Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Г. Андреева

МАТЕМАТИКА: СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

РГГМУ
Санкт-Петербург
2013

УДК 556.557

Андреева Т.Г. Математика: Специальные функции и некоторые приложения. – СПб.: РГГМУ, 2013. – 102 с.

ISBN 978-5-86813-367-1

Рецензент: В.К. Рябчук, д-р физ.-мат. наук, проф. физ. фак-та СПбГУ.

В учебном пособии излагаются основы теории специальных функций, наиболее часто встречающихся в физико-математических дисциплинах.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов РГГМУ, изучающих математическую физику и дифференциальные уравнения.

Andreeva T.G. Mathematics: Special functions and some applications. St. Petersburg: RSHU, 2013. – 102 pp.

In this tutorial describe basic foundation of theory special function. This functions more particularly used by research people in physico-mathematical disciplines.

The tutorial assign (purpose) for students and graduate student RSHU which investigate mathematical physics and differential equations.

ISBN 978-5-86813-367-1

Содержание

Contents

Введение

В данном пособии излагаются основы наиболее часто встречающихся специальных функций, к которым приходится обращаться при решении различных физических задач.

Материал пособия представляет необходимый минимум по данной тематике и приближается к краткому справочному пособию.

К специальным функциям приводит решение таких задач, как например, поглощение и отражение акустических или электромагнитных волн, распределение газовых или аэрозольных компонентов в среде, тепловое излучение объектов, а также обработка результатов измерений методами математической статистики.

Пособие состоит из трёх глав. В первой главе рассмотрены основные специальные функции и их свойства. Представлены графики функций, которые получены в пакете MathCAD. Во второй главе иллюстрируется применение функций для решения некоторых классических уравнений математической физики. В третьей главе изложены основные понятия рядов Фурье, используемых для представления решений краевых задач. В конце каждой главы предлагаются различные упражнения, на основные из них даётся ответ.

Выбор приложений в пособии имеет целью проиллюстрировать применение специальных функций и не ставит задачей дать подробное освещение соответствующих разделов математической физики.

Данное пособие представляет собой краткий обзор основных специальных функций и предназначено для студентов старших курсов и аспирантов РГГМУ, которые работают в области физико-математических дисциплин.

Подробно специальные функции и их свойства изложены, в частности, в [1] – [11].

Список дополнительной литературы представляет монографии по математической физике, где можно найти многочисленные примеры с использованием специальных функций.

Глава 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие о дельта-функции. Единичная функция

Дельта-функция (функция Дирака) $\delta(x)$, так же, как и единичная функция (функция Хевисайда) $\mathbf{1}(x)$, относится к так называемым символическим, или обобщенным, функциям и не является функцией в обычном смысле.

Не давая строгого математического определения, под обобщённой функцией будем понимать предельный элемент последовательности семейства непрерывных функций. Этот предельный элемент может не принадлежать классу рассматриваемых функций.

Введение дельта-функции дает возможность использовать ее как удобную математическую модель для описания сосредоточенных величин, таких как, например, точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла и т.д. Имеются в виду явления, описываемые функциями, равными нулю всюду, кроме промежутка очень малой длины, а в этом промежутке принимающие очень большие значения.

Функция $\delta(x)$ может быть многими способами представлена в виде некоторого предела дельта-образных функций, например:

а) дифференцируемыми функциями:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x};$$

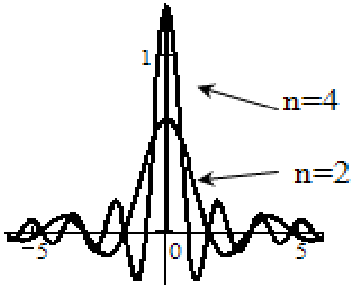

Рис. 1

б) ступенчатыми функциями:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x), \text{ где } \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon \end{cases}.$$

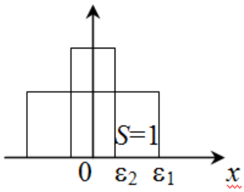

Рис. 2

Основания прямоугольников уменьшаются при $\varepsilon \to 0$, а высоты $\frac{1}{2\varepsilon}$ увеличиваются так, что площади S всех прямоугольников равны 1.

Дельта-функцию можно аппроксимировать и разрывными функциями.

δ-функция обладает следующими с в о й с т в а м и :

1. δ-функция ставит в соответствие всякой непрерывной функции $f(x)$ её значение в точке $x = 0$, являясь ядром интегрального оператора.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \tag{1.1}$$

2. Выполнятся условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{1.2}$$

3. Функция $\delta(x) = 0$ всюду, кроме $x = 0$, где она становится бесконечной и притом такой, что выполняется условие (1.2). Поэтому формально можно записать

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}. \tag{1.3}$$

4. Аналогично, для смещённой дельта-функции $\delta(x - x_0)$ выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \qquad (1.4)$$

Формальная запись: $\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}.$

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = 1.$

5. $\delta(-x) = \delta(x)$, – четная функция, $\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$.

6. $\delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x)$.

7. $\delta'(x) = -\delta'(-x) = -\frac{1}{x}\delta(x)$, $\delta''(x) = \frac{2}{x^2}\delta(x)$.

8. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_0)dx = f'(x_0)$, если $f'(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

9. Справедливо следующее формальное соотношение:

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|x-x_0|.$$

10. δ-функция представима интегралом Фурье:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega, \text{ откуда } \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega = 2\pi\delta(x).$$

10. Связь $\delta(x)$ с единичной функцией.

Единичная функция $\mathbf{1}(x)$, или функция Хевисайда, определяется равенством:

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

При $x = 0$ функция имеет разрыв 1-го рода, причём значение $\mathbf{1}(0)$ не определено. Однако могут быть и другие определения $\mathbf{1}(x)$ при $x = 0$, например, $\mathbf{1}(0) = 1$ или $\mathbf{1}(0) = 0$. Выбор того или иного определения $\mathbf{1}(0)$ зависит от конкретной задачи.

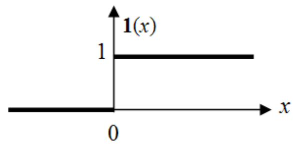

Рис. 3

Смещённая единичная функция:

$$\mathbf{1}(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases}. \qquad (1.5)$$

Производная от единичной функции есть дельта-функция:

$$\mathbf{1}'(x) = \delta(x).$$

Пример. $\int\limits_{-1}^{2} \sin x\, \delta(x - \frac{\pi}{6})dx = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

§ 2. Интегральные функции

В приложениях часто встречаются функции, интегралы от которых не выражаются конечным числом элементарных функций.

2.1. Интегральная показательная функция Ei(x)

Интегральная показательная функция определяется формулой

$$\mathrm{Ei}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt,\ x < 0. \qquad (2.1)$$

Здесь x – аргумент, t – переменная интегрирования, $t = 0$ – особая точка подынтегральной функции. Интеграл сходится при $x < 0$.

С в о й с т в а Ei(x).

1. $\mathrm{Ei}(-\infty) = 0$, $\mathrm{Ei}(0) = -\infty$.

2. Ei(x) представляется степенным рядом

$$\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln(-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,\mathrm{n}},\ x < 0,$$

число $\gamma = 0{,}577\ldots$ – постоянная Эйлера (см. § 3).

3. Иногда используют вспомогательную функцию E1(x):

$$\mathrm{E1}(x) = -\,\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$, интеграл сходится при $x > 0$.

4. Графики Ei(x) и E1(x):

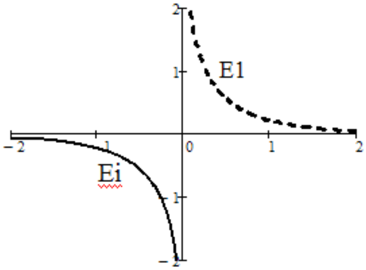

Рис. 4

2.2. Интегральный логарифм Li(x)

Интегральный логарифм определяется формулой

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},\ x > 0. \qquad (2.2)$$

При $x = 1$ функция $Li(x)$ обращается в минус бесконечность, а при $x > 1$ интеграл понимается в смысле главного значения, то есть как предел

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right].$$

С в о й с т в а Li(x).

1. Функцию Li(x) можно представить степенным рядом:

$$\mathrm{Li}(x) = \ln(|\ln x|) + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!},$$ $\gamma = 0{,}577...$ – постоянная Эйлера.

2. График Li(x):

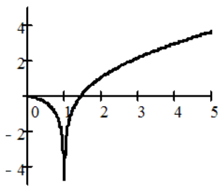

Рис. 5

3. Функции Ei(x) и Li(x) связаны соотношением

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x).$$

2.3. Интегральный синус Si(x)

Интегральный синус определяется формулой

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,,\ x \in (-\infty,\infty). \qquad (2.3)$$

$t = 0$ – устранимая особая точка подынтегральной функции и интеграл существует при любых значениях x.

Свойства Si(x).

1. $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x)$ – нечётная функция.
2. $\mathrm{Si}(0) = 0$, $\mathrm{Si}(\infty) = \pi/2$.
3. Функция Si(x) представима степенным рядом

$$\mathrm{Si}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

4. Вместо Si(x) можно рассматривать функцию si(x):

$$\mathrm{si}(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt\,. \qquad (2.4)$$

Функции связаны соотношением: $\mathrm{Si}(x) = \mathrm{si}(x) + \pi/2$.

5. Графики Si(x) и si(x):

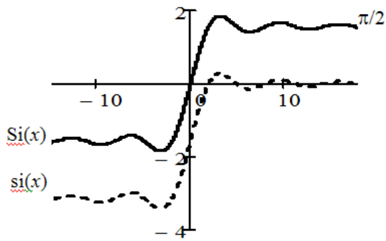

Рис. 6

2.4. Интегральный косинус Ci(x)

Интегральный косинус определяется формулой

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\,,\ x > 0. \qquad (2.5)$$

При $x = 0$ интеграл расходится.

С в о й с т в а Ci(x).

1. Ci(∞) = 0.

2. Ci(x) можно представить степенным рядом

$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}, \ \gamma = 0{,}577... \text{ – постоянная Эйлера.}$$

3. Ci(x) выражается через интегральную показательную функцию

$$\mathrm{Ci}(x) = \frac{Ei\,(ix) + Ei\,(\text{-}\mathrm{i}x)}{2}, \text{ где i}x \text{ – чисто мнимый аргумент.}$$

4. График Ci(x):

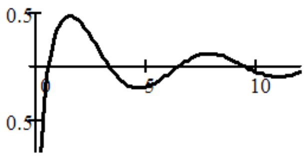

Рис. 7

5. Интегральный косинус можно представить в виде:

$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t}\,dt, \ \gamma = 0{,}577... \text{ – постоянная Эйлера.}$$

2.5. Интеграл ошибок erf (x)

Интеграл ошибок определяется формулой

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt\ . \qquad (2.6)$$

С в о й с т в а erf (x).

1. erf (– ∞) = –1, erf (+∞) = 1.

2. erf (– x) = – erf (x) – нечётная функция.

3. График erf(x):

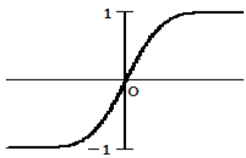

Рис. 8

2.6. Интеграл вероятности Φ(x)

Интеграл вероятности, или **функция Лапласа**, определяется формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{, } x \in (-\infty, \infty). \qquad (2.7)$$

С в о й с т в а $\Phi(x)$.

1. $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$.

2. Часто используется **приведённая** функция Лапласа $\Phi_0(x)$:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,. \qquad (2.8)$$

Связь между функциями: $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \dfrac{1}{2}$.

$\Phi_0(-x) = -\,\Phi_0(x)$ – нечётная функция, $\Phi_0(-\infty) = -\dfrac{1}{2}$, $\Phi_0(\infty) = \dfrac{1}{2}$.

3. $\Phi'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. $\Phi(x) = \mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathrm{erf}(x) = \Phi(x\sqrt{2}\,x)$.

5. Графики функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$:

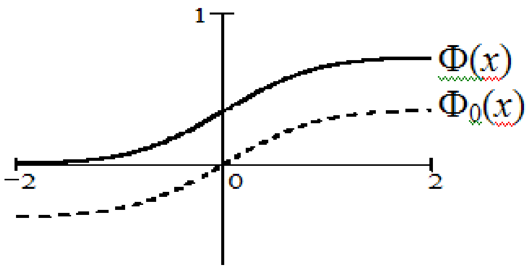

Рис. 9

Функция Лапласа используется в теории вероятностей. В частности, если случайная величина X подчиняется нормальному закону [$X \in \mathrm{N}(m_x, \sigma)$], то вероятность, что X принадлежит интервалу $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right).$$

где m_x – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

2.7. Интегралы Френеля S (x), C(x)

Синус- и косинус-интегралы Френеля определяются формулами:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt,\ C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt. \qquad (2.9)$$

Свойства S(x) и C(x).

1. $S(+\infty) = C(+\infty) = \frac{1}{2}$.

2. Графики *S* (x) и *C*(x):

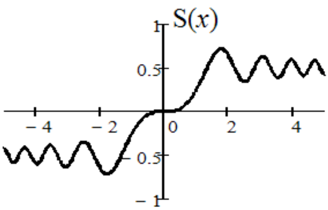

Рис. 10

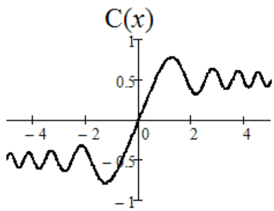

Рис. 11

Задачи.

1. Показать справедливость соотношений:

1) Ei(ln(x) = Li(x); 2) Li(e^x) = Ei(x); 3) Li(x) ~ $\frac{x}{\ln x}$, $x \to 0$;

4) Si(x) ~ x, $x \to 0$; 5) Ei(-x) ~ – $\frac{e^{-x}}{x}$, $x \to \infty$; 6) *Si*(x) ~ – $\frac{\cos x}{x}$, $x \to \infty$;

7) Ci(x) ~ $\frac{\sin x}{x}$, $x \to \infty$.

2. Выразить через интегральные функции следующие неопределённые интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\ln x}$; 2) $\int \frac{\cos x}{x} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{x} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\ln ax}$; 5) $\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} dx$;

6) $\int \frac{e^{mx}}{x} dx$; 7), $\int \frac{e^{x}}{x-a} dx$; 8) $\int \frac{\sin x}{x-a} dx$; 9) $\int \frac{\cos x}{x-a} dx$.

Ответы **2**.

1) Li(x) + C; 2) Ci(x) +C; 3) Si(x) + C; 4) $\frac{1}{a}$ Li(ax) + C; 5) Si($\frac{x}{2}$) + C; 6) Ei(mx) + C; 7) e^{a} Ei(x – a); 8) cos$a$ Si(x – a) + sin$a$ Ci(x – a) + C; 9) cos$a$ Ci(x – a) – sin$a$ Si(x – a) + C .

3. Вычислить интегралы с помощью интегрирования по частям:

1) $\int \sin \alpha x \cdot \mathrm{Ci}(\beta x) dx$; 2) $\int \cos\ \alpha x \cdot \mathrm{Si}(\beta x) dx$; 3) $\int \sin \alpha x \cdot \mathrm{Si}(\beta x) dx$;

4) $\int \cos \alpha x \cdot \mathrm{Ci}(\beta x) dx$; 5) $\int \mathrm{Ci}(\alpha x) \cdot \mathrm{Ci}(\beta x) dx$; 6) $\int \mathrm{Ci}(\alpha x) \cdot \mathrm{Si}(\beta x) dx$;

7) $\int \mathrm{Si}(\alpha x) \cdot \mathrm{Si}(\beta x) dx$.

Ответы **3.** 1) $-\ \frac{\cos \alpha x \cdot Ci(\beta x)}{\alpha} + \frac{Ci(\alpha x + \beta x) + Ci(\alpha x - \beta x)}{2\alpha}$ + C;

2) $\frac{1}{a}$ sin αx Si(βx) + $\frac{1}{2a}$ [Ci(αx + βx) – Ci(αx – βx)] + C; 3) – $\frac{1}{a}$ cos αx Si(βx) + $\frac{1}{2a}$ [Si(αx + βx) – Si(αx – βx)] + C; 4) $\frac{1}{a}$ sin αx Ci(βx) – $-\frac{1}{2a}$ [Si(α + β)x + Si(α– β)x] + C; 5) xCi (αx)Ci(βx) + $\frac{1}{2a}$ [Si(α + + βx)+ Si(αx – βx)] + $\frac{1}{2\beta}$ [Si(α + β)x + Si(α– β)x] – $\frac{1}{a}$ sin αx Ci(βx) – $-\frac{1}{\beta}$ sin βx Ci(αx) + C; 6) x Ci (αx) Si(βx) + $\frac{1}{\beta}$ cosβx Si(αx) – $\frac{1}{a}$ sin αx Si(βx) – $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$Ci(α$x$ + βx) – $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$ Ci(αx – βx) + C;

7) $x\text{Si}(\alpha x)\,\text{Ci}(\beta x) - \frac{1}{2\beta}[\text{Si}(\alpha+\beta)x + \text{Si}(\alpha-\beta)x] - \frac{1}{2a}[\text{Si}(\alpha x+\beta x) +$

$+ \text{Si}(\beta x - \alpha x)] + \frac{1}{a}\cos\alpha x\,\text{Si}(\beta x) + \frac{1}{\beta}\cos\beta x\,\text{Si}(\alpha x) + C.$

§ 3. Гамма-функция. Бета-функция

Гамма-функцией $\Gamma(x)$ называется интеграл Эйлера второго рода:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt. \qquad (3.1)$$

Здесь x – аргумент, t – переменная интегрирования. Интеграл (3.1) не выражается в элементарных функциях. Таблицы значений $\Gamma(x)$ при $1 \le x \le 2$ приведены в [1, 3, 5].

С в о й с т в а $\Gamma(x)$.

1. Найдём область определения $\Gamma(x)$.

Функция $\Gamma(x)$ есть несобственный интеграл 1-го рода на верхнем пределе и 2-го рода на нижнем. На верхнем пределе интеграл сходится при любом x, $-\infty < x < \infty$, на нижнем сходится только при $x > 0$. Поэтому $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$.

2. Вычислим $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} e^{-t} + e^{-0} = 1.$$

Получили: $\Gamma(1) = 1$. (3.2)

3. Формула приведения: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. (3.3)

Докажем формулу (3.3):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x+1-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt = \left\{\begin{matrix} u = t^x, du = xt^{x-1} \\ d\upsilon = e^{-t}dt, \upsilon = -e^{-t}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -t^x e^{-t}\Big\|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x),$$

что требовалось доказать. Тогда

$\Gamma(x+2) = \Gamma[(x+1)+1] = (x+1)\,\Gamma(x+1) = (x+1)\,x\,\Gamma(x),$

$\Gamma(x+3) = (x+2)(x+1)\,x\,\Gamma(x)$ и т. д.

Получили обобщение формулы (3.3):

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\,x\,\Gamma(x). \qquad (3.4)$$

Обычно значения $\Gamma(x)$ заданы в таблицах для $1 \le x \le 2$. Пользуясь формулой (3.4), можно получить значение $\Gamma(x)$ для других интервалов.

Возьмем в равенстве (3.4) значение $x = 1$, тогда

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 1\,\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1) = n!,$$

то есть получили формулу

$$\Gamma(n+1) = n!. \qquad (3.5)$$

Если $n = 0$, то

$$\Gamma(1) = 0! = 1. \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.4) получим

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\,x}. \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) дает возможность вычислять $\Gamma(x)$ при отрицательных $x \ne -n$.

Из (3.7) следует, что точки $x = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – точки разрыва 2-го рода. В этих точках Г-функция обращается в бесконечность:

$$\Gamma(-n) = (-n-1)! = (\pm)\,\infty,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,. \qquad (3.8)$$

4. Производная от $\Gamma(x)$:

$$\Gamma'(x) = \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt\right)'_x = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t\, dt.$$

5. Постоянная Эйлера γ:

$$\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0{,}577\ldots, \qquad (3.9)$$

то есть $\gamma = -\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной к графику $\Gamma(x)$ в точке $x = 1$, взятый со знаком «минус».

Постоянную γ можно представить интегралом

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right) dt$$

или с помощью предела $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - \ln n)$, где $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ – частичная сумма гармонического ряда, который, как известно, расходится.

Постоянная Эйлера γ часто встречается в различных выражениях.

6. Формула дополнения (без доказательства)

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}. \qquad (3.10)$$

Вычислим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ по формуле дополнения. Подставим в формулу (3.10) $x = \frac{1}{2}$: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, тогда получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ = 1,77 2... .

Найдём $\Gamma(n + \frac{1}{2})$:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2^n}\cdot\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{2\cdot 4\ldots 2n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

Получили формулу

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}. \qquad (3.11)$$

7. График $\Gamma(x)$.

Найдём несколько значений $\Gamma(x)$: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1{,}77$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1! = 1$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, $\Gamma(4) = 3! = 6$, $\operatorname{tg}\alpha = \Gamma'(1) = -\gamma$, γ – постоянная Эйлера.

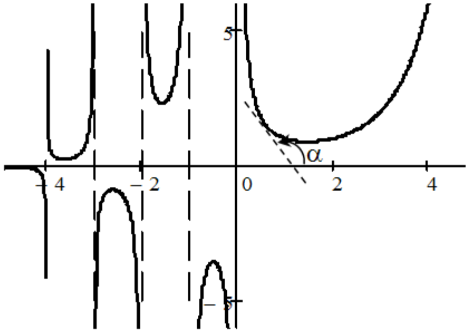

Рис. 12

7. Асимптотика.

Формулы называются асимптотическими, если в них входят обозначения o, O, ~ ; они появляются при рассмотрении пределов. Если

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x) = o(g(x))$ (o – «меньше, чем»);

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\mathrm{M}$ $(\neq 0,\neq\infty)$, то $f(x) = \mathrm{O}[g(x)]$, (O – «равно с точностью до множителя»);

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то $f(x) \sim g(x)$, (~ эквивалентно).

Для Г-функции справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right],\ x\to\infty.$$

Если $x = n$, то $\Gamma(n+1) = n!$ Для вычисления $n!$ применяется формула Стирлинга

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}, \tag{3.12}$$

или $\ln(n!)\approx\ln\sqrt{2\pi n}-n+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n.$

8. Заменой переменной $t = u^2$ $\Gamma(x)$ приводится к виду

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du .$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, получим значение известного интеграла Эйлера–Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

<u>Применение Γ(x).</u>

Обобщение понятия факториала: $x! = \Gamma(x + 1)$.

При вычислении бесконечных произведений.

При вычислении многих определенных интегралов (см. [1]).

Бета-функция B(x, y)

Бета-функцией называется интеграл Эйлера 1-го рода

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt . \tag{3.13}$$

B(x, y) – функция двух аргументов x и y. Область определения: $x > 0$, $y > 0$.

Заменой переменной $t = \cos^2\varphi$ интеграл приводится к виду

$$\mathrm{B}(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\varphi \sin^{2y-1}\varphi \, d\varphi .$$

Сделав подстановку $t = \frac{u}{u+1}$, получим функцию в виде

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x-y}} du .$$

Г-функция и Бета-функция связаны соотношением

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} . \tag{3.14}$$

Бета-функция вычисляется через Γ(x) по формуле (3.14).

Многие определенные интегралы выражаются через Бета-функцию (см. [1]).

Задачи 1. Найти: 1) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$; 3) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; 4) $\mathrm{B}(m, n)$, $m, n \in \mathrm{N}$; 5) $\mathrm{B}(x,1-x)$.

Ответы. 1) $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$; 2) $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$; 3) $\mathrm{B}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$; 4) $\mathrm{B}(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$; 5) $\mathrm{B}(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

Задачи 2. Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sin^{\alpha} x\cos^{\beta} x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$; 3) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t^{b}}dt$; 4) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^{4}}dx$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^{a}}}dx$.

Ответы. 1) $\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{2\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)}$; 2) $\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^{2}}{4\sqrt{\pi}}$; 3) $\frac{\pi}{b\sin(\frac{b}{a}\pi)}$; 4) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; 5) $\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{a})}{a\Gamma(\frac{1}{a}+\frac{1}{2})}$.

§ 4. Цилиндрические функции

Многие модельные физические задачи описываются уравнением вида $\Delta U = \lambda U$, где Δ – оператор Лапласа, λ – параметр. Решение этого уравнения приводит к цилиндрическим функциям, если граница задана в форме цилиндра или шара.

4.1. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя 1-го рода

Уравнение вида

$$(xy')' + (x - \frac{\nu^{2}}{x})y = 0, \tag{4.1}$$

или $$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

называется **уравнением Бесселя** с индексом ν. Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами. Число ν называется *индексом* уравнения.

Умножим второе уравнение на x^2 и получим уравнение Бесселя в виде

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0. \qquad (4.2)$$

Точка $x = 0$ – особая точка дифференциального уравнения.

Любое решение $Z_\nu(x)$ уравнения Бесселя называется **цилиндрической** функцией с индексом ν.

Уравнение Бесселя есть частный случай общего уравнения Штурма–Лиувилля

$$(p(x)\, y')' - q(x)\, y = \rho(x)\, \lambda\, y\,, \qquad (4.3)$$

при $p(x) = x$, $q(x) = \dfrac{\nu^2}{x}$, $\rho(x) = x$ – весовая функция, параметр $\lambda = 1$.

Если $p(x_0) = 0$, то x_0 – особая точка уравнения.

Частное решение линейного уравнения с переменными коэффициентами ищем в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами a_k:

$$y(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\nu},$$

где ν – индекс уравнения.

Чтобы найти a_k, подставим этот ряд в дифференциальное уравнение (4.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим коэффициенты

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \quad a_{2k+1} = 0.$$

Тогда частное решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}. \qquad (4.4)$$

Этот ряд называется **функцией Бесселя 1-го рода** $J_\nu(x)$ с индексом ν.

Степенной ряд (4.4) сходится на всей числовой оси, что можно проверить по признаку Даламбера.

Найдём несколько первых членов ряда (4.4):

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{x^2}{2^2\Gamma(\nu+2)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!\Gamma(\nu+3)} + \ldots\right]. \quad (4.5)$$

$y_1(x) = J_\nu(x)$ есть частное решение уравнения Бесселя.

Рассмотрим поведение $J_\nu(x)$ при $x \to 0$, пользуясь формулой (4.1.5):

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + 0\left(x^2\right)\right],$$

тогда
$$J_\nu(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = 0 \\ 0 & \text{при } \nu > 0 \\ \infty & \text{при } \nu < 0, \quad \nu\text{ - дробное} \end{cases}. \quad (4.6)$$

Уравнение Бесселя не зависит от знака индекса ν, так как в уравнение входит ν^2, поэтому при замене ν на – ν, получим второе частное решение уравнения Бесселя – функцию Бесселя 1-го рода $y_2(x) = J_{-\nu}(x)$ с отрицательным индексом – ν:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k-\nu+1)}. \quad (4.7)$$

Согласно (4.1.6), $J_{-\nu}(0) = \infty$ при дробном ν.

Известно, что если y_1 и y_2 – частные линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения, то общее решение строится по формуле

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Функции y_1 и y_2 линейно независимы, если их вронскиан ни в одной точке не равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для двух функций y_1 и y_2 это условие независимости эквивалентно условию

$$\frac{y_1}{y_2} \neq C,\ C = \text{const} \neq 0 \text{ при всех } x. \qquad (4.8)$$

Если одна из функций y_1 или y_2 в какой-то точке x_0 обращается в бесконечность, а другая конечна в этой точке, то есть $\frac{y_1}{y_2} = 0$ или $\frac{y_1}{y_2} = \infty$ при $x \to x_0$, то условие (4.8) выполняется, и функции y_1 и y_2 линейно независимы.

При дробном параметре v функции $J_v(x)$ и $J_{-v}(x)$ линейно независимы, так как $J_v(0)$ ограничено, а $J_{-v}(0) = \infty$ при $v \neq n$.

Тогда общее решение уравнения Бесселя при дробном v можно записать в виде:

$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x). \qquad (4.9)$$

4.2. Функции Бесселя 1-го рода с целыми индексами

Функцию Бесселя первого рода при $v = n$ получим по формуле (4.1.4):

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(k+n)!}\,. \qquad (4.10)$$

Функции $J_n(x)$ ограничены в нуле, поэтому их часто называют **регулярными** функциями Бесселя.

С в о й с т в а $J_n(x)$.

1. Найдём по формуле (4.10) первые функции:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 2^2} - \ldots,$$

$$J_1(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+1}}{\kappa!\,(\kappa+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2!} + \ldots \text{ и так далее.}$$

2. Можно показать, что $|\, J_n(x) \,| \leq 1$.

3. Графики функций J_0, J_1, J_2:

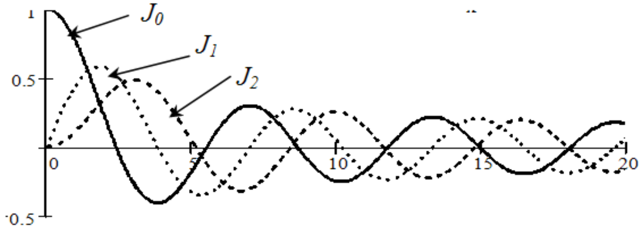

Рис. 13

Точки пересечения графика функции $J_n(x)$ с осью OX есть нули μ_i^n функции $J_n(x)$, то есть корни уравнения $J_n(x) = 0$: $\mu_1^n > \mu_2^n > \mu_3^n > \ldots$

4. Покажем, что при $\nu = n$ функции J_{-n} и J_n линейно зависимы.

Подставим в формулу (4.10) $\nu = -n$ и получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!}.$$

Суммирование можно начать с индекса $k = n$, так как предыдущие члены равны в нулю. Это связано с тем, что факториалы целых отрицательных чисел обращаются в бесконечность (см. свойства Г-функции).

Введем новый индекс суммирования k': $k' = k - n$, $k = k' + n$; если $k = n$, то $k' = 0$. Тогда для $J_{-n}(x)$ получим

$$J_{-n} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+2n-n}}{(k'+n)!(k')!} = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n}}{(k')!(k'+n)!} = (-1)^n J_n(x),$$

то есть
$$J_{-n} = (-1)^n J_n. \tag{4.11}$$

Получили, что J_{-n} и J_n линейно зависимы, так как $\frac{y_1}{y_2} = (-1)^n = \text{const}$.

Из формулы (4.11) следует, что при $\nu = n$ в качестве общего решения нельзя брать линейную комбинацию J_{-n} и J_n , поэтому вводят другие функции.

4.3. Функции Бесселя 2-го и 3-го рода

Функция Бесселя 2-го рода определяется формулой

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \tag{4.12}$$

Функции Бесселя 2-го рода $Y_\nu(x)$ часто называют функциями **Неймана** [обозначают $N_\nu(x)$] или функциями **Вебера**.

При целом индексе $\nu = n$ под Y_n понимают предел

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}. \tag{4.13}$$

Можно показать, что эти функции также являются решениями уравнения Бесселя.

С в о й с т в а $Y_\nu(x)$

1. При $x \to 0$ $Y_\nu \to -\infty$ из-за $J_{-\nu}$, поэтому функции Бесселя 2-го рода из-за поведения в нуле иногда называют **иррегулярными**.

2. Графики функций $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$:

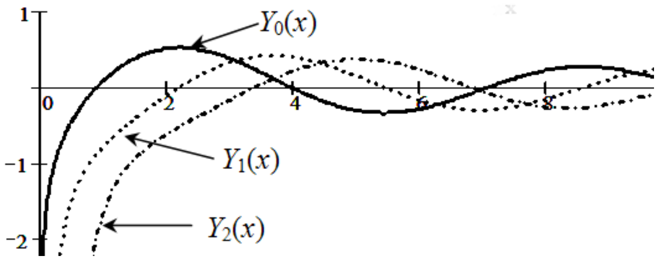

Рис. 14

4.4. Функции Бесселя 3-го рода

Функции Бесселя 3-го рода, или **функции Ханкеля** вводятся согласно формулам

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + \mathrm{i}Y_\nu(x), \tag{4.14}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - \mathrm{i}Y_\nu(x). \tag{4.15}$$

Функции $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ линейно независимы как комплексно сопряженные величины.

В зависимости от задачи, в общем решении уравнения Бесселя в качестве y_1 и y_2 можно брать любую пару функций $J_{-\nu}$, J_ν, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, кроме пары J_{-n} и J_n при $\nu = n$:

1) $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ при всех ν, кроме $\nu = n$,

2) $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ при любом ν,

3) $y(x) = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x)$ при любом ν.

Если на решение накладывается условие: $y(0)$ ограничено, то можно брать только решение $y(x) = J_\nu(x)$, так как только оно ограничено в нуле.

4.5. Асимптотика

Рассмотрим асимптотические формулы для функций Бесселя при $x \to \infty$:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\ Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})},\ H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}.$$

При $\nu = \frac{1}{2}$ формулы становятся точными, например:

$$J_{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x = J_{\frac{1}{2}}(x).$$

4.6. Функции Бесселя с полуцелым индексом

Все функции Бесселя с полуцелым индексом $\nu = n + \frac{1}{2}$. выражаются через элементарные функции. Покажем это, например, для $J_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)}.$$

Подставим $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \cdot \sqrt{\pi}$ при $n = k + 1$.

После преобразований получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}2^{k+1}(k+1)!2^{2k+2}}{k!(2k+2)!\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,.$$

Приведём функции Бесселя при $\nu=\pm\frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,,\ J_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,,\ Y_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,,\ Y_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,,$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}=-i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\mathrm{i}\,x},\ H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}=i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-\mathrm{i}\,x},\ H^{(2)}_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\mathrm{i}\,x},\ H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-\mathrm{i}\,x}\,.$$

При полуцелом индексе часто пользуются **сферическими** функциями Бесселя:

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}\,,\ n_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+\frac{1}{2}}\,,$$

$$h^{(1)}_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}\,,\ h^{(2)}_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}\,.$$

В частности, для $n=0$ имеем:

$$j_0=\frac{\sin x}{x}\,,\ n_0=\frac{\cos x}{x}\,,\ h^{(1)}_0=-\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x}\,,\ h^{(2)}_0=\mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\,x}}{x}\,.$$

Графики сферических функций j_0, j_1, n_0, n_1:

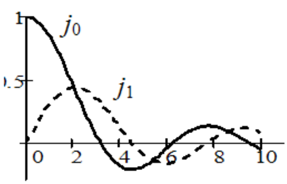

Рис. 15

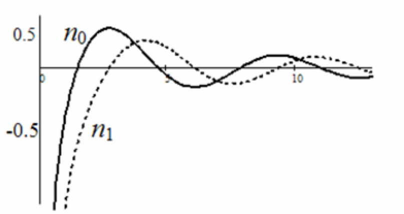

Рис. 16

4.7. Рекуррентные соотношения

Рекуррентные соотношения связывают функции при различных индексах.

Пусть $Z_\nu(x)$ – любая функция Бесселя.

1. $\dfrac{d}{dx}x^{\nu}Z_{\nu}=x^{\nu}Z_{\nu-1}$

2. $\dfrac{d}{dx}x^{-\nu}Z_{\nu}=x^{-\nu}Z_{\nu+1}$

3. $\int x^{\nu}Z_{\nu-1}dx=x^{\nu}Z_{\nu}+c$

4. $\int x^{-\nu}Z_{\nu+1}dx=-x^{-\nu}Z_{\nu}+c$

5. $Z_{\nu+1}+Z_{\nu-1}=2\dfrac{\nu}{x}Z_{\nu}$

6. $Z_{\nu+1}-Z_{\nu-1}=-2Z_{\nu}^{/}$

Рекуррентное соотношение $Z_{\nu+1}+Z_{\nu-1}=2\dfrac{\nu}{x}Z_{\nu}$ позволяет все функции Бесселя целых индексов выразить через функции индексов 0 и 1. Например, полагая $Z_{\nu}(x)=J_{\nu}(x)$, $\nu=n-1$, получим

$$J_n(x)=2\frac{(n-1)}{x}J_{n-1}-J_{n-2}(x).$$

Задачи. Показать, что:

1) $J_2(x)=\dfrac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$; 2) $J'_0(x)=-J_1(x)$; 3) $J_2(x)=J''_0(x)-\dfrac{1}{x}J'_0(x)$;

4) Проверить, что функции $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ удовлетворяют уравнению Бесселя при $\nu=\dfrac{1}{2}$: $y''+\dfrac{1}{x}y'+(1-\dfrac{1}{4x^2})y=0$.

5) Выразить через элементарные функции $J_{\frac{3}{2}}(x)$, $J_{-\frac{3}{2}}(x)$, $J_{\frac{5}{2}}(x)$, $J_{-\frac{5}{2}}(x)$, $Y_{\frac{3}{2}}(x)$, $Y_{-\frac{3}{2}}(x)$, $Y_{\frac{5}{2}}(x)$, $Y_{-\frac{5}{2}}(x)$.

Ответ. $J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}[\dfrac{\sin x}{x}-\cos x]$, $J_{-\frac{3}{2}}(x)=Y_{\frac{3}{2}}(x)=$
$=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\dfrac{x\sin x+\cos x}{x}$.

6) Показать, что: а) $J_0(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4} + O(x^4)$ при $x \to 0$; б) $Y_0(x) =$

$= \dfrac{2}{\pi}\left(\ln\dfrac{x}{2} + \gamma\right)J_0(x) + O(x^2)$ при $x \to 0$, γ – постоянная Эйлера.

7) Вычислить интегралы 1) $\int_0^x x^7 J_2 dx$; 2) $\int_0^x x^5 J_2 dx$; 3) $\int_0^x x^2 J_1 dx$;

4) $\int_0^x xJ_0 dx$.

Ответ: 1) $-2x^6J_0(x) + C$; 2) $-2x^4J_0(x) + C$; 3) $x^2J_2(x) + C$; 4) $xJ_1(x) + C$.

8) Выразить интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ через функции Бесселя при $\nu = \pm\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $C(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} J_{\frac{1}{2}}(t)dt$, $S(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} J_{-\frac{1}{2}}(t)dt$.

Тестовая задача. Из перечисленных линейных комбинаций $J_n(x) + N_n(x)$, $J_n(x) \times N_n(x)$, $J_n(x) + iN_n(x)$ функцией Ханкеля первого рода

Варианты ответов: 1) является линейная комбинация $J_n(x) + iN_n(x)$;

2) не является никакая из перечисленных линейных комбинаций;

3) является линейная комбинация $J_n(x) + N_n(x)$;

4) является линейная комбинация $J_n(x) \times N_n(x)$.

Ответ. Вариант 1).

4.8. Обобщённое уравнение Бесселя

Дифференциальное уравнение вида

$$(xy')' + \left(k^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0 \qquad (4.16)$$

называется **обобщённым** уравнением Бесселя, k – заданное число, ν – параметр.

Уравнение (4.16) в развёрнутом виде:

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})\, y = 0, \qquad (4.17)$$

или $$x^2 y'' + xy' + \left(k^2 x^2 - \nu^2\right) y = 0. \qquad (4.18)$$

Покажем, что это уравнение заменой $t = kx$ приводится к уравнению Бесселя.

Имеем $dt = kdx$, $\frac{dt}{dx} = k$, $y'x = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'xk$,

$y''_x = \left(ky'_t\right)_t \frac{dt}{dx} = k^2 y''_{tt}$.

Подставим эти величины в уравнение (4.18):

$x^2 k^2 y''_{tt} + xky'_t + \left(k^2 x^2 - \nu^2\right) y = 0$, так как $x = \frac{t}{k}$, то

$$\frac{t^2}{k^2} k^2 y'' + \frac{x}{k} ky' + \left(k^2 \frac{t^2}{k^2} - \nu^2\right) y = 0.$$

Получили уравнение Бесселя

$$t^2 y''_{tt} + ty'_t + \left(t^2 - \nu^2\right) y = 0.$$

Решение этого уравнения есть любая функция Бесселя $Z(t)$. Заменив аргумент t на kx, получим частное решение обобщенного уравнения Бесселя:

$$Z(kx) = \{J_\nu(kx), \ldots, H_\nu^{(1,2)}(kx)\}.$$

Общим решением уравнения (4.16) будет линейная комбинация любых двух функций, кроме пары $J_\nu(kx)$ и $J_{-\nu}(kx)$ при $\nu = n$.

4.9. Модифицированные функции Бесселя

Если в обобщённом уравнении Бесселя (4.16) $k^2 = -1$ или в общем случае $k^2 = -æ^2$, то имеем **модифицированное** уравнение Бесселя:

$$\left(xy'\right)' - \left(x + \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0, \qquad (4.19)$$

или **обобщённое модифицированное** уравнение Бесселя:

$$(xy')' - (æ^2 x + \frac{\nu^2}{x})\, y = 0. \qquad (4.20)$$

Решением уравнения (4.19) являются функции Бесселя мнимого аргумента *ix* или аргумента *iæx* для уравнения (4.20): $Z_\nu(kx) = Z_\nu(i\kappa x)$, $Z_\nu(kx) = Z_\nu(iæx)$, *i* – мнимая единица.

Поставим мнимый аргумент *ix* в функцию Бесселя 1-го рода

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

и получим

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k+\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = i^\nu I_\nu(x),$$

где $I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$ – вещественная функция.

Чтобы не иметь дело с комплексными величинами, вводят вещественные функции

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \tag{4.21}$$

– **модифицированная** функция Бесселя и

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix); \tag{4.22}$$

– **модифицированная** функция Ханкеля, или функция **Макдональда**.

Если æ $\neq 1$, то получим **обобщённые модифицированные** функции I_ν(æ x) и K_ν(æ x).

Общее решение модифицированного уравнения Бесселя можно взять в виде:

1) $y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$, ν – дробное ($\nu \neq n$), или

2) $y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$, ν – любое;

Общее решение обобщённого модифицированного уравнения Бесселя можно взять в виде:

1) $y(x) = C_1 I_\nu$(æ x) + $C_2 I_{-\nu}$(æ x), ν – дробное ($\nu \neq n$), или

2) $y(x) = C_1 I_\nu$(æ x) + $C_2 K_\nu$(æ x), ν – любое.

Асимптотические формулы для модифицированных функций при $x \to \infty$:

$$I_\nu \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^x ;\ K_\nu \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} .$$

Графики функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$:

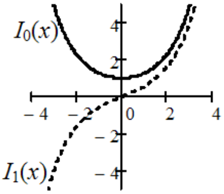

Рис. 17

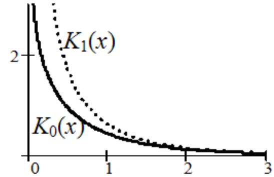

Рис. 18

Задачи.

1) Показать, что при $x \to 0$: а) $K_0(x) \sim -\ln x$, б) $K_n(x) \sim \frac{1}{2^{n+1}} x^{-n}$.

2) Проверить соотношение $I'_0(x) = I_1(x)$.

3) Выразить через элементарные функции $I_{\frac{3}{2}}(x)$, $I_{-\frac{3}{2}}(x)$, $K_{\frac{1}{2}}(x)$, $K_{\frac{3}{2}}(x)$.

Ответ 3) : $I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \left[chx - \frac{shx}{x} \right]$, $I_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \left[shx - \frac{chx}{x} \right]$, $K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} e^{-x}$, $K_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

Асимптотическое поведение функций Бесселя при $x \to 0$ и $x \to \infty$ представлено в табл. 1.

Таблица 1

Функция	Название	$x \to 0$	$x \to \infty$
1	2	3	4
$J_\nu(x)$	Функция Бесселя I рода с индексом $\nu \geq 0$	$J_0(0)$ – ограничено, $J_\nu(0) \to 0$, $\nu > 0$	$J_\nu(\infty) \to 0$
$J_{-\nu}(x)$	Функция Бесселя I рода с индексом $\nu < 0$	$J_{-\nu}(0) \to -\infty$	$J_{-\nu}(\infty) \to 0$
$Y_\nu(x)$	Функция Бесселя II рода с индексом ν (функция Неймана)	$Y_\nu(0) \to -\infty$	$Y_\nu(\infty) \to 0$

Окончание табл. 1

1	2	3	4
$H_\nu^{(1)}(x)$	Функция Бесселя III рода с индексом ν (функция Ханкеля I)	$H_\nu^{(1)}(0) \to -i\infty$	$H_\nu^{(1)}(\infty) \to \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i x}$
$H_\nu^{(2)}(x)$	Функция Бесселя III рода с индексом ν (функция Ханкеля II)	$H_\nu^{(2)}(0) \to i\infty$	$H_\nu^{(2)}(\infty) \to \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-i x}$
$I_\nu(x)$	Модифицированная функция Бесселя I	$I_0(0)$ – ограничено, $I_\nu(0) \to 0$, $\nu > 0$	$I_\nu(\infty) \to \infty$
$K_\nu(x)$	Модифицированная функция Бесселя II (функция Макдональда)	$K_\nu(0) \to \infty$	$K_\nu(\infty) \to 0$

4.10. Ортогональность функций Бесселя

Рассмотрим *краевую задачу*: найти ненулевое решение обобщённого уравнения Бесселя

$$(xy')' + (k^2 x - \frac{\nu^2}{x})y = 0, \qquad (4.23)$$

где k – заданное число, $x \in [0, \ell]$, удовлетворяющие на концах интервала $[0, \ell]$ однородным граничным условиям:

$$\begin{cases} y(0) & -\text{ограничено} \\ y(\ell) & = 0 \end{cases}. \qquad (4.24)$$

Данная краевая задача есть *задача Штурма–Лиувилля* (ЗШЛ) (см. главы 2 и 3).

Общее решение уравнения Бесселя при любом ν имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx).$$

В силу первого граничного условия $C_2 = 0$, так как надо отбросить слагаемое с функцией $Y_\nu(kx)$ из-за её поведения в нуле: $Y_\nu \to \infty$ при $x \to 0$.

Тогда $y(x) = C_1 J_\nu(kx)$ – общее решение.

Из второго граничного условия получим $y(\ell) = C_1 J_\nu(k\ell) = 0$.

Ищем ненулевое решение, поэтому $C_1 \neq 0$, тогда $J_\nu(k\ell) = 0$.

Получили: $k\ell = \mu_n^\nu$, $n = 1, 2, \ldots$, где μ_n – нули функции Бесселя с индексом ν.

Числа $\{\mu_n^\nu\}_{n=1}^\infty$ заданы в таблицах, $k_n = \dfrac{\mu_n^\nu}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$,

$\lambda_n = k_n^2 = \left(\dfrac{\mu_n^\nu}{\ell}\right)^2$ – собственные значения задачи Ш-Л.

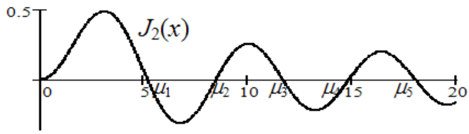

Рис. 19

На рис. 19 точки пересечения графика функции $J_2(x)$ с осью OX есть нули μ_1, μ_2, …, μ_n функции $J_2(x)$.

Краевая задача даёт систему собственных функций, ортогональных на интервале $(0, \ell)$ с весом $\rho = x$

$$\left\{J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right)\right\}_{n=1}^\infty.$$

Запишем условие ортогональности для функций Бесселя :

$$[J_\nu(\frac{\mu_n^\nu}{\ell}x), \quad J(\frac{\mu_k^\nu}{\ell}x)] = \int_0^\ell J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right)J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{\ell}x\right)xdx =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\ell^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_\nu^n) & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}.$$

Функция $f \in L_2[0; \ell]$ раскладывается в ряд Фурье на отрезке $[0; \ell]$ по функциям Бесселя 1-го рода:

$$f(x) = C_1 J_\nu\left(\frac{\mu_1^\nu}{\ell}x\right) + C_2 J_\nu\left(\frac{\mu_2^\nu}{\ell}x\right) + \ldots = \sum_{n=1}^\infty C_n J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right),$$

где $\quad C_n= \dfrac{\left[f, J_\nu\left(\dfrac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right)\right]}{\left\| J_\nu\left(\dfrac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right)\right\|^2} = \dfrac{2}{\ell^2 J_{\nu+1}^2\left(\mu_n^\nu\right)}\int\limits_0^\ell f(x) J_\nu\left(\dfrac{\mu_n^\nu}{\ell}x\right) x\,dx$ – коэффициенты Фурье.

Если $f(x)$ удовлетворяет краевым условиям данной задачи и имеет производные до второго порядка, то можно показать, что её ряд Фурье сходится равномерно на $[0,\ell]$.

***Пример* 1.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 1 - x$ по системе $\left\{J_0\left(\mu_n x\right)\right\}_{n=1}^\infty$ на отрезке [0, 1], где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ – положительные корни функции $J_0(x)$: $\mu_1 = 2{,}40$, $\mu_2 = 5{,}52$, $\mu_3 = 8{,}62$, … .

Решение. Ряд имеет вид

$$1 - x = C_1 J_0(\mu_1 x) + C_2 J_0(\mu_2 x) + C_3 J_0(\mu_3 x) + \ldots + C_n J_0(\mu_n x) + \ldots$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формуле

$$C_n = \frac{2}{[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^1 x\,(1 - x) J_0(\mu_n x)\,dx.$$

Чтобы найти интеграл, сделаем замену переменной $z = \mu_n x$, тогда получим

$$C_n = \frac{2}{[J_1(\mu_n)]^2}\left[\frac{1}{(\mu_n)^2}\int\limits_0^{\mu_n} z J_0(z)\,dz - \frac{1}{(\mu_n)^3}\int\limits_0^{\mu_n} z^2 J_0(z)\,dz\right].$$

Проинтегрируем по частям второй интеграл и используя рекуррентные соотношения (п. 4.6), получим

$$C_n = \frac{2}{[J_1(\mu_n)]^2 \mu_n^3}\int\limits_0^{\mu_n} J_0(z)\,dz.$$

Вычислим первые два коэффициента:

$$C_1 = \frac{2}{[J_1(2{,}42)]^2 (2{,}42)^3}\int\limits_0^{2{,}42} J_0(z)\,dz = 0{,}779,$$

$$C_2 = \frac{2}{[J_1(5,5)]^2(5,5)^3}\int_0^{5,5} J_0(z)dz = 0,069.$$

Следовательно, искомый ряд имеет вид:

$$1 - x = 0,779J_0(2,405x) + 0,069\, J_0(5,520x) + \ldots$$

На рис. 20 функция $f(x) = 1 - x$ (сплошная линия) аппроксимируется двумя членами ряда $\tilde{y} = 0,779J_0(2,405x) + 0,069\ J_0(5,520x)$ (пунктирная линия).

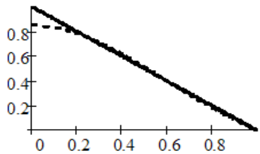

Рис. 20

Пример 2.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x - x^3$ по системе $\{J_1(\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ на интервале [0, 1], где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ – положительные корни функции $J_1(x)$: $\mu_1 = 3,83$, $\mu_2 = 7,02$, $\mu_3 = 10,20$, … .

Решение. Ряд имеет вид

$$x - x^3 = C_1\, J_1(\mu_1 x) + C_2\, J_1(\mu_2 x) + C_3\, J_0(\mu_3 x) + \ldots + C_n\, J_1(\mu_n x) + \ldots$$

Найдём C_n, используя рекуррентные соотношения:

$$C_n = \frac{2}{[J_2(\mu_n)]^2}\int_0^1 x\,(x - x^3)J_1(\mu_n x)dx = -\frac{2}{J_0^2(\mu_n)}\cdot\frac{8J_0(\mu_n)}{\mu_n^3} =$$

$$= -\frac{16}{\mu_n^3 J_0(\mu_n)}.$$

Получили:

$$x - x^3 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\mu_n^3 J_0(\mu_n)} = 0,706J_1(3,83x) - 0,154J_1(7,02x) +$$

$$+ 0,061J_1(10,2x) + \ldots$$

На рис. 21 функция $f(x) = x - x^3$ (сплошная линия) аппроксимируется одним членом ряда (пунктирная линия), на рис. 22 – двумя членами, на рис. 23 – тремя членами данного ряда:

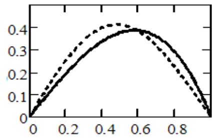

Рис. 21

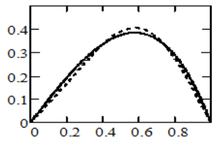

Рис. 22

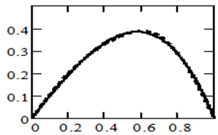

Рис. 23

Из рисунков видно, что уже два члена хорошо приближают данную функцию.

***Пример* 3**. Разложение в ряд Фурье плоской волны $e^{-ix\sin\varphi}$ имеет вид $e^{-ix\sin\varphi} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{-in\varphi}$.

§ 5. Ортогональные полиномы

5.1. Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра

Дифференциальное уравнение

$$[(1-x^2)\,y']' + \lambda y = 0,\ x \in [-1,\,1] \qquad (5.1)$$

или в развёрнутом виде

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

называется **уравнением Лежандра**, λ – параметр.

Уравнение (5.1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами. Точки $x = \pm\,1$ – особые точки уравнения.

Уравнение Лежандра есть частный случай уравнения Штурма–Лиувилля при $p = 1 - x^2$, $q = 0$, $\rho = 1$.

Решение уравнения с переменными коэффициентами ищут в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Чтобы найти коэффициенты a_k, надо подставть ряд в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициены при одинаковых степенях x.

Если $\lambda \neq n(n+1)$, то ряд $\sum a_\kappa x^\kappa$ расходится в особых точках $x = \pm\,1$. Если $\lambda = n(n+1)$, то $y(\pm 1) \neq \infty$, и ряд сходится в точках $x = \pm\,1$. В этом случае коэффициенты a_k обращаются в нуль при $k > n$, ряд обрывается и получается, что $y(x)$ есть полином степени n.

Это ограниченное в точках $x = \pm 1$ решение называется **полиномом Лежандра** и обозначается $P_n(x)$:

$$y_1(x) = P_n(x),\ n = 0,1,2,\ \ldots,\ x \in [-1, 1]. \qquad (5.2)$$

Линейно независимое решение $y_2(x)$ обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Оно называется **функцией Лежандра 2-го рода** и обозначается $Q_n(x)$.

Уравнение Лежандра при $\lambda = n(n+1)$ имеет вид

$$[(1 - x^2)y']' + n(n + 1)y = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (5.3)$$

С в о й с т в а $P_n(x)$.

1. Полиномы Лежандра удобно вычислять при помощи **формулы Родрига**

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n,\ n = 0,\ 1\ldots . \qquad (5.4)$$

2. Чётность P_n совпадает с четностью n: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, то есть P_n – чётные, если n – чётное и P_n – нечётные, если n – нечётные.

3. Найдём по формуле (5.4) первые полиномы:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2},\ P_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}(x^2 - 1)x,\ \ldots .$$

4. $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, то есть $P_n(-1) = 1$, если n – чётное и $P_n(-1) = -1$, если n – нечётное.

5. $P_n(0) = 0$, n – нечётное, $P_n(0) \neq 0$, n – чётное.

6. Графики $P_1(x)$, $P_2(x)$ и $P_3(x)$:

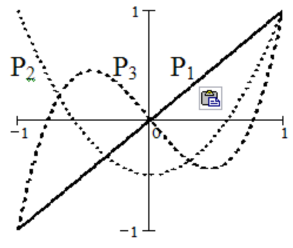

Рис. 24

7. Производящая функция.

Полиномы Лежандра можно получить как коэффициенты при разложении в ряд Тейлора по степеням t функции $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x + t + t^2}}$, которая называется **производящей функцией**:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x+t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \ , \ C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = P_n(x).$$

8. Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

1) $(n+1)P_n + 1(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$;

2) $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$;

3) $\int P_n dx = \frac{1}{2n+1}\left[P_n(x) - P_{n-1}(x)\right] + C$.

9. Ортогональность.

Система функций $\{P_n(x)\}\Big|_0^{\infty}$ ортогональна на [–1, 1] с весом $\rho = 1$:

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

Функция $f(x) \in L_2[-1, 1]$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале (–1, 1)

$$f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n \ , \qquad (5.5)$$

$$C_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx. \qquad (5.6)$$

10. Рассмотрим разложение многочлена степени k $y(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Применяя формулы (5.5), (5.6) получим не ряд, а конечную сумму $y(x) = \sum_{n=0}^{k} C_n P_n(x)$, так как коэффициенты $C_n = 0$ при $n > k$.

В частности:

1) если $y(x) = a_0$, то только $C_0 \neq 0$;

2) если $y(x) = a_0 + a_1 x$ – полином 1-й степени, то не равны нулю только коэффициенты C_0 и C_1 ;

3) если $y(x)$ содержит только нечётные степени x, то сумма $\sum_{n=0}^{k} C_n P_n(x)$ будет содержать слагаемые только с нечётными

номерами полиномов Лежандра.

Коэффициенты C_n в случае разложения многочлена степени k проще вычислять не по формулам (5.6), а методом неопределённых коэффициентов. Напишем, например, разложение многочлена $y(x) = 1 - x + 2x^2$ в виде

$$1 - x + 2x^2 = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}\right),$$

где C_0 , C_1 , C_2 – неопределённые коэффициенты. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_0 - \frac{1}{2}C_2 \\ -1 &= C_1 \\ 2 &= \frac{3}{2}C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{5}{3} \\ C_1 &= -1 \\ C_2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Итак, $1 - x + 2x^2 = \dfrac{5}{3}\,P_0(x) - P_1(x) + \dfrac{4}{3}P_2(x)$.

11. Если от переменной x перейти к переменной θ заменой $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, то получим полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$. Найдем вид уравнения Лежандра в этом случае. В уравнении (5.3)

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\,\frac{d}{dx}y\right] + n(n + 1)y = 0$$

перейдём к новой переменной θ:

$$x = \cos\theta,\ dx = -\sin\theta\, d\theta,\ \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta},$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}y\text{, то есть }\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}.$$

Подставим преобразованный оператор дифференцирования в уравнение Лежандра. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right) + n(n+1)y = 0,\ 0 \le \theta \le \pi. \qquad (5.7)$$

Запишем условие ортогональности системы функций $\{P_n(\cos\theta)\}\Big|_{n=0}^{\infty}$.

$$\left(P_n, P_m\right) = \int_0^{\pi} P_n\left(\cos\theta\right) P_m\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}.$$

Функция $f(\theta) \in L_2[0, \pi]$ разлагается в ряд Фурье по полиномам $P_n(\cos\theta)$ на $[0, \pi]$:

$$f(\theta) = C_0 P_0 + C_1 P_1(\cos\theta) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta),$$

где $C_n = \dfrac{2n+1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta$.

Если $f(\theta)$ – тригонометрический многочлен степени k, то разложение $f(\theta)$ не будет содержать полиномов $P_n(\cos\theta)$ при $n > k$.

12. Разложение плоской волны:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos\theta) j_n(kr), \quad (5.8)$$

где $j_n(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ – сферические функции Бесселя первого рода.

13. Второе частное решение уравнения Лежандра $y_2(x) = Q_n(x)$, линейно независимое с $P_n(x)$, неограниченно возрастает при $x \to \pm 1$.

Приведём эти решения для $n = 0, 1, 2$:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1) \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{3}{2} x.$$

Общее решение уравнения Лежандра запишется тогда в виде

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример. Разложить по полиномам Лежандра функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-1, 1]$ и имеющую разрыв первого рода в точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Решение. Вычислим C_n по формуле (5.1.6).

Так как здесь $C_n = \dfrac{2n+1}{2}\int\limits_0^1 P_n(x)dx$, то $C_0 = \dfrac{1}{2}$, $C_n = \dfrac{1}{2}[P_{n-1}(0) -$ $- P_{n+1}(0)]$, $n \geq 1$.

Получили разложение

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \frac{75}{256}P_7(x) + \ldots$$

На рис. 25 функция $f(x)$ представлена первыми четырьмя членами ряда (пунктирная линия):

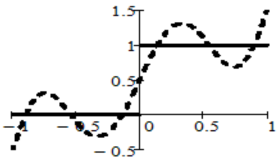

Рис. 25

5.2. Присоединённые полиномы Лежандра

Дифференциальное уравнение

$$\left[\left(1-x^2\right)y'\right]' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, \; x \in [-1, 1], \qquad (5.9)$$

при $\lambda = n(n+1)$, где m, n – целые, $n \geq 0$, $m = 0, 1, \ldots n$, называется **присоединенным** уравнением Лежандра.

Частными решениями $y_1(x)$, ограниченным в особых точках $x = \pm 1$ являются **присоединённые** полиномы Лежандра $P_n^m(x)$, а неограниченные в этих точках частные решения есть **присоединённые функции** Лежандра второго рода $Q_n^m(x)$.

Общее решение присоединенного уравнения Лежандра имеет вид:

$y(x) = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x)$.

С в о й с т в а $P_n^m(x)$.

1. Присоединённые полиномы $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ удобно находить по **формулам Родрига:**

$$P_n^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

$$Q_n^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m},\ m = 0,\ 1, \ldots,\ n. \tag{5.10}$$

2. $P_n^0(x) = P_n(x)$ – присоединённые полиномы равны полиномам Лежандра при $m = 0$.

3. Найдём несколько первых полиномов:

$$P_0^0 = P_0 = 1,\ P_1^0(x) = P_1(x) = x,\ P_2^0(x) = P_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{1 - x^2},\ P_2^1 = 3x\sqrt{1 - x^2},\ P_2^2 = 3(1 - x^2).$$

4. Ортогональность.

Система функции $\left\{P_n^m(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на [-1, 1]:

$$\left(P_n^m, P_k^{m'}\right) = \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^{m'}(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, m \neq m', \\ \dfrac{2}{2n+1} \cdot \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n, m = m' \end{cases}.$$

Если перейти от переменной x к новой переменной θ по формуле $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, то получим функции $P_n^m(\cos\theta)$:

$$P_1^0(\cos\theta) = x = \cos\theta,\ P_1^1(\cos\theta) = \sqrt{1 - x^2} = \sin\theta,$$

$$P_2^1 = 3x\sqrt{1 - x^2} = 3\cos\theta\,\sin\theta = \frac{3}{2}\sin 2\theta,\ P_2^2 = 3(1 - x^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

и т.д.

Тестовая задача.

Предел производной присоединённой функции Лежандра $P_{11}^{(1)}(x)$ при $x \to 1$ равен:

Варианты ответов: 1) $\frac{\sqrt{11}}{7}$, 2) $\frac{2}{41}$, 3) $\frac{23}{4}$, 4) ∞.

Ответ. Вариант 4) (при дифференцировании $\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n(x)}{dx}$

получим $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}P_n'(x)+...).$

5.3. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+n^2\,y=0\,,\ x\in[-1,\,1],\ n=0,\,1,\,2\dots \qquad (5.11)$$

С в о й с т в а $T_n(x)$.

1. $T_n(\pm1)\neq\infty$.
2. $T_n(x)$ можно вычислить по формуле:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x). \qquad (5.12\ )$$

3. Первые полиномы:

$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2\,x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x.$

4. Графики $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$:

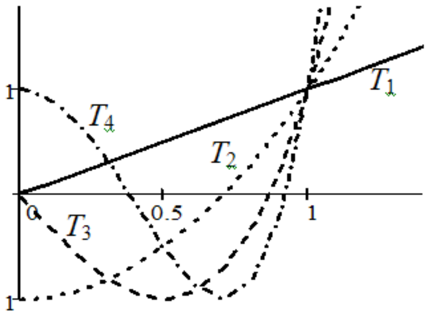

Рис. 26

5. Рекурентная формула: $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$.
6. Производящая функция: $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(x)\,t^n\,,|x|\le1,|\,t\,|<1\,.$
7. Ортогональность.

Система функций $\{T_n(x)\}\Big|_0^\infty$ ортогональна на [–1, 1] с весом

$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}.$$

Полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 2)\,y = 0,\ x \in [-1, 1],\ n = 0, 1, 2\ldots$ (5.13)

Первые полиномы:

$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 3x,\ \ldots$.

Система функций $\{U_n(x)\}\Big|_0^\infty$ ортогональна на [–1, 1] с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$(U_n, U_k) = \int_{-1}^{1} U_n(x)U_k(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = k \end{cases}.$$

Полиномы Чебышева применяются в теории аппроксимации функций.

Пусть $f(x)$ – непрерывная на [–1, 1] функция. Требуется заменить её другой, аналитически более простой функцией $g(x)$. Выбрать функцию $g(x)$ надо так, чтобы расстояние d между $f(x)$ и $g(x)$ было минимальным. За расстояние d при равномерном приближении принимается наибольшее значение абсолютного отклонения на заданном интервале:

$$d(f, g) = \max|\,f(x) - g(x)|,\ x \in [-1, 1].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $p_n(x)$ – совокупность полиномов степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, заданных на отрезке [–1, 1]. Рассмотрим величину $M(p_n) = \max|\,p_n(x)|,\ x \in [-1, 1]$.

Наименьшее значение $M(p_n)$ достигается при

$p_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, где $T_n(x)$ – полиномы Чебышева.

Из теоремы следует, что $d(f, g)$ принимает минимальное значение, если $g(x)$ будет частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$ по полиномам Чебышева

$$g(x) = S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k T_k(x),$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ C_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ при } n \neq 0.$$

Из теоремы вытекает, что полином n-й степени

$$Q_n = \frac{T_n\left(\frac{x}{a}\right)}{T_n\left(\frac{1}{a}\right)},$$

равный 1 при $x = 1$, в промежутке $[-a,\ a]$ даёт наименьшее отклонение от нуля, равное $\pm\frac{1}{T_n\left(\frac{1}{a}\right)}$.

***Пример* 1**. Определить промежуток изменения x, в котором $|Q_5(x)| \leq 0{,}1$.

Решение. Надо найти параметр a из уравнения $T_5\left(\frac{1}{a}\right) = 10$. Используя пакет MathCad, найдём корень уравнения $T_5(x) = 10$: $x = \frac{1}{a} = 1{,}195$, $a = 0{,}837$. Тогда получим, что полином, который по модулю не превосходит 0,1 на интервале $-0{,}837 \leq x \leq 0{,}837$ имеет вид (рис. 27)

$$Q_5 = \frac{T_5(1{,}195x)}{T_5(1{,}195)}.$$

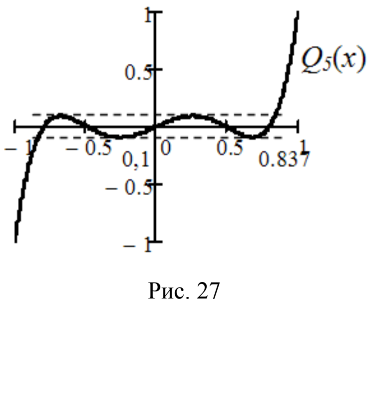

Рис. 27

***Пример* 2**. Разложить по полиномам Чебышева I функцию $f(x)$, заданную на отрезке [–1, 1] и имеющую разрыв первого рода в точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Решение. Ряд имеет вид

$$f(x) = C_0T_0(x) + C_1\,T_1(x) + C_2\,T_2(x) + C_3\,T_5(x) + \dots .$$

Вычислим C_n . Так как $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2\,x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, то

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}5;\ C_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}637;$$

$$C_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx 0{,}0;\ C_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{(4x^3-3x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\,0{,}212.$$

Получили:

$$f(x) = 0{,}5 + 0{,}635\,x + 0{,}0\,(2x^2 - 1) - 0{,}212\,(4x^3 - 3x) + \dots$$

На рис. 28 функция $f(x)$ представлена первыми четырьмя членами ряда:

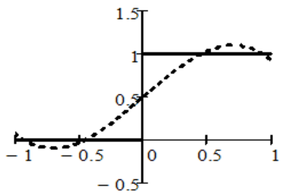

Рис. 28

Ранее эта же функция была разложена по полиномам Лежандра (см. рис. 25).

5.4. Полиномы Лагерра

Полиномы **Лагерра** $L_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$y'' + (1 - x)\,y' + n\,y = 0\ ,\ x \in [0, \infty),\ n = 0, 1,2, \dots \quad (5.14)$$

С в о й с т в а $L_n(x)$.

1. Полиномы Лежандра удобно вычислять при помощи **формулы Родрига**:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n), \; n = 0,1\dots . \qquad (5.15)$$

2. Первые полиномы:

$L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$, $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$.

3. Производящая функция:

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

4. Рекурентное соотношение:

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)\, L_n(x) + n^2\, L_{n-1}(x) = 0.$$

5. Графики $L_1(x)$, $L_2(x)$ и $L_3(x)$:

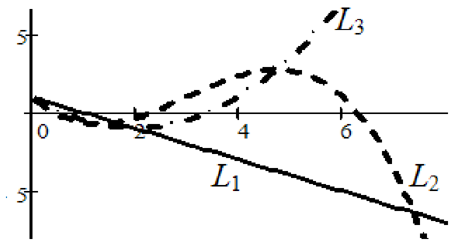

Рис. 29

6. Ортогональность.

Система полиномов $\{ L_n(x) \}\Big|_0^{\infty}$ ортогональна на $(0, \infty)$ с весом $\rho = e^{-x}$:

$$(L_n, L_m) = \int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ (n!)^2, & n = m \end{cases}.$$

Функция $f(x) \in L_2(0, \infty)$ раскладывается в ряд Фурье по полиномам Лагерра на интервале $(0, \infty)$:

$$f(x) = C_0 L_0 + C_1 L_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x),$$

$$C_n = \frac{(f, L_n)}{\|L_n\|^2} = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} f(x) L_n(x) e^{-x} dx.$$

Полиномы Лагерра имеют большое значение для приложений. Наиболее важное применение полиномы Лагерра находят при решении уравнения Шредингера для атома водорода.

5.5. Полиномы Эрмита

Полиномы **Эрмита** $H_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$y'' - 2xy' + 2n\, y = 0\,,\ x \in (-\infty, \infty),\ n = 1, 2, \dots . \qquad (5.16)$$

Свойства $H_n(x)$

1. $H_n(x)$ можно вычислить по формуле **Родрига**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}\ . \qquad (5.17)$$

2. Первые полиномы: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - -12x$, … .

3. Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = x\, H_n(x) - n\, H_{n\text{-}1}(x).$$

4. Ортогональность.

Система функций $\{H_n(x)\}\Big|_0^\infty$ ортогональна на $(-\infty, \infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$:

$$(H_n, H_m) = \int_0^\infty H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n \sqrt{\pi}\, n!, & m = n \end{cases}$$

5. Графики H_1, H_2, H_3, H_4:

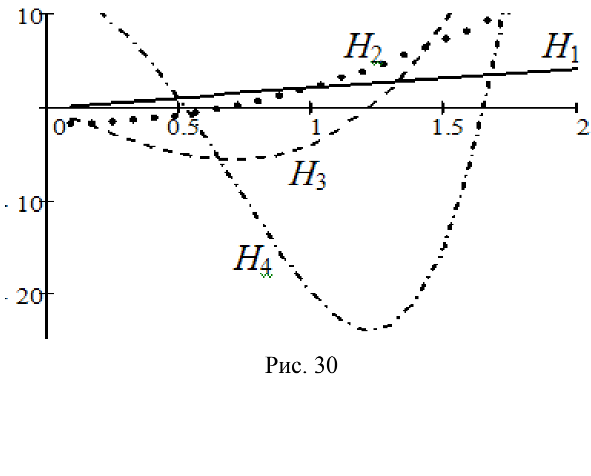

Рис. 30

Таблица 2

Основные свойства ортогональных полиномов

Полиномы	Уравнение	Обозначение	Область	Вес $\rho(x)$	$\lVert\cdot\rVert^2$
Лежандра	$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$	$P_n(x)$	[-1, 1]	1	$\frac{2}{2n+1}$
Чебышева I	$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n^2\,y = 0$	$T_n(x)$	[-1, 1]	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pi/2$, $n\neq 0$ π, $n=0$
Чебышева II	$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+2)\,y = 0$	$U_n(x)$	[-1, 1]	$\sqrt{1-x^2}$	$\pi/2$
Лагерра	$y'' + (1-x)y' + ny = 0$	$L_n(x)$	$[0, \infty)$	e^{-x}	$(n!)^2$
Эрмита	$y'' - 2xy' + 2n\,y = 0$	$H_n(x)$	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$2^n n!\pi^{1/2}$

§ 6. Сферические функции

Сферические функции возникают при разделении переменных в уравнениях Лапласа, Гельмгольца или пространственной части классического волнового уравнения и уравнения Шредингера для центральных сил, когда угловая зависимость целиком обусловлена оператором Лапласа в сферической системе координат.

Пусть $y(\theta, \varphi)$ – функция двух переменных $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\lambda\, y=0, \qquad (6.1)$$

с краевыми условиями:

1. $y(\theta, \varphi)$ ограничена по углу θ на концах интервала

$$y(0, \varphi) \neq \infty,\ y(\pi, \varphi) \neq \infty. \qquad (6.2)$$

2. $y(\theta, \varphi)$ периодическая по углу φ

$$y(\theta, \varphi) = y(\theta, \varphi + 2\pi). \qquad (6.3)$$

Пусть $y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$.

Тогда по методу разделения переменных получаются два уравнения:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\Theta'' + \mathrm{ctg}\,\theta \cdot \Theta' + \left(\lambda - \mu\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0,$$ μ – константа разделения.

Первое уравнение имеет 2π-периодические решения cos mx и sin mx при $\mu = m^2$, где $m = 0, 1, 2, ...$

Второе уравнение есть присоединённое уравнение Лежандра. Ограниченные решения при θ = 0 и θ = π, существуют только при $\lambda = n(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, ...$ Эти решения есть присоединённые функции Лежандра $P_n^m(\cos\theta)$, $m = 0, 1, ..., n$.

В результате, решение нашей краевой задачи даёт систему собственных функций

$$\left\{Y_n^m(\theta,\varphi)\right\}_{n=0}^{\infty},\ n = 0, 1, 2,\ldots;\ m = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots \pm n \tag{6.4}$$

и соответствующих собственных значений, $\lambda_n = n(n + 1)$.

Собственные функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ – **сферические** функции порядка n, определяемые равенствами

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ m = 0, 1,\ldots, n;$$

$$Y_n^{-m}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,\ m = 0, 1,\ldots, n. \tag{6.5}$$

Положительный верхний индекс приписывают тем функциям, которые содержат cos $m\varphi$, и отрицательный – функциям, содержащим sin $m\varphi$.

Сферической функцией может называться линейная комбинация функций $Y_n^m(\theta,\varphi)$:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),$$

где A_m и B_m – произвольные постоянные.

Шаровой функцией называется функция $Y_n(\theta, \varphi)$, умноженная на r^n или $\dfrac{1}{r^{n+1}}$.

Сферические функции можно записать в комплексной форме:

$$Y_{n,m}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\ m = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots \pm n. \tag{6.6}$$

С в о й с т в а $Y_n^m(\theta,\varphi)$.

1. Так как $m = \overline{0,\pm n}$, то при заданном n имеем $2n + 1$ сферических функций.

2. При $m = 0$ сферические функции есть полиномы Лежандра

$$Y_n^0(\theta,\varphi) = P_n^0(\cos\theta) = P_n(\cos\theta).$$

3. Сферические функции ортогональны на единичной сфере с весом $\rho = \sin\theta$.

Для квадрата нормы имеем

$$\left\|Y_n^{\pm m}\right\|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [Y_n^{|m|}(\theta,\varphi)]^2 \sin\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1}, & m = 0 \\ \dfrac{2\pi}{(2n+1)} \dfrac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}, & m \neq 0 \end{cases}$$

Функция $f(\theta,\varphi)$ двух переменных θ и φ, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, разлагается в двойной ряд Фурье по системе сферических функций:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{n,m} Y_n^m(\theta,\varphi),$$

где $C_{n,m} = \dfrac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^m(\theta,\varphi) \sin(\theta) d\theta$,

или $f(\theta,\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{m,n} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta)$,

$$A_{n,m} = \frac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^m(\theta,\varphi) \cos m\varphi \sin(\theta) d\theta,$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^m(\theta,\varphi) \sin m\varphi \sin(\theta) d\theta.$$

Разложение функции $f(\theta)$, не зависящей от φ, совпадает с разложением $f(\theta)$ по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$.

Сферические функции порядка n, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$ имеют вид:

$m = 0$: $Y_n^0 = P_n(\cos\theta)$;

$m = 1$: $Y_n^1 = P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi$; $Y_n^{-1} = P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi$;

$m = 2$: $Y_n^2 = P_n^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$; $Y_n^{-2} = P_n^2(\cos\theta)\sin 2\varphi$;

…

$m = n$: $Y_n^n = P_n^n(\cos\theta)\cos n\varphi$; $Y_n^{-n} = \mathrm{P}_n^n(\cos\theta)\sin n\varphi$.

Пример. Написать решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+6Y=0.$$

Решение. Решением является фундаментальная система сферических функций для $n(n+1)=6$. Тогда фундаментальная система состоит из пяти функций при $n=2$, $m=0, \pm1, \pm2$:

$m=0$: $Y_2^0 = P_2(\cos\theta) = \dfrac{3}{2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}$, $\left\|Y_2^0\right\| = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{5}}$;

$m=1$: $Y_2^1 = P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi = 3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$;

$m=-1$: $Y_2^{-1} = P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi = 3\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$, $\left\|Y_2^1\right\| = \left\|Y_2^{-1}\right\| = 2\sqrt{\dfrac{3\pi}{5}}$;

$m=2$: $Y_2^2 = P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi = 3\sin^2\theta\cos2\varphi$;

$m=-2$: $Y_2^{-2} = P_2^2(\cos\theta)\sin2\varphi = 3\sin^2\theta\sin2\varphi$, $\left\|Y_2^2\right\| = \left\|Y_2^{-2}\right\| = 4\sqrt{\dfrac{3\pi}{5}}$.

Нормированные сферические гармоники $Y_{n,m}(\theta,\varphi)$, записанные в комплексной форме, для $n = 0, 1, 2$ имеют вид:

$$n=0:\ Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}};\ n=1:\ Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta;\ Y_{1,\pm1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi};$$

$$n=2:\ Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right);\ Y_{2,\pm1}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{2,\pm2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm2i\varphi}.$$

Функцию $f(\theta,\varphi)$ можно разложить в ряд по нормированным сферическим гармоникам $Y_{n,m}(\theta,\varphi)$:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{n,m}Y_{n,m}(\theta,\varphi),\ a_{n,m}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta.$$

(* – знак комплексного сопряжения.)

Тестовая задача.

Для какой краевой задачи, решаемой методом разделения переменных, сферические функции выражают угловую зависимость?

Варианты ответов:

1) в шаре; 2) в кубе; 3) в цилиндре; 4) в прямоугольнике.

Ответ. Вариант 1).

Глава 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение Лапласа в цилиндре

I

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри ограниченного цилиндра радиуса a с однородным граничным условием на поверхности цилиндра.

Например, это задача о стационарном тепловом состоянии однородного изотропного цилиндра, на одном торце которого поддерживается заданное распределение температуры, а другой торец и боковая поверхность имеют нулевую температуру.

Введём цилиндрические координаты ρ, φ, z, $0 \le \rho < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$, $-\infty < z < \infty$. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью цилиндра, а начало поместим в плоскости одного из торцов. M(ρ, φ, z) – точка в пространстве. Декартовы координаты связаны с цилиндрическими формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.

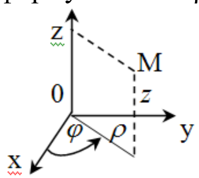

Рис. 31

Надо найти закон распределения температуры $u(\rho, \varphi, z)$ внутри цилиндра при заданном распределении температуры на поверхности цилиндра. Эта задача сводится к тому, чтобы найти то решение уравнения Лапласа, которое принимает на поверхности цилиндра заданные значения:

$$\Delta u = 0,\ \rho \le a,\ 0 \le z \le \ell, \tag{1.1}$$

$$u\,|_{\rho = a} = 0, \tag{1.2}$$

$$u\,|_{z = 0} = f(\rho, \varphi), \tag{1.3}$$

$$u\,|_{z = \ell} = 0. \tag{1.4}$$

Для упрощения предположим, что граничное условие (1.3) не содержит переменной φ, то есть

$$f(\rho, \varphi) = f(\rho), \tag{1.5}$$

причём $f(a) = 0$ в силу условия (1.2). Так как граничные значения $f(\rho)$ не зависят от φ, то искомая функция u также не будет зависеть от φ, то есть

$$u = u(\rho, z). \tag{1.6}$$

В цилиндрических координатах ρ, φ, z уравнение Лапласа (1.1) имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1.7}$$

Тогда для частного случая (1.6) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.8}$$

Решение уравнения (1.8) будем искать методом разделения переменных. Представим решение в виде

$$u(\rho, z) = R(\rho)\, Z(z). \tag{1.9}$$

Подставим эту функцию в уравнение Лапласа (1.8) и разделим переменные

$$\frac{\frac{d}{\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{R} = -\frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z} = \lambda,\ \lambda \text{ – константа разделения.}$$

Получаем первое уравнение

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \lambda R = 0,\ \rho \le a, \tag{1.10}$$

решения которого должны удовлетворять однородным граничным условиям: $R(0)$ – ограничено, $R(a) = 0$.

Таким образом, для функции $R(\rho)$ имеем задачу Штурма–Лиувилля на собственные значения и собственные функции.

Уравнение (1.10) есть обобщённое уравнение Бесселя с индексом $\nu = 0$. Его общее решение имеет вид

$$R(\rho) = A\,J_0(\sqrt{\lambda}\,\rho) + BY_0(\sqrt{\lambda}\,\rho),$$

где J_0 и Y_0 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно.

В силу первого условия ограниченности на оси цилиндра надо положить $B = 0$, так как $Y_0(\lambda\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$, тогда общее решение есть

$$R(\rho) = A\,J_0(\sqrt{\lambda}\,\rho),\ (A \neq 0).$$

Из условия $R(a) = 0$ следует:

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0. \tag{1.11}$$

Из этого условия определяются допустимые значения параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2, \tag{1.12}$$

где μ_n^0 – положительные корни уравнения (1.11), или нули функции Бесселя $J_0(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ – номер корня.

Тогда $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2$ – собственные значения, $n = 1, 2, \ldots$

$$R_n(\rho) = A_n\,J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right) \text{ – собственные функции.} \tag{1.13}$$

Для определения Z(z) имеем уравнение

$$Z'' - \lambda Z = 0, \tag{1.14}$$

с условием Z(ℓ) = 0.

Общее решение уравнения (1.14) при $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^0}{a}\right)^2$, удовлетворяющее условию $Z(\ell) = 0$, имеет вид

$$Z(z) = B_n\,\mathrm{sh}\left[\frac{(\ell - z)}{a}\mu_n^0\right], \tag{1.15}$$

напомним, что $\mathrm{sh}\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Получили частные решения уравнения Лапласа:

$$u_n(\rho, z) = C_n\,\mathrm{sh}\left[\frac{(\ell - z)}{a}\mu_n^0\right] J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right),\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.16}$$

$$C_n = A_n B_n.$$

Общее решение рассматриваемой задачи есть суперпозиция частных решений:

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}\left[\frac{(\ell - z)}{a}\mu_n^0\right] J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right).$$

Найдём коэффициенты C_n , при которых функция $u(\rho, z)$ удовлетворяет граничному условию $u\,|_{z=0} = f(\rho)$ на торце цилиндра:

$$u(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right) = f(\rho).$$

Разложим функцию $f(\rho)$ в ряд Фурье по функциям Бесселя $J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right)$ и получим

$$C_n \operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_n^0)} \int_0^a f(\rho) J_0\left(\mu_n^0 \frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho,$$

$$C_n = \frac{2\int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right)\rho d\rho}{a^2 sh\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) J_1^2(\mu_n^0)}. \qquad (1.17)$$

Таким образом, искомое решение есть

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}\left[\frac{(\ell - z)}{a}\mu_n^0\right] J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right). \qquad (1.18)$$

Замечание. Это решение справедливо для любой непрерывной функции $f(\rho)$ при условии $f(a) = 0$.

***Пример* 1**. Решить краевую задачу Дирихле в цилиндре радиуса a, если $f(\rho) = a^2 - \rho^2$.

Решение. Запишем задачу (1.1) – (1.4):

$$\Delta u = 0,\ \rho \le a,\ 0 \le z \le a,$$
$$u\,|_{\rho = a} = 0,$$
$$u\,|_{z=0} = f(\rho) = a^2 - \rho^2,\ u\,|_{z=\ell} = 0.$$

Вычислим коэффициенты по формуле (1.17):

$$C_n = \frac{2\int_0^a \left(\ell^2 - \rho^2\right) J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right)\rho d\rho}{a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) J_1^2(\mu_n^0)} = \frac{4\ell^2 J_2(\mu_n^0)}{(\mu_n^0)^2 sh\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) J_1^2(\mu_n^0)}.$$

Тогда, согласно формуле (1.18), получим решение

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\ell^2 J_2(\mu_n^0)}{(\mu_n^0)^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\ell}{a}\mu_n^0\right) J_1^2(\mu_n^0)} \operatorname{sh}\left[\frac{(\ell - z)}{a}\mu_n^0\right] J_0\left(\frac{\rho}{a}\mu_n^0\right).$$

***Пример* 2**. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре радиуса 1, если $f(\rho) = 1 - \rho^2$.

Решение. Постановка задачи (1.1) – (1.4):

$$\Delta u = 0,\ \rho \le 1,\ 0 \le z \le 1,$$
$$u|_{\rho = 1} = 0,$$
$$u|_{z=0} = 1 - \rho^2,\ u|_{z=1} = 0.$$

Вычислим коэффициенты по формуле (1.17):

$$C_n = \frac{2\int_0^1 (1-\rho^2) J_0(\rho\mu_n^0)\rho d\rho}{\operatorname{sh}(\mu_n^0) J_1^2(\mu_n^0)} = \frac{4J_2(\mu_n^0)}{(\mu_n^0)^2 \operatorname{sh}(\mu_n^0) J_1^2(\mu_n^0)}.$$

Найдём нули μ_n^0 функции Бесселя J_0 [1]:

$$\mu_1^0 = 5{,}406,\ \mu_2^0 = 5{,}52,\ \mu_3^0 = 8{,}654,\ \ldots.$$

По формуле (1.18) получим решение:

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n^0)}{(\mu_n^0)^2 \operatorname{sh}(\mu_n^0) J_1^2(\mu_n^0)} \operatorname{sh}[(1-z)\mu_n^0] J_0(\rho\mu_n^0) =$$

$$= 0{,}202 \operatorname{sh}[2{,}405(1 - z)]\, J_0(2{,}406\rho) - 1{,}12\cdot 10^{-3} \operatorname{sh}[5{,}52(1 - z)] J_0(5{,}52\rho) +$$
$$+ 1{,}588\cdot 10^{-5} \operatorname{sh}[8{,}654(1 - z)] J_0(8{,}654\rho) + \ldots .$$

***Пример* 3.** Рассмотрим задачу с другими граничными условиями. Пусть на торцах цилиндра функция u равна нулю, а на боковой поверхности задаётся известной функцией $f(z)$:

$$\Delta u = 0,\ \rho \le a,\ 0 \le z \le \ell,$$
$$u|_{\rho = a} = f(z),$$
$$u|_{z=0} = u|_{z=\ell} = 0.$$

Решение ищем в виде $u(\rho, z) = R(\rho)\, Z(z)$.

Для заданных граничных условий получаем задачу на собственные значения и собственные функции:

$$Z'' - \lambda Z = 0,\ Z(0) = Z(\ell) = 0.$$

Решив эту задачу (см. задачи Штурма–Лиувилля в конце главы 3), получим:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \text{ – собственные значения,} \tag{1.19}$$

$$Z_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right),\ n = 1, 2, \ldots \text{ – собственные функции.} \tag{1.20}$$

Так как собственные значения λ_n – отрицательные, то в уравнении (1.10) для функции $R(\rho)$ параметр λ будет отрицательным, а $\sqrt{\lambda}$ – мнимым числом, равным $\dfrac{n\pi\, i}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$.

В этом случае уравнение (1.10) есть обобщённое модифицированное уравнение Бесселя при æ = $\dfrac{n\pi}{\ell}$, общее решение которого имеет вид

$$R(\rho) = A_1 I_0\left(\frac{n\pi}{\ell}\rho\right) + A_2 K_0\left(\frac{n\pi}{\ell}\rho\right), \tag{1.21}$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ – модифицированные функции Бесселя.

Так как функция $K_0(\lambda\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$, то для ограниченности решения на оси цилиндра надо положить $A_2 = 0$.

Тогда частными решениями уравнения Лапласа будут функции

$$u_n(\rho, z) = C_n I_0\left(\frac{n\pi}{\ell}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right),\ n = 1, 2, \ldots . \tag{1.22}$$

Общее решение рассматриваемой задачи есть суперпозиция частных решений:

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, z).$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям

$$u(a, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ I_0\left(\frac{n\pi}{\ell} a\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell} z\right) = f(z),$$

разложим функцию $f(z)$ в ряд Фурье по системе функций $\sin\left(\dfrac{n\pi}{\ell} z\right)$ и, в силу единственности разложения, приходим к равенству

$$C_n I_0\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(z)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)dz\,,\; C_n = \frac{\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{a} f(z)\sin\left(\dfrac{n\pi}{\ell}z\right)dz}{I_0\left(\dfrac{n\pi}{\ell}a\right)}.$$

Тогда искомое решение есть

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, I_0\left(\frac{n\pi}{\ell}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right). \qquad (1.23)$$

§ 2. Уравнение Лапласа в шаре

I.

Найдём общее решение уравнения Лапласа

$$\Delta\, u = 0 \qquad (2.1)$$

для шаровой области методом разделения переменных.

Введём сферические координаты r, θ, φ, $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Поместим центр шара в начало координат сферической системы. M(r, θ, φ) – точка в пространстве. Декартовы координаты связаны со сферическими формулами:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\; y = r \sin\theta \sin\varphi,\; z = r \cos\varphi.$$

θ – азимутальный угол («широта» точки M), φ – полярный угол («долгота» точки M).

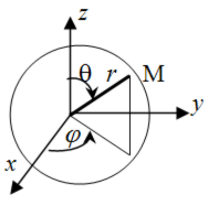

Рис. 32

В сферических координатах (r, θ, φ) уравнение Лапласа (2.1) имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (2.2)$$

Положим $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$.

Для определения $R(r)$ получаем уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2r R' - \lambda R = 0,\ \lambda \text{ – константа разделения,} \qquad (2.3)$$

а для определения $Y(\theta, \varphi)$ уравнение

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \qquad (2.4)$$

с условиями периодичности, обеспечивающим однозначность решения по переменной φ, и ограниченности по переменной θ в полюсах на единичной сфере

$$Y(\theta,\varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi),\ \left|Y(0, \varphi)\right| < \infty,\ \left|Y(\pi, \varphi)\right| < \infty. \qquad (2.5)$$

Частными решениями уравнения (2.3) при $\lambda = n(n + 1)$ являются функции

$$R_1(r) = r^n \text{ и } R_2(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \qquad (2.6)$$

а уравнения (2.4)

$$Y(\theta, \varphi) = Y_n^m(\theta,\varphi),\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n, \qquad (2.7)$$

то есть $2n + 1$ сферических функций.

Тогда общее решение уравнения Лапласа есть ряд

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n(\theta,\varphi), \qquad (2.8)$$

где $Y_n(\theta,\varphi) = \sum\limits_{m=-n}^{n} C_{n,m} Y_n^m(\theta,\varphi)$ – линейная комбинация всех $2n + 1$ сферических функций.

II.

Найдём решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяет на поверхности сферы заданным граничным условиям.

Пусть имеем задачу Дирихле для сферы радиуса $r = a$.

1. Если решение ищется в области $r < a$ (внутренняя задача):

$$\Delta u = 0,\ r < a,\ u|_{r = a} = f(\theta, \varphi), \qquad (2.9)$$

где $f(\theta, \varphi)$ – заданная функция на поверхности сферы, то в общем решении уравнения Лапласа (2.8) надо положить $B_n = 0$, так как $\frac{1}{r^{n+1}} \to \infty$ при $r \to 0$.

2. Если решение ищется в области $r > a$ (внешняя задача):

$$\Delta u = 0,\ r > a\ ,\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \qquad (2.10)$$

то в общем решении (2.8) надо положить $A_n = 0$, так как $r^n \to \infty$ при $r \to \infty$.

В случае области $a < r < b$, не содержащей ни $r = 0$, ни $r = \infty$, в решение входят слагаемые с r^n и $\frac{1}{r^{n+1}}$.

Найдём коэффициенты A_n , B_n , при которых функция $u(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию $u|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$.

3. Внутренняя задача, $B_n = 0$.

Разложим $f(\theta, \varphi)$ в ряд Фурье по собственным функциям $Y_n^m(\theta,\varphi)$ и при $r = a$ получим:

$$u(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{n,m}\ a^n\ Y_n^m(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{n,m}\ Y_n^m(\theta,\varphi) =$$

$$= f(\theta, \varphi),\ \ A_{n,m}\, a^n = C_{n,m},$$

где

$$C_{n,m} = \frac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^m(\theta,\varphi)\sin(\theta) d\theta\,. \qquad (2.11)$$

Получили решение внутренней задачи:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=-n}^{n} C_{n,m} Y_n^m(\theta,\varphi)\,. \qquad (2.12)$$

4. Аналогично получим решение для внешней задачи:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{n} C_{n,m} Y_n^m(\theta,\varphi)\right], \qquad (2.13)$$

$$C_{n,m} = \frac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) Y_n^m(\theta,\varphi)\sin(\theta) d\theta\,.$$

В частном случае $f(\theta, \varphi) = f(\theta)$ – не зависит от φ, решение упрощается:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \text{ – для внутренней задачи,} \quad (2.14)$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \text{ – для внешней задачи,} \quad (2.15)$$

где $$A_n = B_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \quad (2.16)$$

– коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$ по полиномам Лежандра.

***Пример* 1**. Найти стационарное распределение температуры в шаре радиуса a, если на поверхности поддерживается температура $u(a, \theta) = f(\theta) = 1 + \cos\theta + \cos^2\theta$.

Решение. Имеем внутреннюю задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0,\ r < a,\ u|_{r=a} = 1 + \cos\theta + \cos^2\theta.$$

Согласно формуле (2.14), решение имеет вид

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n \cos\theta .$$

Вычислим коэффициенты A_n по формуле (2.16):

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta+\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{5}{3},$$

$$A_1 = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta+\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta = 1,$$

$$A_2 = \frac{5}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta+\cos^2\theta)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{3},\ A_n = 0 \text{ при } n \geq 3.$$

Получили разложение $f(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$f(\theta) = 1 + \cos\theta + \cos^2\theta = \frac{5}{3}P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) + \frac{2}{3}P_2(\cos\theta).$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу (2.14) и получим решение уравнения Лапласа, которое на поверхности шара имеет заданное распределение:

$$u(r,\theta)=\frac{5}{3}+\frac{r}{a}\cos\theta+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right).$$

Замечание. По виду функции $f(\theta) = 1 + \cos\theta + \cos^2\theta$ можно сразу сказать, что решение $u(r, \theta)$ будет содержать только полиномы P_0, P_1 и P_2.

***Пример* 2**. Задача обтекания шара потоком несжимаемой жидкости.

Пусть безвихревой поток несжимаемой жидкости обтекает шар радиуса a. Скорость жидкости на бесконечности равна v_0 . Сталкиваясь с шаром, жидкость приобретает дополнительную скорость, потенциал которой обозначим через u (потенциал Стокса).

Введём сферическую систему координат. Поместим начало в центр шара и направим полярную ось в сторону, противоположную движению жидкости.

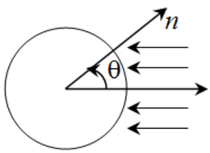

Рис. 33

Тогда для искомого потенциала $u(r, \theta)$, для которого нормальная составляющая дополнительной скорости жидкости на поверхности шара равна $-v_0\cos\theta$, имеем *внешнюю задачу*:

$$\Delta u = 0,\ r > a,\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = -v_0\cos\theta.$$

Решение. По формуле (2.15) решение внешней задачи есть

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta).$$

Коэффициенты B_n найдём методом неопределённых коэффициентов. Из граничного условия при $r = a$ следует:

$$-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)B_nP_n(\cos\theta) = -v_0\cos\theta,$$

откуда $B_0 = 0$, $B_1 = -\dfrac{av_0}{2}$, $B_2 = B_3 = \ldots = 0$.

Получили искомый потенциал Стокса:

$$u(r,\theta) = \frac{v_0 a^3}{2r^2}\cos\theta .$$

***Задачи* 1**. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

1. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u|_{r=2} = 3 + 2\cos\theta + 6\cos^2\theta.$
2. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u|_{r=3} = 6 - 3\cos\theta - 3\cos^2\theta.$
3. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u|_{r=1} = -3 + 5\cos\theta - 3\cos^2\theta.$
4. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 4,\ u|_{r=4} = 12\cos\theta + 6\cos^2\theta.$
5. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 5,\ u|_{r=5} = -9 + 9\cos^2\theta.$
6. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 4,\ u|_{r=4} = -2 + 8\cos\theta + 3\cos^2\theta.$
7. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u|_{r=3} = 3 + 12\cos\theta - 9\cos^2\theta.$
8. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u|_{r=2} = -6\cos\theta + 9\cos^2\theta.$
9. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 5,\ u|_{r=5} = 6 + 5\cos\theta - 6\cos^2\theta.$
10. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u|_{r=1} = -3 - 2\cos\theta + 3\cos^2\theta.$

Ответы.

1) $u(r,\theta) = 7 + r\cos\theta + 4\frac{r^2}{4}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 2) $u(r,\theta) = 4 - r\cos\theta - 2\frac{r^2}{9}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 3) $u(r,\theta) = -5 + 5r\cos\theta - 2r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$.

4) $u(r,\theta) = 4 + 3r\cos\theta + 4\frac{r^2}{16}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 5) $u(r,\theta) = -3 + 6\frac{r^2}{25}\times\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 6) $u(r,\theta) = 2r\cos\theta + 2\frac{r^2}{16}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$.

7) $u(r,\theta) = -3 + 4r\cos\theta - 6\frac{r^2}{9}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 8) $u(r,\theta) = 6 - 3r\cos\theta + 6\frac{r^2}{4}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$. 9) $u(r,\theta) = 2 - r\cos\theta - 4\frac{r^2}{25}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$.

10) $u(r,\theta) = -1 - 2r\cos\theta + 2r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$.

***Задачи* 2.**

1. Торец полубесконечного цилиндра ($0 \le r \le a$, $0 \le z < \infty$) поддерживается при постоянной температуре T_0, а боковая поверхность находится при температуре, равной нулю. Получить стационарное распределение температуры в цилиндре.

Ответ. $$T(r,z) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} e^{-\frac{\lambda_n}{a}\cdot z},$$

где λ_n – последовательные положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

2. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре радиуса a и длины ℓ, торцы которого поддерживаются при нулевой температуре, а температура боковой поверхности равна T_0.

Ответ. $$T(r,z) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{2n+1}{\ell} r\pi\right)}{I_1\left(\frac{2n+1}{\ell} a\pi\right)} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{\ell} z\pi}{2n+1}.$$

3. Шар радиуса a нагревается плоскопараллельным потоком плотности q, падающим на его поверхность, и отдаёт тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Найти стационарное распределение температуры в шаре.

У к а з а н и е. Граничное условие в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT\Big|_{r=a} = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}.$$

Ответ.

$$T(r,\theta) = \frac{qa}{2k}\left[\frac{1}{2ah} + \frac{r}{a}\cdot\frac{\cos\theta}{1+ah} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)P_{2n}(0)}{(2n+ah)(2n-1)(2n+2)}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_{2n}(\cos\theta)\right].$$

§ 3. Уравнение Гельмгольца в шаре

Уравнения гиперболического и параболического типов переходят в эллиптический тип, если процесс установился.

Широкий класс вопросов связан с установившимися колебаниями (механическими, акустическим, электромагнитными и т.д.).

Если волновое движение имеет гармоническую зависимость от времени, которую удобно описывать с помощью комплексных функций вида

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, z)\, e^{-i\omega t}, \qquad (3.1)$$

или

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, z)\, e^{i\omega t}, \qquad (3.2)$$

то волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U$$

для функции U переходит в уравнение Гельмгольца для функции u только для пространственных координат:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad (3.3)$$

где $k = \dfrac{\omega}{a}$ – волновое число; a – параметр, характеризующий свойства физической системы.

Функция u определяет в каждой точке пространства поле амплитуд процессов, происходящих во всех точках по одному и тому же гармоническому закону (3.1) или (3.2).

I.

Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0,\ \lambda \text{ – параметр}, \qquad (3.4)$$

с однородным граничным условием на поверхности сферы радиуса a:

$$u\,|_{r=a} = 0. \qquad (3.5)$$

Эта задача о собственных колебаниях сферы с нулевыми граничными условиями первого рода. Поместим начало сферической системы координат в центр сферы. Тогда уравнение (3.4) для функции $u(r, \theta, \varphi)$ в сферической системе примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0. \qquad (3.6)$$

Решение будем искать методом разделения переменных.

Положим $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$.

Для определения $R(r)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0,\ \mu \text{ – константа разделения}, \qquad (3.7)$$

а для определения $Y(\theta, \varphi)$ – уравнение

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\mu Y = 0 \qquad (3.8)$$

с условиями периодичности

$$Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi) \qquad (3.9)$$

и ограниченности в полюсах сферы

$$|Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty. \qquad (3.10)$$

Частными решениями уравнения (3.8), которые удовлетворяют условиям (3.9) и (3.10) при $\mu = n(n + 1)$ являются $2n + 1$ сферических функций $Y(\theta, \varphi) = Y_n^m(\theta,\varphi)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$.

Функция $R(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0 \qquad (3.11)$$

и граничным условиям

$$R(a) = 0, \qquad (3.12)$$

$$|R(0)| < \infty. \qquad (3.13)$$

Условие (3.12) следует из однородного граничного условия (3.5), а условие (3.13) является естественным условием ограниченности в нуле для внутренней задачи.

Задача (3.11)–(3.13) есть задача на собственные значения и собственные функции.

С помощью подстановки $R(r) = \dfrac{y(r)}{\sqrt{r}}$ уравнение (3.11) приводится к модифицированному уравнению Бесселя индекса $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$, и параметра $k^2 = \lambda$:

$$y'' + \frac{1}{r}y' + [\lambda - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}]y = 0. \qquad (3.14)$$

Общее решение уравнения (3.14) есть

$$y(r) = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r) + C_2 Y_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Условие (3.13) ограниченности решения даёт

$$C_2 = 0, \quad y(r) = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r),$$

тогда $$R(r) = C_1 \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} r)}{\sqrt{r}}. \tag{3.15}$$

Условие (3.12) приводит при $C_1 \neq 0$ к уравнению
$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, a) = 0. \tag{3.16}$$

Пусть ν_j^n – положительные корни уравнения $J_{n+1/2}(\nu) = 0$, $j = 1, 2, \dots$ – номер корня.

Условие (3.16) определяет допустимые значения параметра λ: $\sqrt{\lambda}\, a = \nu_j^n$. Тогда
$$\lambda_{n,j} = \left(\frac{\nu_j^n}{a}\right)^2, \; j = 1, 2,\dots – \tag{3.17}$$
собственные значения задачи (3.11)–(3.13), $\lambda_{n,j}$ – положительные числа.

Собственные функции этой задачи:
$$u_{n,j,m}(r, \theta, \varphi) = \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\nu_j^n}{a} r\right)}{\sqrt{r}} Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{3.18}$$
$n = 0, 1, 2, \dots, j = 1,2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n.$

Если воспользоваться сферическими функциями Бесселя при полуцелом индексе $\left(n + \frac{1}{2}\right)$
$$j_n(x)= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$
то собственные функции (3.18) можно представить в виде
$$u_{n,j,m}(r, \theta, \varphi) = j_n\left(\frac{\nu_j^n}{a} r\right) Y_n^m(\theta,\varphi). \tag{3.19}$$

Замечание. Если однородная задача $\Delta u + k^2 u = 0$, $u|_{r=a} = 0$ имеет нетривиальное решение, то неоднородная задача $\Delta u + k^2 u = 0$, $u|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$ неразрешима.

Если однородная задача при данном значении k^2 не имеет решений, отличных от тривиального решения $u = 0$, то неоднородная задача имеет единственное решение.

Тестовая задача.

Методом разделения переменных решается задача на собственные значения в шаре. Радиальная зависимость собственных функций выражается с помощью функций:

Варианты ответов:

1) $\frac{J_n(\sqrt{\lambda}r)}{r^2}$. 2) $\frac{N_n(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$. 3) $\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$. 4) $\frac{J_n(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$.

Ответ. Вариант 3).

II.

Рассмотрим первую внутреннюю краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \le r \le a \qquad (3.20)$$

при неоднородном граничном условии

$$u\,|_{r=a} = f(\theta, \varphi). \qquad (3.21)$$

Ищем решения в виде $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$.

Частные решения уравнения (3.20):

$$u_{n,m}(r, \theta, \varphi) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\, Y_n^m(\theta,\varphi),$$

где $k^2 \ne \lambda_{n,j} = \left(\frac{\nu_j^n}{a}\right)^2$, так как $u\,|_{r=a} \ne 0$.

Общее решение уравнения (3.20) есть суперпозиция частных решений

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{n,m}\, \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}\, Y_n^m(\theta,\varphi).$$

Найдём коэффициенты $B_{n,m}$, при которых функция $u(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию (3.21):

$$u(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{n,m}\, \frac{J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{a}}\, Y_n^m(\theta,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{n,m}\, J_{n+\frac{1}{2}}(ka)\, Y_n^m(\theta,\varphi) = f(\theta, \varphi),\ A_{n,m} = B_{n,m}/\sqrt{a}.$$

Чтобы найти коэффициенты $A_{n,m}$, разложим $f(\theta, \varphi)$ в ряд Фурье по собственным функциям $Y_n^m(\theta,\varphi)$ и получим

$$f(\theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{n,m}\ Y_n^m(\theta,\varphi);$$

$$C_{n,\,m}=\frac{1}{\left\|Y_n^m\right\|^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)Y_n^m(\theta,\varphi)\sin(\theta)d\theta;$$

$$A_{n,m}\ J_{n+\frac{1}{2}}(ka) = \mathrm{C}_{n,m},\ \ A_{n,m} = \frac{C_{n,m}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}.$$

Получили решение задачи (3.20)–(3.21) в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{n,m}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}Y_n^m(\theta,\varphi) \qquad (3.22)$$

или, используя сферические функции Бесселя,

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{n,m}\frac{j_n(kr)}{j_n(ka)}Y_n^m(\theta,\varphi). \qquad (3.23)$$

III.

Рассмотрим частный случай задачи (3.20)–(3.21), когда граничное условие на поверхности шара не зависит от φ, то есть $f(\theta, \varphi) = f(\theta)$. Тогда функция $u = u(r, \theta)$ также не зависит от φ. В этом случае имеем задачу

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \le r \le a,$$
$$u\,|_{r=a} = f(\theta). \qquad (3.24)$$

Ищем решение в виде

$$u(r, \theta) = R(r)\, Y(\theta).$$

Подставляя функцию $u(r, \theta)$ в уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{r^2R'' + 2rR' + k^2r^2R}{R} = \frac{Y'' + \mathrm{ctg}(\theta)Y'}{Y} = \lambda = \mathrm{const}.$$

Функции $R(r)$ и $Y(\theta)$ являются решениями связанных задач:

$$Y'' + \mathrm{ctg}\,\theta\, Y' + \lambda\, Y = 0,\ \left|Y(0)\right| < \infty,\ \left|Y(\pi)\right| < \infty, \qquad (3.25)$$
$$r^2 R'' + 2r\,R' + (k^2r^2 - \lambda)R = 0,\ \left|R(0)\right| < \infty. \qquad (3.26)$$

Решениями задачи (3.25) являются полиномы Лежандра $Y_{n,} = P_n(\cos\theta)$ при $\lambda = n(n+1)$.

Общее решение уравнения (3.26) есть

$$R_n(r) = A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} + B_n \frac{Y_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}.$$

Для внутренней задачи $B_n = 0$ в силу условия $|R(0)| < \infty$.

Итак, частные решения задачи имеют вид

$$u_n(r, \theta) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta).$$

Получили общее решение задачи

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta).$$

Разложим функцию $f(\theta)$ по полиномам Лежандра и найдём коэффициенты A_n, при которых $u(r, \theta)$ удовлетворяет граничному условию (3.24)

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{a}} P_n(\cos\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta),$$

$$A_n \frac{J_{n+1/2}(ka)}{\sqrt{a}} = C_n, \; A_n = \frac{\sqrt{a}}{J_{n+1/2}(ka)} C_n,$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \qquad (3.27)$$

Подставим эти коэффициенты в общее решение и получим решение исходной задачи:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot \frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+1/2}(ka)} P_n(\cos\theta). \qquad (3.28)$$

Пример 1. Найти решение внутренней задачи для уравнения Гельмгольца в шаре

$$\Delta u + k^2 u = 0, \; 0 \le r \le a; \; u|_{r=a} = f(\theta) = b + c\cos\theta + d\cos^2\theta.$$

Решение. По формуле (3.27) найдём коэффициенты Фурье для функции $f(\theta)$:

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(b + c\cos\theta + d\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = b + \frac{2d}{3},$$

$$C_1 = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}(b + c\cos\theta + d\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta = c,$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_0^{\pi}(b + c\cos\theta + d\cos^2\theta)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\sin\theta d\theta = \frac{2d}{3};\ C_n = 0, n \ge 3.$$

Тогда разложение $f(\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра есть

$$f(\theta) = b + c\cos\theta + d\cos^2\theta = \left(b + \frac{2d}{3}\right)P_0 + c\,P_1 + \frac{2d}{3}P_2.$$

Отсюда $A_0 = \left(b + \frac{2d}{3}\right)\frac{\sqrt{a}}{J_{1/2}(ka)}$, $A_1 = c\,\frac{\sqrt{a}}{J_{3/2}(ka)}$,

$$A_2 = \frac{2d}{3}\,\frac{\sqrt{a}}{J_{5/2}(ka)},\ A_n = 0,\ n \ge 3.$$

Получили по формуле (3.28) решение данной задачи

$$u(r, \theta) = \left(b + \frac{2d}{3}\right)\sqrt{\frac{a}{r}}\,\frac{J_{1/2}(kr)}{J_{1/2}(ka)} + c\sqrt{\frac{a}{r}}\,\frac{J_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(ka)}\cos\theta +$$
$$+ \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{a}{r}}\,\frac{J_{5/2}(kr)}{J_{5/2}(ka)}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 2. Найти решение внутренней задачи для уравнения Гельмгольца в шаре

$$\Delta u + 2u = 0,\ 0 \le r \le a,$$
$$u|_{r=a} = f(\theta) = 3\cos^2\theta.$$

Решение. Найдём коэффициенты C_n по формуле (3.27):

$$C_0 = 1,\ C_1 = 0,\ C_2 = 2,\ C_n = 0,\ n \ge 3.$$

Разложение $f(\theta) = 3\cos^2\theta$ в ряд Фурье имеет вид:

$$3\cos^2\theta = P_0(\cos\theta) + 2P_2(\cos\theta);$$

$$A_0 = \frac{1}{J_{1/2}(\sqrt{2})},\ A_1 = 0,\ A_2 = \frac{2}{J_{5/2}(\sqrt{2})},\ A_n = 0,\ n \ge 3.$$

Тогда решение данной задачи:

$$u(r, \theta) = \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}J_{1/2}(\sqrt{2})} + 2\frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}J_{5/2}(\sqrt{2})}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right).$$

Задачи. Решить внутреннюю краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре.

1. $\Delta u + 2u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u|_{r=2} = 3 + 2\cos\theta + 6\cos^2\theta.$
2. $\Delta u + 2u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u|_{r=3} = 6 - 3\cos\theta - 3\cos^2\theta.$
3. $\Delta u + 3u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u|_{r=1} = -3 + 5\cos\theta - 3\cos^2\theta.$
4. $\Delta u + 4u = 0,\ 0 \le r < 4,\ u|_{r=4} = 12\cos\theta + 6\cos^2\theta.$
5. $\Delta u + 5u = 0,\ 0 \le r < 5,\ u|_{r=5} = -9 + 9\cos^2\theta.$
6. $\Delta u + 6u = 0,\ 0 \le r < 4,\ u|_{r=4} = -2 + 8\cos\theta + 3\cos^2\theta.$
7. $\Delta u + 7u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u|_{r=3} = 3 + 12\cos\theta - 9\cos^2\theta.$
8. $\Delta u + 8u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u|_{r=2} = -6\cos\theta + 9\cos^2\theta.$
9. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \le r < 5,\ u|_{r=5} = 6 + 5\cos\theta - 6\cos^2\theta.$
10. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u|_{r=1} = -3 - 2\cos\theta + 3\cos^2\theta.$

Ответы.

1. $$u(r, \theta) = 7\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(2\sqrt{2})} + 2\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{J_{3/2}(\sqrt{2}r)}{J_{3/2}(2\sqrt{2})}\cos\theta +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{r}}\frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(2\sqrt{2})}(6\cos^2\theta - 2).$$

2. $$u(r, \theta) = 4\sqrt{\frac{3}{r}}\frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(3\sqrt{2})} - 3\sqrt{\frac{2}{r}}\frac{J_{3/2}(\sqrt{2}r)}{J_{3/2}(3\sqrt{2})}\cos\theta -$$
$$-\sqrt{\frac{3}{r}}\frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(2\sqrt{2})}(3\cos^2\theta - 1).$$

3. $$u(r, \theta) = -5\sqrt{\frac{1}{r}}\frac{J_{1/2}(\sqrt{3}r)}{J_{1/2}(\sqrt{3})} + 5\sqrt{\frac{1}{r}}\frac{J_{3/2}(\sqrt{3}r)}{J_{3/2}(\sqrt{3})}\cos\theta -$$
$$- \sqrt{\frac{1}{r}}\frac{J_{5/2}(\sqrt{3}r)}{J_{5/2}(\sqrt{3})}(3\cos^2\theta - 1).$$

4. $$u(r, \theta) = \frac{8}{\sqrt{r}}\frac{J_{1/2}(2r)}{J_{1/2}(8)} + \frac{24}{\sqrt{r}}\frac{J_{3/2}(2r)}{J_{3/2}(8)}\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{r}}\frac{J_{5/2}(2r)}{J_{5/2}(8)}(6\cos^2\theta - 2).$$

5. $u(r, \theta) = -3\sqrt{\frac{5}{r}}\,\frac{J_{1/2}(\sqrt{5}r)}{J_{1/2}(5\sqrt{5})} + \sqrt{\frac{5}{r}}\,\frac{J_{5/2}(\sqrt{5}r)}{J_{5/2}(5\sqrt{5})}\,(9\cos^2\theta - 3).$

6. $u(r, \theta) = \frac{16}{\sqrt{r}}\,\frac{J_{3/2}(\sqrt{6}r)}{J_{3/2}(4\sqrt{6})}\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{r}}\,\frac{J_{5/2}(\sqrt{6}r)}{J_{5/2}(4\sqrt{6})}\,(3\cos^2\theta - 1).$

7. $u(r, \theta) = -3\sqrt{\frac{3}{r}}\,\frac{J_{1/2}(\sqrt{8}r)}{J_{1/2}(3\sqrt{8})} + 12\sqrt{\frac{3}{r}}\,\frac{J_{3/2}(\sqrt{7}r)}{J_{3/2}(3\sqrt{7})}\cos\theta -$

$-\sqrt{\frac{3}{r}}\,\frac{J_{5/2}(\sqrt{7}r)}{J_{5/2}(3\sqrt{7})}\,(9\cos^2\theta - 3).$

8. $u(r, \theta) = 6\sqrt{\frac{2}{r}}\,\frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(2\sqrt{2})} - 6\sqrt{\frac{2}{r}}\,\frac{J_{3/2}(\sqrt{8}r)}{J_{3/2}(2\sqrt{8})}\cos\theta +$

$+\sqrt{\frac{2}{r}}\,\frac{J_{5/2}(\sqrt{8}r)}{J_{5/2}(2\sqrt{8})}\,(9\cos^2\theta - 3).$

9. $u(r, \theta) = 2\sqrt{\frac{5}{r}}\,\frac{J_{1/2}(3r)}{J_{1/2}(15)} - 5\sqrt{\frac{5}{r}}\,\frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(15)}\cos\theta -$

$-\sqrt{\frac{5}{r}}\,\frac{J_{5/2}(3r)}{J_{5/2}(15)}\,(6\cos^2\theta - 2).$

10. $u(r, \theta) = -1\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{J_{1/2}(3r)}{J_{1/2}(3)} - 2\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(3)}\cos\theta +$

$+\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{J_{5/2}(3r)}{J_{5/2}(3)}\,(3\cos^2\theta - 1).$

Тестовые задачи.

1. Найти ограниченное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u - 16u = 0, & \rho > 8, \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \\ u(8, \varphi) = 1, & 0 \le \varphi < 2\pi; \\ |u(\rho, \varphi)| < \infty, & \rho \to \infty, \end{cases}$$

для уравнения Гельмгольца вне круга радиуса $\rho = 8$.

Варианты ответов:

1) $u(\rho)=\dfrac{K_4(4\rho)}{K_4(32)}$; 2) $u(\rho)=\dfrac{K_0(4\rho)}{K_0(32)}$; 3) $u(\rho)=\dfrac{I_4(4\rho)}{I_4(32)}$;

4) $u(\rho)=\dfrac{J_4(8\rho)}{J_4(64)}\sin 4\varphi$.

Ответ. Вариант 2).

2. Найти ограниченное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u + 25u = 0, & 0<r<8,\quad 0<\theta<\pi, \varphi\in[0,2\pi], \\ |u|_{r=0}<\infty, & \\ u(8,\theta,\varphi)=4\sin\theta\sin\varphi, & \end{cases}$$

для уравнения Гельмгольца в шаре радиуса r = 8.

Варианты ответов:

1) $u(r, \theta, \varphi) = 4\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{r}}\dfrac{J_{3/2}(5r)}{J_{3/2}(40)}\cos\theta\ \sin\varphi$;

2) $u(r, \theta, \varphi) = 4\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{r}}\dfrac{H^{(1)}_{3/2}(9r)}{H^{(1)}_{3/2}(54)}\ \cos\theta\ \sin\varphi$;

3) $u(r, \theta, \varphi) = 4\dfrac{J_{3/2}(5r)}{J_{3/2}(40)}\ \cos\theta\ \sin\varphi$;

4) $u(r, \theta, \varphi) = 4\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{r}}\dfrac{I_{3/2}(5r)}{I_{3/2}(40)}\ \cos\theta\sin\varphi$.

Ответ. Вариант 1).

§ 4. Некоторые задачи дифракции и рассеяния

I.

Рассмотрим задачу о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на бесконечно длинный проводящий цилиндр радиуса a.

Напомним, что плоской волной, распространяющейся в заданном направлении, называется решение волнового уравнения

$$\Delta\, U - \frac{1}{a^2}U_{tt} = 0,$$

зависящее от времени t и одной пространственной координаты, отсчитываемой в направлении распространения.

Пусть имеем установившиеся гармонические колебания, тогда зависимость от времени характеризуется множителем $e^{i\omega t}$, где ω – частота колебаний (зависимость от времени можно выбрать в виде $e^{-i\omega t}$). Вектор электрического поля в падающей волне и в отражённой волне параллелен оси цилиндра.

Введём систему цилиндрических координат (ρ, φ, z) так, чтобы ось z совпадала с осью цилиндра, отсчёт угла φ ведётся по направлению, вдоль которого распространяется волна. Тогда плоская волна, распространяющаяся в направлении x, есть $u_0\, e^{-ikx} =$ $=u_0\, e^{-ik\rho\cos\varphi}$.

Здесь $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, c – скорость волны, u_0 – амплитуда падающей плоской волны.

Рассматриваемая задача приводит к определению комплексной амплитуды $u(\rho, \varphi)$ дифрагированного поля, удовлетворяющей

1) уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ \rho \ge a, \tag{4.1}$$

которое в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0; \tag{4.2}$$

2) граничному условию (условию сопряжения):

$$u\,|_{\rho = a} = -u_0\, e^{-ika\cos\varphi}, \tag{4.3}$$

которое означает, что на границе падающая и рассеянная волны должны совпадать;

3) условию излучения (Зоммерфельда):

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}+iku = o\left(\frac{1}{\rho}\right),\ u = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \text{ при } \rho\to\infty. \tag{4.4}$$

Условие излучения исключает из рассмотрения волны, сходящиеся из бесконечности к данному телу.

Замечание. Если выбрать гармоническую зависимость от времени в виде экспоненты с отрицательным показателем $e^{-i\omega t}$, то условие излучения надо взять в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - iku = o\left(\frac{1}{\rho}\right),\ u = O\left(\frac{1}{\rho}\right),\ \text{при } \rho \to \infty.$$

Применяя метод разделения переменных, находим частные, периодические относительно φ, решения уравнения Гельмгольца:

$$u_n(\rho, \varphi) = [A_n H_n^{(1)}(k\rho) + B_n H_n^{(2)}(k\rho)](M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

где $H_n^{(1),(2)}(k\rho)$ – функции Ханкеля первого и второго рода.

Из условия симметрии задачи следует, что u – чётная функция от φ, поэтому достаточно ограничиться решениями, содержащими $\cos n\varphi$, то есть в (4.5) положим $N_n = 0$.

Чтобы удовлетворить условию излучения, выделяющему волны, расходящиеся на бесконечности, надо положить $A_n = 0$, так как функции Ханкеля первого и второго рода имеют разное поведение на бесконечности:

$$H_\nu^{(1)}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i x},\ H_\nu^{(2)}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-i x}.$$

Замечание. Если выбрана зависимость от времени $e^{-i\omega t}$, то $B_n = 0$.

Таким образом, решение следует искать в виде

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k\rho) \cos n\varphi. \tag{4.6}$$

Найдём коэффициенты A_n, при которых будут выполнены граничные условия (4.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(ka) \cos n\varphi + u_0 e^{-i ka \cos\varphi} = 0.$$

Подставим в это равенство разложение плоской волны в точке $\rho = a$:

$$e^{-i ka\cos\varphi} = J_0(ka) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) \cos n\varphi, \tag{4.7}$$

и, приравняв коэффициенты при $\cos n\varphi$, $n = 0, 1, \ldots$, получим:

$$A_0 H_0^{(2)}(ka) = -u_0 J_0(ka),\ A_n H_n^{(2)}(ka) = -2u_0(-i)^n J_n(ka).$$

$$A_0 = -u_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)},\ A_n = -2u_0 \frac{(-i)^n J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)},\ n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Тогда искомое решение даётся формулой

$$u(\rho, \varphi) = \mathrm{A}_0 H_0^{(2)}(k\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k\rho)\cos n\varphi =$$

$$= -u_0\Big[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(ka)\cos n\varphi\Big]. \quad (4.9)$$

*Замечание***.** Действительное поле есть сумма дифрагированного поля (4.9) и падающей волны.

Тестовая задача

Решением уравнения $\Delta u + 25u = 0$ в полярных координатах, удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда $\lim\limits_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - i5u\right) = 0$ на бесконечности, является функция:

Варианты ответов:

1) $u = I_0(5\rho)\sin 2\varphi$; 2) $u = 5\rho^5\cos 5\varphi$;

3) $u = H_2^{(1)}(5\rho)\cos 2\varphi$); 4) $u = H_4^{(2)}(5\rho)\cos 2\varphi$.

Ответ. Вариант 3).

II.

Аналогично решается следующая задача акустики.

Плоская звуковая волна v распространяется в направлении, перпендикулярном к оси бесконечного кругового цилиндра радиуса a. Найти рассеянную волну.

Пусть $v = u_0 e^{-i\,kx} = u_0 e^{-ik\rho\cos\varphi} = u_0\,[J_0(ka) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n J_n(ka)\cos n\varphi\,]$ – давление в плоской волне, распространяющейся вдоль оси x, перпендикулярной к оси цилиндра z, $k = \frac{\omega}{c}$, ω – круговая частота звуковых колебаний, c – скорость звука.

Тогда, согласно формуле (4.9), получим u – давление (амплитуда колебаний давления) в рассеянной волне:

$$u\,(\rho,\varphi)= -u_0\Big[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}\;H_n^{(2)}(k\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}H_n^{(2)}(k\rho)\cos n\varphi\Big].$$

В волновой зоне (на больших расстояниях от цилиндра $k\rho>>1$) будем иметь

$$u\,(\rho,\,\varphi\,)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}e^{-i\,(k\rho-\frac{\pi}{4})}\,(A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(i)^n\cos n\varphi\,). \qquad (4.10)$$

Интенсивность звука определяется выражением $I=\dfrac{\left|u(\rho,\varphi)\right|^2}{2\mu c}$,

μ – плотность среды.

Таким образом, поток энергии рассеянного поля убывает пропорционально первой степени расстояния.

Замечание. Действительное звуковое поле есть сумма найденного поля (4.10) и падающей волны.

III.

Рассмотрим рассеяние звука на твёрдой неподвижной сфере радиуса a. Пусть в направлении оси z из бесконечности падает плоская волна $\text{v} = u_0\,e^{-ikz} = u_0\,e^{-ikr\cos\theta}$ на шар радиуса a с центром в начале координат. Надо найти давление (амплитуду) в рассеянной волне.

Рассматривая установившийся гармонический процесс $u(x,\,y,\,z,\,t) = u(x,\,y,\,z)e^{i\omega t}$, получаем для амплитуды $u(x,\,y,\,z)$ уравнение Гельмгольца $\Delta\,u + k^2u = 0$.

На поверхности сферы в силу её абсолютной твёрдости должна равняться нулю суммарная нормальная составляющая градиента, что приводит к граничному условию (условию сопряжения) для давления

$$\frac{\partial(u-\text{v})}{\partial r}\,\Big|_{r=a}=0,\ \text{или}\ \frac{\partial u}{\partial r}\,\Big|_{r=a}=u_0\,ik\cos\theta\,e^{-ika\cos\theta}. \qquad (4.11)$$

Рассеянная волна ведёт себя на бесконечности как расходящаяся сферическая волна, то есть удовлетворяет условию излучения

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}+iku\right)=0,\ \lim_{r\to\infty}u=0. \qquad (4.12)$$

Разложим плоскую волну по сферическим функциям

$$u_0 e^{-ikz} = u_0 e^{-ikr\cos\theta} = u_0 \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-i)^n j_n(kr)P_n(\cos\theta), \quad (4.13)$$

где $j_n(kr) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ – сферическая функция Бесселя 1-го рода.

Будем искать поле рассеянной волны в виде разложения в ряд по частным решениям уравнения Гельмгольца

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr)P_n(\cos\theta), \quad (4.14)$$

где $h_n(kr) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2kr}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ – сферическая функция Ханкеля 2-го рода.

Подставим указанные ряды в условия сопряжения и приравняем два ряда. Тогда для определения коэффициентов A_n получим уравнение

$$A_n h'_n(ka) = u_0(2n+1)\, i^n\, j'_n(ka). \quad (4.15)$$

Таким образом, решение для случая симметрии вращения относительно полярной оси, когда u не зависит от координаты φ, выражается формулой:

$$u(r,\theta) = -u_0 \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-i)^n \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kr)P_n(\cos\theta). \quad (4.16)$$

Если длина волны велика по сравнению с размерами шара $ka \ll 1$, то решение данной задачи на большом удалении от шара $kr \gg 1$ может быть представлено приближённой формулой

$$u(r,\theta) \approx -u_0 \frac{k^2a^2}{3r}\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}. \quad (4.17)$$

Замечание. Если зависимость от времени в задаче на установившиеся колебания характеризуется множителем $e^{-i\omega t}$, следует заменить $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ на $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$, а условие излучения

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} + iku = o\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ при } \rho\to\infty \text{ на } \frac{\partial u}{\partial\rho} - iku = o\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Тестовая задача.

Плоская звуковая волна распространяется в направлении, перпендикулярном оси неподвижного бесконечного жёсткого цилиндра радиуса a. Пусть потенциал скоростей в падающей волне имеет вид $U_0 = A\,e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})}$, где c – скорость звука. Решением какой задачи является комплексная амплитуда u потенциала скоростей $U = u\,e^{-i\omega t}$ рассеянной волны?

Варианты ответов:

$$1)\ \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad r > a, \ \varphi \in [0,2\pi], \ k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = -\dfrac{\partial u_0}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}, \ \text{ где } \ u_0 = Ae^{ik\rho\cos\varphi}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho} - iku = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\right), \ u = O\left(\dfrac{1}{\rho}\right), \ \text{ при } \rho \to \infty. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad r > a, \ \varphi \in [0,2\pi], \ k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = -\dfrac{\partial u_0}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}, \ \text{ где } \ u_0 = Ae^{ik\rho\cos\varphi}; \\ u \to 0 \ \text{ при } \rho \to \infty. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad r > a, \ \varphi \in [0,2\pi], \ k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = \dfrac{\partial u_0}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}, \ \text{ где } \ u_0 = Ae^{ik\rho\cos\varphi}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho} - iku = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\right), \ u = O\left(\dfrac{1}{\rho}\right) \ \text{ при } \rho \to \infty. \end{cases}$$

Ответ. Вариант 1).

Глава 3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Представление искомых функций в виде функциональных рядов позволяет находить решение широкого круга физических и технических задач.

Кроме рядов Тейлора, представляющих функцию в окрестности фиксированной точки, во многих задачах математической физики используются функциональные ряды другого типа, а именно ортогональные ряды, или ряды Фурье.

Ряды Фурье дают разложение функций по полной системе ортогональных функций на отрезке $[a, b]$.

§ 1. Скалярное произведение и норма в функциональном пространстве

Пусть имеется линейное функциональное пространство $\{f\}$, например, пространство $L_2[a, b]$ – множество функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$:

$$\int_a^b f^2(x)dx = M < \infty \ ,$$

или $L_2[a, b, \rho]$, интегрируемых с весом $\rho(x)$ на $[a, b]$:

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx = M < \infty .$$

Скалярным произведением двух элементов $f_1 \in \{f\}$ и $f_2 \in \{f\}$ называется число (f_1, f_2), если выполнены условия:

1. $(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$ – для вещественного пространства,
2. $(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$,
3. $(\alpha f_1, f_2) = \alpha (f_1, f_2)$,
4. $| (f_1, f_2) | \leq (f_1, f_1) (f_2, f_2)$,
5. $(f, f) \geq 0$ (= 0 только при $f = 0$).

Вещественное функциональное пространство со скалярным произведением называется *эвклидовым* (комплексное пространство – *гильбертовым*).

Элементы f_1 и f_2 называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(f_1, f_2) = 0$.

Число $\| f \|$ называется *нормой* элемента f

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)}\,. \tag{1.1}$$

Пространство называется *нормированным*, если $\| f \| = 1$.

Для пространства $L_2[a, b]$ скалярное произведение и норма имеют вид:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)dx\,,\ \| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,; \tag{1.2}$$

для $L_2[a, b, \rho]$:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\rho(x)dx\,,\ \| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx}\,. \tag{1.3}$$

Замечание. Весовая функция $\rho(x)$ вводится для того, чтобы нужные функции $\sqrt{\rho(x)}\,f_i(x)$ были ортогональными.

Из свойств скалярного произведения следуют неравенства:

1. $|(f_1, f_2)| \le \|f_1\| \cdot \|f_2\|$ – неравенство Коши–Буняковского (Шварца);

2. $\|f_1 + f_2\| \le \|f_1\| + \|f_2\|$ – неравенство треугольника.

Пример. Найти нормы функций $f_1 = x$, $f_2 = \sin(x)$, их скалярное произведение и угол между векторами f_1 и f_2 на интервале [–1, 1].

Решение.

$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 2/3 = 0{,}667$, $\|\sin(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin^2(x)dx} = -\cos(1)\sin(1) + 1 =$

$= 0{,}545$, $[x, \sin(x)] = \int_{-1}^{1} x \sin x dx = 0{,}602$, $\cos(\varphi) = \dfrac{(x, \sin x)}{\|x\| \cdot \|\sin x\|} =$

$= \dfrac{0{,}602}{0{,}667 \cdot 0{,}545} = 1{,}606 \cdot 10^{-3}$, $\varphi = 1{,}569$ град.

§ 2. Базисы в функциональных пространствах. Ряды Фурье

Пусть имеем линейно независимую систему $\{\varphi_n\}$ в $L_2[a, b]$ или в $L_2[a, b, \rho]$.

Система $\{\varphi_n\}$ называется *базисом*, или *полной* системой, если любой элемент $f \in L_2$ можно представить в виде линейной комбинации базисных элементов φ_n.

Доказано, что в $L_2[a, b]$ нет конечных базисов.

Если система $\{\varphi_n\}_0^\infty$ – бесконечный базис, то разложение функции f по базису – функциональный ряд

$$f = C_0\,\varphi_0 + C_1\,\varphi_1 + \ldots + C_n\,\varphi_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_n\,, \qquad (2.1)$$

где числа C_n – коэффициенты линейной комбинации.

В качестве базисов удобно выбирать ортогональные или ортонормированные системы:

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \|\varphi_k\|^2, & n = k \end{cases}, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}. \qquad (2.2)$$

Функциональный ряд (2.1) сходится к f в *среднем* на интервале (a, b), то есть по норме пространства $L_2[a, b]$, если

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k \right\| = 0,\ \int_a^b \Big(f - \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k\Big)^2 dx \to 0, \text{при } n\to\infty). \qquad (2.3)$$

Сходящиеся в среднем ряды можно почленно интегрировать.

Пусть система $\{\varphi_n\}_0^\infty$ – базис. Найдём коэффициенты C_n ряда (2.1), умножив ряд скалярно на φ_n. Учитывая ортогональность функций системы $\{\varphi_n\}_0^\infty$, получим коэффициенты C_n, которые называются *коэффициентами Фурье* функции f по системе $\{\varphi_n\}_0^\infty$:

$$C_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \text{ – для ортогонального базиса;} \qquad (2.4)$$

$$C_n = (f, \varphi_n) \text{ – для ортонормированного базиса.} \qquad (2.5)$$

Функциональный ряд

$$C_0\,\varphi_0 + C_1\,\varphi_1 + \ldots + C_n\,\varphi_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_n\,,$$

где C_n – коэффициенты Фурье, называется *ортогональным* рядом, или *рядом Фурье* функции f по системе $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$. Все слагаемые ряда Фурье ортогональны друг другу.

Ряд Фурье по полной системе $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ сходится к функции f в среднем, то есть в смысле (2.3).

Сходимость в среднем, как правило, достаточна для целей физики, так как две функции f_1 и f_2, равные в среднем, то есть такие, что $\int_a^b |f_1 - f_2|^2 dx = 0$, могут отличаться друг от друга на множестве точек, столь малом, что это не влияет на значение интегралов от f_1 и f_2. Две такие функции обычно считаются эквивалентными.

Геометрическая интерпретация рядов Фурье.

Для интерпретации рядов Фурье удобно использовать геометрические представления линейной алгебры. Выбранный класс функций рассматривается как бесконечномерное линейное векторное пространство, в котором векторами являются функции. Равенство нулю скалярного произведения есть условие ортогональности векторов.

Функция f есть вектор в таком пространстве, а функции ортогональной системы $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ – базисные орты этого пространства.

Ряд Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ можно трактовать как разложение f по базисным ортам, при этом коэффициенты C_n имеют смысл проекций вектора f на базисные орты φ_n, то есть

1) f – вектор пространства,

2) $\{\varphi_n\}$ – базисные орты пространства,

3) C_n – проекции вектора f на базисные орты φ_n, то есть вклад орта φ_n в вектор f.

Критерий ортонормированного базиса

Следующая теорема даёт условие полноты системы $\{\varphi_n\}$ для рассматриваемых функций $f(x)$.

Теорема. Для того чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ была полной, т. е. являлась базисом, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in L_2$ выполнялось *равенство Парсеваля*:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2, \tag{2.6}$$

где C_n – коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}_0^\infty$.

Если система $\{\varphi_n\}$ ортогональна, равенство (2.6) принимает вид

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2 \cdot \tag{2.7}$$

Формула (2.7) представляет собой обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

Если система $\{\varphi_n\}$ не полная, то вместо равенства Парсеваля имеем *неравенство Бесселя*:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2. \tag{2.8}$$

Если область бесконечна, то достичь полноты можно, лишь беря плотную последовательность функций, используемых для получения разложения. Индекс-параметр n превращается тогда в переменную t, и вместо $\varphi_n(x)$ следует взять содержащую два параметра функцию $\varphi(t, x)$. Разложение при этом имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)\varphi(t,x)dt, \tag{2.9}$$

если $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,x)\varphi(t',x)dx = \begin{cases} 0, & t \neq t' \\ 1, & t = t' \end{cases},$$

то $$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,x) f(x)dx.$$

Функция $C(t)$ называется *спектральной функцией* представления.

Соотношение полноты здесь принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{2.10}$$

При аппроксимации функции f линейной комбинацией T_n первых n функций системы $\{\varphi_n\}_0^\infty$:

$$f \approx T_n = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k ,$$

наилучшее среднеквадратическое приближение даёт частичная сумма ряда Фурье S_n, где $a_k = C_k$ – коэффициенты Фурье:

$$T_n = S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k \ , \ \|f - S_n\| - MIN . \qquad (2.11)$$

Пример. Построить для функции $f(x) = e^{-x}$ на интервале [–1, 1] многочлен $T_1(x) = C_0 + C_1 x$ наилучшего среднеквадратического приближения.

Решение. На отрезке [–1, 1] можно взять ортогональную систему полиномов Лежандра $P_n(x)$, первые члены которой есть $\varphi_1 = P_0(x) = 1$, $\varphi_2 = P_1(x) = x$.

Искомый многочлен имеет вид $T_1(x) = C_0 \cdot 1 + C_1 x$.

Найдём коэффициенты Фурье:

$$C_0 = \frac{(e^{-x},1)}{\|1\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} e^{-x} 1 dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = \frac{2{,}35}{2} = 1{,}17,$$

$$C_1 = \frac{(e^{-x},x)}{\|x\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} e^{-x} x dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{-0{,}736}{0{,}667} = -1{,}103.$$

Получили наилучшее, в смысле среднего квадратичного, приближение функции $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ полиномом 1-й степени:

$$e^{-x} \approx S_1(x) = T_1(x) = 1{,}17 - 1{,}103\, x.$$

Геометрический смысл полученного приближения: площадь между графиком функции e^{-x} (сплошная линия) и графиком $T_1(x)$ (пунктирная линия) на рис. 34 минимальна на отрезке [–1, 1] среди всех полиномов вида $P(x) = a_0 + a_1 x$.

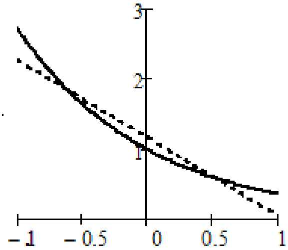

Рис. 34

§ 3. Ортогональные системы

В качестве ортогональной системы $\{\varphi_i\}$ обычно берут собственные функции задачи Штурма–Лиувилля.

Задачей Штурма–Лиувилля принято называть задачу о нахождении нетривиальных (ненулевых) решений однородного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\,y = 0,\ x \in [a, b] \tag{3.1}$$

при однородных граничных условиях, например

$$y(a) = 0,\ y(b) = 0, \tag{3.2}$$

или $y(a)$ – ограничена, если a – особая точка уравнения. Функции $p(x)$, $\rho(x)$ и $q(x)$ – известны, λ – параметр.

Если уравнение (3.1) записано в виде

$$A(x)\,y''(x) + B(x)\,y'(x) + C(x)\,y(x) = -\lambda y(x),$$

то $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ выражаются через A, B и C формулами:

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{B(x)}{A(x)}dx},\ \rho(x) = \frac{p(x)}{A(x)},\ q(x) = -C(x)\rho(x).$$

Уравнение (3.1) вместе с однородными краевыми условиями есть задача на собственные функции и собственные значения оператора Штурма–Лиувилля L:

$$Ly = \lambda y, \tag{3.3}$$

$$L = \frac{1}{\rho(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + \frac{q(x)}{\rho(x)},$$

определённого на функциях, удовлетворяющих однородным краевым условиям.

Те значения λ_n, при которых нетривиальное решение задачи существует, называются *собственными значениями* задачи Ш-Л, а соответствующие им решения y_n – *собственными функциями* задачи Ш-Л. Совокупность собственных значений λ_n называется *спектром* оператора L.

Задача Штурма–Лиувилля характеризуется четырьмя важными свойствами:

1. Существует бесконечное множество вещественных собственных значений λ_n: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n < \ldots$, которым соответствуют собственные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x), \ldots$

2. При $q(x) \geq 0$ все собственные значения λ_n неотрицательны.

3. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие разным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b).

4. Собственные функции $\{y_n\}_0^\infty$ образуют ортогональный базис в $L_2[a, b]$ с весом $\rho(x)$.

Произвольную функцию $f \in L_2[a, b]$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям $\{y_n\}_0^\infty$ задачи Ш-Л. Этот ряд сходится в смысле среднего квадратичного:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n , \; C_n = \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx}{\int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx} . \qquad (3.4)$$

Если функция $f(x)$ имеет при $a < x < b$ непрерывные первые и вторые производные и удовлетворяет граничным условиям задачи, то имеет место следующая *теорема разложимости.*

Теорема. Функция $f(x)$ разлагается на интервале (a, b) в равномерно сходящийся ряд (3.4) по собственным функциям $\{y_n\}_0^\infty$ данной задачи.

Для различных p, q, ρ и λ получаем частные случаи уравнения (3.1):

1) *уравнение Бесселя*:

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0,\ p(x) = x,\ q(x) = \frac{\nu^2}{x},\ \rho(x) = x,\ \lambda = 1;$$

2) *обобщённое уравнение Бесселя*:

$$(xy')' + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0,\ p(x) = x,\ q(x) = \frac{\nu^2}{x},\ \rho(x) = x,\ \lambda = k^2;$$

3) *уравнение Лежандра*:

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0,\ p(x) = 1 - x^2,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1.$$

Примеры ортогональных систем.

1. *Система функций Бесселя*.

Система функций Бесселя 1-го рода $\{\varphi_n\}_1^\infty = \left\{J_\nu\left(\mu_n \frac{x}{\ell}\right)\right\}_1^\infty$ ортогональна на промежутке $[0, \ell]$ с весом $\rho(x) = x$, ν – индекс уравнения, μ_n – корень функции Бесселя с номером n:

$$\int_0^\ell J_\nu\left(\mu_n \frac{x}{\ell}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{\ell}\right) x dx = \begin{cases} \dfrac{\ell^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_n), & n = j, \\ 0, & n \neq j. \end{cases}.$$

Если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция в интервале $(0, \ell)$, и интеграл $\int_0^\ell \sqrt{x}\left|f(x)\right| dx$ сходится, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Ряд Фурье-Бесселя

$$\sum_{n=1}^\infty C_n J_\nu\left(\mu_n \frac{x}{\ell}\right),$$

где
$$C_n = \frac{2}{\ell^2 J_{\nu+1}^2(\mu_n)} \int_0^\ell f(x) J_\nu\left(\mu_n \frac{x}{\ell}\right) x dx,$$

сходится к $f(x)$ в ее точках непрерывности, а в точках разрыва 1-го рода сумма ряда равна $\frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$.

2. *Тригонометрическая система*.

Разложение по тригонометрическим функциям называется *гармоническим анализом*.

Система тригонометрических функций

$$\{1, \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \cos\frac{n\pi x}{\ell}\}_0^{\infty} \tag{3.5}$$

называется *общей тригонометрической системой*, она ортогональна на $[-\ell, \ell]$.

Функция $f(x) \in L_2[-\ell, \ell]$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x\right), \tag{3.6}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x dx. \tag{3.7}$$

При этом (теорема *Дирихле*), если $S(x)$ – сумма ряда (3.6), то

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{точка непрерывности;} \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], & x - \text{точка разрыва 1-го рода} \\ \frac{1}{2}[f(-\ell+0) + f(\ell-0)], & x = \pm\ell. \end{cases}$$

Пример. Задача Ш-Л (*гармонический осциллятор*):

$$y'' + \lambda y = 0, \; y(0) = 0, \; y(2\pi) = 0$$

имеет собственные значения $\lambda_n = n^2$ и собственные функции $\cos n\pi$, $\sin n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

3. *Системы ортогональных полиномов* (см. табл. 2).

Таблица 3

Название	Обозначение	Область	$\rho(x)$	$\lVert\cdot\rVert^2$
Полиномы Лежандра	$P_n(x)$	[-1,1]	1	$\frac{2}{2n+1}$
Полиномы Чебышева I	$T_n(x)$	[-1,1]	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\pi/2$, $n\neq0$ π, $n=0$
Полиномы Лагерра	$L_n(x)$	$[0,\infty)$	e^{-x}	1
Полиномы Эрмита	$H_n(x)$	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$2^n n!\pi^{1/2}$

Рассмотрим вопрос о представлении решений дифференциальных уравнений в виде суперпозиции частных решений.

Пусть $L(u)$ – линейный дифференциальный оператор, равный сумме некоторых производных функции (обыкновенных или частных) с коэффициентами, являющимися функциями независимых переменных

Имеет место следующий *обобщённый принцип суперпозиции*.

Если функции u_n ($n = 1, 2,\ldots$) являются частными решениями уравнения $L(u) = 0$, то ряд $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n u_n$ является также решением этого уравнения при условии, что ряд можно почленно дифференцировать.

Достаточным условием возможности почленного дифференцирования ряда является условие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n)$.

Задачи.

Одномерные задачи Штурма–Лиувилля**.**

1. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

если x меняется в промежутке $0 < x < \ell$ для граничных условий, указанных в табл. 4.

Таблица 4

Вар.	Условия	Ответ
1	2	3
1	$y\|_{x=0} = 0, y\|_{x=\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
2	$y\|_{x=0} = 0$, $\frac{dy}{dx}\|_{x=\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$, $y_n = C_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right]$, $n = 0, 1, 2, 3.$
3	$\frac{dy}{dx}\|_{x=0} = 0, y\|_{x=\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$, $y_n = C_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x\right]$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1	2	3
4	$\frac{dy}{dx}\vert_{x=0} = 0$, $\frac{dy}{dx}\vert_{x=\ell} = 0$	$\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \text{const}$; $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_n = C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$
5	$y\vert_{x=0} = 0$, $(\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=\ell} =0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}$, где γ_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = -\frac{\gamma}{h\ell}$, $y_n = C_n\sin\left(\frac{\gamma_n}{l}x\right)$
6	$(\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=0} =0$, $y\vert_{x=\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}$, где γ_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = -\frac{\gamma}{h\ell}$, $y_n=C_n\sin\left[\frac{\gamma_n(\ell-x)}{\ell}\right]$, $n = 1, 2, 3,\ldots$
7	$\frac{dy}{dx}\vert_{x=0} = 0$, $(\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=\ell} =0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}$, где γ_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = \frac{h\ell}{\gamma}$, $y_n = C_n\cos\left(\frac{\gamma_n}{\ell}x\right)$
8	$(-\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=0} =0$, $\frac{dy}{dx}\vert_{x=\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}$, где γ_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = \frac{h\ell}{\gamma}$, $y_n = C_n\cos\left[\frac{\gamma_n(\ell-x)}{\ell}\right]$
9	$(-\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=0} =0$, $(\frac{dy}{dx}+hy)\vert_{x=\ell} =0$	Спектр состоит из двух независимых наборов собственных чисел: $\lambda_n = \left(\frac{2\gamma_n}{\ell}\right)^2$, где γ_n – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = -\frac{2\gamma}{h\ell}$, $y_n = C_n \sin\frac{\gamma_n(\ell-2x)}{\ell}$, и $\lambda_k=\left(\frac{2\gamma_k}{\ell}\right)^2$, где γ_k – положительные корни уравнения $\text{tg}\gamma = \frac{h\ell}{2\gamma}$, $y_k = D_k \cos\left[\frac{\gamma_k(\ell-x)}{\ell}\right]$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

Окончание табл. 4

1	2	3
10	$y\|_{x=0} = y\|_{x=\ell}$ $\frac{dy}{dx}\|_{x=0} = \frac{dy}{dx}\|_{x=\ell}$	$\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \text{const}$; $\lambda_n = \frac{2n^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_n = C_n \cos\left(\frac{2n\pi}{\ell}x\right) + D_n \sin\left(\frac{2n\pi}{\ell}x\right)$, $n = 1, 2,$ 3…, здесь C_n и D_n – две произвольные постоянные, одному собственному числу соответствуют две линейно независимые собственные функции

2. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

если x меняется в интервале $-\ell < x < \ell$ для граничных условий, указанных в табл. 5.

Таблица 5

Вар.	Условия	Ответ
1	$y\|_{x=\ell} = 0$, $y\|_{x=-\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$, $y_n = C_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_k = D_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$, $(k = 1, 2, 3\ldots)$
2	$\frac{dy}{dx}\|_{x=\ell} = 0$, $\frac{dy}{dx}\|_{x=-\ell} = 0$	$\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \text{const}$; $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_n = C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$, $y_k = D_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}$, $k = 1, 2, 3\ldots$
3	$(\frac{dy}{dx} + hy)\|_{x=\ell} = 0$ $(-\frac{dy}{dx} + hy)\|_{x=-\ell} = 0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}$, где γ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\gamma}{h\ell}$, $y_n = C_n \sin\left(\frac{\gamma_n}{\ell}x\right)$, $\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k}{\ell}\right)^2$, где γ_k – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\gamma = \frac{h\ell}{\gamma}$, $y_k = D_k \cos\left(\frac{\gamma_k x}{\ell}\right)$, $k = 1, 2, 3\ldots$

Окончание табл. 5

1	2	3
4	$y\|_{x=-\ell} = y\|_{x=\ell}$ $\frac{dy}{dx}\|_{x=-\ell} = \frac{dy}{dx}\|_{x=\ell}$	$\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \text{const}$; $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $y_n = C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

§ 4. Применение ортогональных рядов для решения дифференциальных уравнений

Разность между данной функцией F и частичной суммой ряда Фурье $F - S_n$ называют *невязкой* и обозначают

$$\varepsilon_n = F - S_n,\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k .$$

Невязка $\varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k\varphi_k$ – это остаток ряда Фурье, содержащий функции $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots$.

Если $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k\varphi_k$ – полином наилучшего приближения в смысле среднего квадратичного, то невязка $\varepsilon_n = F - S_n$ ортогональна ко всем первым функциям $\varphi_0, \varphi_1, \ldots\varphi_n$, входящим в S_n: $\varepsilon_n \perp \varphi_k$, то есть

$$(\varepsilon_n, \varphi_k) = (F - S_n, \varphi_k) = 0,\ k = 0, 1,\ldots n. \tag{4.1}$$

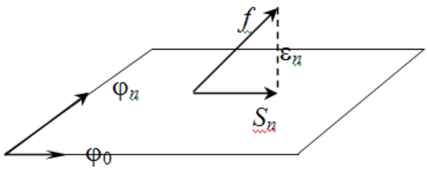

Рис. 35

Из условия ортогональности (4.1) удобно находить коэффициенты $C_0, C_1, \ldots, C_n$.

Свойство (4.1) является основой следующего метода для решения дифференциальных уравнений (*метод Галёркина*).

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$L\,y = f \tag{4.2}$$

при условиях $$y(a) = y_a\,, \quad y(b) = y_b, \tag{4.3}$$

где L – дифференциальный оператор (например, $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$), $f(x)$ – известная функция.

Приближённое решение $y_n(x)$ ищем в виде линейной комбинации базисных функций $\{\varphi_k\}$:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \varphi_k(x)\,, \tag{4.4}$$

где y_n – n-е приближение к решению задачи (4.2)–(4.3), C_k – неизвестные коэффициенты.

При каждом n должны выполняться граничные условия (4.3). Для этого удобно представить y_n в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x), \tag{4.5}$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условиям (4.3):

$$\varphi_0(a) = y_a, \ \varphi_0(b) = y_b\,,$$

а $\varphi_k(x)$ – однородным условиям

$$\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0\,,\ k = 1, \ldots n.$$

Если $y = y^*$ – точное решение уравнения (4.2), то разность $L\,y^* - f$ тождественно равна нулю для $x \in [a, b]$, $Ly^* - f \equiv 0$.

Если $y = y_n$ – приближённое решение (4.4), то разность $Ly_n - f = \varepsilon_n$ уже не равна нулю, но будет некоторой малой величиной, которая называется погрешностью приближения или *невязкой*.

Из формулы (4.1) следует, что наилучшим приближением y_n (4.4) к точному решению y^* будет приближение, при котором невязка ε_n будет ортогональна ко всем базисным функциям $\varphi_k(x)$, включённым в линейную комбинацию (4.4):

$$(\varepsilon_n, \varphi_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots n. \tag{4.6}$$

Поэтому неизвестные параметры C_k определяются из условия ортогональности невязки ε_n к элементам $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$(Ly_n - f, \varphi_k) = \int_a^b (Ly_n - f)\varphi_k(x)dx = 0, k = 1 \dots n. \qquad (4.7)$$

Уравнения (4.7) называются *уравнениями Бубнова – Галёркина.* Базисные функции $\varphi_k(x)$ в методе Галёркина часто называют *координатными* функциями.

Пример. Найти методом Галёркина первое и второе приближения для краевой задачи:

$$y'' + y = -x,\ y(0) = y(1) = 0,\ [L\,y = f(x),\ L = \frac{d^2}{dx^2} + 1,\ f(x) = -x].$$

Решение. Выберем координатные функции так, чтобы выполнялись нулевые граничные условия:

$$\varphi_1 = x\,(1 - x),\ \varphi_2 = x^2\,(1 - x),\ \varphi_3 = x^3\,(1 - x),\ \dots .$$

Эти функции линейно независимы, так как содержат различные степени x.

Первое приближение y_1 содержит одну функцию φ_1:

$$y_1 = C\,\varphi_1(x) = C\,x\,(1 - x),\ y_1'' = -2\,C,$$

$$\varepsilon_1(x) = L\,y_1 - f = y''_1 + y_1 + x = -\,2C + Cx(1 - x) + x.$$

Подставим y_1 в уравнение (4.7):

$$\int_0^1 \varepsilon_1(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 [-2C + Cx(1-x) + x]x(1-x)dx = 0.$$

Интегрируя, получим $\frac{3}{10}C - \frac{1}{12} = 0$, откуда $C = \frac{5}{18}$.

Тогда $y_1(x) = \frac{5}{18}x\,(1 - x)$ – первое приближение.

Найдем второе приближение:

$$y_2\,(x) = C_1 x\,(1 - x) + C_2 x^2\,(1 - x),\ y_2''(x) = -\,2C_1 + C_2(2 - 6x).$$

Для ε_2 получим

$$\varepsilon_2 = L\,y_2 - f = y''_2 + y_2 + x =$$

$$= -\,2C_1 + C_2(2 - 6\,x) + C_1 x(1 - x) + C_2 x^2\,(1 - x) + x.$$

Напишем условия ортогональности (4.6):

$$\int_0^1 \varepsilon_2(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 [-2C_1 + C_2(2-6x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + x]x(1-x)dx = 0;$$

$$\int_0^1 \varepsilon_2(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 [-2C_1 + C_2(2-6x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + x]x^2(1-x)dx = 0.$$

После вычисления интегралов получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{10}C_1 + \frac{3}{20}C_2 = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20}C_1 + \frac{13}{105}C_2 = \frac{1}{20} \end{cases}, \text{ откуда } C_1 = \frac{71}{369},\ C_2 = \frac{7}{41}.$$

Тогда второе приближение получим по формуле:

$$y_2(x) = \frac{71}{369}x(1-x) + \frac{7}{41}x^2(1-x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

Сравним известное точное решение этой задачи $y^*(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x$ с приближёнными $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в нескольких точках:

Таблица 6

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0
y_1	0	0,044	0,067	0,067	0,044	0
y_2	0	0,036	0,063	0,071	0,053	0
y^*	0	0,036	0,063	0,071	0,053	0

Как видно из табл. 6, y^* и y_2 совпали в пределах заданной точности.

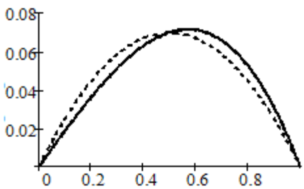

Рис. 36

На рис. 36 представлены y^*(сплошная линия), y_1 (пунктирная линия) и y_2, при этом y^* совпало с y_2.

Отметим, что схема применения метода не зависит ни от порядка уравнения, ни от числа уравнений, ни от количества независимых переменных.

Литература

1. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, суммы рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
3. *Янке Б., Эмде Ф., Лет Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977.
4. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965.
5. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их применение. – СПб.: Лань, 2010.
6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
7. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1967.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1979.
9. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.
10. *Кручкович Г.И. и др.* Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
12. *Данилов Ю.А.* Многочлены Чебышева. – М., 2003.

Дополнительная литература

13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
14. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. – М.: Наука, 1969. – 672 с.
15. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по уравнениям математической физике. – М.: Наука, 1980. – 686 с.
16. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
17. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
18. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. – М.: Мир, 1969. – 607 с.
19. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1985. – 380 с.
20. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. – М.: Иностранная литература, 1962. Т. 1. – 923 с. Т. 2. – 897 с.
21. *Аксёненкова И.М. и др.* Ряды. Интеграл Фурье. Приложения. – М., 2009.

Учебное издание

Татьяна Георгиевна Андреева

МАТЕМАТИКА:
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Г.И. Беликова
Компьютерная верстка Н.И. Афанасьевой
ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 30.08.13. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 6,4. Тираж 300 экз. Заказ № 243.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
Отпечатано в ЦОП РГГМУ