл. 1, с. 5–18; гл. 3, с. 42–63; гл. 4, с. 64–91. [8] – гл. 1, с. 4–7; гл. 2, с. 14–16, с. 20–22.

### Вопросы для самопроверки

1. Показать, что при стационарном переносе и движении вдоль изостерической поверхности  $\rho = \text{const}$  уравнение неразрывности имеет вид:  $\text{div} \vec{V} = 0$ .

2. Показать, что сила Кориолиса не может совершать работы.

3. Доказать, что в случае невязкой жидкости и адиабатического процесса уравнение теплопроводности принимает вид  $\frac{d\theta}{dt} = 0$

( $\theta$  – потенциальная температура).

4. Получите формулу для сухоадиабатического градиента.

5. Каковы основные типы температурной стратификации атмосферы и критерии для их определения?

6. Как изменяются с высотой (до и после уровня конденсации) основные характеристики влажного воздуха: массовая доля водяного пара и относительная влажность, парциальное давление и максимальное парциальное давление водяного пара?

7. Какой процесс называется влажноадиабатическим? От каких характеристик зависит влажноадиабатический градиент?

## **Уравнения гидротермодинамики для турбулентных течений**

Здесь необходимо изучить общие положения турбулентности, правила осреднения случайных величин, систему осредненных уравнений, физический смысл пульсационных членов.

*Литература:* [1] – гл. 3, с. 36–48. [4] – гл. 7, с. 184–206.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какая величина называется случайной?
2. Какие члены уравнений дают при осреднении добавочные пульсационные члены?

## **Подобие гидродинамических движений на вращающейся Земле**

Требуется знать общую классификацию процессов в атмосфере и в океане; усвоить принципы упрощения уравнений с помощью теории подобия и условия применимости тех или иных упрощений для конкретных геофизических процессов.

*Литература:* [1] – гл. 4, с. 49–56. [4] – гл. 7, с. 184–224.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Приведите к безразмерному виду уравнения движения.
2. Каким условиям должны удовлетворять характерные масштабы физических процессов и метеорологических величин при упрощении уравнений?

## **Простейшие типы движений жидкости при отсутствии трения**

Этот раздел включает большое количество важных вопросов, поэтому условно разделен на две темы. Рекомендации по использованию литературы и вопросы для самопроверки даны отдельно к каждой теме.

**I.** Геострофическое движение и его изменение с высотой. Геострофическая адвекция температуры. Отклонения ветра от геострофического. Градиентный ветер при криволинейных изобарах. Следует обратить внимание на квазигеострофичность движений

в свободной атмосфере; знать, как направлены геострофический и термический ветер, правила сложения векторов, связь геострофического ветра с полем геопотенциала.

*Литература:* [1] – гл. 5, с. 57–62; гл. 6, с. 63–91. [4] – гл. 8, с. 225–247. [8] – гл. 4, с. 36–38; гл. 5, с. 42–57.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Получите выражения для составляющих геострофического движения из уравнений движения, оставив в них лишь главные члены.

2. Покажите, что вектор скорости геострофического движения перпендикулярен вектору градиента давления.

3. Равновесием каких сил определяется стационарное движение при параллельных и прямолинейных изобарах? Каковы обязательные условия отсутствия ускорения? Покажите, что геострофическое отклонение и ускорение частицы взаимно перпендикулярны.

4. В каком из барических образований (в циклоне или антициклоне) не могут наблюдаться большие градиенты давления и скорости ветра? Почему?

5. В каком направлении происходит поворот ветра с высотой при адвекции тепла и при адвекции холода?

6. Что такое уровень обращения ветра? При каком взаимном расположении градиентов давления и температуры он может наблюдаться?

7. В какой широтной зоне на поверхности Земли не применимы понятие «геострофическое движение» и геострофические соотношения? Почему?

**II. Поверхности раздела в атмосфере. Угол наклона стационарных поверхностей раздела. Вертикальные токи на фронтальной поверхности.**

*Литература:* [1] – гл. 8, с. 99–111. [4] – гл. 9. [8] – гл. 6, с. 63–66.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Что такое фронтальная поверхность атмосферы?

2. Какие метеоэлементы могут и какие не могут испытывать разрыв на поверхности раздела? Как могут быть направлены касательные составляющие скорости по обе стороны от фронта?

3. Каким поворотом ветра сопровождается прохождение фронта? Доказать примерами.

4. Какими факторами определяется угол наклона поверхности раздела к горизонту?

## **Вихревая динамика**

Абсолютный и относительный вихрь скорости. Уравнение переноса вихря. Условие сохранения абсолютного вихря. Потенциальный вихрь.

*Литература:* [1] – гл. 7, с. 92–95, 98.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Чем отличаются абсолютный и относительный вихри?
2. Какие геофизические факторы приводят к изменению вихря скорости в жидкой среде?
3. Назовите условия, при которых абсолютный вихрь сохраняется неизменным.
4. Приведите пример анализа изменения относительного вихря при условии сохранения абсолютного вихря.

## **Волны в геофизических средах**

Волны в атмосфере. Исследование волн методом малых возмущений. Гравитационные волны. Инерционные волны Россби, их фазовая и групповая скорости.

*Литература:* [3] – гл. 3. [4] – гл. 10. [8] – гл. 6, с. 66–70.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Каковы основные типы волн в свободной атмосфере? Чем определяются параметры волн разного типа?
2. Какими факторами обусловлены гравитационные волны? Что такое частота Вайсяля–Брента?
3. С какими факторами связаны волны Россби?
4. Как направлена фазовая скорость волн Россби?

## **Планетарные пограничные слои (ППС)**

Уравнения движения для стационарного, горизонтально однородного ППС. Распределение скорости и сил по высоте в верхнем слое океана и в пограничном слое атмосферы, толщина ППС.

*Литература:* [4] – гл. 11, с. 331–334. [8] – гл. 7, с. 76–84.

## **Вопросы для самопроверки**

1. Действием какой силы динамические процессы в пограничном слое принципиально отличаются от процессов в свободной атмосфере?
2. Каков порядок величины характерного вертикального масштаба атмосферного планетарного пограничного слоя?
3. Как отличается направление приземного ветра от геострофического в соответствии с моделью Экмана в Северном полушарии?
4. Как качественно меняются с высотой в пограничном слое сила Кориолиса и сила турбулентного трения?
5. Какое условие в модели Экмана используется для определения высоты пограничного слоя в атмосфере?

## **Основные элементы общей циркуляции атмосферы**

Основной характер переноса воздушных масс в средних широтах и в экваториальной зоне. Ячейка Гадлея.

*Литература:* [4] – гл. 15, с. 468–491.

## **Вопросы для самопроверки**

1. Какой основной характер переноса воздуха в тропосфере и стратосфере средних широт?
2. Какой основной зональный перенос у земной поверхности и в нижней тропосфере в тропиках и в высоких широтах? Как называются эти атмосферные течения в экваториальной зоне?
3. Какова основная причина преобладающего широтного типа общей циркуляции атмосферы Земли?

## **Баротропная неустойчивость**

Влияние меридионального сдвига скорости на устойчивость зонального потока.

*Литература:* [3] – гл. 7.

## **Вопросы для самопроверки**

1. Как меняется средняя скорость широтного переноса в нижней тропосфере в меридиональном направлении от экваториальных широт в средние широты Северного полушария?

2. С чем необходимо сравнивать меридиональный градиент скорости широтного переноса для анализа его устойчивого характера?

## Особенности крупномасштабной структуры океанических течений

Течение Свердрупа. Западные пограничные слои, влияние рельефа дна. Экваториальные противотечения.

*Литература:* [3] – гл. 5. [5] – гл. 5. [6] – гл. 1.5; гл. 1.9; гл. 1.10. [7] – гл. 1.7.

### Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные пограничные береговые океанические течения.
2. Какова основная причина существования западных пограничных течений?

## Примеры решения задач

### Термодинамика сухого и влажного воздуха

При решении задач этого типа используются такие основные законы и понятия, как связь между полной и частной производными по времени, первое начало термодинамики, уравнения состояния и статики, уравнение Клаузиуса–Клайперона и др. Краткая сводка основных формул, а также физические постоянные и ряд других таблиц, необходимых при решении задач, даны в работе [8] (с. 7, 14, 15, 21, 22, 101–111).

Уравнение первого начала термодинамики однозначно связывает приток тепла с изменением температуры перемещающейся по вертикали частицы воздуха:

$$\frac{dQ}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dz}. \quad (1.1)$$

Подставим  $\frac{dp}{dz}$  из уравнения статики:

$$\frac{dQ}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} + \frac{RT}{p} \frac{pg}{RT} = c_p \frac{dT}{dz} + \frac{T}{T} g \approx c_p \frac{dT}{dz} + g, \quad (1.2)$$

поскольку  $\frac{T}{\bar{T}} \approx 1$ . Уравнение (1.2) может использоваться для вычисления притока тепла, если задано  $\frac{dT}{dz}$ , либо, наоборот, для определения  $\frac{dT}{dz}$ , если известен приток тепла. В некоторых случаях приток тепла непосредственно не задается, а выражается через изменение температуры (политропический процесс):

$$dQ = cdT. \quad (1.3)$$

Если подставить  $dQ$ , согласно (1.3), в уравнение (1.2), нетрудно найти:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p - c} = -\frac{\gamma_a}{1 - c/c_p}, \quad (1.4)$$

где  $\gamma_a = g/c_p$  – сухоадиабатический градиент температуры.

В некоторых задачах приток тепла не дан, но задано какое-то дополнительное условие, из которого находят  $\frac{dT}{dz}$ . Примеры будут приведены ниже.

**Задача 1.** Переохлажденная на  $5^\circ\text{C}$  частица воздуха опускается в атмосфере с вертикальным градиентом температуры, равным  $-0,5^\circ\text{C}/100\text{ м}$ . При опускании частица теряет тепло по политропическому закону [политропическая теплоемкость  $c = 0,21\text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{K})$ ]. Найти максимальное расстояние, которое может пройти частица при отсутствии трения. Принять  $\frac{T}{\bar{T}} \approx 1$ .

**Решение.**

$$\Delta z_{\max} = 2\delta z = 2(T_0 - \bar{T}_0) \left/ \left( \frac{d\bar{T}}{dz} - \frac{dT}{dz} \right) \right. . \quad (1.5)$$

В условиях заданы  $(T_0 - \bar{T}_0)$  и градиент температуры в атмосфере  $\frac{d\bar{T}}{dz}$ . Изменение температуры частицы  $\frac{dT}{dz}$  по мере ее опускания надо найти из 1-го начала термодинамики с учетом определения

политропического процесса (1.4). Значения температуры по шкале Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ) и по шкале Кельвина ( $\text{K}$ ) различается на постоянную величину:  $T(\text{K}) = t^{\circ}\text{C} + 273^{\circ}\text{C}$ . Поэтому, когда речь идет о приращениях (разности) температур, а также о размерностях, единицы измерения  $^{\circ}\text{C}$  и  $\text{K}$  совершенно эквивалентны.

$$\frac{dT}{dz} = \frac{9,81 \text{ м/с}^2}{(0,21 \cdot 10^3 - 1007) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})} = -1,23 \text{ К}/100 \text{ м}.$$

Теперь можно найти  $\Delta z_{\text{max}}$  по формуле (1.5):

$$\Delta z_{\text{max}} = \frac{-2 \cdot 5 \text{ К} \cdot 100 \text{ м}}{-0,5 \text{ К} + 1,23 \text{ К}} = -1370 \text{ м}.$$

**Задача 2.** Каким должен быть вертикальный градиент температуры в поднимающейся частице ненасыщенного влажного воздуха, чтобы ее относительная влажность не менялась с высотой? Температура воздуха  $20^{\circ}\text{C}$ . Принять  $\frac{T}{T} \approx 1$ .

**Решение.** Постоянство относительной влажности при подъеме ненасыщенного влажного воздуха

$$r = \frac{e}{E} \cdot 100\% = \text{const} \quad (1.6)$$

возможно только при определенном значении  $\frac{dT}{dz}$ . Найдем его. Для этого возьмем логарифмическую производную (т. е. сначала натуральный логарифм, а потом производную) по  $z$  от выражения (1.6):

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dz} = \frac{1}{e} \frac{de}{dz} - \frac{1}{E} \frac{dE}{dz} + 0 = 0, \quad (1.7)$$

откуда:

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dz} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dz}. \quad (1.8)$$

Обе части этого уравнения надо выразить через измерение давления  $p$  и температуры  $T$ . Покажем, что относительные изменения с высотой  $e$  и  $p$  одинаковы. Это следует из постоянства массовой доли водяного пара в ненасыщенном влажном воздухе:

$$q = 0,622e/p = \text{const}. \quad (1.9)$$

Возьмем логарифмическую производную по высоте и получим:

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{pRT} = -\frac{g}{RT} \quad (1.10)$$

(здесь  $\frac{dp}{dz}$  подставлено из уравнения статики). Далее воспользуемся уравнением Клаузиуса–Клайперона и получим:

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dz} = \frac{L}{R_n T^2} \frac{dT}{dz}. \quad (1.11)$$

Подставим (1.10) и (1.11) в (1.8) и получим уравнение для определения  $\frac{dT}{dz}$ . После преобразований найдем:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{L} \frac{T^2}{T} \frac{R_n}{R} \approx -1,6 \frac{gT}{L}, \quad (1.12)$$

где ( $R_n/R \approx 1,6$ ). Подставим в (1.12) заданные величины вместе с единицами измерения:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1,6 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot (273 + 20 \text{ К})}{2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 0,188 \text{ К/100 м.}$$

Заметим, что в Приложении 4 на с. 103 в [8] даны значения  $L$ , уменьшенные в  $10^6$  раз, т. е. умноженные на  $10^{-6}$ . Действительно, истинное значение  $L = 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ , а  $L \cdot 10^{-6} = 2,45 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/кг} = 2,45 \text{ Дж/кг}$ .

## **Геострофический и термический ветер. Геострофическая адвекция температуры**

При решении задач этого раздела используются барометрические формулы и понятия геопотенциала ([8], с. 36–38), выражения для геострофического ветра и его изменений с высотой, а также выражения для адвективных изменений температуры ([8], с. 43, 48, 51).

Составляющие геострофического ветра могут быть выражены как через горизонтальный градиент давления на соответствующем уровне, так и через горизонтальный градиент абсолютного геопотенциала  $H_p$  изобарической поверхности, проходящей через рассматриваемую точку:

$$u_g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{9,8}{l} \frac{\partial H_p}{\partial y}; \quad (1.13)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{9,8}{l} \frac{\partial H_p}{\partial x}. \quad (1.14)$$

При наличии горизонтальной неоднородности температуры горизонтальный градиент давления изменяется с высотой. Соответственно изменяется и геострофический ветер. Вектор приращения геострофического ветра с высотой называют термическим ветром. Наиболее простые выражения для составляющих термического ветра легко получить прямо из уравнения статики:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT} \rightarrow d(\ln p) = -g \frac{dz}{RT}. \quad (1.15)$$

Если толщина слоя  $z_2 - z_1$  не очень велика,  $T \approx \bar{T}$  (где  $\bar{T}$  – средняя по высоте температура слоя), тогда:

$$\ln p_2 - \ln p_1 \approx -\frac{g(z_2 - z_1)}{RT}. \quad (1.16)$$

Продифференцируем (1.16) по  $x$ :

$$\frac{1}{p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{g(z_2 - z_1)}{RT^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (1.17)$$

Подставим согласно уравнению состояния  $p_{1,2} = \rho_{1,2} RT_{1,2}$  и умножим все уравнения на  $RT_2$ :

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{T_2}{\bar{T}} \frac{g(z_2 - z_1)}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}.$$

Учитывая, что  $\frac{T_2}{T_1} \approx \frac{T_2}{\bar{T}} \approx 1$ , а также воспользовавшись формулой (1.14), получим:

$$v_T = v_{g2} - v_{g1} \approx \frac{g(z_2 - z_1)}{l\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Совершенно аналогично, дифференцируя (1.16) по  $y$  и подставляя (1.13), найдем:

$$u_T = u_{g2} - u_{g1} \approx -\frac{g(z_2 - z_1)}{l\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (1.19)$$

Если в качестве исходных данных известен относительный геопотенциал слоя  $p_3 - p_4$ , можно заменить градиент температуры градиентом относительного геопотенциала. Слой  $p_3 - p_4$ , вообще говоря, может не совпадать со слоем  $p_1 - p_2$ , для которого рассчитывался термический ветер. Поскольку  $\bar{T}$  и  $grad\bar{T}$  мало меняются с высотой, это не вносит заметной ошибки:

$$H_{p_3}^{p_4} = \frac{R\bar{T}}{9,8} \ln \frac{p_3}{p_4} \rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{9,8}{R \ln(p_3/p_4)} \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial y}.$$

Здесь  $\bar{T}$  – средняя температура в слое  $p_3 - p_4$ . В свою очередь

$$g(z_2 - z_1) = 9,8 H_{p_1}^{p_2} = R\bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.20)$$

Тогда

$$u_T = -\frac{9,8}{l} \left( \ln \frac{p_1}{p_2} / \ln \frac{p_3}{p_4} \right) \frac{\partial H_{p_3}^{p_4}}{\partial y}. \quad (1.21)$$

Если слои  $p_1 - p_2$  и  $p_3 - p_4$  совпадают, формула (1.21) упрощается:

$$u_T = -\frac{9,8}{l} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial y}. \quad (1.22)$$

Аналогичные выражения можно получить для составляющей  $v_T$  и модуля  $V_T$ . Формулы (1.18)–(1.22) позволяют определить изменение с высотой величины и направления геострофического ветра.

Если изобары и изотермы не параллельны, наблюдается адвекция температуры, т. е. локальное изменение температуры, вызванное перемещением воздушных масс в горизонтально неоднородном поле температуры. Геострофическая адвекция температуры описывается выражением:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a = - \left( u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -V_g \frac{\partial T}{\partial n} \cos \varepsilon = -V_g \frac{\partial T}{\partial n} \sin \delta. \quad (1.23)$$

Здесь  $V_g$  и  $\frac{\partial T}{\partial n}$  – модули геострофического ветра и градиента температуры;  $\varepsilon$  – угол между направлениями ветра и градиента температуры;  $\delta$  – угол между градиентами давления и температуры, отсчитываемый от барического градиента к термическому (угол считается положительным при отсчете против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке, см. рис. 1).

В первом случае (см. рис 1, *a*) отражена ситуация, при которой угол  $\varepsilon$  может иметь численное значение в интервале  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ . Следовательно,  $\cos \varepsilon > 0$  и, согласно формуле (1.23),

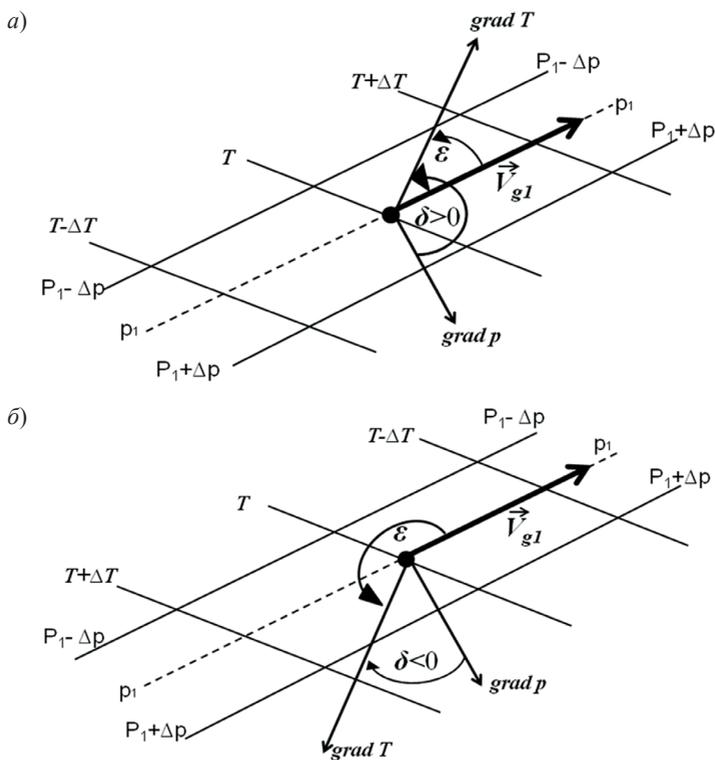


Рис. 1. Геострофическая адвекция температуры при различных углах между ветром и градиентом температуры:  
*a* – адвекция холода; *б* – адвекция тепла

получается  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a < 0$ , т. е. имеет место адвекция холода. Во втором

случае (см. рис. 1, б)  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{3\pi}{2}$  – имеет место адвекция тепла.

Составляющие градиента температуры в формуле (1.23) можно выразить через термический ветер, т. е. через изменение геострофического ветра с высотой. Так, согласно (1.18),

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{l \bar{T} v_T}{g \Delta z} = \frac{l \bar{T} \Delta v_g}{g \Delta z}.$$

При малой толщине слоя  $T_1 \approx T_2 \approx \bar{T} = T$ ,  $\frac{\Delta v_g}{\Delta z} \approx \frac{\partial v_g}{\partial z}$  и тогда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{lT}{g} \frac{\partial v_g}{\partial z}, \text{ аналогично } \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{lT}{g} \frac{\partial u_g}{\partial z}.$$

В этом случае формула (1.23) примет вид:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{lT}{g} \left(u_g \frac{\partial v_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial u_g}{\partial z}\right). \quad (1.24)$$

Далее составляющие геострофического ветра выразим через модуль  $V_g$  и угол  $\alpha$  между направлением ветра и осью  $x$  (рис. 2). Направление осей выбрано произвольно, но, ради наглядности вывода,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Очевидно, что  $u_g = V_g \cos \alpha$ ,  $v_g = V_g \sin \alpha$ .

Тогда

$$u_g = V_g \cos \alpha, \quad \frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial V_g}{\partial z} \cos \alpha - V_g \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

$$v_g = V_g \sin \alpha, \quad \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\partial V_g}{\partial z} \sin \alpha + V_g \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Подставив эти выражения в (1.24) и приведя подобные члены, получим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\frac{lT}{g} V_g^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \quad (1.25)$$

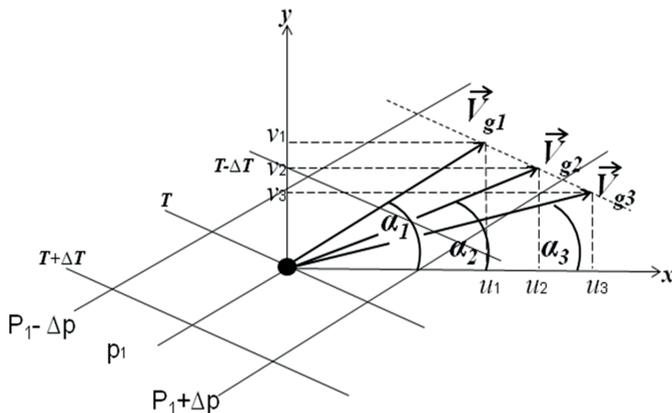


Рис. 2. Связь между поворотом геострофического ветра и изменением его составляющих с высотой

Как видно на рис. 2, угол  $\alpha$  имеет положительную величину, но уменьшается с высотой, то есть  $\frac{\partial \alpha}{\partial z} < 0$  и, значит, согласно формуле (1.25), в фиксированной точке будет отмечаться повышение температуры. Из этого анализа следует правило: при изменении направления ветра с высотой по часовой стрелке происходит адвекция тепла и как следствие этого – локальное повышение температуры воздуха.

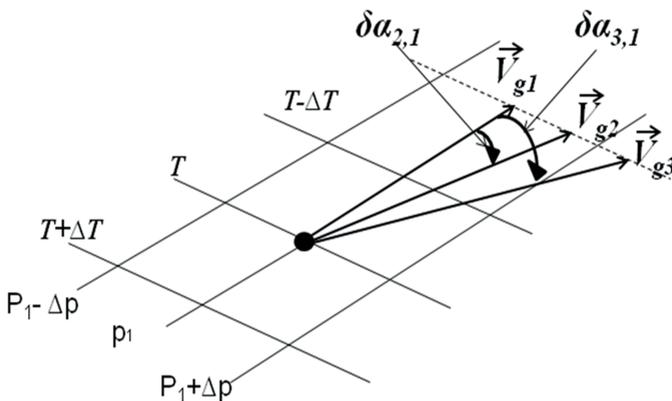


Рис. 3. Связь между поворотом геострофического ветра и локальным изменением температуры за счет адвекции (адвективным изменением)

Угол  $\alpha$  выбран произвольно и не имеет физического смысла, поэтому обычно переходят к отсчету угла от направления ветра на нижележащем уровне (положительное значение при отсчете против часовой стрелки, рис. 3).

Иногда удобно перейти от изменений направления ветра по высоте к его изменениям по давлению. Согласно уравнению статики, можем записать:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{dp}{dz} = -g\rho \frac{\partial \alpha}{\partial p} = -g \frac{\rho}{RT} \frac{\partial \alpha}{\partial p}, \quad (1.26)$$

и формула (1.25) примет вид:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_a = \frac{lp}{R} V^2 \frac{\partial \alpha}{\partial p}. \quad (1.27)$$

**Задача 3.** На высоте 1 км геострофический ветер юго-восточный, 6 м/с, а на высоте 2 км – юго-восточный, 6,5 м/с. На какой высоте ветер станет восточным и какова при этом его скорость, если горизонтальный градиент температуры постоянен по высоте? Найти геострофическую адвекцию температуры в слое от 1 до 2 км. Средняя температура слоя равна 273 К, широта места – 60°.

**Решение.** Изменение ветра с высотой показано на рис. 1.4. Известное изменение ветра в слое  $z_1 - z_2$  надо экстраполировать на большую высоту  $z_3$ . Используем стандартную географическую систему координат (в которой ось  $x$  направлена вдоль широтного круга на восток, а ось  $y$  – вдоль меридиана на север).

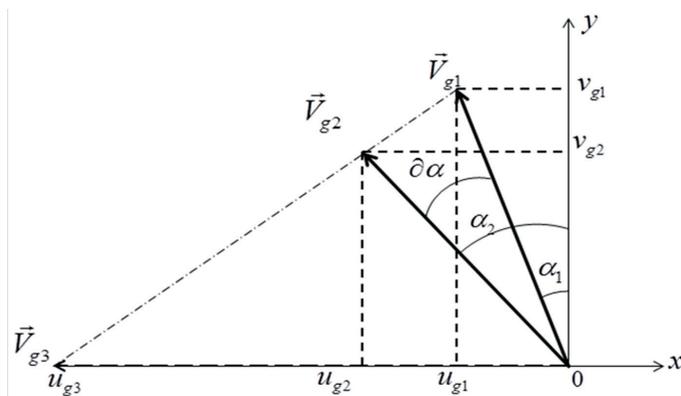


Рис. 4. Изменение геострофического ветра с высотой

Из рисунка видно, что  $\alpha_1 = 22,5^\circ$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ,  $u_{g1} = -V \sin \alpha_1 = -2,3$  м/с;  $v_{g1} = V_{g1} \cos \alpha_1 = 5,5$  м/с;  $u_{g2} = -V_{g2} \sin \alpha_2 = -4,6$  м/с;  $v_{g2} = V_{g2} \cos \alpha_2 = 4,6$  м/с для широты места  $\varphi = 60^\circ$  параметр Кориолиса равен

$$l = 2\omega \sin \varphi = 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 0,867 = 1,264 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Знак «минус» перед численными значениями составляющих (проекций) ветра  $u_{g1}$  и  $u_{g2}$  говорит о том, что эти проекции направлены противоположно выбранному направлению оси  $ox$ . Приращение ветра в слое  $z_1 - z_2$  равно:

$$u_{g2} - u_{g1} = -\frac{g(z_2 - z_1)}{l\bar{T}_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad v_{g2} - v_{g1} = \frac{g(z_2 - z_1)}{l\bar{T}_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \quad (1.28)$$

а в слое  $z_2 - z_3$ :

$$u_{g3} - u_{g2} = -\frac{g(z_3 - z_2)}{l\bar{T}_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad v_{g3} - v_{g2} = \frac{g(z_3 - z_2)}{l\bar{T}_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (1.29)$$

При этом, согласно условию, градиент температуры не зависит от высоты, а средние температуры слоев мало отличаются, т. е.  $\frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1} \approx 1$ , поэтому:

$$\frac{u_{g3} - u_{g2}}{u_{g2} - u_{g1}} = \frac{v_{g3} - v_{g2}}{v_{g2} - v_{g1}} \approx \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}. \quad (1.30)$$

В соответствии с условием задачи  $v_{g3} = 0$  (ветер восточный); кроме того,  $v_{g1}$  и  $v_{g2}$  тоже известны. В этом случае из 2-й части уравнения (1.30) найдем:

$$\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{-4,6 \text{ м/с}}{(4,6 - 5,5) \text{ м/с}} = 5,1, \quad z_3 = z_2 + 5,1(z_2 - z_1) = 7,1 \text{ км.}$$

А из 1-й части уравнения (1.30) получим:

$$u_{g3} = u_{g2} + (u_{g2} - u_{g1}) \frac{(z_3 - z_2)}{(z_2 - z_1)} = -4,6 \text{ м/с} + (-4,6 + 2,3) \text{ м/с} \cdot 5,1 = -16,3 \text{ м/с.}$$

Итак,  $V_{g3} = -u_{g3} = 16$  м/с, ветер восточный.

Адвекцию температуры в слое 1–2 км легко найти по формуле (1.25). При этом следует учесть, что когда угол входит в алгебраические формулы (а не в тригонометрические функции), его следует выражать в радианах (величинах, не имеющих размерности). Кроме того, в качестве скорости геострофического ветра в формулу (1.25) следует подставлять модуль средней векторной величины. Однако при небольших значениях разности углов  $\alpha$  можно использовать среднеарифметическую величину. В результате получим:

$$\partial\alpha = -\frac{22,5^\circ}{180^\circ} \cdot 3,14 = -0,392; \quad \bar{V}_g = \frac{1}{2}(6 + 6,5) \text{ м/с} = 6,2 \text{ м/с};$$

$$l = 1,264 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1};$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_a = -\frac{l\bar{T}}{g} V_g^2 \frac{\partial\alpha}{\partial z} = -\frac{1,264 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}}{9,8 \text{ м/с}^2} \cdot 6,2^2 (\text{м/с})^2 \cdot \frac{0,392}{10^3 \text{ м}} \cdot (24 \cdot 3600) \frac{\text{с}}{\text{сут}} = -4,6 \text{ К/сут.}$$

**Задача 4.** На уровне 1000 гПа геострофический ветер юго-западный, 8,5 м/с; на уровне 500 гПа ветер достигает минимума. Изогипсы  $OT_{1000}^{500}$  имеют широтное направление. Найти геострофический ветер на уровне 700 гПа.

**Решение.** Термический ветер направлен вдоль изогипс, причем с запада на восток, поскольку широтная составляющая геострофического ветра убывает с высотой и обращается в нуль на некоторой высоте. Составляющая  $v_g$  (перпендикулярная термическому ветру) с высотой не меняется (рис. 5).

Модуль геострофического ветра убывает с высотой. На той высоте, где составляющая  $u_g = 0$ , он равен составляющей  $v_g$  и достигает минимума. Таким образом,  $v_{g1} = v_{g2} = v_{g3} = V_{g3} = V_{g1} \cos 45^\circ = 6,0 \text{ м/с}$ , т. е. минимальный ветер равен 6 м/с и направлен на север. Теперь найдем ветер на промежуточном уровне 700 гПа. Из рис. 5 видно, что  $u_{g3} = u_{g1} + u_{T(3,1)} = 0 \rightarrow u_{T(3,1)} = -u_{g1} = -V_{g1} \sin 45^\circ = -6 \text{ м/с}$ . Согласно формуле (1.22), в слое 1000–500 гПа:

$$u_{T(3,1)} = -\frac{9,8}{l} \frac{\partial H_{1000}^{500}}{\partial y}. \quad (1.31)$$

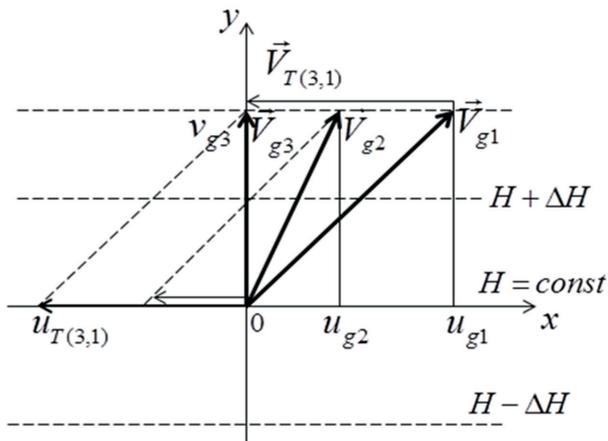


Рис. 5. Изменение геострофического ветра с высотой

Но в слое 1000–700 гПа по формуле (1.21):

$$u_{T(2,1)} = -\frac{9,8}{l} \left( \ln \frac{1000}{700} / \ln \frac{1000}{500} \right) \frac{\partial H_{1000}^{500}}{\partial y}. \quad (1.32)$$

Из (1.31) и (1.32) следует:

$$\frac{u_{T(2,1)}}{u_{T(3,1)}} = \ln \frac{1000}{700} / \ln \frac{1000}{500} \rightarrow u_{T(2,1)} = u_{T(3,1)} \frac{\ln 1,43}{\ln 2} = -3,1 \text{ м/с},$$

$$u_{g2} = u_{g1} + u_{T(2,1)} = (6,0 - 3,0) \text{ м/с} = 2,9 \text{ м/с};$$

$$V_{g2} = \sqrt{u_{g2}^2 + v_{g2}^2} = 6,7 \text{ м/с};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_{g2}}{v_{g2}} = 0,484, \quad \alpha = 25^\circ.$$

Итак, на уровне 700 гПа геострофический ветер юго-юго-западный 6,7 м/с.

## Агеострофические отклонения в свободной атмосфере

Агеострофическое отклонение есть векторная разность скоростей реального ветра и геострофического:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_g. \quad (1.33)$$

Из уравнений движения в свободной атмосфере вытекают следующие соотношения, связывающие агеострофическое отклонение с ускорением:

$$|\vec{V}'| = \frac{1}{2\omega \cdot \sin \phi} \left| \frac{d\vec{V}}{dt} \right| \quad \text{и} \quad |\vec{V}'| = \frac{1}{2\omega \cdot \sin \phi \cdot \sin \gamma} \frac{d|\vec{V}|}{dt}, \quad (1.34)$$

где  $\gamma$  – угол между вектором реального ветра и вектором агеострофического отклонения, имеющий положительное значение при отсчете угла от вектора  $\vec{V}$  к вектору  $\vec{V}'$  против часовой стрелки. При этом вектор  $\vec{V}'$  направлен под углом  $90^\circ$  влево (в Северном полушарии) по отношению к вектору ускорения  $\frac{d\vec{V}}{dt}$ . При решении задач по данной теме следует прежде всего выполнить рисунок в плоскости  $хоу$ , изображающий векторы  $\vec{V}$ ,  $\vec{V}_g$ ,  $\vec{V}'$ ,  $\frac{d\vec{V}}{dt}$ .

**Задача 5.** Горизонтальный градиент давления у земли на широте  $60^\circ$  равен  $1 \text{ гПа}/100 \text{ км}$  и направлен на север. Реальный ветер составляет с направлением градиента давления (направленного в сторону возрастания давления)  $60^\circ$  и равен  $10 \text{ м/с}$ . Определить величину и направление ускорения, а также изменение модуля скорости воздушного потока.

**Решение.** Прежде всего найдем величину геострофического ветра:

$$V_g = \frac{1}{\rho \cdot 2\omega \cdot \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{1,29 \text{ кг/м}^3 \cdot 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot \sin 60^\circ} \cdot \frac{100 \text{ Н/м}^2}{100 \cdot 10^3 \text{ м}} \approx 7 \text{ м/с}.$$

Теперь нам известны две величины:  $\vec{V}$  и  $\vec{V}_g$  и угол между ними  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 6)

Таким образом, из треугольника  $AOB$  на рис. 6 мы можем определить величину  $|\vec{V}'|$  по теореме косинусов:

$$V' = \sqrt{V^2 + V_g^2 - 2 \cdot V \cdot V_g \cos \alpha} = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 30^\circ} \approx 5,3 \text{ м/с}.$$

Направление вектора  $\vec{V}'$  найдем по теореме синусов:

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{V}{V'} = 0,5 \cdot \frac{10}{5,3} \approx 0,95;$$

$$\beta = 108^\circ \text{ (но не } 72^\circ, \text{ т.к. } V > V_g).$$

Отсюда следует:  $\gamma = \gamma^* = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 42^\circ$ .

Известное значение величины вектора  $\vec{V}'$  и его направление позволяют определить и все остальные неизвестные.

Из формул (1.34) следует:

$$\left| \frac{d\vec{V}}{dt} \right| = |\vec{V}'| 2\omega \sin \phi; \quad \frac{d|\vec{V}|}{dt} = |\vec{V}'| 2\omega \sin \phi \sin \gamma.$$

Подставляем численные значения параметров вместе с единицами измерения:

$$\left| \frac{d\vec{V}}{dt} \right| = 6 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 0,77 = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 = 2,4 \frac{\text{м}}{\text{с}} / \text{ч};$$

$$\frac{d|\vec{V}|}{dt} = 6 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 0,77 \cdot (-0,67) = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 = -1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}} / \text{ч}.$$

Как видно, изменение модуля скорости ветра  $\frac{d|\vec{V}|}{dt}$  отличается от модуля ускорения.

Направление вектора ускорения находится в соответствии с требованием взаимной перпендикулярности векторов  $\vec{V}'$  и  $\frac{d\vec{V}}{dt}$ .

Как видно из рис. 6,

$$\varepsilon = 90^\circ - \gamma^* = 48^\circ; \quad \varepsilon^* = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

Таким образом, с течением времени будет наблюдаться уменьшение скорости воздушной массы с одновременным отклонением ее вправо.

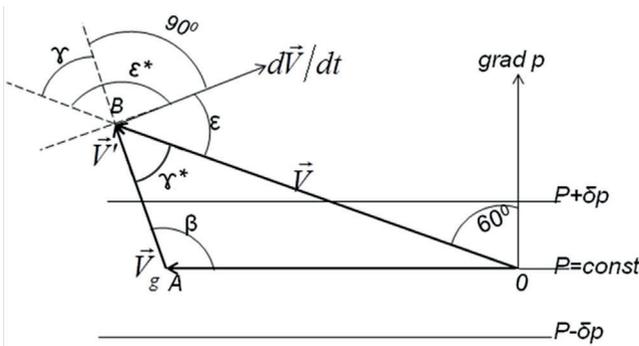


Рис. 6. Связь между агеострофическим отклонением и ускорением

## Вертикальные движения в свободной атмосфере

Скорость вертикальных движений в свободной атмосфере  $w = \frac{dz}{dt}$ , или ее аналог в изобарической системе координат  $\tau = \frac{dp}{dt}$ , может быть определен из уравнения вихря скорости:

$$\frac{d(\Omega + l)}{dt} = l \frac{\partial \tau}{\partial p},$$

где  $\Omega$  – вихрь скорости;  $l = 2\omega_z$  – параметр Кориолиса;  $\frac{d}{dt}$  – индивидуальное изменение по времени.

С учетом квазигеострофического приближения и пренебрежения изменением параметра Кориолиса вдоль меридиана можно записать:

$$l \frac{\partial \tau}{\partial p} = \frac{1}{l} \frac{d\Delta H}{dt},$$

где  $\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$  – лапласиан (оператор Лапласа) геопотенциала  $H(x, y)$  изобарической поверхности.

Интегрирование последнего уравнения по давлению от  $p_1$  до  $p_2$  позволяет получить формулу для расчета вертикальной скорости:

$$\tau_{p_2} = \tau_{p_1} - \frac{p_1 - p_2}{l^2} \frac{d\bar{\Delta H}}{dt},$$

где  $\tau_{p_1}$  – известное значение вертикальной скорости на уровне  $p_1$ ;  $\frac{d\bar{\Delta H}}{dt}$  – среднее в слое  $p_1$  до  $p_2$  значение индивидуального изменения величины  $\Delta H$ , определяемое как среднее арифметическое:

$$\frac{d\bar{\Delta H}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Delta H_{p_1}}{dt} + \frac{d\Delta H_{p_2}}{dt} \right).$$

При этом величина  $\frac{d}{dt} \Delta H_p$  для каждого из уровней определяется как разность значений  $\Delta H_p$  в конечном и начальном пунктах траектории воздушной массы, отнесенная к соответствующему интервалу времени.

Связь между  $w$  и  $\tau$  приближенно устанавливается равенством:

$$\tau = -g\rho w = -g \frac{\rho}{RT} w.$$

**Задача 6.** Для начального  $A$  и конечного  $B$  пунктов траектории, разделенных 12-часовым интервалом, рассчитаны значения лапласиана геопотенциалов  $H_{850}$  и  $H_{700}$ :

P	гПа	850	750
$\Delta H_A$	$\frac{\text{гПДКМ}}{(500\text{км})^2}$	+2	+4
$\Delta H_B$	$\frac{\text{гПДКМ}}{(500\text{км})^2}$	-1	-2

Определить среднее по траектории движения воздушной массы значение вертикальной скорости  $w$  (см/с) и ее аналога  $\tau$  (гПа/ч) на уровне  $p = 700$  гПа, если на уровне  $p = 850$  гПа вертикальные движения отсутствуют. Широта места  $60^\circ$ . Температура на уровне  $p = 700$  гПа равна 250 К.

**Решение.** Определим индивидуальные изменения величины  $\Delta H$  для каждого из уровней и среднее по слою значение:

$$\frac{d\Delta H_{850}}{dt} = \frac{(-1-2) \cdot 10 \text{ гПМ}}{(500 \cdot 10^3)^2 \text{ м}^2 \cdot 12 \text{ ч}} = -1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{гПМ}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч}};$$

$$\frac{d\Delta H_{700}}{dt} = \frac{(-2-4) \cdot 10 \text{ гПМ}}{(500 \cdot 10^3)^2 \cdot 12 \text{ ч}} = -2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{гПМ}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч}};$$

$$\frac{\overline{d\Delta H}}{dt} = -1,5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{гПМ}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч}} = -1,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}^2/\text{ч}.$$

Далее определяем значения  $\tau_{700}$  и  $w_{700}$ :

$$\tau_{700} = 0 + \frac{150 \text{ гПа}}{(2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 0,866)^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}^2/\text{ч} = 1,4 \text{ гПа/ч};$$

$$w_{700} = -\frac{RT}{g\rho} \tau = -\frac{287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 250 \text{ К}}{9,8 \text{ м}^2/\text{с} \cdot 700 \text{ гПа}} \cdot \frac{1,4 \text{ гПа}}{3600 \text{ с}} = -0,3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

## Поверхности раздела

Условие непрерывности давления на поверхности раздела теплой и холодной воздушных масс (динамическое условие) позволяет получить в самом общем виде выражение для определения угла наклона  $\alpha$  фронтальной поверхности к горизонту в направлении, перпендикулярном фронтальной линии:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial p_+}{\partial y} - \frac{\partial p_-}{\partial y}}{\frac{\partial p_+}{\partial z} - \frac{\partial p_-}{\partial z}}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,$$

где  $z = \xi(x, y, t)$  уравнение фронтальной поверхности;  $\frac{\partial p_+}{\partial y}$  и  $\frac{\partial p_-}{\partial y}$  – составляющие горизонтального градиента давления в направлении, перпендикулярном линии фронта, соответственно в теплой и холодной воздушных массах;  $\frac{\partial p_+}{\partial z}$  и  $\frac{\partial p_-}{\partial z}$  – вертикальные градиенты давления, соответственно, в теплой и холодной воздушных массах; ось  $ox$  направлена вдоль линии фронта, ось  $oy$  перпендикулярна линии фронта (рис. 7).

Использование уравнения статики, геострофических соотношений, а также связи между горизонтальными градиентами давления и градиентами геопотенциала изобарических поверхностей позволяют получить ряд удобных для расчета величины  $\operatorname{tg}\alpha$  формул, например:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\bar{T}}{\Delta T} \frac{l}{g} (u_+ - u_-) \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = - \frac{\bar{T}}{\Delta T} \frac{9,8}{g} \left( \frac{\partial H_+}{\partial y} - \frac{\partial H_-}{\partial y} \right), \quad (1.35)$$

где  $\bar{T}$  – средняя температура в воздушных массах, выраженная в Кельвинах;  $H_+$  и  $H_-$  – геопотенциальные высоты изобарических поверхностей, соответственно, в теплой и холодной воздушных массах, выраженные в геопотенциальных метрах;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ ;  $l = 2\omega \cdot \sin \phi$  – параметр Кориолиса;  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли;  $\Delta T = T_+ - T_-$  – разность температур воздушных масс ( $T_+ > T_-$ );  $u_+ - u_-$  – разность касательных к линии фронта проекций векторов скорости ветра в теплой и холодной воздушных массах (с учетом знака величины в соответствии с выбранным направлением оси  $x$ ).

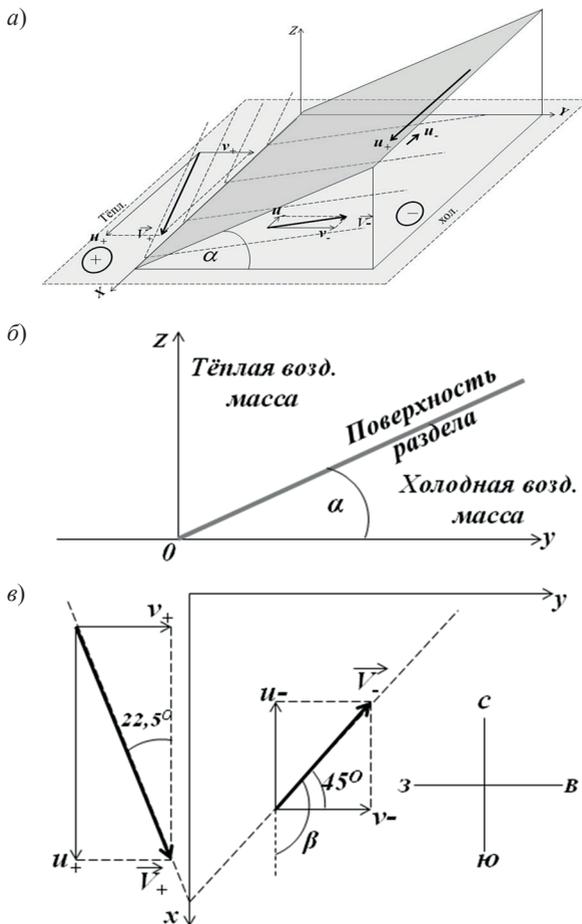


Рис. 7. Схема поля ветра в области фронта: *a* – трехмерное изображение; *б* – вертикальный разрез; *в* – проекция на горизонтальную плоскость

Следствием динамических условий является еще одно важное

равенство:  $\frac{\partial p_+}{\partial x} = \frac{\partial p_-}{\partial x}$  или  $v_+ = \frac{T_+}{T_-} \cdot v_- \approx v_- \approx v_\phi$ ,

где  $v_\phi$  – скорость перемещения фронта;  $v_+$  и  $v_-$  – проекции вектора скорости на направление, перпендикулярное линии фронта, в теплой и холодной воздушных массах соответственно. Кроме динамических условий на фронтальной поверхности выполняются кинематические условия:

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

где  $w$  – вертикальная составляющая скорости ветра на фронтальной поверхности;  $t$  – время.

Кинематические условия позволяют связать разность вертикальных составляющих скорости ветра на фронтальной поверхности в теплой и холодной воздушных массах с разностью проекций геострофического ветра на линию фронта:

$$w_+ - w_- = v_\phi \frac{\Delta T}{T} \operatorname{tg} \alpha = \frac{lv_\phi}{g} (u_+ - u_-). \quad (1.36)$$

### Практические рекомендации к решению задач

1. Направить ось  $ox$  вдоль линии фронта.
2. При использовании значений проекций скоростей  $u_+$ ,  $u_-$ ,

а также проекций горизонтальных градиентов давления  $\frac{\partial p_+}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p_-}{\partial y}$

должен учитываться их знак в соответствии с выбором направления осей  $ox$  и  $oy$ .

3. При построении рисунка соблюдать условия правого поворота ветра при прохождении фронта и непрерывности нормальной к линии фронта составляющей скорости ветра.

При известных значениях векторов скорости ветра в теплой и холодной воздушных массах величина разности  $u_+ - u_-$ , скорость перемещения фронта (и нормальные к линии фронта составляющие скорости ветра), а также направление ориентации линии фронта, определяются из треугольника, построенного на заданных векторах скорости при совмещении начальных точек векторов (рис. 8). При этом, как видно из рисунка, отрезок, соединяющий концы векторов  $\vec{V}_+$  и  $\vec{V}_-$ , равен разности касательных к фронту составляющих скоростей ( $u_+ - u_-$ ), а направление отрезка параллельно направлению линии фронта; перпендикуляр, опущенный из начала векторов на этот отрезок, представляет собой величину, равную скорости перемещения фронта.

**Задача 7.** Ветер в холодной воздушной массе, имеющей температуру  $10^\circ\text{C}$  и находящейся восточнее меридионально ориентированного фронта, юго-западный и равен  $5\text{ м/с}$ . В теплой воздушной массе с температурой  $20^\circ\text{C}$  ветер северо-северо-западный.

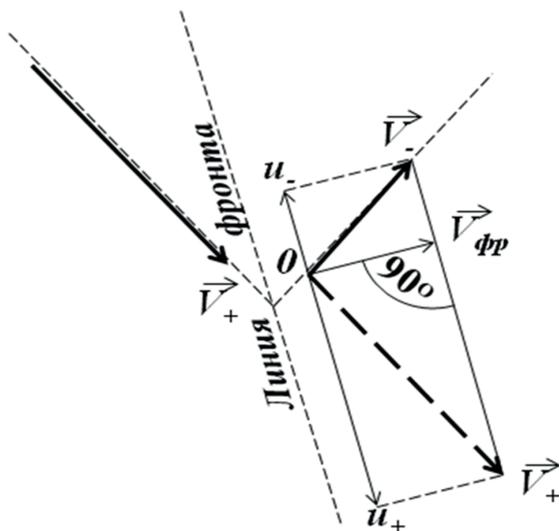


Рис. 8. Схема фронта с векторами скорости ветра

Определить наклон поверхности раздела к поверхности горизонта, скорость ветра в теплой воздушной массе, скорость перемещения фронта и вертикальную скорость на поверхности раздела в теплой воздушной массе. Широта места  $60^\circ$ . Считать, что в холодной воздушной массе вертикальные движения отсутствуют.

**Решение.** Выполним рисунок в двух плоскостях: вертикальный разрез в плоскости  $uoz$ , перпендикулярной линии фронта, и горизонтальный – в плоскости  $хоу$ , направляя ось  $ох$  вдоль линии фронта (см. рис. 7).

Из условия непрерывности перпендикулярных к линии фронта проекций вектора скорости ветра следует равенство:

$$v_+ \approx v_- \text{ и } v_\phi = v_-.$$

Но согласно условию задачи:

$$v_- = V_- \cos 45^\circ = 5 \text{ м/с} \cdot 0,707 \approx 3,5 \text{ м/с}.$$

Следовательно,  $v_+ = 3,5 \text{ м/с}$ ;  $v_\phi = 3,5 \text{ м/с}$ .

$$V_+ = \frac{v_+}{\sin 22,5^\circ} = 5 \text{ м/с} \cdot \frac{1}{0,323} \approx 13,0 \text{ м/с}.$$

Для определения наклона поверхности раздела к плоскости горизонта находим проекции векторов скорости ветра на ось  $ох$  (т. е. на линию фронта) и их разность:

$$u_- = V_- \cos(90^\circ + 45^\circ) = -5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 0,707 = -3,5 \text{ м/с};$$

$$u_+ = v_+ \cdot \text{ctg} 22,5^\circ = 3,5 \text{ м/с} \cdot 2,41 = 8,45 \text{ м/с};$$

$$u_+ - u_- = 8,45 \text{ м/с} - (-3,5) \text{ м/с} = 12,0 \text{ м/с}; \quad \Delta T = 10^\circ; \quad \bar{T} = 288 \text{ К}.$$

Далее определяем величину  $\text{tg} \alpha$  и  $w_+$  по формулам (1.35)–(1.36):

$$\text{tg} \alpha = \frac{288 \text{ К}}{10 \text{ К}} \cdot \frac{2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot \sin 60^\circ \cdot 12,0 \text{ м/с}}{9,8 \text{ м/с}^2} \approx 4,45 \cdot 10^{-3};$$

$$w_+ = 0 + 3,5 \text{ м/с} \cdot \frac{10 \text{ К}}{288 \text{ К}} \cdot 4,45 \cdot 10^{-3} \approx 5,36 \cdot 10^{-4} \text{ м/с} \approx 0,05 \text{ см/с}.$$

## Контрольная работа

### Вариант 1

**Задача 1.** При подъеме сухого воздуха плотность воздушной частицы остается постоянной. Найти изменение температуры частицы на каждые 100 м подъема, приток тепла к 1 кг воздуха на каждые 100 м и политропическую теплоемкость  $C$ . Принять  $\frac{T}{\bar{T}} \approx 1$ .

**Задача 2.** У земли геострофический ветер юго-восточный, 10 м/с. На высоте 6 км ветер южный и достигает минимума. Найти геострофический ветер и геострофическую адвекцию температуры на высоте 3 км. Температура на этом уровне равна 273 К, широта места  $45^\circ$ . Горизонтальный градиент температуры не меняется с высотой.

**Задача 3.** На карте масштаба  $1:10^7$  расстояние между соседними изобарами, проведенными через 5 гПа, равно 3 см. Давление растет с запада на восток. Реальный ветер отклонен от геострофического влево на угол  $20^\circ$  и равен 12 м/с. Определить направление вектора ускорения воздушной массы и выяснить, как изменится величина скорости ее движения через 2 часа. Широта места  $65^\circ$ . Плотность воздуха принять равной  $1,3 \text{ кг/м}^3$ .

**Задача 4.** В теплой воздушной массе, имеющей температуру  $22^\circ \text{C}$  и расположенной западнее меридионально ориентированного фронта, ветер северо-западный, 8 м/с; в холодной воздушной массе с температурой  $12^\circ \text{C}$  ветер юго-юго-западный. Определить скорость ветра в холодной массе, наклон поверхности раздела

к плоскости горизонта, скорость перемещения фронта и вертикальную скорость на поверхности раздела в теплой воздушной массе, если в холодной воздушной массе вертикальные токи отсутствуют. Широта места  $60^\circ$ .

## Вариант 2

**Задача 1.** Перегретая на  $5^\circ\text{C}$  воздушная частица поднимается до высоты 1 км, где ее скорость становится равной нулю. Определить, какое количество тепла она потеряла, если вертикальный градиент температуры воздуха равен  $-0,6^\circ\text{C}/100\text{ м}$ . Принять  $\frac{T}{T} \approx 1$ .

**Задача 2.** На уровне 1000 гПа ветер северо-восточный, 10 м/с, а на уровне 700 гПа – северо-северо-восточный. Изогипсы имеют широтное направление. На каком уровне ветер достигает минимума и чему он равен?

**Задача 3.** Определить скорость восходящих движений  $w$  (см/с) и ее аналог (гПа/ч) на участке траектории воздушной массы между пунктами  $A$  и  $B$ , разделенными 6-часовым интервалом, на изобарических поверхностях 700 гПа и 500 гПа, используя следующие данные о значениях температуры и лапласиана геопотенциала.

P	гПа	850	700	500
$\Delta H_A$	$\frac{\text{гпдкм}}{(250\text{ км})^2}$	+3	+2	+4
$\Delta H_B$	$\frac{\text{гпдкм}}{(250\text{ км})^2}$	+5	+3	+3
T	K	283	272	254

На уровне 850 гПа вертикальная скорость  $\tau = -4 \frac{\text{гПа}}{\text{ч}}$ . Широта места  $\phi = 60^\circ$ .

**Задача 4.** Высоты изобарических поверхностей возрастают при удалении от фронта в обоих направлениях. При этом расстояние между соседними изогипсами на карте  $AT_{850}$  в направлении, перпендикулярном линии фронта, в теплой воздушной массе равно 3 см, а в холодной – 2 см. Масштаб карты  $1:10^7$ . Определить угол наклона фронтальной поверхности, разделяющей воздушные массы с разностью температур  $12^\circ$ , и вертикальную скорость подъема теплой воздушной массы вдоль поверхности раздела, если фронт

перемещается со скоростью 18 км/ч, а вертикальные движения в холодной воздушной массе отсутствуют. При проведении расчетов принять  $T = 290$  К.

### Вариант 3

**Задача 1.** При подъеме массы ненасыщенного влажного воздуха относительная влажность увеличивается на 5 % на каждые 100 м. Температура воздуха – 263 К. Определить, как изменяется с высотой температура воздушной массы, на сколько процентов изменяется максимальное парциальное давление и каков приток тепла к единице массы на каждые 100 м подъема. Принять  $\frac{T}{\bar{T}} \approx 1$ .

**Задача 2.** У земли геострофический ветер юго-восточный, 10 м/с, а на высоте 6 км – южный. Изогипсы  $OT_{1000}^{500}$  имеют широтное направление. Найти ветер и геострофическую адвекцию температуры на высоте 6 км. Широта места равна  $60^\circ$ , средняя температура слоя 260 К, горизонтальный градиент температуры не меняется с высотой.

**Задача 3.** Начальный  $A$  и конечный  $B$  пункты траектории воздушной массы разделены 18-часовым интервалом. Используя результаты расчетов лапласиана абсолютного геопотенциала изобарических поверхностей  $H_{850}$ ,  $H_{700}$ ,  $H_{500}$  для пунктов  $A$  и  $B$ , определить среднее по траектории движения воздушной массы значение вертикальной скорости  $w$  (см/с) и ее аналога (гПа/ч) на поверхностях 700 гПа и 500 гПа.

Р	гПа	850	700	500
$\Delta H_A$	$\frac{\text{гпдкм}}{(500\text{км})^2}$	-1	+3	+12
$\Delta H_B$	$\frac{\text{гпдкм}}{(500\text{км})^2}$	-4	-3	+3
T	К	278	268	252

На уровне 850 гПа вертикальная скорость  $\tau = 2 \frac{\text{гПа}}{\text{ч}}$ . Широта места  $50^\circ$ .

**Задача 4.** Геострофический ветер в теплой воздушной массе, имеющей температуру  $15^\circ\text{C}$  и расположенной к западу от меридионально ориентированного фронта, северо-западный. При этом

расстояние между соседними изобарами на карте с масштабом  $1:10^7$  равно 2 см. Геострофический ветер в холодной воздушной массе, имеющий температуру  $8\text{ }^\circ\text{C}$ , юго-западный. Определить наклон поверхности раздела, скорость передвижения фронта и разность вертикальных скоростей в теплой и холодной воздушных массах. Широта места  $60\text{ }^\circ$ .

#### Вариант 4

**Задача 1.** При подъеме ненасыщенного влажного воздуха потенциальная температура частицы остается постоянной. Каково изменение температуры частицы и приток тепла к 1 кг воздуха на каждые 100 м подъема? Как изменяется с высотой относительная влажность в частице?  $T = 300\text{ K}$ . Принять  $\frac{T}{\bar{T}} \approx 1$ .

**Задача 2.** На уровне 900 гПа ветер северо-западный, 10 м/с, а на уровне 800 гПа – северо-северо-западный. Изогипсы  $OT_{1000}^{500}$  имеют широтное направление. На каком уровне ветер достигает минимума и чему он равен?

**Задача 3.** Найти ускорение воздушной массы, а также изменение модуля скорости ее движения, если реальный ветер отклонен от геострофического вправо на угол  $15^\circ$  и равен 6 м/с. Горизонтальный градиент давления у земли составляет 3 гПа/100 км и направлен на восток. Широта места  $50^\circ$ , плотность воздуха  $1,3\text{ кг/м}^3$ .

**Задача 4.** Скорость северо-западного геострофического ветра в теплой воздушной массе, расположенной западнее фронта, равна 8 м/с. В холодной воздушной массе ветер юго-юго-западный, 12 м/с. Тангенс угла наклона поверхности раздела к плоскости горизонта составляет 0,005. Определить разность температур в теплой и холодной воздушных массах, скорость и направление перемещения фронта, вертикальную скорость в теплой воздушной массе для широты  $60^\circ$ . При расчетах полагать, что вертикальные токи в холодной воздушной массе отсутствуют;  $T = 285\text{ K}$ .

## Содержание

<b>Общие указания</b> .....	3
Литература .....	4
<b>Указания по разделам</b> .....	5
Основные уравнения динамики жидкости на вращающейся Земле и их анализ ..	5
Уравнения гидротермодинамики для турбулентных течений .....	6
Подобие гидродинамических движений на вращающейся Земле .....	6
Простейшие типы движений жидкости при отсутствии трения .....	6
Вихревая динамика .....	8
Волны в геофизических средах .....	8
Планетарные пограничные слои (ППС) .....	8
Основные элементы общей циркуляции атмосферы .....	9
Баротропная неустойчивость .....	9
Особенности крупномасштабной структуры океанических течений .....	10
<b>Примеры решения задач</b> .....	10
Термодинамика сухого и влажного воздуха .....	10
Геострофический и термический ветер. Геострофическая адвекция температуры .....	13
Агеострофические отклонения в свободной атмосфере .....	22
Вертикальные движения в свободной атмосфере .....	25
Поверхности раздела .....	27
Практические рекомендации к решению задач .....	29
<b>Контрольная работа</b> .....	31

*Учебное издание*

Составители:  
Кирилл Леонидович Егоров,  
Надежда Сергеевна Еремина

Методические указания по дисциплине  
«Механика жидкости и газа (геофизическая гидродинамика)»

*Начальник РИО Н.И. Афанасьева  
Редактор Л.Ю. Киреева  
Верстка М.В. Ивановой*

---

Подписано в печать 30.12.16. Формат 60×90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура Times New Roman.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 2,25. Тираж 100 экз. Заказ № 596.  
РГТУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.

---