Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. Веретенников

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Р Г Г М У

Санкт-Петербург
2018

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

УДК
ББК
ISBN
Веретенников В. Н. Сборник задач по математике. Элементы векторной алгебры. – СПб: РГГМУ, 2018 – 75 с.

Пособие является третьим выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам.

Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

Рецензент: *Вагер Б. Г., д-р физ.-мат. наук, проф. СПбГАСУ*

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Опорный конспект (основные теоретические сведения)» – приводятся основные теоретические сведения и формулы (разумеется, без доказательства). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют, то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами векторной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

1. Векторы

Любая упорядоченная пара точек A и B пространства определяет ***направленный отрезок***, т.е. отрезок вместе с заданным на нем направлением.

Обозначение $\mathbf{AB}$, $\overrightarrow{AB}$

Точка A называется ***началом*** направленного отрезка **AB**, а точка B – его ***концом***. Очевидно, направление отрезка **AB** совпадает с направлением луча $[AB)$.

Определение. Длиной направленного отрезка **AB** называется длина отрезка $[AB]$.

Обозначение $|\mathbf{AB}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение. Направленные отрезки **AB** и **BA** называются ***противоположными***.

Каждую точку можно рассматривать как частный случай ***направленного отрезка***, начало которого и конец совпадают. Точку A как ***направленный отрезок*** обозначают **AA** или $\overrightarrow{AA}$ и называют ***нулевым направленным отрезком***. Для нулевого ***направленного отрезка*** принято считать, что $|\mathbf{AA}| = 0$, а направление не определено.

Множество всех ***направленных отрезков*** пространства, имеющих одинаковое направление и равные длины, называется ***вектором***.

Обозначение $\mathbf{AA}$, $\overrightarrow{AA}$, $\vec{a}$, $\mathbf{a}$.

Причем первая буква означает ***начало*** вектора, а вторая – его ***конец***. Символ **BA** будет, очевидно, обозначать вектор, начало которого находится в точке B, а конец – в точке A.

Геометрически вектор часто изображают отрезком со стрелкой.

Расстояние между ***началом*** и ***концом*** вектора называется его ***длиной*** или ***модулем вектора***.

Обозначение $|\mathbf{AB}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ или $|\mathbf{a}|$.

Модуль вектора – ***скалярная неотрицательная величина***.

Вектор, у которого ***начало*** и ***конец*** совпадают, называется ***нулевым*** (или ***нуль вектором***).

Обозначение $\mathbf{AA}, \mathbf{o}$.

Из приведенного определения следует, что ***длина нулевого вектора*** равна нулю, то есть $|\mathbf{o}| = 0$. Направление его не определено (можно считать его направленным одинаково с любым вектором).

Определение. Вектор $\mathbf{a}$, для которого $|\mathbf{a}| = 1$, называется ***единичным вектором*** или ***ортом***.

Обозначение $\mathbf{a}^0$ (читается: **a** с нуликом) $\left(|\mathbf{a}^0| = 1\right)$.

Определение. Векторы **a** и **b** называются ***коллинеарными***, если они лежат на параллельных прямых.

Обозначение $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Замечание 1. Иначе говоря, векторы ***коллинеарные***, если при параллельном их переносе и совмещении их начал они лежат на одной прямой.
Замечание 2. Из определения следует, что если хотя бы одни из векторов **a** и **b** нулевой вектор, то они ***коллинеарны***.

Если отложить ***коллинеарные*** векторы **a** и **b** от общей точки *O*, $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}$, то точки *O, A* и *B* будут лежать на одной прямой. При этом возможны два случая.

Точки *A* и *B* располагаются на этой прямой:

1) по одну сторону от точки *O*,
2) по разные стороны (рис.1.1).

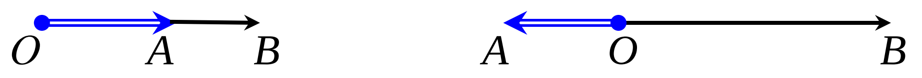


Рис. 1.1

В первом случае векторы **a** и **b** называются ***одинаково направленными*** (или ***сонаправленными***, пишут $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$), а во втором – ***противоположно направленными*** (пишут $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$).

Определение. Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются ***компланарными***.

Замечание. Иначе говоря, векторы компланарны, если при параллельном их переносе и совмещении начал они лежат в одной плоскости.

Определение. Векторы **a** и **b** называются ***равными***, если они:

1) ***коллинеарны*** $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,

2) сонаправлены $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$,

3) их длины равны $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Замечание. Иначе говоря, векторы равны, если при параллельном переносе векторов и совмещении их начал будут совмещены и их концы.

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются ***противоположными*** (векторы **AB** и **BA**).

2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются сложение, вычитание и умножение вектора на число.

Сумма векторов

Определение. Суммой двух векторов называется третий вектор, ***началом*** которого является ***начало*** первого вектора, ***концом*** – ***конец*** второго, причем ***начало*** второго вектора совмещено с ***концом*** первого.

Пусть заданы два вектора **a** и **b**. Возьмём какую-нибудь точку O и отложим от неё вектор $\mathbf{a}: \mathbf{OA} = \mathbf{a}$. От полученной точки A отложим вектор $\mathbf{b}: \mathbf{AB} = \mathbf{b}$. Полученный в результате вектор **OB** называется ***суммой*** векторов **a** и **b** и **обозначается** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 2.1).

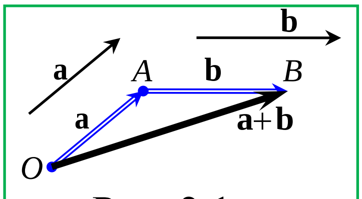


Рис. 2.1

Приведенный способ сложения векторов называется ***правилом треугольника***. Из этого правила следует, что для любых трех точек A, B, C плоскости имеет место соотношение

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}.$$

Приведем другое правило сложения векторов, эквивалентное правилу треугольника:

для построения вектора суммы двух векторов нужно из некоторой точки отложить ***направленные отрезки***, изображающие векторы-слагаемые, и на этих отрезках построить параллелограмм; диагональ этого параллелограмма, исходящая из общей точки, взятых ***направленных отрезков***, задает сумму векторов.

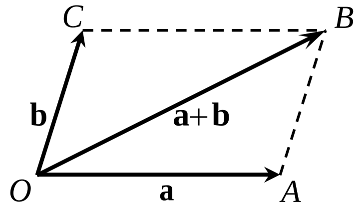


Рис. 2.2

Это правило сложения называется ***правилом параллелограмма***.

Суммой n векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется вектор, ***начало*** которого совпадает с ***началом*** первого вектора $\mathbf{a}_1$, ***конец*** с ***концом*** последнего $\mathbf{a}_n$ при условии, что каждый последующий вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ отложен из **конца** предыдущего $\mathbf{a}_k$, $(1 \le k \le n)$.

Указанный способ построения суммы называется ***правилом замыкающей*** или ***правилом многоугольника***.

Пример. Найти сумму векторов, идущих из центра правильного шестиугольника в его вершины.

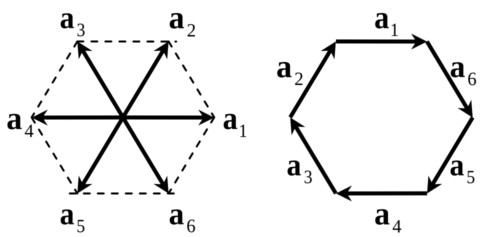


Рис. 2.3

▲ По правилу замыкающей получаем

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 = \mathbf{o}$$

рис. 2.3. ▼

Правило треугольника является частным случаем правила многоугольника.

При определении суммы не предполагалось, что векторы являются ***компланарными***. Сумма трех ***некомпланарных*** векторов **a**, **b**, **c**, наряду, с правилом замыкающей, получается и по ***правилу параллелепипеда***:

сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ равна вектору $\mathbf{OD}$, где $\mathbf{OD}$ – диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$, $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$, отложенных из одной точки O.

Свойства сложение векторов обладает

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (***коммутативность***);

2) $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ (***ассоциативность***);

3) $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$;

4) $\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{a})=\mathbf{o}$ ($\text{-}\mathbf{a}$ – вектор, противоположный вектору $\mathbf{a}$).

Разность векторов

Операция вычитания векторов вводится как операция, обратная сложению.

Определение. ***Разностью векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$.

Обозначение $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Из произвольной точки O пространства построим отрезки $\mathbf{OA}\in\mathbf{a}$ и $\mathbf{OB}\in\mathbf{b}$ (рис. 2.4). Тогда $\mathbf{BA}\in\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

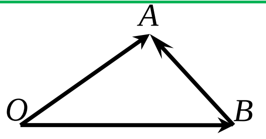


Рис. 2.4

Таким образом,

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}.$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется ***уменьшаемым*** вектором, а вектор $\mathbf{b}$ – ***вычитаемым*** вектором.

Второе правило построения вектора разности:

- для построения разности двух векторов нужно из произвольной точки пространства отложить ***направленные отрезки***, представляющие уменьшаемый и вычитаемый векторы,
- тогда ***направленный отрезок*** с ***началом*** в ***конце направленного отрезка***, представляющего вычитаемый вектор, и с ***концом*** – в ***конце направленного отрезка***, представляющего уменьшаемый вектор, будет представлять вектор разности.

Произведение вектора **a** на число λ

Определение. Произведением вектора **a** на число $\lambda\,(\lambda \neq 0)$ называется вектор **b**, удовлетворяющий следующим условиям:

1) векторы **a** и **b** сонаправлены, если $\lambda > 0$,

2) векторы **a** и **b** противоположно направлены, если $\lambda < 0$;

$$|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|,$$

3) При значении $\lambda = 0$ положим $\lambda \mathbf{a} \equiv \mathbf{o}$.

Обозначение $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Пусть **a** – произвольный ненулевой вектор, а $\mathbf{a}^0$ – единичный вектор того же направления, что и **a**, тогда, очевидно,

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0.$$

Поэтому,

чтобы получить единичный вектор того же направления,
что и данный вектор,
нужно данный вектор умножить на число $1/|\mathbf{a}|$
(или, разделить на его длину).

Свойства произведения вектора на число

1) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

2) $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda$;

3) $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu)\mathbf{a}$;

4) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$;

5) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$.

3.Проекция вектора на ось

Определение. ***Углом между двумя векторами*** (или ***между вектором и осью***) называется ***ориентированный*** угол между двумя ***направленными отрезками***, исходящими из одной точки и представляющими данные векторы.

Обозначение $(\mathbf{a};\widehat{\ }\,\mathbf{b}) = \varphi$.

Два вектора, **a** и **b** называются ***перпендикулярными*** или ***ортогональными***, если $(\mathbf{a};\widehat{\ }\,\mathbf{b}) = \pi/2$.

Определим еще два частных случая:

$$1)\ \text{если } \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}, \text{ то } (\mathbf{a};\widehat{\ }\mathbf{b}) = 0;$$

$$2)\ \text{если } \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}, \text{ то } (\mathbf{a};\widehat{\ }\mathbf{b}) = \pi.$$

Для того чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были ***коллинеарными***, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Рассмотрим на оси ℓ ненулевой ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB}$.

Определение. ***Величиной*** ***направленного отрезка*** $\mathbf{AB}$ на оси ℓ называется число, равное длине отрезка $\mathbf{AB}$ на оси ℓ, взятой со знаком «+», если направление отрезка $\mathbf{AB}$ совпадает с направлением оси ℓ, и со знаком «–», если эти направления противоположны (рис. 3.1).

Рассмотрим теперь произвольный вектор, $\mathbf{a}$, не перпендикулярный к оси ℓ. Построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$. Опуская из его ***начала*** и ***конца*** перпендикуляры на заданную ось ℓ, построим на ней ***направленный отрезок*** $\mathbf{A_1B_1} = \mathbf{b}$ (рис. 3.2).

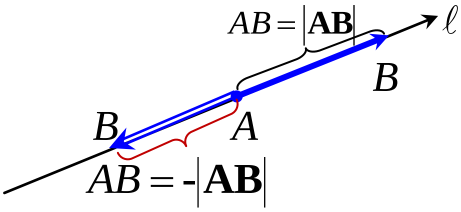


Рис.3.1

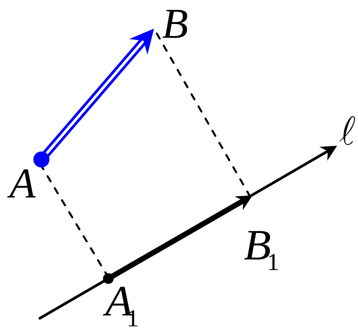


Рис.3.2

Определение. ***Проекцией вектора*** $\mathbf{AB}$ ***на ось*** ℓ называется ***величина*** ***направленного отрезка*** $\mathbf{A_1B_1}$ оси ℓ, построенного указанным выше способом.

Обозначение $\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB}$ (или $\text{пр}_\ell\,\mathbf{AB}$). Итак,

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB} = A_1B_1 = \begin{cases} |\mathbf{A_1B_1}|, \text{ если } \mathbf{A_1B_1} \uparrow\uparrow \ell, \\ -|\mathbf{A_1B_1}|, \text{ если } \mathbf{A_1B_1} \uparrow\downarrow \ell. \end{cases} \tag{3.1}$$

Замечание. Эту проекцию называют ***алгебраической*** (или ***скалярной***) ***проекцией*** вектора на ось. Вектор $\mathbf{A_1B_1}$ называется ***векторной проекцией*** вектора $\mathbf{AB}$ на ось ℓ.

Основные свойства проекций

1. Проекция вектора **a** на какую-либо ось равна произведению модуля (длины) вектора на косинус угла между осью и этим вектором:

$$\mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos(\mathbf{a} \,\hat{,}\, \ell).$$

Замечание. Если $\varphi = 0$, то $\mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|$.
Если $\varphi = \pi/2$, то $\mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} = 0$.
Если $\varphi = \pi$, то $\mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} = -|\mathbf{a}|$.

Следствие. Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $\mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} = \mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{b}$.

2. При умножении вектора на число его проекция на ось также умножается на это число

$$\mathrm{pr}_{\ell}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \cdot \mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a}. \tag{3.2}$$

3. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций векторов на ту же ось:

$$\mathrm{pr}_{\ell}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{a} + \mathrm{pr}_{\ell}\,\mathbf{b}. \tag{3.3}$$

4. Координаты вектора в данном базисе

Пусть задано k векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Будем называть это заданное множество векторов ***системой векторов***.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно-зависимыми***, если существуют число $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}. \tag{4.1}$$

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются ***линейно-независимыми***, если равенство (4.1) выполняется только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Определение. Вектор $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$, полученный в результате проведения нескольких линейных операций, называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(k \geq 2)$ линейно зависима в том только в том случае, если хотя бы один из ее векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Определение. ***Упорядоченная пара неколлинеарных*** векторов называется ***базисной системой векторов*** (***базисом***) на плоскости, определяемой заданными векторами.

Всякий вектор на плоскости может быть представлен как линейная комбинация базисной системы векторов, это представление (разложение по базисной системе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$) единственно.

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j},$$

Определение. Тройка векторов называется «***упорядоченной тройкой***», если указано, какой вектор тройки считается первым, какой вторым и какой третьим.

Любой вектор может быть единственным образом разложен по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, т.е. представлен в виде

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

где a_x, a_y, a_z – некоторые числа, которые называются ***координатами вектора*** **a**. Они совпадают с ***координатами*** a_x, a_y, a_z точки A – ***конца*** вектора **a**. То, что числа a_x, a_y, a_z являются ***координатами вектора*** **a** в разложении по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, записываем так

$$\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}.$$

Эта запись означает, что свободный вектор **a** однозначно задается ***упорядоченной тройкой*** своих ***координат***.

Векторы $a_x \mathbf{i}, a_y \mathbf{j}, a_z \mathbf{k}$, сумма которых равна вектору **a**, называются ***компонентами вектора*** **a**.

Два вектора $\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\mathbf{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их ***координаты***, т.е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Вектор, идущий из ***начала координат*** O в точку M называется ***радиус-вектором точки*** $M(x; y; z)$ (на плоскости $M(x; y)$) (рис. 4.1)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

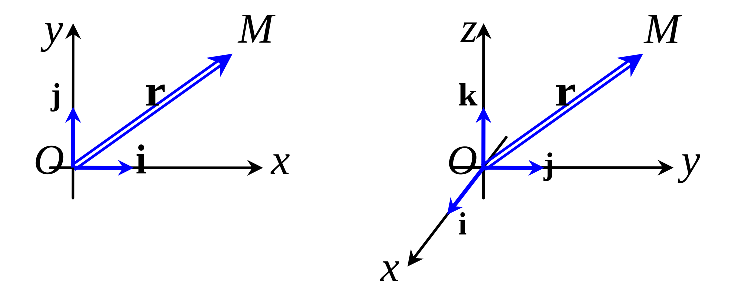


Рис. 4.1

5. Линейные операции над векторами в координатах

Пусть имеем два вектора $\mathbf{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$ и $\mathbf{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$, так что

$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k},\ \mathbf{b}=b_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}.$$

<u>Сумма векторов</u>

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_x+b_x;\ a_y+b_y;\ a_z+b_z\}. \qquad (5.1)$$

Таким образом,

координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.

Это правило легко распространить на случай суммы произвольного конечного числа векторов.

<u>Разность векторов</u>

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\{a_x-b_x;\ a_y-b_y;\ a_z-b_z\}. \qquad (5.2)$$

Таким образом,

координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов.

<u>Произведение вектора а на число λ</u>

$$\lambda\mathbf{a}=\{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}. \qquad (5.3)$$

Таким образом,

координаты произведения вектора на число равны произведениям координат этого вектора на данное число.

Векторы **a** и **b** ***коллинеарны*** тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

$$b_x=\lambda a_x,\ b_y=\lambda a_y,\ b_z=\lambda a_z \text{ или } \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \qquad (5.4)$$

Пусть в заданной прямоугольной декартовой системе координат

начало вектора находится в точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а ***конец*** – в точке $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Тогда координаты вектора $\mathbf{M_1M_2}$ равны

разностям одноименных координат
конечной M_2 и начальной M_1 точек этого вектора

$$\mathbf{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \tag{5.5}$$

6. Деление отрезка в данном отношении

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\mathbf{M_1M} = \lambda\mathbf{MM_2}$.

Связь между координатами делящей точки $M(x; y; z)$, точек

$$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_{21}; z_{21})$$

и числом λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{6.1}$$

Деление отрезка M_1M_2 будет

- ***внутренним***, если $\lambda > 0$, и
- ***внешним***, если $\lambda < 0$.
- При значении $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка

$$M_1M_2, \lambda \neq \text{-}1.$$

7. Скалярное произведение векторов

Пусть **a** и **b** – два вектора, а $(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b}) = \varphi$, угол между векторами **a** и **b**.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов **a** и **b** называется число (скаляр), равное произведению длин эти векторов на косинус угла между ними.

Обозначение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$).

В случае если один из векторов **a** или **b** – нулевой, будем считать, что скалярное произведение равно нулю. Итак,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{7.1}$$

Непосредственно из определения следует, что скалярное произведение есть ***скаляр***.

Скалярное произведение можно выразить и через проекцию одного из перемножаемых векторов на направление другого вектора.

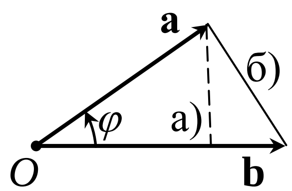


Рис. 7.1

Заметив, что $|\mathbf{a}|\cos\varphi$ есть проекция вектора **a** на направление вектора **b**, можем написать

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} \qquad (7.2)$$

и, аналогично,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}, \qquad (7.3)$$

т.е.

скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию на него другого вектора.

Свойства скалярного произведения (*геометрические*)

1. Для того чтобы ненулевые векторы **a** и **b** были взаимно перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0.$$

2. $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 \text{ или } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}.$$

Скалярное произведение вектора на себя называется ***скалярным квадратом***. Из последнего равенства следует, что длина вектора равна корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора.

Свойства скалярного произведения (*алгебраические*)

3. Для любых двух векторов **a** и **b**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

4. Для любых трех векторов, **a**, **b** и **c**

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Замечание. Свойство 4 дает право при скалярном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно.

В силу свойства 3 можно при этом не заботиться о порядке сомножителей.

5. Для любого числа λ и любых двух векторов **a** и **b**

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.$$

<u>Скалярное произведение базисных векторов</u> $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$

Так как базис $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ ортонормированный, то для скалярных произведений базисных векторов имеем (из геометрических свойств):

$$\begin{cases}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1;\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0.\end{cases}$$

Таблица скалярного умножения базисных векторов

	i	**j**	**k**
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

<u>Скалярное произведение векторов, заданных координатами</u>

Если векторы **a** и **b** заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, то их скалярное произведение определяется формулой

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{7.4}$$

Следствие 1. Необходимым и достаточным ***условием перпендикулярности*** двух векторов в координатной форме является равенство

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{7.5}$$

Следствие 2. Для скалярного квадрата $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ из формулы (7.4) получаем

$$\mathbf{a}^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2, \text{ или } |\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{7.6}$$

В ортонормированном базисе длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Косинус угла между векторами. Направляющие косинусы

Согласно определению

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами, **a** и **b**. Из этой формулы получаем

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$

(предполагается, что векторы, **a** и **b** – ненулевые).

Пусть $\mathbf{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\},\mathbf{b}=\{b_x;\,b_y;\,b_z\}$. Подставив в последнюю формулу значение скалярного произведения, длины векторов, получим

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

По полученной формуле легко найти углы α,β,γ, которые образует вектор с координатными осями (рис. 7.2). Эти углы называются ***направляющими углами***.

Направляющими углами вектора $\mathbf{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\}\neq 0$ будут

$$\alpha=(Ox,\hat{\ }\mathbf{a})=(\mathbf{i},\hat{\ }\mathbf{a});\ \beta=(Oy,\hat{\ }\mathbf{a})=(\mathbf{j},\hat{\ }\mathbf{a});\ \gamma=(Oz,\hat{\ }\mathbf{a})=(\mathbf{k},\hat{\ }\mathbf{a})$$

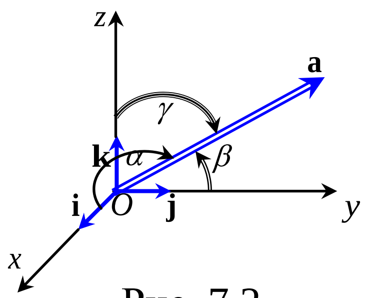


Рис. 7.2

Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{i}|};\ \cos\beta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{j}|};\ \cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{k}|}.$$

Но так как $\mathbf{i}=\{1;0;0\},\mathbf{j}=\{0;1;0\},\mathbf{k}=\{0;0;1\}$, то получим:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Косинусы углов α,β,γ называются ***направляющими косинусами вектора*** **a**. Эти углы задают в пространстве направление вектора.

Косинусы направляющих углов вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если, в частности, вектор $\mathbf{e}^0$ единичный, т.е.

$$\left|\mathrm{e}^0\right| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = 1, \text{ то } \cos\alpha = e_x;\ \cos\beta = e_y;\ \cos\gamma = e_z.$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}^0 = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}.$$

8. Векторное произведение векторов

Базисные, т.е. ***некомпланарные тройки*** векторов в пространстве разделяются на 2 типа.

- Если при наблюдении от конца 3-го вектора базисной тройки кратчайший поворот от 1-го вектора ко 2-му проводится против часовой стрелки – базисная система называется ***правой***.
- Если при наблюдении от конца 3-го вектора кратчайший поворот от 1-го вектора ко 2-му проводится по часовой стрелке – тройка векторов называется ***левой***.

Определение. ***Векторным произведением*** вектора **a** на вектор **b** называется **<u>вектор</u>**, обозначаемый символом $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ $\left(\text{или } [\mathbf{a},\mathbf{b}]\right)$, такой, что

1) длина вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равна $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b})$;

2) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен каждому из векторов, **a** и **b**, т.е. перпендикулярен плоскости этих векторов;

3) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку векторов.

<u>Свойства векторного произведения (*геометрические*)</u>

1. Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы-сомножители ***коллинеарны***.

2. Длина (модуль) векторного произведения ***неколлинеарных*** векторов **a** и **b** численно равна площади $S_П$ параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах как на сторонах:

$$S_П = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|,\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b})$$

Свойства векторного произведения (*алгебраические*)

3. Векторное произведение ***антикоммутативно***, т.е. всегда

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

4. Векторное произведение обладает ***дистрибутивным*** свойством по отношению к сложению

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

5. Векторное произведение двух векторов обладает ***ассоциативным*** свойством по отношению к третьему – скалярному – сомножителю (числовой множитель λ можно выносить за знак векторного произведения):

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Замечание. Свойство 4 дает право при векторном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно, а свойство 5 – объединять числовые коэффициенты сомножителей.

Следует, однако, помнить, что порядок сомножителей векторного произведения является существенным и при перестановке сомножителей знак векторного произведения нужно изменить (свойство 3).

Векторное произведение базисных векторов $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

Так как базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ортонормированный, то для векторных произведений базисных векторов имеем (из геометрических свойств):

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{o},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{o},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{o}.$$

Таблица векторного умножения базисных векторов

	i	**j**	**k**
i	**o**	**k**	**-j**
j	**-k**	**o**	**i**
k	**j**	**-i**	**o**

Замечание. Чтобы определить векторные произведения разноименных ортов, можно пользоваться циклической схемой (рис. 8.5).

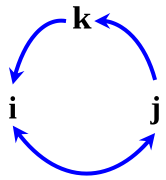


Рис. 8.5

- Если умножать рядом стоящие векторы, так как указывают стрелки (против часовой стрелки), то в результате получится следующий вектор.
- Если в противоположном направлении (по часовой стрелке) – то следующий вектор со знаком «–».

Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Тогда векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ выражается через координаты данных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_x b_y\,\mathbf{k} + a_x b_z(-\mathbf{j}) + a_y b_x(-\mathbf{k}) + a_y b_z\,\mathbf{i} + a_z b_x\,\mathbf{j} + a_z b_y(-\mathbf{i}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}.$$

Формулу можно записать в символической, легко запоминающейся форме, если воспользоваться определителем 3-го порядка:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторов
в координатной форме равно
<u>векторному определителю</u> третьего порядка, у которого

- ***первая строка базисные векторы,***
- ***вторая – координаты первого вектора-сомножителя,***
- ***а третья – координаты второго вектора- сомножителя.***

Важной геометрической задачей, решаемой с помощью введенной операции, является вычисление площади треугольника по координатам его вершин.

Следствие. Площадь треугольника ABC определяется формулой

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|.$$

При вычислении площадей ***всегда и обязательно сначала найдите***

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \ \textit{затем} \ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

– это две операции и объединять их нельзя!

9. Смешанное произведение векторов

Определение. ***Смешанным произведением*** векторов, **a**, **b** и **c** называется ***<u>число</u>***, равное скалярному произведению вектора **a** на векторное произведение векторов **b** и **c**, т.е.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \text{ или } (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Обозначение abc или (**a**, **b**, **c**).

<u>Свойства смешанного произведения (*геометрические*)</u>

1. Смешанное произведение $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**, взятому со знаком «+», если тройка, **a**, **b**, **c** – правая и со знаком «–», если тройка, **a**, **b**, **c** – левая, т.е.

$$\mathbf{abc} = \begin{cases} V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ правая ттройка} \\ -V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ левая ттройка} \end{cases}.$$

2. Для того чтобы три вектора были ***компланарны***, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

$$\mathbf{abc} = 0, \text{ если } \left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = \mathbf{o} \text{ или } \mathbf{b} = \mathbf{o} \text{ или } \mathbf{c} = \mathbf{o} \\ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \ \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}, \ \mathbf{a} \parallel \mathbf{c} \\ \mathbf{a}, \ \mathbf{b}, \ \mathbf{c} \text{ компланарны} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{abc} = 0 \ \text{– условие компланарности}$$

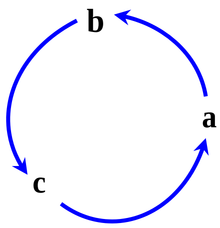
<u>Свойства смешанного произведения (*алгебраические*)</u>

3. Смешанное произведение не зависит от группировки множителей:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

т.е. знаки «·» и «×» в смешанном произведении можно менять местами.

4. При круговой перестановке векторов местами (1-й заменяется 2-м, 2-й – 3-м, 3-й – 4-м) смешанное произведение не изменяется. Схематически



$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}.$$

Если поменять местами два соседних вектора, то смешанное произведение меняет знак на противоположный знак.

$$\mathbf{abc} = -\mathbf{bac};\ \mathbf{abc} = -\mathbf{acb};\ \mathbf{abc} = -\mathbf{cba}.$$

5. Смешанное произведение суммы векторов на два других вектора равно сумме смешанных произведений каждого из векторов-слагаемых на два других вектора

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}$$

6. Скалярный множитель можно выносить за знак смешанного произведения

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc}).$$

Смешанное произведение в координатах

Пусть векторы **a**, **b**, **c** заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\},\ \mathbf{b} = \{b_x; b_y; b_z\},\ \mathbf{c} = \{c_x; c_y; c_z\}.$$

Смешанное произведение **abc** в координатной форме имеет вид

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

смешанное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ***равно***

определителю третьего порядка, строки которого составлены соответственно из координат первого, второго и третьего из перемножаемых векторов.

Необходимое и достаточное условие ***компланарности*** векторов

$$\mathbf{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\},\,\mathbf{b}=\{b_x;\,b_y;\,b_z\},\,\mathbf{c}=\{c_x;\,c_y;\,c_z\}$$

запишется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Кроме того, объем параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**

$$V=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется направляющим отрезком?
2. Что называется вектором?
3. Что называется модулем вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
5. Какие векторы называются равными?
6. Могут ли два вектора, имеющих равные модули, быть не равными? Если да, то чем они могут различаться?
7. Все векторы, имеющие один и тот же модуль, отложены из одной точки O пространства. Где находятся концы этих векторов?
8. Какие операции над векторами называются линейными, и каковы свойства этих операций?
9. Что называется суммой векторов?
10. В чем состоит правило сложения n векторов?
11. Что называется разностью векторов?
12. Как найти разность двух векторов?
13. Что называется базисом на прямой линии, на плоскости и в пространстве?
14. В каком случае векторы называются линейно зависимыми, и в каком – линейно независимыми?
15. Докажите, что линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их координатами в некотором базисе.
16. Какой базис называется ортонормированным?
17. Как определяется, декартова прямоугольная система координат?

18. Как определяются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?
19. Что называется скалярным произведением двух векторов? Какие его свойства совпадают, а какие отличаются от произведения чисел?
20. Каковы геометрические свойства скалярного произведения?
21. Каковы алгебраические свойства скалярного произведения
22. Как выражается скалярное произведение через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
23. Каков геометрический смысл скалярного произведения?
24. Каков физический смысл скалярного произведения?
25. В следующих формулах вместо точек поставьте нужную величину:

а) найти $\cdots = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$,

б) определить $\cdots\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$ или $\cdots\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$,

в) вычислить $\cdots\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$,

г) найти $\cdots = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$, где $\boldsymbol{F}$ – сила, $\boldsymbol{S}$ – путь.

26. Выведите формулу для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.
27. Что называется векторным произведением двух векторов?
28. Каковы геометрические свойства векторного произведения?
29. Каковы алгебраические свойства векторного произведения?
30. Как векторное произведение выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
31. Что называется смешанным произведением трёх векторов?
32. Каковы геометрические свойства смешанного произведения?
33. Каковы алгебраические свойства смешанного произведения?
34. Как смешанное произведение выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?
35. Какому условию должны удовлетворять координаты трёх векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?

Примеры решения задач

Пример 1. Определить векторы **x** и **y** из системы уравнений

$$2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=3\mathbf{a},$$
$$\mathbf{x}-\ \mathbf{y}=2\mathbf{b}.$$

▲ Имеем два линейных векторных уравнения с двумя векторными переменными **x** и **y**. Так как свойства суммы, разности и умножения вектора на число формально совпадают с аналогичными свойствами числовых операций, то для решения векторных уравнений можно пользоваться теми же приёмами, что и при решении уравнений с числовыми величинами.

Умножим второе уравнение исходной системы на (-2) и сложим почленно полученное уравнение с первым:

$$\left\{\begin{array}{l}2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=3\mathbf{a},\\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2\mathbf{b};\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\\ \text{-}2\end{array}\right.^{+}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5\mathbf{y}=3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2\mathbf{b},\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathbf{y}=3/5\cdot\mathbf{a}-4/5\cdot\mathbf{b},\\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2\mathbf{b}.\end{array}\right.$$

Подставив значение **y** во второе уравнение исходной системы, получим

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}=\mathbf{y}+2\mathbf{b}=3/5\cdot\mathbf{a}+6/5\cdot\mathbf{b},\\ \mathbf{y}=3/5\cdot\mathbf{a}-4/5\cdot\mathbf{b}.\end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\mathbf{x}=3/5\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b}),\ \mathbf{y}=1/5\cdot(3\mathbf{a}-4\mathbf{b}).$$ ▼

Пример 2. Даны векторы **a**, **b**, **c** (рис. 1, а). Изобразить на рисунке их линейную комбинацию $-2\mathbf{a}+1/3\cdot\mathbf{b}+4\mathbf{c}$.

▲ Выбираем на плоскости точку *O* и откладываем от неё вектор $-2\mathbf{a}$ (рис. 1, б).

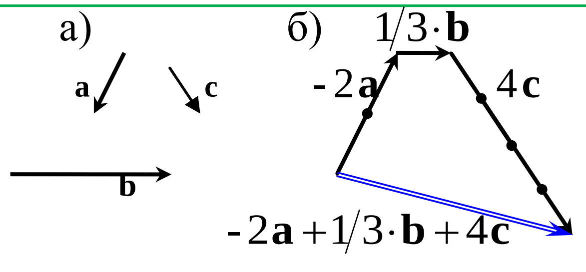


Рис. 1

Затем от ***конца*** вектора $-2\mathbf{a}$ откладываем вектор $1/3\cdot\mathbf{b}$ и, наконец, строим вектор $4\mathbf{c}$, выходящий из ***конца*** вектора $1/3\cdot\mathbf{b}$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O. ▼

Пример 3. Упростить выражение

$$\frac{4\mathbf{a}-2\mathbf{b}+5\mathbf{c}}{2}-\frac{4\mathbf{a}-4\mathbf{b}-3\mathbf{c}}{6}+\frac{2\mathbf{a}-20\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{3}.$$

▲ приводим данное выражение к общему знаменателю, получим

$$\frac{4\mathbf{a}-2\mathbf{b}+5\mathbf{c}}{2}-\frac{4\mathbf{a}-4\mathbf{b}-3\mathbf{c}}{6}+\frac{2\mathbf{a}-20\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{3}=$$

$$=\frac{12\mathbf{a}-6\mathbf{b}+15\mathbf{c}-4\mathbf{a}+4\mathbf{b}+3\mathbf{c}+4\mathbf{a}-40\mathbf{b}+6\mathbf{c}}{6}=$$

$$=\frac{12\mathbf{a}-42\mathbf{b}+24\mathbf{c}}{6}=2\mathbf{a}-7\mathbf{b}+4\mathbf{c}.$$ ▼

Пример 4. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\{\mathbf{i};\mathbf{j};\mathbf{k}\}$ координатами:

$$\mathbf{a}=\{2;-1;8\},\ \mathbf{e}_1=\{1;2;3\},\ \mathbf{e}_2=\{1;-1;-2\},\ \mathbf{e}_3=\{1;-6;0\}$$

Убедиться, что тройка $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ образует базис, и найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе.

▲ Если определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -6 & 0\end{vmatrix},$$

составленный из координат векторов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, не равен нулю, то векторы $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что

$$\Delta=\begin{array}{c}(-1)\\ \to\\ \to\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -6 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -5\\ 0 & -8 & -3\end{vmatrix}=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -8 & -3\end{vmatrix}=-31\neq 0.$$

Таким образом, тройка $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ – базис.

Обозначим координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ через a_x,a_y,a_z. Тогда $\mathbf{a}=\{a_x;a_y;a_z\}=a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3$. Так как по условию

$$\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k},\ \mathbf{e}_1=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k},\ \mathbf{e}_2=\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k},\ \mathbf{e}_3=\mathbf{i}-6\mathbf{j},$$

то из равенства из равенства $\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3$ следует, что

$$2\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k}=a_x\mathbf{i}+2a_x\mathbf{j}+3a_x\mathbf{k}+a_y\mathbf{i}-a_y\mathbf{j}-2a_y\mathbf{k}+a_z\mathbf{i}-6a_z\mathbf{j}=$$

$$=(a_x+a_y+a_z)\mathbf{i}+(2a_x-a_y-6a_z)\mathbf{j}+(3a_x-2a_y)\mathbf{k}.$$

Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных a_x, a_y, a_z

$$\begin{cases} a_x+\ a_y+\ a_z=2,\\ 2a_x-\ a_y-6a_z=-1,\\ 3a_x-2a_y\qquad\ =\ 8.\end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем её

$$\begin{array}{c}(-3)(-2)\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&-1&-6&-1\\3&-2&0&8\end{array}\right)\sim\begin{array}{c} \\ (-5)\\ (3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-3&-8&v5\\0&-5&-3&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{c} \\ \\ 1/31\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&3&8&5\\0&0&31&31\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&3&8&5\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Имеем следующую треугольную систему

$$\begin{cases} a_x+\ a_y+\ a_z=2,\\ \qquad 3a_y+8a_z=5,\\ \qquad\qquad\quad a_z=1.\end{cases}$$

Её решение $a_x=2\vee a_y=-1\vee a_я=1$. Итак,

$$\mathbf{a}=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3=\{2;-1;1\}.\ \blacktriangledown$$

Простейшие операции над векторами

<u>а) Построение вектора</u>

Пример 5. а) Как построить вектор $\mathbf{a}=\{2;-3\}$ в точке $M_0(1;2)$.

б) в пространстве построить вектор $\mathbf{a} = \{-1; 2; 3\}$ в точке $M_0(1;1;1)$.

▲ а) Сначала построить точку $M_0(1; 2)$ (рис. 2).

Принять точку M_0 за начало вектора.

Построить вектор, отложив параллельно осям координаты вектора $x = 2$, $y = -3$.

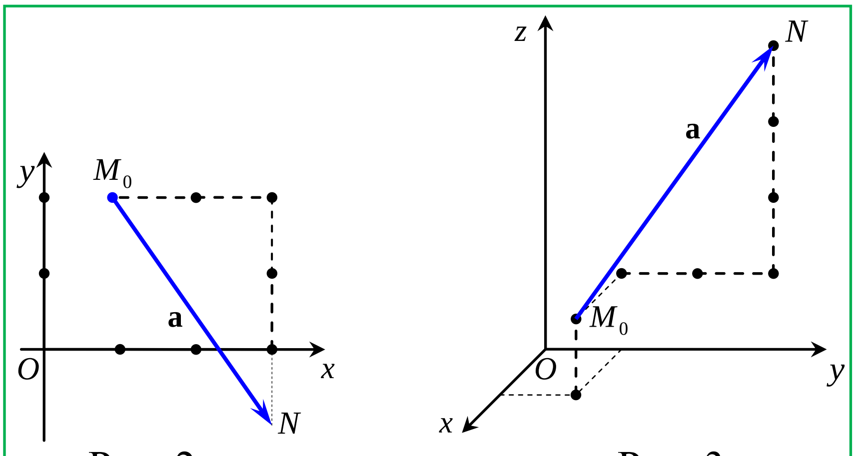


Рис. 2 Рис. 3

б) Аналогично построение смотри на рис. 3. ▼

Разложение вектора по ортам

На плоскости: спроектировать **AB** на оси Ox и Oy, выразить составляющие вектора через их длину и базисные орты **i**, **j** (рис. 4)

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y\mathbf{B}_y = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

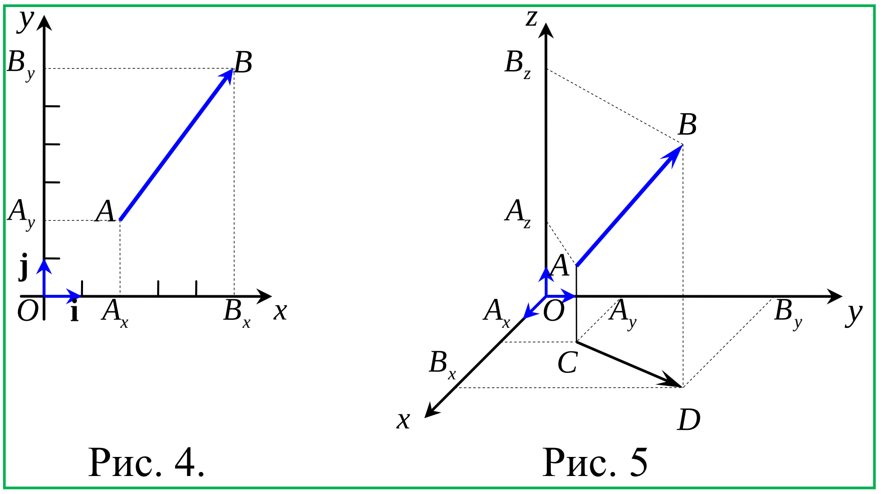


Рис. 4. Рис. 5

В пространстве аналогично, только вектор сначала проецируется на плоскость Oxy и на ось Oz, затем в плоскости Oxy находят составляющие оси Ox и Oy (рис. 5).

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y\mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z\mathbf{B}_z.$$

Определение длины и направляющих косинусов вектора

Пример 6. Дан вектор $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Найти $|\mathbf{a}|$ и направляющие косинусы вектора. Построить вектор.

▲ 1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \{a_x = 2, a_y = 3, a_z = 6\} =$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

2) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{2}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{3}{7}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{6}{7}$.

Правильное определение направляющих косинусов можно проверить по их свойству:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3) $\mathbf{OM} = \mathbf{a}$

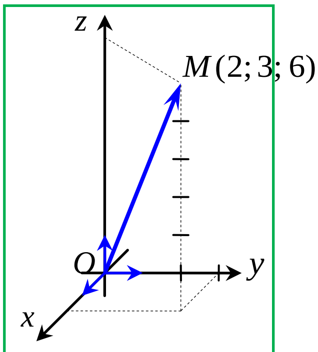


Рис. 6 ▼

Приведение векторов к общему началу

Любое число произвольных векторов можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие начало в общей точке *O* (рис. 7).

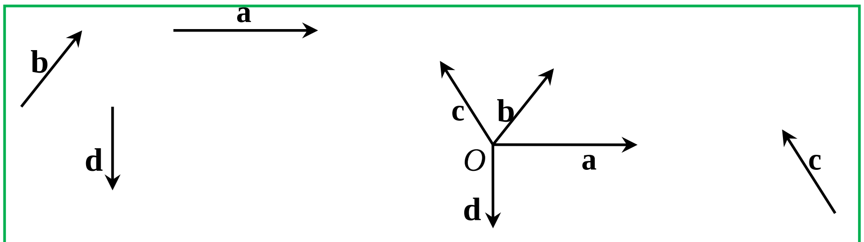


Рис. 7.

Построение векторного многоугольника на данных векторах

производится по правилу: векторы нумеруются в произвольном порядке, затем в ***конец*** первого вектора помещается ***начало*** второго, в ***конец*** второго – ***начало*** третьего и т.д.

Пример 7. На плоскости даны точки $A(0;-2), B(4;2), C(4;-2)$. В начале координат приложены силы **OA**, **OB**, **OC**. Построить их равнодействующую, найти её проекции на оси координат и величину.

▲ 1)

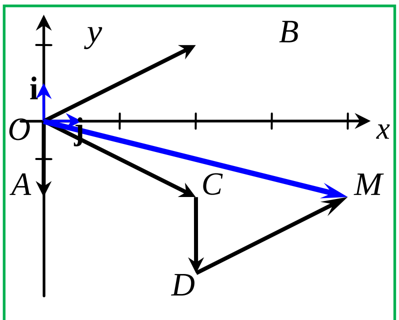


Рис. 8

$$\mathbf{OC}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j},\ \mathbf{CD}=\mathbf{OA}=-2\mathbf{j},\ \mathbf{DM}=\mathbf{OB}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}.$$

2) $\mathbf{OM}=\{x;\ y\}$ – равнодействующая.

3) Многоугольник $OCDMO$ – замкнутый и его проекция на любую ось равна 0:

$$\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{OC}+\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{CD}+\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{DM}+\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{MO}=0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{OC}+\mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{CD}+\mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{DM}+\mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{MO}=0. \qquad (2)$$

$$\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{MO}=-\mathrm{pr}_{Ox}\,\mathbf{OM}=-x;\ \mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{MO}=-\mathrm{pr}_{Oy}\,\mathbf{OM}=-y.$$

Из выражений (1), и 2), помня о том, что проекции вектора на ось – координаты вектора, найдём x и y:

$$(1)\ 4+0+4-x=0,\Rightarrow x=8;\ (2)\ -2-2+2-y=0,\Rightarrow y=-2.$$

Итак,

$$\mathbf{OM}=\{8;-2\};\ |\mathbf{OM}|=\sqrt{8^2+(-2)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}.$$ ▼

Пример 8. Дан вектор $\mathbf{c}=4\mathbf{i}+7\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Найти вектор **d**, ***коллинеарный*** вектору **c** и противоположно с ним направленный, если $|\mathbf{d}|=27$

▲ 1) Векторы ***коллинеарны***,

$$\Rightarrow \frac{c_x}{d_x}=\frac{c_y}{d_y}=\frac{c_z}{d_z}=\lambda. \qquad (1)$$

$\lambda=-|\mathbf{c}|/|\mathbf{d}|$, так как векторы противоположно направлены.

2) $|\mathbf{d}|=27;\ |\mathbf{c}|=\sqrt{4^2+7^2+(-4)^2}=\sqrt{81}=9,\Rightarrow \lambda=-9/27=-1/3.$

3) Из условия ***коллинеарности*** (1), зная координаты вектора

$$\mathbf{c}\,(c_x=4,\ c_y=7,\ c_z=-4),$$

найдем координаты вектора **d**.

$$\frac{c_x}{d_x}=\frac{c_y}{d_y}=\frac{c_z}{d_z}=-\frac{1}{3};\ d_x=-3c_x=-12,\ d_y=-3c_y=-21,\ d_z=-3c_z=12.$$

Итак,

$$\mathbf{d}=-12\mathbf{i}-21\mathbf{j}+12\mathbf{k}.$$ ▼

Разложение вектора на произвольные составляющие

Разложить вектор **a** по двум другим векторам **c** и **b** – значит найти выражение $\mathbf{a}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$, где *m*, *n* – коэффициенты разложения.

Разложение можно проводить по векторам, заданным геометрически и через разложение по ортам.

Геометрическое разложение:

1. Построить данные векторы **a**, **b**, **c**.
2. Из конца разлагаемого вектора **a** провести прямые параллельные данным векторам **b**, **c** и построить на векторе **a**, как на диагонали, параллелограмм.
3. Выразить длины сторон параллелограмма через векторы **b** и **c** и записать $\mathbf{a}=m\mathbf{b}+n\mathbf{c}$.

Пример 9. Даны векторы $\mathbf{OA}=\mathbf{a}, \mathbf{OB}=\mathbf{b}$ и вектор $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ – медиана треугольника *OAB*. Разложить вектор **a** по векторам **b** и **c**.

▲ 1. Построим чертёж.

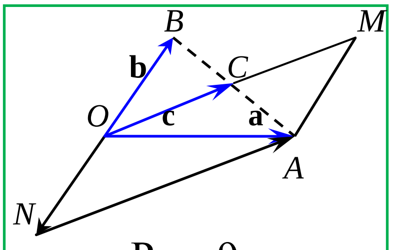


Рис. 9

2. Построим на векторе **a** как на диагонали параллелограмм со сторонами параллельными *OC* и *OB*.

3. Из параллелограмма *ONAMO*:

$$\mathbf{ON}=-\mathbf{AM}=-\mathbf{b},\ \mathbf{NA}=\mathbf{OM}=2\mathbf{c},\Rightarrow$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{ON}+\mathbf{NA}=-\mathbf{b}+2\mathbf{c}=2\mathbf{c}-\mathbf{b}.$$ ▼

Пример 10. В трапеции *OACB* $\mathbf{BC}=1/3\cdot\mathbf{OA}$ и $\mathbf{BC}\parallel\mathbf{OA}$. Разложить вектор $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ по векторам $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ и $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$.

▲ 1. Построим чертёж.

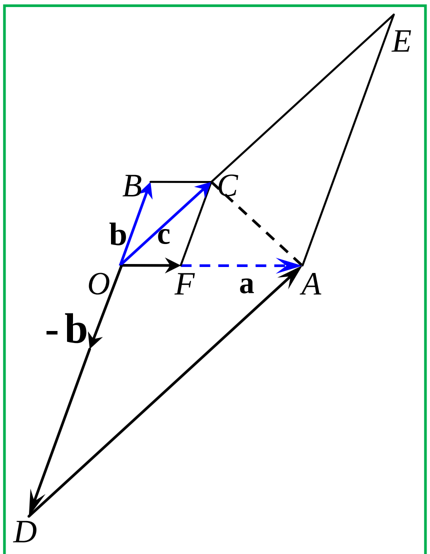


Рис. 10

$$\mathbf{BC} = 1/3\,\mathbf{OA};\ \mathbf{OA} = \mathbf{a};\ \mathbf{OB} = \mathbf{b};\ \mathbf{OC} = \mathbf{c}.$$

2. На векторе **a**, как на диагонали, построим параллелограмм со сторонами параллельными векторам, **b** и **c**.

3. $\mathbf{OA} = \mathbf{OD} + \mathbf{DA}$. Найдём **OD** и **DA** из подобия треугольников.

$$\Delta OBC \sim \Delta DOA, \Rightarrow \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OC}} = \frac{OA}{DA};\ \underline{\underline{DA}} = \frac{OA \cdot OC}{BC} = \left\{ \frac{OA}{BC} = 3 \right\} = \underline{\underline{3OC}};$$

$$\mathbf{DA} = 3\mathbf{c}.$$

$$\Delta OEA \sim \Delta OCF, \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{CF}{OF};\ \underline{\underline{AE}} = \frac{OA \cdot CA}{OF} = \left\{ \frac{OA}{OF} = 3 \right\} = \underline{\underline{3CF}};$$

$$\mathbf{AE} = 3\mathbf{b},\ \mathbf{OD} = -3\mathbf{b}.$$

Итак,

$$\mathbf{OD} = -3\mathbf{b},\ \mathbf{DA} = 3\mathbf{c}, \Rightarrow \mathbf{OA} = \mathbf{OD} + \mathbf{DA} = 3\mathbf{c} - 3\mathbf{b}.$$

$\mathbf{a} = 3\mathbf{c} - 3\mathbf{b}$. ▼

<u>Аналитический способ разложения</u>.

Векторы заданы своими разложениями по ортам.

1. Записать в общем виде разложение

$$\mathbf{a} = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}, \tag{1}$$

где m, n – коэффициенты разложения.

2. Подставить в разложение (1) разложения **b** и **c** по ортам.

3. Найти коэффициенты m и n из условия, что два вектора равны тогда, когда равны их координаты, т.е. коэффициенты перед **i**, **j**.

Пример 11. Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Найти разложение **b** по векторам **a** и **c**.

▲ 1. $\mathbf{b} = m\mathbf{a} + n\mathbf{c}$.

2. $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = m(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + n(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

3. $\begin{cases} 3 = 2m + 2n, \\ 4 = 3m + 2n, \end{cases}\Big| -1 \; + \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ 2m + 2n = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ n = 1/2. \end{cases}$

$\mathbf{b} = \mathbf{a} + 1/2 \cdot \mathbf{c}$. ▼

Скалярное произведение векторов

<u>Научиться раскрывать скобки в выражениях</u>

Пример 12. Раскрыть скобки в выражении

$$(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})^2.$$

▲ $$(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})^2 =$$
$$= 2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{j}^2 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} - 2\mathbf{k}^2 + \mathbf{i}^2 - 4\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + 4\mathbf{k}^2 =$$
$$= 2 \cdot 0 \underline{\underline{-1}} + 0 - \underline{2 \cdot 1} \underline{\underline{+1}} - 4 \cdot 0 + \underline{4 \cdot 1} = 2.$$ ▼

Пример 13. Вычислить $(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$, если **m** и **n** – единичные векторы и $(\mathbf{m}, \hat{\ } \mathbf{n}) = \pi/6$.

▲ $(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2 = \mathbf{m}^2 + 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n}^2 = \left\{ \mathbf{m}^2 = |\mathbf{m}|^2 = 1, \mathbf{n}^2 = |\mathbf{n}|^2 = 1 \right\} =$

$= 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \pi/6 + 1 = 2 + \sqrt{3}$. ▼

Пример 14. Даны точки

$$A(3; 3; -2), B(0; -3; 4), C(0; -3; 0) \text{ и } D(0; 2; -4).$$

Найти $\text{pr}_{\mathbf{AB}}\, \mathbf{CD}$.

▲ $$\mathbf{AB} = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{CD} = 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

$$\text{pr}_{\mathbf{AB}}\, \mathbf{CD} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{-3 \cdot 0 + (-6) \cdot 5 + 6 \cdot (-4)}{\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2}} = -\frac{54}{9} = -6.$$ ▼

<u>Основные задачи на скалярное произведение</u>

а) Длина вектора

<u>Как найти длину вектора, если</u> $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ <u>или</u> $\mathbf{a} = k\mathbf{m} + l\mathbf{n}$?

Пример 15. Найти длину вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

▲ Воспользуемся готовой формулой

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_я^2},$$

тогда $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$. ▼

Пример 16. Дано $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}, |\mathbf{m}| = 2, |\mathbf{n}| = 3, (\mathbf{m},\hat{\ }\mathbf{n}) = \pi/3$.

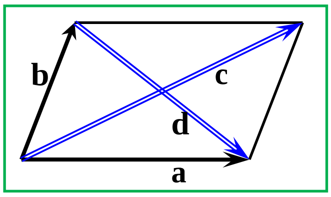
▲ $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{(2\mathbf{m} + 3\mathbf{n})^2} = \sqrt{4\mathbf{m}^2 + 12\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + 9\mathbf{n}^2} =$

$= \{\mathbf{m}^2 = |\mathbf{m}|^2 = 2^2 = 4, \mathbf{n}^2 = |\mathbf{n}|^2 = 3^2 = 9, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 2\cdot 3\cdot\cos\pi/3 = 3\} =$

$= \sqrt{4\cdot 4 + 12\cdot 3 + 9\cdot 9} = \sqrt{133}$. ▼

Пример 17. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ – единичные векторы с углом между ними $(\mathbf{m},\hat{\ }\mathbf{n}) = \pi/3$.

▲ Построим чертёж.



1. Векторы – диагонали параллелограмма выражаются через векторы – стороны следующим образом

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

2. Выразим **c** и **d** через **m** и **n**

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n} + (\mathbf{m} - 2\mathbf{n}) = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}, \mathbf{d} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n} - (\mathbf{m} - 2\mathbf{n}) = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}.$$

3. Найдем

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c}^2}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d}^2}$$

Извлекать корень можно только после вычисления скалярного квадрата вектора.

$|\mathbf{c}| = \sqrt{(3\mathbf{m} - \mathbf{n})^2} = \sqrt{9\mathbf{m}^2 - 6\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}^2} =$

$= \{\mathbf{m}^2 = |\mathbf{m}|^2 = 1, \mathbf{n}^2 = |\mathbf{n}|^2 = 1, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 1\cdot 1\cdot\cos\pi/3 = 1/2\} =$

$= \sqrt{9\cdot 1 - 6\cdot 1/2 + 1} = \sqrt{7}$.

$|\mathbf{d}| = \sqrt{(\mathbf{m} + 3\mathbf{n})^2} = \sqrt{\mathbf{m}^2 + 6\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + 9\mathbf{n}^2} = \sqrt{1 + 6\cdot 1/2 + 9\cdot 1} = \sqrt{13}$. ▼

б) Угол между векторами

Пример 18. Определить угол между векторами

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

▲ Воспользуемся формулой

$$\cos(\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Имеем

$$\cos(\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{b}) = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{b}) = \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4. \ ▼$$

Пример 19. Даны вершины четырёхугольника

$$A(1;1;-4),\ B(-5;3;-5),\ C(-3;1;2),\ D(4;0;1).$$

Доказать, что его диагонали **AC** и **BD** взаимно перпендикулярны.

▲ Найдём векторы **AC** и **BD** по координатам их начала и конца.

$$\mathbf{AC} = (-3-1)\mathbf{i} + (1-1)\mathbf{j} + (2-(-4))\mathbf{k} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k},$$

$$\mathbf{BD} = (4-(-5))\mathbf{i} + (0-3)\mathbf{j} + (1-(-5))\mathbf{k} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Найдём

$$\mathbf{AC}\cdot\mathbf{BD} = (-4)\cdot 9 + 0\cdot(-3) + 6\cdot 6 = 0, \Rightarrow \mathbf{AC}\perp\mathbf{BD}. \ ▼$$

Пример 20. Дан вектор $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ – единичные векторы и $(\mathbf{m},\widehat{\ }\mathbf{n}) = 2\pi/3$, Найти $\cos(\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{m})$.

▲ В случае, когда координаты данных векторов неизвестны, следует поступить так:

$$\cos(\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{m}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{m}|} = \frac{(2\mathbf{m}-\mathbf{n})\cdot\mathbf{m}}{\sqrt{(2\mathbf{m}-\mathbf{n})^2}\cdot 1} = \frac{2\mathbf{m}^2 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\sqrt{4\mathbf{m}^2 - 4\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}^2}} =$$

$$= \left\{\mathbf{m}^2 = |\mathbf{m}|^2 = 1,\ \mathbf{n}^2 = |\mathbf{n}|^2 = 1,\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = 1\cdot 1\cdot\cos 2\pi/3 = -1/2\right\} =$$

$$= \frac{2\cdot 1 - (-1/2)}{\sqrt{4\cdot 1 - 4\cdot(-1/2) + 1}} = \frac{5/2}{\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}},\ (\mathbf{a},\widehat{\ }\mathbf{m}) = \arccos 5/2\sqrt{7}. \ ▼$$

Пример 21. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/3$; зная, что $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 1$, вычислить угол между векторами $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

▲ Так как координат векторов **p** и **q** нет, то

$$\cos(\mathbf{p},\hat{\ }\mathbf{q})=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|}=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{\sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2}\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}}=$$

$$=\frac{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}{\sqrt{\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2}\sqrt{\mathbf{a}^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2}}=$$

$$=\left\{\mathbf{a}^2=4,\mathbf{b}^2=1,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\cdot1\cdot\cos\pi/3=1\right\}=$$

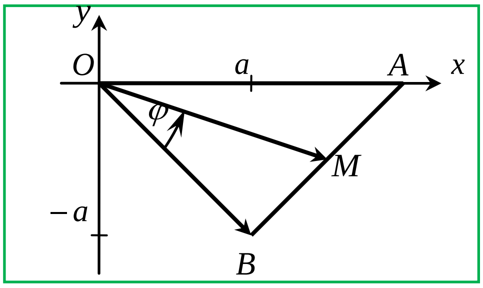
$$=\frac{4-1}{\sqrt{4+2\cdot1+1}\sqrt{4-2\cdot1+1}}=\frac{3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{7}}.\ (\mathbf{p},\hat{\ }\mathbf{q})=\arccos\sqrt{3/7}.$$ ▼

Пример 22. На плоскости дан треугольник с вершинами

$$O(0,0),\ A(2a,0),\ B(a,-a).$$

Найти угол между стороной OB и медианой OM этого треугольника.

▲ Построим чертёж.



Найдём координаты точки M:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2a+a}{2}=\frac{3}{2}a,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0-a}{2}=-\frac{a}{2},\ M\left(\frac{3}{2}a;-\frac{1}{2}a\right).$$

$$\mathbf{OM}=\{3/2a;-1/2\cdot a\};\ \mathbf{OB}=\{a;-a\}.$$

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{OM}\cdot\mathbf{OB}}{|\mathbf{OM}|\cdot|\mathbf{OB}|}=\frac{3/2\cdot a\cdot a+(-1/2\cdot a)\cdot(-a)}{\sqrt{9/4\cdot a^2+1/4\cdot a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{2a^2}{\sqrt{5/2}\cdot a\cdot\sqrt{2}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\varphi=\arccos 2/\sqrt{5}.$$ ▲

Пример 23. Дано $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Найти:

1) длину векторов **a** и **b**;

2) $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ и $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$,

3) угол между векторами **a** и **b**.

▲ Координаты векторов **a** и **b** даны, следовательно, по готовым формулам находим:

1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (\text{-}3)^2} = \sqrt{29}, \ |\mathbf{b}| = \sqrt{6^2 + (\text{-}4)^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

2) $\operatorname{pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \dfrac{2\cdot 6 + 4\cdot(\text{-}4) + (\text{-}3)\cdot 2}{2\sqrt{14}} = \dfrac{\text{-}10}{2\sqrt{14}} = \text{-}\dfrac{5}{\sqrt{14}}$,

$\operatorname{pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\text{-}10}{\sqrt{29}}$.

3) $\cos(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \dfrac{\text{-}10}{\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{14}} = \text{-}\dfrac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}$,

$(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b}) = \arccos\left(\text{-}\dfrac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}\right)$. ▼

Векторное произведение

Пример 24. Раскрыть скобки и упростить выражение, пользуясь свойствами векторного произведения.

а) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\times(\mathbf{i}+\mathbf{k}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

б) $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) + (\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

▲ а) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\times(\mathbf{i}+\mathbf{k}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) =$

$= \underline{\underline{\mathbf{i}\times\mathbf{j}}} + \underline{\mathbf{i}\times\mathbf{k}} - \underline{\underline{\mathbf{j}\times\mathbf{i}}} - \mathbf{j}\times\mathbf{k} + \underline{\mathbf{k}\times\mathbf{i}} + \mathbf{k}\times\mathbf{j} + \mathbf{k}\times\mathbf{k} =$

$= \{\mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0, \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \text{-}\mathbf{i}\times\mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{i} = \text{-}\mathbf{i}\times\mathbf{j}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{k}\times\mathbf{j}\} =$

$= 2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{j} = 2\mathbf{k} - 2\mathbf{i}$.

При умножении разноимённых ортов пользуйтесь циклической схемой.

б) $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) + (\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) =$

$= 2\underline{\mathbf{a}\times\mathbf{c}} + \underline{\underline{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}} - 2\mathbf{a}\times\mathbf{a} - \mathbf{b}\times\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{b} + \underline{\mathbf{c}\times\mathbf{a}} + \underline{\underline{\mathbf{c}\times\mathbf{b}}} =$

$= \{\mathbf{c}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{o}, \mathbf{b}\times\mathbf{b} = \mathbf{o}\} =$

$= 2\mathbf{a}\times\mathbf{c} - \mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$. ▼

Все основные задачи на векторное произведение связаны с геометрическим смыслом <u>модуля</u> векторного произведения.

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b})$ – площадь параллелограмма – в этом и состоит геометрический смысл модуля векторного произведения.

Вычисление площадей с помощью векторного произведения

***При вычислении площадей всегда и обязательно сначала найдите* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, *затем* $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ –**

это ***две*** операции и объединять их нельзя!

Пример 25. Вычислить площадь, высоту параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \mathbf{b}=3\mathbf{i}-4\mathbf{k}$ и синус угла между векторами.

▲ 1. Найдём векторное произведение через векторный определитель:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}+\mathbf{j}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}+\mathbf{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=8\mathbf{i}+10\mathbf{j}+6\mathbf{k}.$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{8^2+10^2+6^2}=2\sqrt{50}=10\sqrt{2}.\ S_П=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=10\sqrt{2}.$$

3. Найдём высоту из условия:

$$h=\frac{S_П}{|\mathbf{a}|}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

4. Определим синус угла между данными векторами

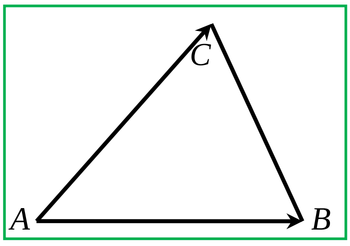
$$\sin(\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{b})=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{2\sqrt{4^2+5^2+3^2}}{3\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\cdot 5}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ ▼

Пример 26. Вычислить площадь треугольника с вершинами

$$A(-1;0;2), B(1;-2;5), C(3;0;-4).$$

▲ Построим чертёж.

$$S_\Delta=|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|.$$



1. Найдём координаты векторов **AB** и **AC**:

$$\mathbf{AB}=\{1-(-1);\,-2-0;\,5-2\}=\{2;\,-2;\,3\},$$

$$\mathbf{AC}=\{3-(-1);\,0-0;\,-4-2\}=\{4;\,0;\,-6\}.$$

2. Вычислим векторное произведение

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=12\mathbf{i}+24\mathbf{j}+8\mathbf{k}=4(3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}).$$

3. $S_{\Delta}=1/2\cdot|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|=1/2\cdot 4\sqrt{3^2+6^2+2^2}=2\sqrt{49}$. ▼

Пример 27. Векторы **a** и **b** составляют угол $\pi/4$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{m}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ и $\mathbf{n}=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=5$.

▲ $S_{\Delta}=1/2\cdot|\mathbf{m}\times\mathbf{n}|$.

1. $\mathbf{m}\times\mathbf{n}=(\mathbf{a}-2\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})=\mathbf{a}\times 3\mathbf{a}-6\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times 2\mathbf{b}-2\mathbf{b}\times 2\mathbf{b}=$

$=8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

2. $S_{\Delta}=1/2\cdot 8\cdot|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=4|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\varphi=4\cdot 5\cdot 5\cdot\sin\pi/4=50\sqrt{2}$. ▼

Смешанное произведение векторов

С помощью смешанного произведения можно находить объём параллелепипеда или пирамиды (как $1/6$ часть объёма параллелепипеда) и проверять ***компланарность*** векторов по условию $\mathbf{abc}=0$.

Пример 28. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$. Какую тройку образуют векторы **a**, **b**, **c**?

▲ 1. Найдём смешанное произведение

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3(-15-2)=-51.$$

2. Найдём объём параллелепипеда, построенного на данных векторах $V=|\mathbf{abc}|=|-51|=51$.

3. Так как смешанное произведение отрицательно, то тройка **a**, **b**, **c** левая. ▼

Пример 29. Показать, что точки $A(3;-4;1)$, $B(2;-3;7)$, $C(1;-4;3)$ и $D(4;-3;5)$ лежат в одной плоскости.

▲ 1. Найти координаты $\mathbf{a}=\mathbf{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{AC}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{AD}$ по координатам начала и конца:

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{2-3;-3-(-4);7-1\}=\{-1;1;6\},$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{1-3;-4-(-4);3-1\}=\{-2;0;2\},$$

$$\mathbf{c}=\mathbf{AD}=\{4-3;-3-(-4);5-1\}=\{1;1;4\}.$$

2. Вычислить

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}-1&1&6\\-2&0&2\\1&1&4\end{vmatrix}(-2)=\begin{vmatrix}-1&1&6\\0&-2&-10\\0&2&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&6\\0&-2&-10\\0&0&0\end{vmatrix}=0.$$

Поскольку $\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}\cdot\mathbf{AD}=0$, то точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. ▼

Пример 30. Даны вершины пирамиды:

$$A(0;-2;5),\ B(6;6;0),\ C(3;-3;6),\ D(2;-1;3).$$

Найти её объём и длину его высоты, опущенной из вершины C.

▲ 1. Найдём векторы-рёбра по координатам вершин:

$$\mathbf{a}=\mathbf{AB}=\{6;8;-5\},\ \mathbf{b}=\mathbf{AC}=\{3;-1;1\},\ \mathbf{c}=\mathbf{AD}=\{2;1;-2\}.$$

2. Найдём смешанное произведение и объём пирамиды:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}6&8&-5\\3&-1&1\\2&1&-2\end{vmatrix}(5)(2)=\begin{vmatrix}21&3&0\\3&-1&1\\8&-1&0\end{vmatrix}=1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}21&3\\8&-1\end{vmatrix}=45.$$

$$V_{\text{пир}}=1/6\cdot|\mathbf{abc}|=1/6\cdot 45=15/2.$$

3. Искомую величину h определим из формулы $V_{\text{пир}}=1/3\cdot Sh$, где S – площадь основания. Определим площадь S

$$S=1/2\cdot|\mathbf{DA}\times\mathbf{DB}|,$$

где $\mathbf{DA}=\{-2;-1;2\}$, $\mathbf{DB}=\{4;7;-3\}$.

$$\mathbf{DA}\times\mathbf{DB}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&-1&2\\4&7&-3\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+2\mathbf{j}-10\mathbf{k},$$

$$S = 1/2 \cdot |\mathbf{DA} \times \mathbf{DB}| = 1/2 \cdot \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = 1/2 \cdot \sqrt{225} = 15/2.$$

Подставляя в формулу $V_{пир} = 1/3 \cdot Sh$ значения $V_{пир} = 15/2$ и $S = 15/2$, получим $h = 3$. ▼

Пример 31. Показать, что векторы

$$\mathbf{a} = \{1; 2; -2\}, \mathbf{b} = \{1; -2; 1\}, \mathbf{c} = \{5; -2; -1\}$$

компланарны и найти линейную зависимость между ними.

▲ Найдём смешанное произведение данных векторов:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, выполнено условие ***компланарности*** $\mathbf{abc} = 0$. Это и означает, что векторы **a**, **b**, **c** ***компланарны***.

Если векторы ***компланарны***, то они линейно зависимы. Пусть $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, т.е.

$$5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} = m(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + n(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\begin{cases} 5 = m + n, \\ -2 = 2m - 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 5, \\ m - n = -1 \end{cases} \Big| + \Rightarrow \Big| \begin{matrix} 2m = 4, \\ n = m + 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} m = 2, \\ n = 3, \end{cases}$$

то есть $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$. ▼

Пример 32. Дана пирамида с вершинами

$$A(1; 2; 3), B(-2; 4; 1), C(7; 6; 3), D(4; -3; -1).$$

Найти: а) длину ребра AB; б) площадь грани ABC; в) угол между рёбрами AD и AC; г) объём пирамиды;

▲ а) $\mathbf{AB} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, |\mathbf{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$.

б) $S_{ABC} = 1/2 \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$; $\mathbf{AC} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$;

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 24\mathbf{k} = 4(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k});$$

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot 4\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{49} = 14.$$

в) $\cos(\mathbf{AD}, \hat{\ } \mathbf{AC}) = \dfrac{\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AC}}{|\mathbf{AD}| \cdot |\mathbf{AC}|}$; $\mathbf{AD} = \{3; -5; -4\}$, $\mathbf{AC} = \{6; 4; 0\}$;

$$\cos(\mathbf{AD},\widehat{\ }\mathbf{AC})=\frac{18-20}{\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{-2}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{52}}=-\frac{1}{5\sqrt{26}};$$

$$(\mathbf{AD},\widehat{\ }\mathbf{AC})=\arccos\left(-1/5\sqrt{26}\right).$$

$$\text{г) } \mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}\cdot\mathbf{AD}=\begin{matrix}(2)\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 8 & -4\\ 0 & -3 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=(-4)(-3)\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (2)\end{matrix}=12\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=12(-15)=-180;$$

$$V_{\text{пир}}=1/6\cdot|\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}\cdot\mathbf{AD}|=1/6\cdot|-180|=30.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Два луча направлены противоположно третьему. Что можно сказать об этих лучах? ***Ответ***: Сонаправлены.

2. У каких фигур (треугольник, параллелограмм, трапеция) стороны задают сонаправленные и противоположно направленные отрезки? ***Ответ***: Параллелограмм и трапеция.

3. Известно, что $[AB)\uparrow\uparrow[MN)$ и $[CD)\uparrow\downarrow[MN)$. Каково взаимное расположение лучей $[AB)$ и $[CD)$?

Ответ: Лучи противоположно направлены.

4. Сколько различных направлений задают стороны треугольника, параллелограмма, правильного шестиугольника? ***Ответ***: 6, 4, 6.

5. Сколько векторов задают всевозможные упорядоченные пары точек, составленные из вершин: треугольника, произвольного четырёхугольника, параллелограмма, трапеции? ***Ответ***: 6, 8, 4, 8.

6. Дано $(AB)\parallel(CD)\parallel(KM)$, $|AB|=|CD|=|KM|$. Следует ли из этого, что $\mathbf{AB}=\mathbf{CD}=\mathbf{KM}$? ***Ответ***: Нет.

7. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Сколько различных векторов задают её вершины. ***Ответ***: 8.

8. Длины векторов **a** и **b** заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора суммы была: а) наибольшей; б) наименьшей?

Ответ: а) сонаправить; б) противоположно направить.

9. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Докажите, что

$$\mathbf{AD}+\mathbf{AD}=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}.$$

10. Может ли длина вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ быть меньше, чем длина каждого из векторов **a** и **b**? ***Ответ***: Да.

11. Определите неизвестный вектор **x** из равенства $\mathbf{a}-\mathbf{x}=\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

Ответ $\mathbf{x}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

12. В каком случае выполняется равенство: а) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$;

б) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$; в) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{b}|-|\mathbf{a}|$?

Ответ: а) $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b},\ |\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$; в) $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b},\ |\mathbf{a}|<|\mathbf{b}|$.

13. При каких значениях λ длина вектора $\lambda\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\neq\mathbf{o})$: а) равна длине вектора **a**; б) больше **a**; в) меньше **a**?

Ответ: а) $|\lambda|=1$; б) $|\lambda|>1$; в) $|\lambda|<1$.

14. Дано: **a** и **b** коллинеарны $|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$.

Какую длину и направление имеет вектор: а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$?

Ответ: а) $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, и $|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$;

б) $|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, и $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, если $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$.

15. По данным векторам **a** и **b** построить следующие их линейные комбинации: а) $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}-3\mathbf{b}$; в) $1/3\cdot\mathbf{a}+1/2\cdot\mathbf{b}$; г) $-3\mathbf{a}-1/2\cdot\mathbf{b}$.

16. Векторы $\mathbf{AB}=\mathbf{c},\mathbf{BC}=\mathbf{a},\mathbf{CA}=\mathbf{b}$ служат сторонами треугольника *ABC*. Выразить через векторы **a**, **b**, **c** векторы $\mathbf{AM},\mathbf{BN},\mathbf{CP}$, совпадающие с медианами треугольника *ABC*.

Ответ $\mathbf{AM}=1/2\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}$ или $\mathbf{AM}=1/2\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$,

$\mathbf{BN}=\mathbf{a}+1/2\cdot\mathbf{b}$ или $\mathbf{BN}=1/2\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})$,

$\mathbf{CP}=\mathbf{b}+1/2\cdot\mathbf{c}$ или $\mathbf{CP}=1/2\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

17. В треугольной пирамиде *SABC* известны векторы

$$\mathbf{SA}=\mathbf{a},\mathbf{SB}=\mathbf{b},\mathbf{SC}=\mathbf{c}.$$

Найти вектор **SO**, если точка *O* является центром масс треугольника *ABC*.
Указание. Центр масс треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, и эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1 (считая от вершины). ***Ответ*** $\mathbf{SO}=1/3\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

18. Дана прямоугольная трапеция *ABCD*, длины оснований *AD* и *BC* которой соответственно равны 4 и 2, а угол *D* равен $\pi/4$.

Найти проекции векторов **AD**, **AB**, **BC**, **AC** на ось ℓ, определяемую вектором **CD**.

Ответ $\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AD} = 2\sqrt{2},\ \mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB} = -\sqrt{2},\ \mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{BC} = \sqrt{2},\ \mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AC} = 0$.

19. Вектор **a** составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы $\alpha = \pi/3,\ \beta = 2\pi/3$. Вычислить его координаты, если $|\mathbf{a}| = 2$.

Ответ $\mathbf{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$ или $\mathbf{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$.

20. Даны векторы $\mathbf{a} = \{3; -2; 6\}$ и $\mathbf{b} = \{-2; 1; 0\}$. Найти координаты векторов $2\mathbf{a} - 1/3\cdot\mathbf{b};\ 1/3\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b};\ 2\mathbf{a} + 3$.

Ответ $\{20/3; -13/3; 12\}; \{3; -5/3; 2\}; \{0; -1; 12\}$.

21. Найти координаты единичного вектора **e**, направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\mathbf{a} = \{2; -3; 6\}$ и $\mathbf{b} = \{-1; 2; -2\}$.

Ответ $\mathbf{e} = \left\{-1/\sqrt{42};\ 5/\sqrt{42};\ 4/\sqrt{42}\right\}$.

22. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{3; -5; 8\}$ и $\mathbf{b} = \{-1; 1; -4\}$. ***Ответ*** $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 6,\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 14$.

23. Векторы $\mathbf{AB} = \{2; 6; -4\}$ и $\mathbf{AC} = \{4; 2; -2\}$ определяют стороны треугольника *ABC*. Найти длину вектора **CD**, совпадающего с медианой, проведённой из вершины *C*. ***Ответ*** $|\mathbf{CD}| = \sqrt{10}$.

24. Найти координаты вектора **c**, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = \{-3; 0; 4\}$ и $\mathbf{b} = \{5; 2; 14\}$.

Ответ $\mathbf{c} = \lambda\{-2; 1; 13\},\ \lambda > 0$.

25. В некотором базисе векторы заданы координатами:

$$\mathbf{a} = \{1; 1; 2\},\ \mathbf{e}_1 = \{2; 2; -1\},\ \mathbf{e}_2 = \{0; 4; 8\},\ \mathbf{e}_3 = \{-1; -1; 3\}.$$

Убедиться, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют базис, и найти в нём координаты вектора **a**. ***Ответ*** $\mathbf{a} = \{1; 0; 1\}$.

26. Что можно сказать о расположении векторов **a** и **b**, если их скалярное произведение: а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю? ***Ответ***: а) $0 < (\mathbf{a}, \widehat{\ \mathbf{b}}) < \pi/2$; б) $\pi/2 < (\mathbf{a}, \widehat{\ \mathbf{b}}) < \pi$; в) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

27. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 8,\ |\mathbf{b}| = 5$ и $(\mathbf{a}, \widehat{\ \mathbf{b}}) = \pi/3$. ***Ответ***: 20.

28. При каком расположении векторов **a** и **b** справедливо соотношение: а) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$; б) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$. ***Ответ***: а) $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$; б) $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

29. Дан равносторонний треугольник *ABC*, длина стороны которого равна 1. Полагая $\mathbf{BC} \in \mathbf{a}$, $\mathbf{CA} \in \mathbf{b}$ и $\mathbf{AB} \in \mathbf{c}$, вычислите выражение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. ***Ответ*** $-3/2$.

30. Какому условию должны удовлетворять векторы **a** и **b**, чтобы имело место равенство $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. ***Ответ*** $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

31. **a** и **b** – единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислите скалярное произведение $(3\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{b}-2\mathbf{a})$. ***Ответ***: -8.

32. Векторы $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ и $5\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы **a** и **b**. ***Ответ*** $\pi/3$.

33. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

34. Что можно сказать о координатах вектора **c** в разложении по векторам **a** и **b**, если вектор **c**: а) ***коллинеарен*** вектору **a**; б) ***коллинеарен*** вектору **b**; в) противоположен вектору **b**?

35. Дан ромб *ABCD*, причем $|\mathbf{AB}| = 5$ и $B\hat{A}D = \pi/3$. В плоскости ромба выбран базис $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}\}$ такой, что $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$ и $\mathbf{AD} \in \mathbf{b}$. Найдите в этом базисе координаты векторов, представленных ***направленными отрезками*** $\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD}, \mathbf{DA}, \mathbf{AC}, \mathbf{BD}$.

Ответ: (5; 0), (0; 5), (-5; 0), (0; -5), (5; 5), (-5; 5).

36. Базисные векторы **a** и **b**, длины которых соответственно равны 2 и 3, образуют угол, равный $2\pi/3$. Вектор **x** образует с векторами **a** и **b** углы, соответственно равные $\pi/6$ и $\pi/2$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}\}$, если $|\mathbf{x}| = 1$. ***Ответ*** $\left(\sqrt{3}/9; \sqrt{3}/3\right)$.

37. Вектор **a** образует с осью *Ox* угол α и имеет длину $|\mathbf{a}|$. Определите координаты вектора **a**, если, а) $\alpha = 0, |\mathbf{a}| = 3$: б) $\alpha = \pi/2, |\mathbf{a}| = 2$; в) $\alpha = \pi/3, |\mathbf{a}| = 2$; г) $\alpha = -2\pi/3, |\mathbf{a}| = 12$.

Ответ: а) $\{3; 0\}$; б) $\{0; 2\}$; в) $\{1; \sqrt{3}\}$; г) $\{-6; 6\sqrt{3}\}$.

38. Вычислите *m* и *n*, если: а) $3\mathbf{i}+5\mathbf{j} = m\mathbf{i}+(2n+1)\mathbf{j}$;
б) $(m+n-1)\mathbf{i} = (2m-n)\mathbf{j}$; в) $(2m-n-1)\mathbf{i}-(3m+n+10)\mathbf{j} = \mathbf{o}$;
г) $m\mathbf{i}+n\mathbf{j} = (n+1)\mathbf{i}-(m-1)\mathbf{j}$.

Ответ: а) $m = 3, n = 2$; б) $m = 1/3, n = 2/3$; в) $m = -9/5, n = -77/5$;
г) $m = 1, n = 0$.

39. Даны две вершины $A(2; -3; 5)$, $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма *ABCD*

и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.

Ответ $C(6;1;19), D(9;-5;12)$.

40. Векторы **a** и **b** образуют угол $\varphi = 2\pi/3$, и $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: $\mathbf{a}^2; \mathbf{b}^2; (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2; (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2; (3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$. ***Ответ***: 9; 16; 13; 37; -61.

41. Даны векторы $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}$, для которых

$$|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 4, (\mathbf{a}, \widehat{\ }\ \mathbf{b}) = \pi/3.$$

Вычислить угол φ между медианой **OM** и стороной **OA** треугольника *AOB*. ***Ответ*** $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}, \varphi \approx 41^\circ$.

42. Даны векторы $\mathbf{a} = \{4;-2;-4\}, \mathbf{b} = \{6;-3;2\}$. Вычислить: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}; \mathbf{a}^2; \mathbf{b}^2; (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2; (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2; (2\mathbf{a}-3\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

Ответ: 22; 36; 49; 129; 41; -200.

42. Даны вершины треугольника *ABC*

$$A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1).$$

Вычислить внешний угол при вершине *B*. ***Ответ*** $3\pi/4$.

43. Даны вершины четырёхугольника

$$A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1), D(-5;-5;3).$$

Вычислить угол φ между его диагоналями. ***Ответ*** $\pi/2$.

44. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны? ***Ответ*** $\alpha = -6$.

45. Найти координаты вектора **b**, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = \{2;1;-1\}$, при условии $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$. ***Ответ*** $\mathbf{b} = \{1; 1/2; -1/2\}$.

46. Векторы **a** и **b** взаимно перпендикулярны $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$. Вычислить $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|; |(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})|; |(3\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b})|$. ***Ответ***: 12; 24; 60.

47. Даны векторы $\mathbf{a} = \{3;-1;-2\}, \mathbf{b} = \{1;2;-1\}$. Найти координаты векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}; (2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{b}; (2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

Ответ $\{5;1;7\};\{10;2;14\};\{20;4;28\}$.

48. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известно, что: $A(1;2;0), B(3;0;3), C(5;2;6)$. ***Ответ*** $2\sqrt{13}$.

49. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4), B(0;3;7), C(0;0;6), S(4;3;5)$. Вычислить её объём *V* и высоту *h*, опущенную на грань *ACS*.

Ответ $V = 2, h = 2/\sqrt{3}$.

50. Лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости? ***Ответ***: лежат.

51. ***Компланарны*** ли следующие векторы:

а) $\mathbf{a} = \{2; 3; 1\}, \mathbf{b} = \{1; -1; 3\}, \mathbf{c} = \{-1; 9; -11\}$;

б) $\mathbf{a} = \{3; -2; 1\}, \mathbf{b} = \{2; 1; 2\}, \mathbf{c} = \{3; -1; -2\}$.

Ответ: а) ***компланарны***; б) ***не компланарны***.

52. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\mathbf{a} = \{3; 4; 0\}, \mathbf{b} = \{0; -4; 1\}, \mathbf{c} = \{0; 2; 5\}$. ***Ответ***: левой.

53. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{0; -1; 1\}, \mathbf{b} = \{1; 1; 1\}$. ***Ответ***: 6.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Даны векторы

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{n} \text{ и } \mathbf{b} = \alpha_2 \mathbf{m} + \beta_2 \mathbf{n}, \text{ где } |\mathbf{m}| = k; |\mathbf{n}| = \ell; (\mathbf{m}; \widehat{\ } \mathbf{n}) = \varphi.$$

Найти: а) $(\lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b}) \cdot (\lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b})$; б) $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b})$;

в) $\cos(\mathbf{a}; \widehat{\ } \mu_2 \mathbf{b})$.

2. По координатам точек *A*, *B* и *C* для указанных векторов найти:
а) модуль вектора **a**; б) скалярное произведение векторов **a** и **b**;
в) проекцию вектора **c** на вектор **d**; г) координаты точки *M*, делящий отрезок ℓ в отношении $\alpha : \beta$.
3. Доказать, что векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и найти координаты вектора **d** в этом базисе.
4. Даны векторы **a**, **b** и **c**. Необходимо:
а) вычислить скалярное произведение двух векторов;
б) найти модуль векторного произведения;
в) вычислить смешанное произведение трёх векторов;
г) проверить будут ли ***коллинеарны*** или ортогональны два вектора;
д) проверить, будут ли ***компланарны*** три вектора.
5. Вершины пирамиды находятся в точках *A*, *B*, *C* и *D*. Вычислить:
а) площадь указанной грани; б) объём пирамиды *ABCD*;
в) площадь сечения, проходящего через середину ребра ℓ и две вершины пирамиды.

ВАРИАНТ 1	***ВАРИАНТ 2***
1. $\alpha_1 = -5, \beta_1 = -4, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 6,$ $k = 3, \ell = 5, \varphi = 5\pi/3,$ $\lambda_1 = -2, \mu_1 = 1/3, \lambda_2 = 1, \mu_2 = 2.$	**1.** $\alpha_1 = -2, \beta_1 = 3, \alpha_2 = 4, \beta_2 = -1,$ $k = 1, \ell = 3, \varphi = \pi,$ $\lambda_1 = 3, \mu_1 = 2, \lambda_2 = -2, \mu_2 = 4.$
2. $A(4; 6; 3), B(-5; 2; 6),$ $C(4; -4; -3),$ $\mathbf{a} = 4\mathbf{CB} - \mathbf{AC},$ $\mathbf{b} = \mathbf{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{CB}, \mathbf{d} = \mathbf{AC},$ $\ell = AB, \alpha = 5, \beta = 4.$	**2.** $A(4; 3; -2), B(-3; -1; 4),$ $C(2; 2; 1),$ $\mathbf{a} = -5\mathbf{AC} + 2\mathbf{CB},$ $\mathbf{b} = \mathbf{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{CB},$ $\ell = BC, \alpha = 2, \beta = 3.$
3. $\mathbf{a} = \{5; 4; 1\}, \mathbf{b} = \{-3; 5; 2\},$ $\mathbf{c} = \{2; -1; 3\}, \mathbf{d} = \{7; 23; 4\}.$	**3.** $\mathbf{a} = \{2; -1; 4\}, \mathbf{b} = \{-3; 0; -2\},$ $\mathbf{c} = \{4; 5; -3\}, \mathbf{d} = \{0; 11; -14\}.$
4. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$ $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k};$	**4.** $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k},$ $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k};$

а) $\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; ***б***) $3\mathbf{a}, 2\mathbf{c}$; *в*) $\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(3; 4; 5), B(1; 2; 1)$, $C(-2; -3; 6), D(3; -6; -3)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = AB$, C и D.	*а*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *б*) $4\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *в*) $5\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $2\mathbf{a}, -3\mathbf{b}, \mathbf{c}$. **5.** $A(-7; -5; 6), B(-2; 5; -3)$, $C(3; -2; 4), D(1; 2; 2)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = CD$, A и B.
ВАРИАНТ 3 **1.** $\alpha_1 = 5, \beta_1 = -2$, $\alpha_2 = -3, \beta_2 = -1$, $k = 4, \ell = 5, \varphi = 4\pi/3$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = 3, \lambda_2 = -1, \mu_2 = 5$. **2.** $A(-2; -2; 4), B(1; 3; -2)$, $C(1; 4; 2)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{AC} - 3\mathbf{BA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BC}, \mathbf{c} = \mathbf{BC}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = BA, \alpha = 2, \beta = 1$. **3.** $\mathbf{a} = \{-1; 1; 2\}, \mathbf{b} = \{2; -3; -5\}$, $\mathbf{c} = \{-6; 3; -1\}$, $\mathbf{d} = \{28; -19; -7\}$. **4.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; *а*) $\mathbf{c}, -2\mathbf{a}$; *б*) $3\mathbf{a}, -7\mathbf{b}$; *в*) $\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $3\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(1; 3; 1), B(-1; 4; 6)$, $C(-2; -3; 4), D(3; 4; -4)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = BC$, A и D.	***ВАРИАНТ 4*** **1.** $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 2$, $\alpha_2 = -6, \beta_2 = -4$, $k = 3, \ell = 2, \varphi = 5\pi/3$, $\lambda_1 = -1, \mu_1 = 1/2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 3$. **2.** $A(2; 4; 3), B(3; 1; -4)$, $C(-1; 2; 2)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{BA} + 4\mathbf{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BA}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = BA, \alpha = 1, \beta = 4$. **3.** $\mathbf{a} = \{1; 3; 4\}, \mathbf{b} = \{-2; 5; 0\}$, $\mathbf{c} = \{3; -2; -4\}$, $\mathbf{d} = \{13; -5; -4\}$. **4.** $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; *а*) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{c}$; *б*) $4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *в*) $\mathbf{a}, -2\mathbf{b}, -7\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $2\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(2; 4; 1), B(-3; 2; 4)$, $C(3; 5; -2), D(4; 2; -3)$; *а*) ABD; *в*) $\ell = AC$, B и D.
ВАРИАНТ 5 **1.** $\alpha_1 = 3, \beta_1 = -2$, $\alpha_2 = -4, \beta_2 = 5$, $k = 2, \ell = 3, \varphi = \pi/3$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = -3, \lambda_2 = 5, \mu_2 = 1$. **2.** $A(2; 4; 5), B(1; -2; 3)$, $C(-1; -2; 4)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{AB} - 4\mathbf{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BC}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{AB}$, $\ell = A3, \alpha = 2, \beta = 4$.	***ВАРИАНТ 6*** **1.** $\alpha_1 = 2, \beta_1 = -5$, $\alpha_2 = -3, \beta_2 = 4$, $k = 2, \ell = 4, \varphi = 2\pi/3$, $\lambda_1 = 3, \mu_1 = -4, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 3$. **2.** $A(-1; -2; 4), B(-1; 3; 5)$, $C(1; 4; 2)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{AC} - 7\mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = AC, \alpha = 1, \beta = 7$.

3. $\mathbf{a}=\{1;-1;1\}, \mathbf{b}=\{-5;-3;1\}$, $\mathbf{c}=\{2;-1;0\}$, $\mathbf{d}=\{-15;-10;5\}$. **4.** $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; *а*) $\mathbf{a}, -4\mathbf{c}$; *б*) $2\mathbf{b}, \mathbf{a}$; *в*) $\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(-5;-3;-4), B(1;4;6)$, $C(3;2;-2), D(8;-2;4)$; *а*) ACD; *в*) $\ell=BC$, A и D.	**3.** $\mathbf{a}=\{3;1;2\}, \mathbf{b}=\{-7;-2;-4\}$, $\mathbf{c}=\{-4;0;3\}$, $\mathbf{d}=\{16;6;15\}$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{b}=2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$; *а*) $-2\mathbf{a}, 4\mathbf{b}$; *б*) $5\mathbf{a}, 3\mathbf{c}$; *в*) $\mathbf{a}, -3\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(3;4;2), B(-2;3;-5)$, $C(4;-3;6), D(6;-5;3)$; *а*) ABD; *в*) $\ell=BD$, A и C.
ВАРИАНТ 7	***ВАРИАНТ 8***
1. $\alpha_1=3, \beta_1=2$, $\alpha_2=-4, \beta_2=-2$, $k=2, \ell=5, \varphi=4\pi/3$, $\lambda_1=1, \mu_1=-3$, $\lambda_2=0, \mu_2=-1/2$. **2.** $A(1;3;2), B(-2;4;-1)$, $C(1;3;-2)$, $\mathbf{a}=2\mathbf{AB}+5\mathbf{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{AC}, \mathbf{c}=\mathbf{b}, \mathbf{d}=\mathbf{AB}$, $\ell=AB, \alpha=2, \beta=4$. **3.** $\mathbf{a}=\{-3;0;1\}, \mathbf{b}=\{2;7;-3\}$, $\mathbf{c}=\{-4;3;5\}$, $\mathbf{d}=\{-16;33;13\}$. **4.** $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=7\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; *а*) $2\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$; *б*) $3\mathbf{a}, 5\mathbf{c}$; *в*) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $7\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$. **5.** $A(-4;6;3), B(3;-5;1)$, $C(2;6;-4), D(2;4;-5)$; *а*) ACD; *в*) $\ell=AD$, B и C.	**1.** $\alpha_1=5, \beta_1=2$, $\alpha_2=1, \beta_2=-4$, $k=3, \ell=2, \varphi=\pi$, $\lambda_1=1, \mu_1=-2$, $\lambda_2=3, \mu_2=-4$. **2.** $A(2;-4;3), B(-3;-2;4)$, $C(0;0;-2)$, $\mathbf{a}=3\mathbf{AC}-4\mathbf{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{AB}, \mathbf{d}=\mathbf{CB}$, $\ell=AC, \alpha=2, \beta=1$. **3.** $\mathbf{a}=\{5;1;2\}, \mathbf{b}=\{-2;1;-3\}$, $\mathbf{c}=\{4;-3;5\}$, $\mathbf{d}=\{15;-15;24\}$. **4.** $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-12\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$; *а*) $\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; *б*) $4\mathbf{a}, 3\mathbf{b}$; *в*) $2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$. **5.** $A(7;5;8), B(-4;-5;3)$, $C(2;-3;5), D(5;1;-4)$; *а*) BCD; *в*) $\ell=BC$, A и D.
ВАРИАНТ 9	***ВАРИАНТ 10***
1. $\alpha_1=-3, \beta_1=-2$, $\alpha_2=1, \beta_2=5$,	**1.** $\alpha_1=-5, \beta_1=3$, $\alpha_2=4, \beta_2=2$,

$k=3, \ell=6, \varphi=4\pi/3$, $\lambda_1=-1, \mu_1=2$, $\lambda_2=1, \mu_2=1$. **2.** $A(3;4;-4), B(-2;1;2)$, $C(2;-3;1)$, $\mathbf{a}=5\mathbf{CB}+4\mathbf{AC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{BA}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=BA, \alpha=2, \beta=5$. **3.** $\mathbf{a}=\{0;2;-3\}$, $\mathbf{b}=\{4;-3;-2\}$, $\mathbf{c}=\{-5;-4;0\}$, $\mathbf{d}=\{-19;-5;-4\}$. **4.** $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$; *а*) $2\mathbf{b}, 3\mathbf{a}$; *б*) $7\mathbf{a}, -3\mathbf{c}$; *в*) $3\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $7\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, -3\mathbf{c}$. **5.** $A(3;-2;6), B(-6;-2;3)$, $C(1;1;-4), D(4;6;-7)$; *а*) ABD; *в*) $\ell=BD$, A и C.	$k=4, \ell=1, \varphi=2\pi/3$, $\lambda_1=2, \mu_1=-1/2$, $\lambda_2=3, \mu_2=0$. **2.** $A(0;2;5), B(2;-3;4)$, $C(3;2;-5)$, $\mathbf{a}=-3\mathbf{AB}+4\mathbf{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{BC}, \mathbf{c}=\mathbf{BC}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=AC, \alpha=3, \beta=2$. **3.** $\mathbf{a}=\{3;-1;2\}$, $\mathbf{b}=\{-2;3;1\}$, $\mathbf{c}=\{4;-5;-3\}$, $\mathbf{d}=\{-3;2;-3\}$. **4.** $\mathbf{a}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=9\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}-8\mathbf{k}$; *а*) $3\mathbf{a}, -5\mathbf{c}$; *б*) $3\mathbf{b}, -9\mathbf{c}$; *в*) $2\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $3\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, -9\mathbf{c}$. **5.** $A(-5;-4;-3), B(7;3;-1)$, $C(6;-2;0), D(3;2;-7)$; *а*) BCD; *в*) $\ell=AD$, B и C.
ВАРИАНТ 11	***ВАРИАНТ 12***
1. $\alpha_1=-2, \beta_1=3$, $\alpha_2=3, \beta_2=-6$, $k=6, \ell=3, \varphi=5\pi/2$, $\lambda_1=3, \mu_1=-1/3$, $\lambda_2=1, \mu_2=2$. **2.** $A(-2;-3;-4), B(2;-4;0)$, $C(1;4;5)$, $\mathbf{a}=4\mathbf{AC}-8\mathbf{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{AB}, \mathbf{d}=\mathbf{BC}$, $\ell=AB, \alpha=4, \beta=2$. **3.** $\mathbf{a}=\{5;3;1\}, \mathbf{b}=\{-1;2;-3\}$, $\mathbf{c}=\{3;-4;2\}, \mathbf{d}=\{-9;34;-20\}$. **4.** $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-7\mathbf{k}$; *а*) $-3\mathbf{a}, 6\mathbf{c}$; *б*) $-2\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$; *в*) $\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $\mathbf{a}, -2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$. **5.** $A(3;-5;-2), B(-4;2;3)$,	**1.** $\alpha_1=-2, \beta_1=-4$, $\alpha_2=3, \beta_2=1$, $k=3, \ell=2, \varphi=7\pi/3$, $\lambda_1=-1/2, \mu_1=3$, $\lambda_2=1, \mu_2=2$. **2.** $A(-2;-3;-2), B(1;4;2)$, $C(1;-3;3)$, $\mathbf{a}=2\mathbf{AC}-4\mathbf{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{AB}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=AC, \alpha=3, \beta=1$. **3.** $\mathbf{a}=\{3;1;-3\}, \mathbf{b}=\{-2;4;1\}$, $\mathbf{c}=\{1;-2;5\}, \mathbf{d}=\{1;12;-20\}$. **4.** $\mathbf{a}=-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=6\mathbf{i}+9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$; *а*) $5\mathbf{a}, -3\mathbf{b}$; *б*) $4\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; *в*) $-2\mathbf{a}, \mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $-2\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$. **5.** $A(7;4;9), B(1;-2;-3)$,

$C(1;5;7), D(-2;-4;5)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = BD$, A и C.	$C(-5;-3;0), D(1;-3;4)$; *а*) ABD; *в*) $\ell = AB$, C и D.
ВАРИАНТ 13 **1.** $\alpha_1 = 4, \beta_1 = 3,\ \alpha_2 = -1, \beta_2 = 2$, $k = 4, \ell = 5, \varphi = 3\pi/2$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = -3,\ \lambda_2 = 1, \mu_2 = 2$. **2.** $A(5;6;1), B(-2;4;-1)$, $C(3;-3;3)$, $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{AB} - 4\,\mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{AB}$, $\ell = BC, \alpha = 3, \beta = 2$. 3. $\mathbf{a} = \{6;1;-3\}, \mathbf{b} = \{-3;2;1\}$, $\mathbf{c} = \{-1;-3;4\}, \mathbf{d} = \{15;6;-17\}$. **4.** $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\,\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$; *а*) $8\mathbf{a}, -6\mathbf{c}$; *б*) $-3\mathbf{b}, 11\mathbf{c}$; *в*) $2\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $8\mathbf{a}, -3\mathbf{b}, 11\mathbf{c}$. **5.** $A(-4;-7;-3), B(-4;-5;7)$, $C(2;-3;3), D(3;2;1)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = BC$, A и D.	***ВАРИАНТ 14*** **1.** $\alpha_1 = -2, \beta_1 = 3,\ \alpha_2 = 5, \beta_2 = 1$, $k = 2, \ell = 5, \varphi = 2\pi$, $\lambda_1 = -3, \mu_1 = 4,\ \lambda_2 = 2, \mu_2 = 3$. **2.** $A(10;6;3), B(-2;4;5)$, $C(3;-4;-6)$, $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{AC} - 2\,\mathbf{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{BA}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = CB, \alpha = 1, \beta = 5$. **3.** $\mathbf{a} = \{4;2;3\}, \mathbf{b} = \{-3;1;-8\}$, $\mathbf{c} = \{2;-4;5\}, \mathbf{d} = \{-12;14;-3\}$. **4.** $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; *а*) $3\mathbf{a}, -7\mathbf{c}$; *б*) $-4\mathbf{b}, 11\mathbf{a}$; *в*) $5\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $3\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. **5.** $A(-4;-5;-3), B(3;1;2)$, $C(5;7;-6), D(6;-1;5)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = BC$, A и D.
ВАРИАНТ 15 **1.** $\alpha_1 = 4, \beta_1 = -3,\ \alpha_2 = 5, \beta_2 = 2$, $k = 4, \ell = 7, \varphi = 4\pi/3$, $\lambda_1 = -3, \mu_1 = 2,\ \lambda_2 = 2, \mu_2 = -1$, **2.** $A(3;2;4), B(-2;1;3)$, $C(2;-2;-1)$, $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{BC} - 3\,\mathbf{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BA}, \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{BC}$, $\ell = AC, \alpha = 2, \beta = 4$. **3.** $\mathbf{a} = \{-2;1;3\}, \mathbf{b} = \{3;-6;2\}$, $\mathbf{c} = \{-5;-3;-1\}, \mathbf{d} = \{31;-6;22\}$. **4.** $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\,\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$;	***ВАРИАНТ 16*** **1.** $\alpha_1 = -5, \beta_1 = 3,\ \alpha_2 = 2, \beta_2 = 4$, $k = 5, \ell = 4, \varphi = \pi$, $\lambda_1 = -3, \mu_1 = 1/2,\ \lambda_2 = -1, \mu_2 = 1$, **2.** $A(-2;3;-4), B(3;-1;2)$, $C(4;2;4)$, $\mathbf{a} = 7\,\mathbf{AC} + 4\,\mathbf{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{AB}, \mathbf{d} = \mathbf{CB}$, $\ell = AB, \alpha = 2, \beta = 5$. **3.** $\mathbf{a} = \{1;3;6\}, \mathbf{b} = \{-3;4;-5\}$, $\mathbf{c} = \{1;-7;2\}, \mathbf{d} = \{-2;17;5\}$. **4.** $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$;

а) $3\mathbf{a}, 9\mathbf{b}$; *б*) $-7\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *в*) $5\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $3\mathbf{a}, -9\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. **5.** $A(5;2;4), B(-3;5;-7)$, $C(1;5;-8), D(9;-3;5)$; *а*) ABD; *в*) $\ell = BD$, A и C.	*а*) $3\mathbf{b}, -8\mathbf{c}$; *б*) $-7\mathbf{a}, 9\mathbf{c}$; *в*) $4\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $4\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$. **5.** $A(-6;4;5), B(5;-7;3)$, $C(4;2;-8), D(2;8;-3)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = AD$, B и C.
ВАРИАНТ 17 **1.** $\alpha_1 = 5, \beta_1 = -2,\ \alpha_2 = 3, \beta_2 = 4$, $k = 2, \ell = 5, \varphi = \pi/2$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = 3,\ \lambda_2 = 1, \mu_2 = -2$. **2.** $A(4;5;3), B(-4;2;3)$, $C(5;-6;-2)$, $\mathbf{a} = 9\mathbf{AB} - 4\mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{AB}$, $\ell = BC, \alpha = 5, \beta = 1$. **3.** $\mathbf{a} = \{7;2;1\}, \mathbf{b} = \{5;1;-2\}$, $\mathbf{c} = \{-3;4;5\}, \mathbf{d} = \{26;11;1\}$. **4.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -9\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; *а*) $3\mathbf{b}, -8\mathbf{c}$; *б*) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}$; *в*) $7\mathbf{a}, 5\mathbf{b}, -\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $7\mathbf{a}, 5\mathbf{b}, -\mathbf{c}$. **5.** $A(5;3;6), B(-3;-4;4)$, $C(5;-6;8), D(4;0;-3)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = BC$, A и D.	***ВАРИАНТ 18*** **1.** $\alpha_1 = 7, \beta_1 = -3,\ \alpha_2 = 2, \beta_2 = 6$, $k = 3, \ell = 4, \varphi = 5\pi/3$, $\lambda_1 = 3, \mu_1 = -1/2,\ \lambda_2 = 2, \mu_2 = 1$. **2.** $A(2;4;6), B(-3;5;1)$, $C(4;-5;-4)$, $\mathbf{a} = -6\mathbf{BC} + 2\mathbf{BA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{CA}, \mathbf{d} = \mathbf{BA}$, $\ell = BC, \alpha = 1, \beta = 3$. **3.** $\mathbf{a} = \{3;5;4\}, \mathbf{b} = \{-2;7;-5\}$, $\mathbf{c} = \{6;-2;1\}, \mathbf{d} = \{6;-9;22\}$. **4.** $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; *а*) $5\mathbf{b}, 7\mathbf{a}$; *б*) $-6\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *в*) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. **5.** $A(5;-4;4), B(-4;-6;5)$, $C(3;2;-7), D(6;2;-9)$; *а*) ABD; *в*) $\ell = BD$, и C.
ВАРИАНТ 19 **1.** $\alpha_1 = 4, \beta_1 = -5$, $\alpha_2 = -1, \beta_2 = 3$, $k = 6, \ell = 3, \varphi = 2\pi/3$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = -5,\ \lambda_2 = 1, \mu_2 = 2$. **2.** $A(-4;-2;-5), B(3;7;2)$, $C(4;6;-3)$, $\mathbf{a} = 9\mathbf{BA} + 3\mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{BC}$,	***ВАРИАНТ 20*** **1.** $\alpha_1 = 3, \beta_1 = -5$, $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 3$, $k = 1, \ell = 6, \varphi = 3\pi/2$, $\lambda_1 = 4, \mu_1 = 5,\ \lambda_2 = 1, \mu_2 = -2$. **2.** $A(5;4;4), B(-5;2;3)$, $C(4;2;-5)$, $\mathbf{a} = 11\mathbf{AC} - 6\mathbf{AB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BC}, \mathbf{c} = \mathbf{AB}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$,

$\ell = BA, \alpha = 4, \beta = 3$. **3.** $\mathbf{a}=\{5;3;2\}, \mathbf{b}=\{2;-5;1\}$, $\mathbf{c}=\{-7;4;-3\}, \mathbf{d}=\{36;1;15\}$. **4.** $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=7\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$; *а*) $-9\mathbf{a}, 7\mathbf{c}$; *б*) $-8\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; *в*) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$. **5.** $A(-7;-6;-5), B(1;1;-3)$, $C(8;-4;0), D(3;4;-7)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = AD$, B и C.	$\ell = BC, \alpha = 3, \beta = 1$. **3.** $\mathbf{a}=\{11;1;2\}, \mathbf{b}=\{-3;3;4\}$, $\mathbf{c}=\{-4;-2;7\}, \mathbf{d}=\{-5;11;-15\}$. **4.** $\mathbf{a}=-9\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-5\mathbf{i}+10\mathbf{j}-20\mathbf{k}$; *а*) $9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *б*) $-6\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; *в*) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. **5.** $A(7;-1;-2), B(1;7;8)$, $C(3;7;9), D(-3;-5;2)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = BD$, A и C.
ВАРИАНТ 21	***ВАРИАНТ 22***
1. $\alpha_1=-5, \beta_1=-6, \alpha_2=2, \beta_2=7$, $k=2, \ell=7, \varphi=\pi$, $\lambda_1=-2, \mu_1=5, \lambda_2=1, \mu_2=3$. **2.** $A(3;4;6), B(-4;6;4)$, $C(5;-2;-3)$, $\mathbf{a}=-7\mathbf{BC}+4\mathbf{CA}$, $\mathbf{b}=\mathbf{BA}, \mathbf{c}=\mathbf{CA}, \mathbf{d}=\mathbf{BC}$, $\ell = BA, \alpha = 5, \beta = 3$. **3.** $\mathbf{a}=\{9;5;3\}, \mathbf{b}=\{-3;2;1\}$, $\mathbf{c}=\{4;-7;4\}$, $\mathbf{d}=\{-10;-13;8\}$. **4.** $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; *а*) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}$; *б*) $5\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *в*) $-3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. **5.** $A(5;2;7), B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3), D(1;-5;2)$; *а*) ABD; *в*) $\ell = AB$, C и D.	**1.** $\alpha_1=-7, \beta_1=2, \alpha_2=4, \beta_2=6$, $k=2, \ell=9, \varphi=\pi/3$, $\lambda_1=1, \mu_1=2, \lambda_2=-1, \mu_2=3$. **2.** $A(-5;-2;-6), B(3;4;5)$, $C(2;-5;4)$, $\mathbf{a}=8\mathbf{AC}-5\mathbf{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{AB}, \mathbf{d}=\mathbf{BC}$, $\ell = AC, \alpha = 3, \beta = 4$. **3.** $\mathbf{a}=\{7;2;1\}, \mathbf{b}=\{3;-5;6\}$, $\mathbf{c}=\{-4;3;-4\}$, $\mathbf{d}=\{-1;18;-16\}$. **4.** $\mathbf{a}=7\mathbf{i}-4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-11\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=5\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; *а*) $-4\mathbf{a}, -5\mathbf{c}$; *б*) $2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$; *в*) $3\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $-4\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$. **5.** $A(-2;-5;-1), B(-6;-7;9)$, $C(4;-5;1), D(2;1;4)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = BC$, A и D.
ВАРИАНТ 23	***ВАРИАНТ 24***
1. $\alpha_1=5, \beta_1=4, \alpha_2=-6, \beta_2=2$,	**1.** $\alpha_1=-5, \beta_1=-7, \alpha_2=-3, \beta_2=2$,

$k=2, \ell=9, \varphi=2\pi/3$, $\lambda_1=3, \mu_1=2, \lambda_2=1, \mu_2=-1/2$. **2.** $A(3;4;1), B(5;-2;6)$, $C(4;2;-7)$, $\mathbf{a}=-7\mathbf{AC}+5\mathbf{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{BC}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=AB, \alpha=2, \beta=3$. **3.** $\mathbf{a}=\{1;2;3\}, \mathbf{b}=\{-5;3;-1\}$, $\mathbf{c}=\{-6;4;5\}, \mathbf{d}=\{-4;11;20\}$. **4.** $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$; *а*) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *б*) $-7\mathbf{b}, 6\mathbf{a}$; *в*) $6\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $-5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. **5.** $A(-6;-3;-5), B(5;1;7)$, $C(3;5;-1), D(4;-2;9)$; *а*) ACD; *в*) $\ell=BC$, A и D.	$k=2, \ell=11, \varphi=3\pi/2$, $\lambda_1=-3, \mu_1=4, \lambda_2=-1, \mu_2=2$. **2.** $A(4;3;2), B(-4;-3;5)$, $C(6;4;-3)$, $\mathbf{a}=8\mathbf{AC}-5\mathbf{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{BA}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=BC, \alpha=2, \beta=5$. **3.** $\mathbf{a}=\{-2;5;1\}, \mathbf{b}=\{3;2;-7\}$, $\mathbf{c}=\{4;-3;2\}, \mathbf{d}=\{-4;22;-13\}$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$; *а*) $-2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}$; *б*) $6\mathbf{a}, -4\mathbf{c}$; *в*) $4\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $6\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. **5.** $A(7;4;2), B(-5;3;-9)$, $C(1;-5;3), D(7;-9;1)$; *а*) ABD; *в*) $\ell=BD$, A и C.
ВАРИАНТ 25 **1.** $\alpha_1=5, \beta_1=-8, \alpha_2=-2, \beta_2=3$, $k=4, \ell=3, \varphi=4\pi/3$, $\lambda_1=2, \mu_1=-3, \lambda_2=1, \mu_2=2$. **2.** $A(-5;4;3), B(4;5;2)$, $C(2;7;-4)$, $\mathbf{a}=3\mathbf{BC}+2\mathbf{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{CA}, \mathbf{d}=\mathbf{AB}$, $\ell=BC, \alpha=3, \beta=4$. **3.** $\mathbf{a}=\{3;1;2\}, \mathbf{b}=\{-4;3;-1\}$, $\mathbf{c}=\{2;3;4\}, \mathbf{d}=\{14;14;20\}$. **4.** $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}$; *а*) $5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$; *б*) $-9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *в*) $2\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$.	***ВАРИАНТ 26*** **1.** $\alpha_1=-3, \beta_1=5, \alpha_2=1, \beta_2=7$, $k=4, \ell=6, \varphi=5\pi/3$, $\lambda_1=-2, \mu_1=3, \lambda_2=3, \mu_2=-2$. **2.** $A(6;4;5), B(-7;1;8)$, $C(2;-2;-7)$, $\mathbf{a}=5\mathbf{CB}-2\mathbf{AC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{AB}, \mathbf{c}=\mathbf{CB}, \mathbf{d}=\mathbf{AC}$, $\ell=AB, \alpha=3, \beta=2$. **3.** $\mathbf{a}=\{3;-1;2\}, \mathbf{b}=\{-2;4;1\}$, $\mathbf{c}=\{4;-5;-1\}, \mathbf{d}=\{-5;11;1\}$. **4.** $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$; *а*) $3\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *б*) $5\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; *в*) $-2\mathbf{a}, \mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $-2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$.

5. $A(-8; 2; 7), B(3; -5; 9)$, $C(2; 4; -6), D(4; 6; -5)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = AD$, B и C.	**5.** $A(4; 3; 1), B(2; 7; 5)$, $C(-4; -2; 4), D(2; -3; -5)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = AB$, C и D.
ВАРИАНТ 27	***ВАРИАНТ 28***
1. $\alpha_1 -3, \beta_1 = 4, \alpha_2 = 5, \beta_2 = -6$, $k = 4, \ell = 5, \varphi = \pi$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = 3, \lambda_2 = -3, \mu_2 = -1$. **2.** $A(6; 5; -4), B(-5; -2; 2)$, $C(3; 3; 2)$, $\mathbf{a} = 6\,\mathbf{AB} - 3\,\mathbf{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{AC}, \mathbf{d} = \mathbf{CB}$, $\ell = BC, \alpha = 1, \beta = 5$. **3.** $\mathbf{a} = \{4; 5; 1\}, \mathbf{b} = \{1; 3; 1\}$, $c = \{-3; -6; 7\}, d = \{19; 33; 0\}$. **4.** $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; *а*) $\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; *б*) $6\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; *в*) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$. **5.** $A(-9; -7; 4), B(-4; 3; -1)$, $C(5; -4; 2), D(3; 4; 4)$; *а*) BCD; *в*) $\ell = CD$, A и B.	**1.** $\alpha_1 = 6, \beta_1 = -7, \alpha_2 = -1, \beta_2 = -3$, $k = 2, \ell = 6, \varphi = 4\pi/3$, $\lambda_1 = 3, \mu_1 = -2, \lambda_2 = 1, \mu_2 = 4$. **2.** $A(-3; -5; 6), B(3; 5; -4)$, $C(2; 6; 4)$, $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{AC} - 5\,\mathbf{BA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{CB}, \mathbf{c} = \mathbf{BA}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = BA, \alpha = 4, \beta = 2$. **3.** $\mathbf{a} = \{1; -3; 1\}, \mathbf{b} = \{-2; -4; 3\}$, $\mathbf{c} = \{0; -2; 3\}, \mathbf{d} = \{-8; -10; 13\}$. **4.** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; *а*) $8\mathbf{c}, -3\mathbf{a}$; *б*) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}$; *в*) $\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; *д*) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$. **5.** $A(3; 5; 3), B(-3; 2; 8)$, $C(-3; -2; 6), D(7; 8; -2)$; *а*) ACD; *в*) $\ell = BD$, A и C.
ВАРИАНТ 29	***ВАРИАНТ 30***
1. $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \alpha_2 = -4, \beta_2 = -2$, $k = 6, \ell = 3, \varphi = 5\pi/3$, $\lambda_1 = -2, \mu_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 3, \mu_2 = 2$. **2.** $A(3; 5; 4), B(4; 2; -3)$, $C(-2; 4; 7)$, $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{BA} - 4\,\mathbf{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{BA}, \mathbf{d} = \mathbf{AC}$, $\ell = BA, \alpha = 2, \beta = 5$. **3.** $\mathbf{a} = \{5; 7; -2\}, \mathbf{b} = \{-3; 1; 3\}$, $\mathbf{c} = \{1; -4; 6\}, \mathbf{d} = \{14; 9; -1\}$. **4.** $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$,	**1.** $\alpha_1 = 4, \beta_1 = -3, \alpha_2 = -2, \beta_2 = 6$, $k = 4, \ell = 7, \varphi = \pi/3$, $\lambda_1 = 2, \mu_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 3, \mu_2 = 2$. **2.** $A(4; 6; 7), B(2; -4; 1)$, $C(-3; -4; 2)$, $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{AB} - 2\,\mathbf{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{BC}, \mathbf{d} = \mathbf{AB}$, $\ell = AB, \alpha = 3, \beta = 4$. **3.** $\mathbf{a} = \{-1; 4; 3\}, \mathbf{b} = \{3; 2; -4\}$, $\mathbf{c} = \{-2; -7; 1\}, \mathbf{d} = \{6; 20; -3\}$. **4.** $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,

$\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+9\mathbf{k}$; *а*) $-2\mathbf{a}, 8\mathbf{c}$; *б*) $6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; *в*) $3\mathbf{a}, -5\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; *д*) $3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$. **5.** $A(4;2;3), B(-5;-4;2)$, $C(5;7;-4), D(6;4;-7)$; *а*) ABD; *в*) $\ell=AD$, B и C.	$\mathbf{b}=4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; *а*) $7\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; *б*) $4\mathbf{b}, \mathbf{a}$; *в*) $5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; *г*) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; *д*) $5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. **5.** $A(-4;-2;-3), B(2;5;7)$, $C(6;3;-1), D(6;-4;1)$; *а*) ACD; *в*) $\ell=BC$, A и D.

Решение типового варианта

1. Даны векторы

$$\mathbf{a}=-\mathbf{m}+6\mathbf{n} \text{ и } \mathbf{b}=3\mathbf{m}+4\mathbf{n}, \text{ где } |\mathbf{m}|=2;\ |\mathbf{n}|=5;\ (\mathbf{m}\,\hat{,}\,\mathbf{n})=2\pi/3.$$

Найти: а) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; б) $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})$; в) $\cos(2\mathbf{b}-\mathbf{a}\,\hat{,}\,4\mathbf{b})$.

▲ а) Учитывая, что

$$\mathbf{m}^2=|\mathbf{m}|^2=2^2=4,\ \mathbf{n}^2=|\mathbf{n}|^2=5^2=25,\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{m},$$

вычисляем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(-\mathbf{m}+6\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=-3\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}+18\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}-4\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+24\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=$$

$$=-3\mathbf{m}^2+14\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+24\mathbf{n}^2=\Big\{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos(\mathbf{m}\,\hat{,}\,\mathbf{n})=$$

$$=2\cdot5\cdot\cos2\pi/3=10\cdot\cos(\pi-\pi/3)=-10\cdot\cos\pi/3=-10\cdot1/2=-5\Big\}=$$

$$=-3\cdot4+14\cdot(-5)+24\cdot25=-12-70+600=518.$$

Ответ: 518.

б) Обозначим $\mathbf{c}=4\mathbf{a}-5\mathbf{b}$. Тогда

$$\mathbf{c}=4\cdot(-\mathbf{m}+6\mathbf{n})-5\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=-19\mathbf{m}+4\mathbf{n}.$$

Так как $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{c}|\cdot\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{c}$, то

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

Имеем

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=(-19\mathbf{m}+4\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=-57\mathbf{m}^2-64\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+16\mathbf{n}^2=$$

$$=-57\cdot4+64\cdot(-5)+16\cdot25=-148,$$

$$|\mathbf{b}|=\sqrt{\mathbf{b}^2}=\sqrt{(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})^2}=\sqrt{9\mathbf{m}^2+24\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+16\mathbf{n}^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 4+24\cdot(-5)+16\cdot 25}=\sqrt{316}=2\sqrt{79}.$$

Окончательно получаем

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})=-\frac{148}{2\sqrt{79}}=-\frac{74}{\sqrt{79}}.$$

Ответ $-74/\sqrt{79}$.

в) Обозначим

$$\mathbf{d}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}=2\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})-(-\mathbf{m}+6\mathbf{n})=7\mathbf{m}+2\mathbf{n}.$$

Тогда

$$\cos(\mathbf{d}\,\hat{,}\,4\mathbf{b})=\frac{\mathbf{d}\cdot 4\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\cdot|4\mathbf{b}|},$$

$$\mathbf{d}\cdot 4\mathbf{b}=4\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}=4\cdot(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=4\cdot(21\mathbf{m}^2+34\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+8\mathbf{n}^2)=$$

$$=4\cdot(21\cdot 4+34\cdot(-5)+8\cdot 25)=456,$$

$$|\mathbf{d}|=\sqrt{(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})^2}=\sqrt{49\mathbf{m}^2+28\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}+4\mathbf{n}^2}=$$

$$=\sqrt{49\cdot 4+28\cdot(-5)+4\cdot 25}=2\sqrt{39},$$

$$|4\mathbf{b}|=4|\mathbf{b}|=8\sqrt{79}.$$

В результате имеем:

$$\cos(2\mathbf{b}-\mathbf{a}\,\hat{,}\,4\mathbf{b})=\frac{456}{2\sqrt{39}\cdot 8\sqrt{79}}=\frac{57}{2\sqrt{3081}}\approx 0.51.\ ▼$$

Ответ $\cos(2\mathbf{b}-\mathbf{a}\,\hat{,}\,4\mathbf{b})\approx 0.51$.

2. По координатам точек $A(-5;1;6)$, $B(1;4;3)$ и $C(6;3;9)$ найти:

а) модуль вектора $\mathbf{a}=4\mathbf{AB}+\mathbf{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{BC}$;

в) проекцию вектора $\mathbf{c}=\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d}=\mathbf{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $\ell=AB$ в отношении 1:3.

▲ а) Последовательно находим

$$\mathbf{AB}=\{1-(-5);\,4-1;\,3-6\}=\{6;\,3;\,-3\},$$

$$\mathbf{BC}=\{6-1;\,3-4;\,9-3\}=\{5;\,-1;\,6\},$$

$$\mathbf{a}=4\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=4\cdot\{6;\,3;\,-3\}+\{5;\,-1;\,6\}=$$

$$=\{4\cdot 6+5;\,4\cdot 3-1;\,4\cdot(-3)+6\}=\{29;\,11;\,-6\},$$

$$|\mathbf{a}|=|\,4\mathbf{AB}+\mathbf{BC}|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}.$$

Ответ $|\mathbf{a}| = \sqrt{998}$.

б) Имеем

$$\mathbf{a} = \{29; 11; -6\}, \mathbf{b} = \{5; -1; 6\}.$$

Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 29 \cdot 5 + 11 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 = 98.$$

Ответ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 98$.

в) Так как

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \mathbf{c} = \{5; -1; 6), \mathbf{d} = \{6; 3; -3\},$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 + 6 \cdot (-3) = 30 - 3 - 18 = 9,$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{6}$$

то

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{AB}}\,\mathbf{BC} = 9/3\sqrt{6} = 3/\sqrt{6} \approx 0.82.$$

Ответ $\mathrm{pr}_{\mathbf{AB}}\,\mathbf{BC} = 3/\sqrt{6} \approx 0.82$.

г) Имеем:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda}.$$

Следовательно,

$$x_M = \frac{-5 + 1/3 \cdot 1}{1 + 1/3} = -7/2,\ y_M = \frac{1 + 1/3 \cdot 4}{1 + 1/3} = 7/4,\ z_M = \frac{6 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} = \frac{21}{4},$$

Ответ $M(-7/2; 7/4; 21/4)$. ▼

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a} = \{3; -1; 0\}, \mathbf{b} = \{2; 3; 1\}, \mathbf{c} = \{-1; 4; 3\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d} = \{2; 3; 7\}$ в этом базисе.

▲ Найдём смешанное произведение данных векторов

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} (-3) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3}(-15 - 7) = 22 \neq 0.$$

Следовательно, векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и вектор **d** линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

или

$$\{2;3;7\} = \lambda_1\{3;-1;0\} + \lambda_2\{2;3;1\} + \lambda_3\{-1;4;3\}.$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 2, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 7. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Гаусса, предварительно, поменяв местами 1-ю и 2-ю строки расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)(3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) 1/11 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Для обратного хода имеем систему

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_3 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3, \\ \lambda_3 = -2, \\ \lambda_3 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$. ▼

4. Даны векторы $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение векторов **a** и 3**b**;

б) найти модуль векторного произведения векторов 3**c** и **b**;

в) вычислить смешанное произведение векторов **a**, **b** и 5**c**;

г) проверить, будут ли ***коллинеарны*** или ортогональны векторы **a** и **b**;

д) проверить, будут ли ***компланарны*** векторы **a**, **b** и **c**.

▲ а) Находим:

$$\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 3 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot \{4;0;4\} \cdot \{-1;3;2\} = 3 \cdot (4 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 12.$$

Ответ $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 12$.

б) Имеем:

$$3\mathbf{c}\times\mathbf{b}=3\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=3\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&5&0\\-1&3&2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\left(\mathbf{i}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&0\\3&2\end{vmatrix}+\mathbf{j}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&0\\-1&2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&5\\-1&3\end{vmatrix}\right)=$$

$$=3\cdot(10\mathbf{i}-6\mathbf{j}+14\mathbf{k})=6\cdot(5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}),$$

$$|3\mathbf{c}\times\mathbf{b}|=6\sqrt{5^2+(-3)^2+7^2}=6\sqrt{83}.$$

Ответ $|3\mathbf{c}\times\mathbf{b}|=6\sqrt{83}.$

в) Находим:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot5\mathbf{c}=5\cdot(\mathbf{abc})=5\begin{vmatrix}4&0&4\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}(-2)=5\begin{vmatrix}6&-6&0\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot2\cdot(-1)^{2+3}\cdot(30+18)=-480.$$

Ответ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot5\mathbf{c}=-480.$

г) Так как

$$\mathbf{a}=\{4;0;4\},\ \mathbf{b}=\{-1;3;2\}\ \text{и}\ \frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{4}{2},$$

то векторы **a** и **b** ***не коллинеарны***.

Поскольку

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4\cdot(-1)+0\cdot3+4\cdot2\neq0,$$

то векторы **a** и **b** не ортогональны.

Ответ $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b},\ \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

д) Векторы **a**, **b**, **c** ***компланарны***, если $\mathbf{abc}=0$. Вычисляем

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}4&0&4\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}(-2)=\begin{vmatrix}6&-6&0\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+3}(30+18)=-96\neq0,$$

т.е. векторы **a**, **b** и **c** ***не компланарны***. ***Ответ***: ***не компланарны***.

5. Вершины пирамиды находятся в точках

$$A(2;3;4),\ B(4;7;3),\ C(1;2;2)\ \text{и}\ D(-2;0;-1).$$

Вычислить: а) площадь грани *ABC*; б) объем пирамиды *ABCD*; в) площадь сечения, проходящего через середины ребер *AB*, *AC*, *AD*.

▲ а) Известно, что $S_{ABC} = 1/2 \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$. Находим:

$$\mathbf{AB} = \{4-2; 7-3; 3-4\} = \{2; 4; -1\},$$

$$\mathbf{AC} = \{1-2; 2-3; 2-4\} = \{-1; -1; -2\},$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot \sqrt{(-9)^2 + 5^2 + 2^2} = 1/2 \cdot \sqrt{110}.$$

Ответ $S_{ABC} = 1/2 \cdot \sqrt{110}$.

б) Поскольку

$$V_{\text{пир}} = 1/6 \cdot |(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD}|,$$

$$\mathbf{AD} = \{-2-2; 0-3; -1-4\} = \{-4; -3; -5\},$$

$$(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-5) \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -5 & -9 & 0 \\ -14 & -23 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -14 & -23 \end{vmatrix} = -(115 - 126) = 11,$$

то $V_{\text{пир}} = 11/6$. ***Ответ*** $V_{\text{пир}} = 11/6$.

в) Середины ребер *AB*, *AC*, *AD* находятся в точках *K*, *M*, *N*.

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \; y_k = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5;$$

$$z_K = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+3}{2} = 3.5;$$

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+1}{2}=1.5,\; y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+2}{2}=2.5$$

$$z_M=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{4+2}{2}=3;$$

$$x_N=\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=0,\; y_N=\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{3+0}{2}=1.5$$

$$z_N=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{4+(-1)}{2}=1.5.$$

Итак,

$$K(3;\,5;\,3.5),\; M(1.5;\,2.5;\,3),\; N(0;1.5;1.5).$$

Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}}=1/2\cdot\left|\mathbf{KM}\times\mathbf{KN}\right|,$$

$$\mathbf{KM}=\{1.5-3;\,2.5-5;\,3-3.5\}=\{-1.5;\,-2.5;\,-0.5\}$$

$$\mathbf{KN}=\{0-3;1.5-5;1.5-3.5\}=\{-3;-3.5;-2\},$$

$$\mathbf{KM}\times\mathbf{MN}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1.5 & -.5 & -0.5\\ -3 & -3.5 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2.5 & -0.5\\ -3.5 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{j}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1.5 & -0.5\\ -3 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1.5 & -2.5\\ -3 & -3.5\end{vmatrix}=$$

$$=3.25\mathbf{i}-1.5\mathbf{j}-2.25\mathbf{k},$$

$$S_{\text{сеч}}=1/2\cdot\sqrt{3.25^2+(-1.5)^2+(-2.25)^2}=1/2\cdot\sqrt{17.875}.$$

Ответ $S_{\text{сеч}}=1/2\cdot\sqrt{17.875}$. ▼

Контрольная работа

1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p**, **q**, **r**.
2. ***Коллинеарны*** ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам **a** и **b**?
3. Найти косинус угла между векторами **AB** и **AC**.
4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.
5. ***Компланарны*** ли векторы **a**, **b** и **c**?
6. Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант 1	***Вариант 2***
1. $\mathbf{x}=\{-2;4;7\},\mathbf{p}=\{0;1;2\},$ $\mathbf{q}=\{1;0;1\},\mathbf{r}=\{-1;2;4\}.$	**1.** $\mathbf{x}=\{6;12;-1\},\mathbf{p}=\{1;3;0\},$ $\mathbf{q}=\{1;-1;1\},\mathbf{r}=\{0;-1;2\}.$
2. $\mathbf{a}=\{1;-2;3\},\mathbf{b}=\{3;0;-1\},$ $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+4\mathbf{b},\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-\mathbf{a}.$	**2.** $\mathbf{a}=\{1;0;1\},\mathbf{b}=\{-2;3;5\},$ $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+2\mathbf{b},\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-\mathbf{b}.$
3. $A(1;-2;3), B(0;-1;2),$ $C(3;-4;5).$	**3.** $A(0;-3;6), B(-12;-3;-3),$ $C(-9;-3;-6).$
4. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q},\mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q};$ $\lvert\mathbf{p}\rvert=1, \lvert\mathbf{q}\rvert=2, (\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\frac{\pi}{6}.$	**4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q};$ $\lvert\mathbf{p}\rvert=4, \lvert\mathbf{q}\rvert=1, (\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/4.$
5. $\mathbf{a}=\{2;3;1\},\mathbf{b}=\{-1;0;-1\},$ $\mathbf{c}=\{2;2;2\}.$	**5.** $\mathbf{a}=\{3;2;1\},\mathbf{b}=\{2;3;4\},$ $\mathbf{c}=\{3;1;-1\}.$
6. $A_1(1;3;6), A_2(2;2;1),$ $A_3(-1;0;1), A_4(-4;6;-3).$	**6.** $A_1(-4;2;6), A_2(2;-3;0),$ $A_3(-10;5;8), A_4(-5;2;-4).$
Вариант 3	***Вариант 4***
1. $\mathbf{x}=\{1;-4;4\},\mathbf{p}=\{2;1;-1\},$ $\mathbf{q}=\{0;3;2\},\mathbf{r}=\{1;-1;1\}.$	**1.** $\mathbf{x}=\{-9;5;5\},\mathbf{p}=\{4;1;1\},$ $\mathbf{q}=\{2;0;-3\},\mathbf{r}=\{-1;2;1\}.$
2. $\mathbf{a}=\{-2;4;1\},\mathbf{b}=\{1;-2;7\},$ $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}+3\mathbf{b},\mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-\mathbf{b}.$	**2.** $\mathbf{a}=\{1;2;-3\},\mathbf{b}=\{2;-1;-1\},$ $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}+3\mathbf{b},\mathbf{c}_2=8\mathbf{a}-\mathbf{b}.$
3. $A(3;3;-1), B(5;5;-2),$ $C(4;1;1).$	**3.** $A(-1;2;-3), B(3;4;-6),$ $C(1;1;-1).$
4. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q},\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q};$ $\lvert\mathbf{p}\rvert=1/5, \lvert\mathbf{q}\rvert=1, (\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/2.$	**4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q},\mathbf{b}=\mathbf{p}+5\mathbf{q};$ $\lvert\mathbf{p}\rvert=4, \lvert\mathbf{q}\rvert=1/2, (\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=5\pi/6.$
5. $\mathbf{a}=\{1;5;2\},\mathbf{b}=\{-1;1;-1\},$	**5.** $\mathbf{a}=\{1;-1;-3\},\mathbf{b}=\{3;2;1\},$

$\mathbf{c}=\{1;1;1\}$. **6.** $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$.	$\mathbf{c}=\{2;3;4\}$. **6.** $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;6)$.
Вариант 5 **1.** $\mathbf{x}=\{-5;-5;5\}$, $\mathbf{p}=\{-2;0;1\}$, $\mathbf{q}=\{1;3;-1\}$, $\mathbf{r}=\{0;4;1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{3;5;4\}$, $\mathbf{b}=\{5;9;7\}$, $\mathbf{c}_1=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$. **3.** $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$. **4.** $\mathbf{a}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=3$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=3\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;3;1\}$, $\mathbf{b}=\{1;-2;1\}$, $\mathbf{c}=\{1;1;1\}$. **6.** $A_1(-1;-5;2)$, $A_2(-6;0;-3)$, $A_3(3;6;-3)$, $A_4(-10;6;7)$.	***Вариант 6*** **1.** $\mathbf{x}=\{13;2;7\}$, $\mathbf{p}=\{5;1;0\}$, $\mathbf{q}=\{2;-1;3\}$, $\mathbf{r}=\{1;0;-1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{1;4;-2\}$, $\mathbf{b}=\{1;1;-1\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. **3.** $A(5;3;-1)$, $B(5;2;0)$, $C(6;4;-1)$. **4.** $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=3$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/3$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;1;-1\}$, $\mathbf{b}=\{-2;-1;-0\}$, $\mathbf{c}=\{5;2;-1\}$. **6.** $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.
Вариант 7 **1.** $\mathbf{x}=\{-19;-1;7\}$, $\mathbf{p}=\{0;1;1\}$, $\mathbf{q}=\{-2;0;1\}$, $\mathbf{r}=\{3;1;0\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{1;-2;5\}$, $\mathbf{b}=\{3;1;0\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$. **3.** $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$, $C(2;3;0)$. **4.** $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=3$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=2$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/2$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;3;1\}$, $\mathbf{b}=\{1;-2;1\}$, $\mathbf{c}=\{2;2;2\}$. **6.** $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.	***Вариант 8*** **1.** $\mathbf{x}=\{3;-3;4\}$, $\mathbf{p}=\{1;0;2\}$, $\mathbf{q}=\{0;1;1\}$, $\mathbf{r}=\{2;-1;4\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{3;4;-1\}$, $\mathbf{b}=\{2;-1;1\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$. **3.** $A(2;-4;6)$, $B(0;-2;4)$, $C(6;-8;10)$. **4.** $\mathbf{a}=4\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=7$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=2$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;3;1\}$, $\mathbf{b}=\{6;7;4\}$, $\mathbf{c}=\{2;0;-1\}$. **6.** $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$.
Вариант 9 **1.** $\mathbf{x}=\{3;3;-1\}$, $\mathbf{p}=\{3;1;0\}$, $\mathbf{q}=\{-1;2;1\}$, $\mathbf{r}=\{-1;0;2\}$.	***Вариант 10*** **1.** $\mathbf{x}=\{-1;7;-4\}$, $\mathbf{p}=\{-1;2;1\}$, $\mathbf{q}=\{2;0;3\}$, $\mathbf{r}=\{1;1;-1\}$.

2. $\mathbf{a}=\{-2;-3;-2\}, \mathbf{b}=\{1;0;5\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+9\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=-\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. **3.** $A(0;1;-2), B(3;1;2)$, $C(4;1;1)$. **4.** $\mathbf{a}=\mathbf{p}-4\mathbf{q}, \mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=1, \lvert\mathbf{q}\rvert=2, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/6$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;2;1\}, \mathbf{b}=\{1;-3;-7\}$, $\mathbf{c}=\{1;2;3\}$. **6.** $A_1(-2;0;-4), A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4), A_4(1;-4;6)$.	**2.** $\mathbf{a}=\{-1;4;2\}, \mathbf{b}=\{3;-2;6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$. **3.** $A(3;3;-1), B(1;5;-2)$, $C(4;1;1)$. **4.** $\mathbf{a}=\mathbf{p}+4\mathbf{q}, \mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=7, \lvert\mathbf{q}\rvert=2, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/3$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;7;2\}, \mathbf{b}=\{-2;0;-1\}$, $\mathbf{c}=\{2;2;1\}$. **6.** $A_1(14;4;5), A_2(-5;-3;2)$, $A_3(-2;-6;-3), A_4(-2;2;-1)$.
Вариант 11 **1.** $\mathbf{x}=\{6;5;-14\}, \mathbf{p}=\{1;1;4\}$, $\mathbf{q}=\{0;-3;2\}, \mathbf{r}=\{2;1;-1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{5;0;-1\}, \mathbf{b}=\{7;2;3\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$. **3.** $A(2;1;-1), B(6;-1;-4)$, $C(4;2;-1)$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=10, \lvert\mathbf{q}\rvert=1, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/2$. **5.** $\mathbf{a}=\{1;-2;6\}, \mathbf{b}=\{1;0;1\}$, $\mathbf{c}=\{2;-6;17\}$. **6.** $A_1(1;2;0), A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6), A_4(8;4;-9)$.	***Вариант 12*** **1.** $\mathbf{x}=\{6;-1;7\}, \mathbf{p}=\{1;-2;0\}$, $\mathbf{q}=\{-1;1;3\}, \mathbf{r}=\{1;0;4\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{0;3;-2\}, \mathbf{b}=\{1;-2;1\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$. **3.** $A(-1;-2;1), B(-4;-2;5)$, $C(-8;-2;2)$. **4.** $\mathbf{a}=4\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}=2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=5, \lvert\mathbf{q}\rvert=4, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{6;3;4\}, \mathbf{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\mathbf{c}=\{2;1;2\}$. **6.** $A_1(2;-1;2), A_2(1;2;-1)$, $A_3(3;2;1), A_4(-4;2;5)$.
Вариант 13 **1.** $\mathbf{x}=\{5;15;0\}, \mathbf{p}=\{1;0;5\}$, $\mathbf{q}=\{-1;3;2\}, \mathbf{r}=\{0;-1;1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{-2;7;-1\}, \mathbf{b}=\{-3;5;2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. **3.** $A(6;2;-3), B(6;3;-2)$, $C(7;3;-3)$. **4.** $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$;	***Вариант 14*** **1.** $\mathbf{x}=\{2;-1;11\}, \mathbf{p}=\{1;1;0\}$, $\mathbf{q}=\{0;1;-2\}, \mathbf{r}=\{1;0;3\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{3;7;0\}, \mathbf{b}=\{1;-3;4\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$. **3.** $A(0;0;4), B(-3;-6;1)$, $C(-5;-10;-1)$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$;

$\lvert\mathbf{p}\rvert = 6, \lvert\mathbf{q}\rvert = 7, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/3$. **5.** $\mathbf{a} = \{7; 3; 4\}, \mathbf{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\mathbf{c} = \{4; 2; 4\}$. **6.** $A_1(1; 1; 2), A_2(-1; 1; 3)$, $A_3(2; -2; 4), A_4(-1; 0; -2)$.	$\lvert\mathbf{p}\rvert = 3, \lvert\mathbf{q}\rvert = 4, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/3$. **5.** $\mathbf{a} = \{2; 3; 2\}, \mathbf{b} = \{4; 7; 5\}$, $\mathbf{c} = \{2; 0; -1\}$. **6.** $A_1(2; 3; 1), A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7), A_4(7; 5; -3)$.
Вариант 15 **1.** $\mathbf{x} = \{11; 5; -3\}, \mathbf{p} = \{1; 0; 2\}$, $\mathbf{q} = \{-1; 0; 1\}, \mathbf{r} = \{2; 5; -3\}$. **2.** $\mathbf{a} = \{-1; 2; -1\}, \mathbf{b} = \{2; -7; 1\}$, $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{c}_2 = \mathbf{b} - 3\mathbf{a}$. **3.** $A(2; -8; -1), B(4; -6; 0)$, $C(-2; -5; -1)$. **4.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert = 2, \lvert\mathbf{q}\rvert = 3, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/4$. **5.** $\mathbf{a} = \{5; 3; 4\}, \mathbf{b} = \{-1; 0; -1\}$, $\mathbf{c} = \{4; 2; 4\}$. **6.** $A_1(1; 1; -1), A_2(2; 3; 1)$, $A_3(3; 2; 1), A_4(5; 9; -8)$.	***Вариант 16*** **1.** $\mathbf{x} = \{8; 0; 5\}, \mathbf{p} = \{2; 0; 1\}$, $\mathbf{q} = \{1; 1; 0\}, \mathbf{r} = \{4; 1; 2\}$. **2.** $\mathbf{a} = \{7; 9; -2\}, \mathbf{b} = \{5; 4; 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c}_2 = 4\mathbf{b} - \mathbf{a}$. **3.** $A(3; -6; 9), B(0; -3; 6)$, $C(9; -12; 15)$. **4.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}, \mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert = 4, \lvert\mathbf{q}\rvert = 1, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/6$. **5.** $\mathbf{a} = \{3; 10; 5\}, \mathbf{b} = \{-2; -2; -3\}$, $\mathbf{c} = \{2; 4; 3\}$. **6.** $A_1(1; 5; -7), A_2(-3; 6; 3)$, $A_3(-2; 7; 3), A_4(-4; 8; -12)$.
Вариант 17 **1.** $\mathbf{x} = \{3; 1; 8\}, \mathbf{p} = \{0; 1; 3\}$, $\mathbf{q} = \{1; 2; -1\}, \mathbf{r} = \{2; 0; -1\}$. **2.** $\mathbf{a} = \{5; 0; -2\}, \mathbf{b} = \{6; 4; 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \mathbf{c}_2 = 6\mathbf{b} - 10\mathbf{a}$. **3.** $A(0; 2; -4), B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$. **4.** $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert = 1, \lvert\mathbf{q}\rvert = 2, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/3$. **5.** $\mathbf{a} = \{-2; -4; -3\}, \mathbf{b} = \{4; 3; 1\}$, $\mathbf{c} = \{6; 7; 4\}$. **6.** $A_1(-3; 4; -7), A_2(1; 5; -4)$, $A_3(-5; -2; 0), A_4(2; 5; 4)$.	***Вариант 18*** **1.** $\mathbf{x} = \{8; 1; 12\}, \mathbf{p} = \{1; 2; -1\}$, $\mathbf{q} = \{3; 0; 2\}, \mathbf{r} = \{-1; 1; 1\}$. **2.** $\mathbf{a} = \{8; 3; -1\}, \mathbf{b} = \{4; 1; 3\}$, $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c}_2 = 2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$. **3.** $A(3; 3; -1), B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; 1)$. **4.** $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} - 2\mathbf{q}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert = 1, \lvert\mathbf{q}\rvert = 2, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}) = \pi/2$. **5.** $\mathbf{a} = \{3; 1; -1\}, \mathbf{b} = \{1; 0; -1\}$, $\mathbf{c} = \{8; 3; -2\}$. **6.** $A_1(-1; 2; -3), A_2(4; -1; 0)$, $A_3(2; 1; -2), A_4(3; 4; 5)$.

Вариант 19 **1.** $\mathbf{x}=\{-9;-8;-3\}$, $\mathbf{p}=\{1;4;1\}$, $\mathbf{q}=\{-3;2;0\}$, $\mathbf{r}=\{1;-1;2\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{3;-1;6\}$, $\mathbf{b}=\{5;7;10\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$. **3.** $A(-4;3;0)$, $B(0;1;3)$, $C(-2;4;-2)$. **4.** $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=3$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=4$, $(\mathbf{p}\,\widehat{,}\,\mathbf{q})=\frac{\pi}{4}$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;2;2\}$, $\mathbf{b}=\{-3;-3;-3\}$, $\mathbf{c}=\{2;1;2\}$. **6.** $A_1(-4;-1;3)$, $A_2(-2;1;0)$, $A_3(0;-5;1)$, $A_4(3;2;-6)$.	***Вариант 20*** **1.** $\mathbf{x}=\{-5;9;-13\}$, $\mathbf{p}=\{0;1;-2\}$, $\mathbf{q}=\{3;1;-1\}$, $\mathbf{r}=\{4;1;0\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{1;-2;4\}$, $\mathbf{b}=\{7;3;5\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$. **3.** $A(1;-1;0)$, $B(-2;-1;4)$, $C(8;-1;-1)$. **4.** $\mathbf{a}=10\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=4$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=1$, $(\mathbf{p}\,\widehat{,}\,\mathbf{q})=\frac{\pi}{6}$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;1;2\}$, $\mathbf{b}=\{9;2;5\}$, $\mathbf{c}=\{1;1;-1\}$. **6.** $A_1(1;-;1)$, $A_2(-2;0;3)$, $A_3(2;1;-1)$, $A_4(2;-2;-4)$.
Вариант 21 **1.** $\mathbf{x}=\{-15;5;6\}$, $\mathbf{p}=\{0;5;1\}$, $\mathbf{q}=\{3;2;-1\}$, $\mathbf{r}=\{-1;1;0\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{3;7;0\}$, $\mathbf{b}=\{4;6;-1\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-7\mathbf{b}$. **3.** $A(7;0;2)$, $B(7;1;3)$, $C(8;-1;2)$. **4.** $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=8$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=1/2$, $(\mathbf{p}\,\widehat{,}\,\mathbf{q})=\pi/3$. **5.** $\mathbf{a}=\{5;3;4\}$, $\mathbf{b}=\{4;3;3\}$, $\mathbf{c}=\{9;5;8\}$. **6.** $A_1(1;2;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.	***Вариант 22*** **1.** $\mathbf{x}=\{8;9;4\}$, $\mathbf{p}=\{1;0;1\}$, $\mathbf{q}=\{0;-2;1\}$, $\mathbf{r}=\{1;3;0\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{2;-1;4\}$, $\mathbf{b}=\{3;-7;-6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$. **3.** $A(2;3;2)$, $B(-1;-3;-1)$, $C(-3;-7;-3)$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+4\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2.5$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=2$, $(\mathbf{p}\,\widehat{,}\,\mathbf{q})=\pi/2$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;4;2\}$, $\mathbf{b}=\{1;1;0\}$, $\mathbf{c}=\{8;11;6\}$. **6.** $A_1(1;0;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(2;-2;1)$, $A_4(2;1;0)$.
Вариант 23 **1.** $\mathbf{x}=\{23;-14;-30\}$, $\mathbf{p}=\{2;1;0\}$, $\mathbf{q}=\{1;-1;0\}$, $\mathbf{r}=\{-3;2;5\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{5;-1;-2\}$, $\mathbf{b}=\{6;0;7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-6\mathbf{a}$. **3.** $A(2;2;7)$, $B(0;0;6)$,	***Вариант 24*** **1.** $\mathbf{x}=\{3;1;3\}$, $\mathbf{p}=\{2;1;0\}$, $\mathbf{q}=\{1;0;1\}$, $\mathbf{r}=\{4;2;1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{-9;5;3\}$, $\mathbf{b}=\{7;1;-2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$. **3.** $A(-1;2;-3)$, $B(0;1;-2)$,

$C(-2;5;7)$. **4.** $\mathbf{a}=7\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=3, \lvert\mathbf{q}\rvert=1, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=3\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;-1;-6\}, \mathbf{b}=\{1;-3;-7\}$, $\mathbf{c}=\{2;-1;-4\}$. **6.** $A_1(1;2;-3), A_2(1;0;1)$, $A_3(-2;-1;6), A_4(0;-5;-4)$.	$C(-3;4;-5)$. **4.** $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}, \mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=3, \lvert\mathbf{q}\rvert=5, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=2\pi/3$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;1;0\}, \mathbf{b}=\{-5;-4;-5\}$, $\mathbf{c}=\{4;2;4\}$. **6.** $A_1(3;10;-1), A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3), A_4(1;-1;2)$.
Вариант 25 **1.** $\mathbf{x}=\{-1;7;0\}, \mathbf{p}=\{0;3;1\}$, $\mathbf{q}=\{1;-1;2\}, \mathbf{r}=\{2;-1;0\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{4;2;9\}, \mathbf{b}=\{0;-1;3\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{b}-3\mathbf{a}, \mathbf{c}_2=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. **3.** $A(0;3;-6), B(9;3;6)$, $C(12;3;3)$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=7, \lvert\mathbf{q}\rvert=2, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{3;0;3\}, \mathbf{b}=\{8;1;6\}$, $\mathbf{c}=\{1;1;-1\}$. **6.** $A_1(-1;2;4), A_2(-1;-2;-4)$, $A_3(3;0;-1), A_4(7;-3;1)$.	***Вариант 26*** **1.** $\mathbf{x}=\{11;-1;4\}, \mathbf{p}=\{1;-1;2\}$, $\mathbf{q}=\{3;2;0\}, \mathbf{r}=\{-1;1;1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{2;-1;6\}, \mathbf{b}=\{-1;3;8\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$. **3.** $A(3;3;-1), B(5;1;-2)$, $C(4;1;-3)$. **4.** $\mathbf{a}=5\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=5, \lvert\mathbf{q}\rvert=3, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=5\pi/6$. **5.** $\mathbf{a}=\{1;-1;4\}, \mathbf{b}=\{1;0;3\}$, $\mathbf{c}=\{1;-3;8\}$. **6.** $A_1(0;-3;1), A_2(-4;1;2)$, $A_3(2;-1;5), A_4(3;1;-4)$.
Вариант 27 **1.** $\mathbf{x}=\{-13;2;18\}, \mathbf{p}=\{1;1;4\}$, $\mathbf{q}=\{-3;0;2\}, \mathbf{r}=\{1;2;-1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{5;0;8\}, \mathbf{b}=\{-3;1;7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=12\mathbf{b}-9\mathbf{a}$. **3.** $A(-2;1;1), B(2;3;-2)$, $C(0;0;3)$. **4.** $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-4\mathbf{q}, \mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2, \lvert\mathbf{q}\rvert=3, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=\pi/4$. **5.** $\mathbf{a}=\{6;3;4\}, \mathbf{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\mathbf{c}=\{2;1;2\}$.	***Вариант 28*** **1.** $\mathbf{x}=\{0;-8;9\}, \mathbf{p}=\{0;-2;1\}$, $\mathbf{q}=\{3;1;-1\}, \mathbf{r}=\{4;0;1\}$. **2.** $\mathbf{a}=\{-1;3;4\}, \mathbf{b}=\{2;-1;0\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b}, \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}$. **3.** $A(1;4;-1), B(-2;4;-5)$, $C(8;4;0)$. **4.** $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{b}=5\mathbf{q}+\mathbf{p}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=1/2, \lvert\mathbf{q}\rvert=4, (\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})=5\pi/6$. **5.** $\mathbf{a}=\{4;1;1\}, \mathbf{b}=\{-9;-4;-9\}$, $\mathbf{c}=\{6;2;6\}$.

6. $A_1(1; 3; 0)$, $A_2(4; -1; 2)$, $A_3(3; 0; 1)$, $A_4(-4; 3; 5)$.	**6.** $A_1(-2; -1; -1)$, $A_2(0; 3; 2)$, $A_3(3; 1; -4)$, $A_4(-4; 7; 3)$.
Вариант 29	***Вариант 30***
1. $\mathbf{x}=\{8; -7; -13\}$, $\mathbf{p}=\{0; 1; 5\}$, $\mathbf{q}=\{3; -1; 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1; 0; 1\}$.	**1.** $\mathbf{x}=\{2; 7; 5\}$, $\mathbf{p}=\{1; 0; 1\}$, $\mathbf{q}=\{1; -2; 0\}$, $\mathbf{r}=\{0; 3; 1\}$.
2. $\mathbf{a}=\{4; 2; -7\}$, $\mathbf{b}=\{5; 0; -3\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.	**2.** $\mathbf{a}=\{2; 0; -5\}$, $\mathbf{b}=\{1; -3; 4\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.
3. $A(0; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 2; 0)$.	**3.** $A(-4; 0; 4)$, $B(-1; 6; 7)$, $C(1; 10; 9)$.
4. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=1$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/3$.	**4.** $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+-3\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=5\mathbf{p}+\mathbf{q}$; $\lvert\mathbf{p}\rvert=2$, $\lvert\mathbf{q}\rvert=3$, $(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q})=\pi/2$.
5. $\mathbf{a}=\{-3; 3; 3\}$, $\mathbf{b}=\{-4; 7; 6\}$, $\mathbf{c}=\{3; 0; -1\}$.	**5.** $\mathbf{a}=\{-7; 10; -5\}$, $\mathbf{b}=\{0; -2; -1\}$, $\mathbf{c}=\{-2; 4; -1\}$.
6. $A_1(-3; -5; 6)$, $A_2(2; 1; -4)$, $A_3(0; -3; -1)$, $A_4(-5; 2; -8)$.	**6.** $A_1(2; -4; -3)$, $A_2(5; -6; 0)$, $A_3(-1; 3; -3)$, $A_4(-10; -8; 7)$.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Величина, скалярная величина, векторная величина. Геометрический вектор, орт, нулевой вектор, ***коллинеарность***, ***компланарность***, векторный многоугольник, длина вектора, направляющие косинусы. Сложение и вычитание векторов, умножение на скаляр, свойства линейных операций над векторами.
2. Линейная зависимость и независимость векторов.
3. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Координаты вектора.
4. Скалярное произведение векторов.
5. Векторное произведение векторов.
6. Смешанное произведение векторов.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы ненулевых векторов.
2. Единственность разложения вектора по базису.

3. Свойства скалярного произведения; вычисление через координаты векторов.
4. Свойства векторного произведения; вычисление через координаты векторов.
5. Свойства смешанного произведения; вычисление через координаты векторов.

Умения в решении задач

1. Находить сумму (разность) векторов.
2. Находить скалярное, векторное и смешанное произведение.
3. Определять косинус угла между векторами, направляющие косинусы.
4. Вычислять площади с помощью векторного произведения.
5. Вычислять объем параллелепипеда (или пирамиды) с помощью смешанного произведения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. – 90 с.

2. *Веретенников В.Н.* Руководство к решению задач индивидуального задания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. 25 с.

3. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Векторная алгебра. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. – 42 с.

4. *Веретенников В.Н.* Методические указания. Векторная алгебра. Индивидуальное домашнее задание. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. − 20 с.

5. *Дадаян А.А., Масалова Е.С.* Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры. – Мн.: Выш. школа, 1981. – 224 с.

6. *Козлов В. Н., Максимов Ю.Д., Хватов Ю.А*. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов: Учебное пособие. СПб: Изд-во СПБГТУ, 2001, 56 с.

7. *Краснов М*. Л. *и др*. Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.

8. *Кузнецов Л. А*. Сб. заданий по высшей математике. Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк, 1994. – 206 с.

9. *Рябушко А. П. И др.* Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч. 1. – Мн.: Выш. шк. 1990. – 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.. 3
Опорный конспект... 5
1. Векторы (5). 2. Линейные операции с векторами (7). 3. Проекция вектора на ось (10). 4. Координаты вектора в данном базисе (12). 5. Линейные операции над векторами в координатах (14). 6. Деление отрезка в данном отношении (15). 7. Скалярное произведение векторов (15). 8. Векторное произведение векторов (19). 9. Смешанное произведение векторов (22).
Вопросы для самопроверки. 24
Примеры решения задач... 26
Задачи и упражнения для самостоятельной работы................. 43
Индивидуальные домашние задания....................................... 49
Решение типового варианта... 64
Контрольная работа... 65
Знания и умения, которыми должен владеть студент.............. 71
Использованная литература... 73
Содержание... 74

Учебное пособие

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Автор:
Веретенников Валентин Николаевич

Редактор

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать Формат Печать офсетная.
Печ. л. Тираж 300. Зак.№