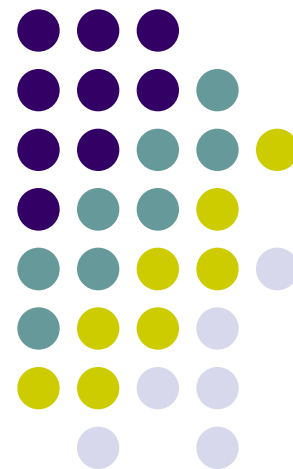
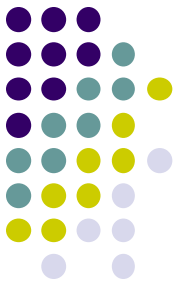


Завгородний В.Н. Метод анализа иерархий для оценки многокритериальных решений

учебное пособие: презентация.—
СПб: РГГМУ, 2025. — 33 с.—
Текст: электронный

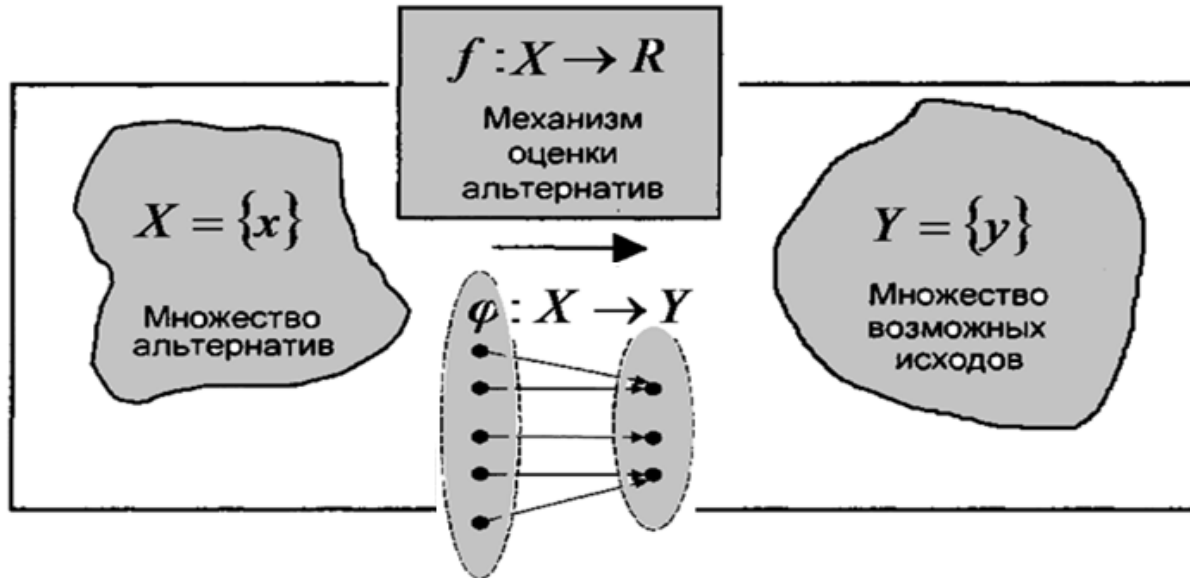
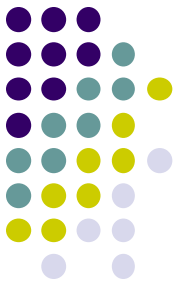




Содержание

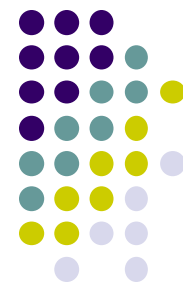
Иерархическая структура МАИ	3
Матрицы парных сравнений. Шкала Саати	10
Схема (алгоритм) метода анализа иерархий	17
Задача выбора места работы	22
SWOT-анализ. Метод ПАТТЕРН	29

Типы неопределенности в принятии решений



- Неопределенность системы при принятии решений понимается как такое состояние, когда ЛПР (лицо, принимающее решение), заранее не знает:
 - состояние среды θ для каждой альтернативы $\{x\}$
 - конкретный исход $\{y\}$ для каждой альтернативы $\{x\}$
 - оценку исходов $f(x)$ для каждой альтернативы $\{x\}$.

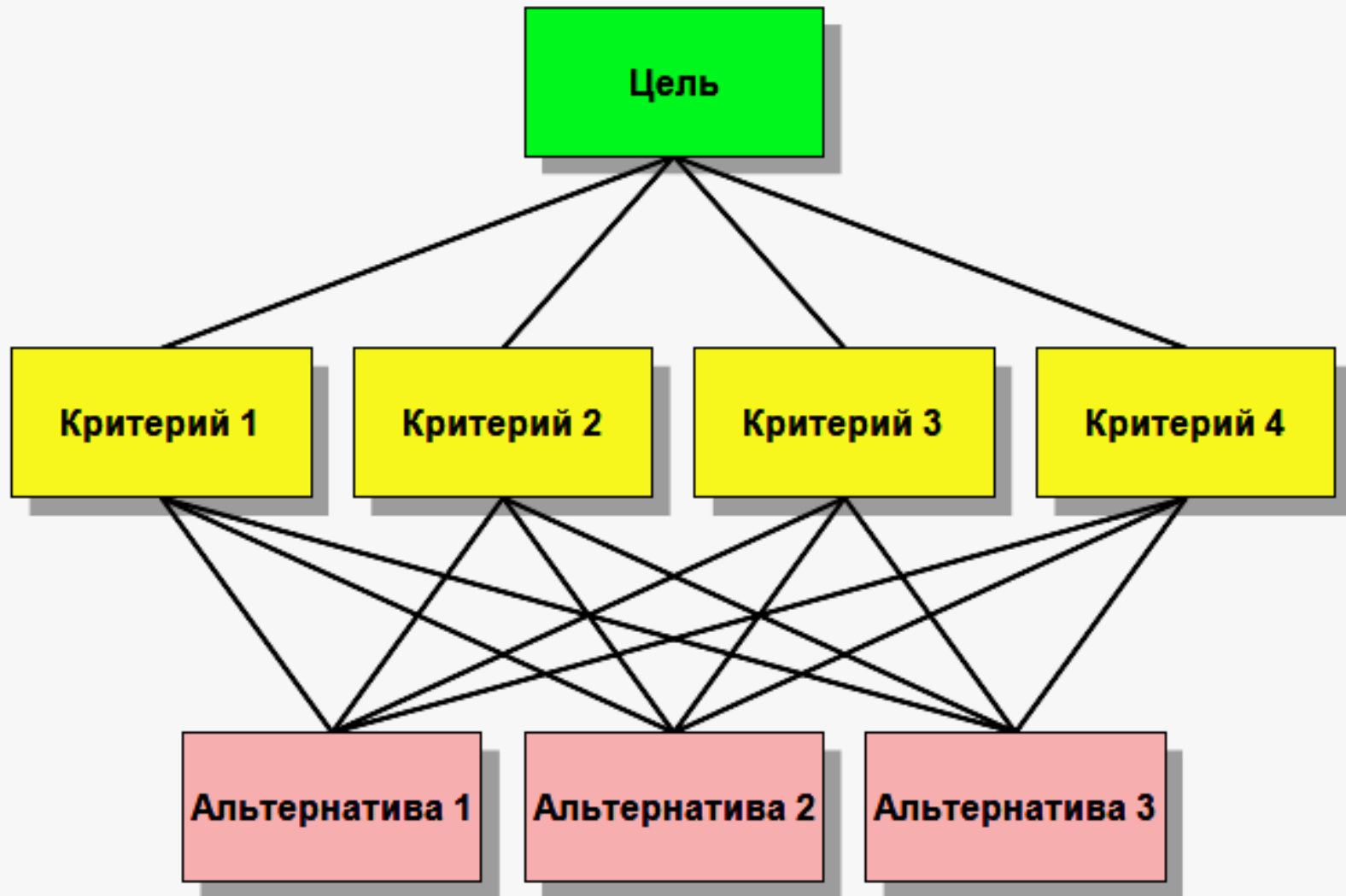
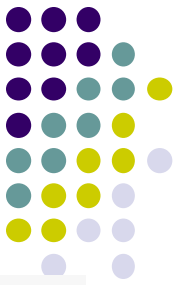
Метод анализа иерархий (МАИ)



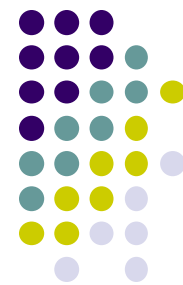
МАИ – метод *декомпозиции* многокритериальной проблемы на составные задачи и обработки *сравнительных суждений* ЛПР (эксперта) о предпочтительности альтернатив по парным сравнениям в целях выбора наилучшего решения:

- выбор сложной технической конструкции из многих,
- анализ возможных сценариев развития ситуации,
- распределение ресурсов,
- рейтинги объектов произвольной природы,
- принятие кадровых решений и т.д.
- Ограничение МАИ – необходимость:
 - большого объема информации группы экспертов
 - согласования альтернатив каждого из экспертов

Метод анализа иерархий Т.Саати (Analytic Hierarchy Process, АНП)

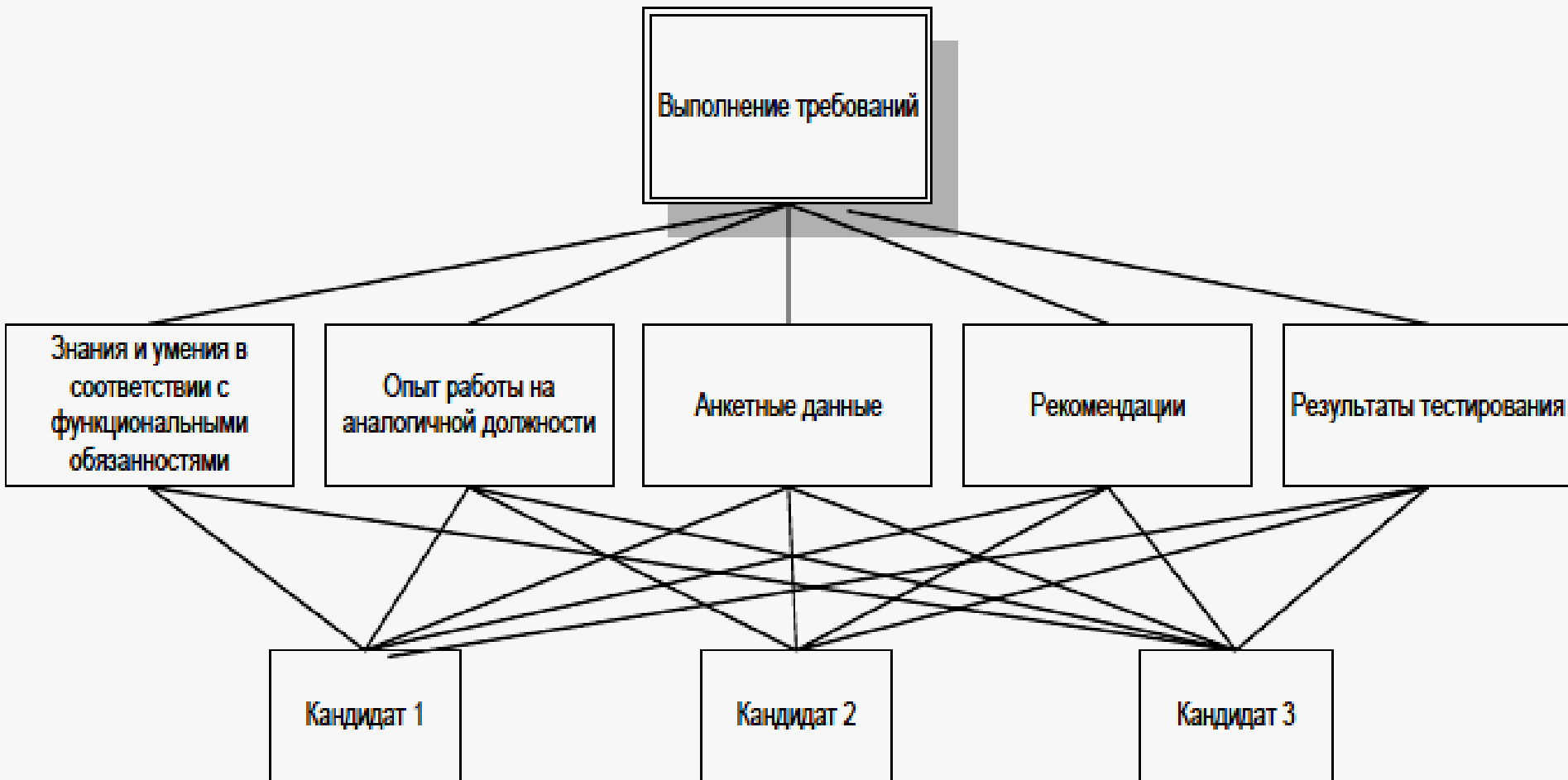
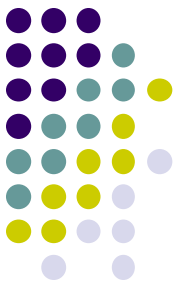


Понятия «критерий», «фактор», «показатель»

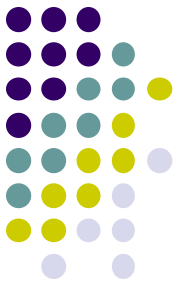


- **Критерии** (kriterion-средство для суждения) **устанавливают стандарты, которые необходимо достичь или оценить**
 - **признак для оценивания степени достижения цели**
- **Факторы** **определяют условия или причины, влияющие на достижение цели (выполнение требований)**
 - **ограничения и допущения на способы достижения цели**
- **Альтернативы** – **варианты достижения цели**
- **Показатели** **является количественной или качественной характеристикой состояния, свойств или изменений объекта, процесса или явления**
 - **количественные оценки свойств/признаков критериев, факторов, альтернатив:**
 - **протяжённость-длина, нагретость-температура**

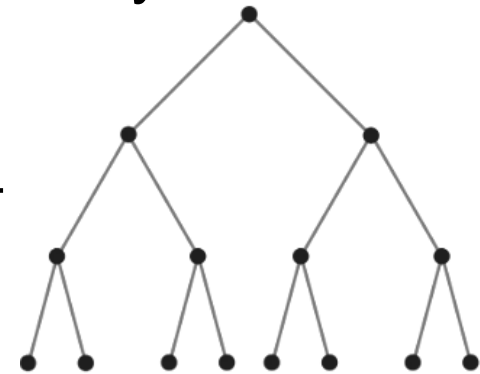
Иерархия задачи выбора кандидата на должность. Пример



Древовидные графы иерархических структур

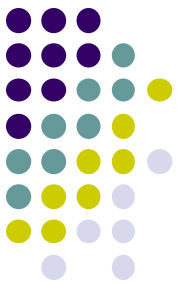


- **Дерево** - неориентированный связанный граф без замкнутых путей (циклов и петель) с висячими рёбрами (≥ 2)
 - рёбра дерева называются **ветвями** дерева
 - несвязный граф из деревьев называется лесом
 - лагранжево дерево - все ветви имеют общую вершину
 - прадеревом называется ориентированный граф без петель и контуров такой, что в каждую вершину, кроме начальной, входит только одна дуга
- **Свойства дерева**
 - рёбер n в дереве на единицу меньше, чем вершин m : $n = m - 1$
 - удаление ребра из дерева нарушает связность графа
 - любые две вершины соединены только одним ребром



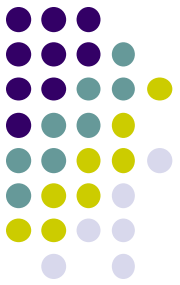
Иерархические структуры.

Терминология



- *Вершина иерархии* - главная цель.
- *Узлы нижнего уровня* - множество вариантов (альтернатив) достижения цели.
- *Узлы промежуточных уровней* (критерии и факторы) связывают цель с альтернативами.
- *Дочерние элементы* - исходящие из одного узла.
- *Родительские элементы* - из которых исходит узел.
- *Группы сравнения* - элементы, имеющие один и тот же родительский элемент.
- *Покрывающие критерии* - родительские элементы альтернатив, исходящие из различных групп сравнения
 - *Доминантные иерархии* — перевернутое дерево вершиной вниз
 - *Холлархии* — доминантные иерархии с обратной связью.
 - *Модулярные иерархии* — растут от простейших элементов или компонентов ко все более крупным совокупностям.
 - *Неогенетические иерархии* — верхние уровни возникают последовательно в течение эволюции

Матрицы



- Матрица $A = (a_{ij})$ – массив чисел размера $(m \times n)$ в виде прямоугольной таблицы, a_{ij} – элемент в i -й строке и j -м столбце
 - если $m = n$ – квадратная матрица порядка n
 - вектор-строка $(a_1, \dots, a_n)$, вектор-столбец $(a_1, \dots, a_n)^T$
 - диагональная матрица: $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0$
 - нулевая матрица O : $a_{ij} = 0$, $a_{ii} = 0$
 - единичная матрица I , E : $a_{ii} = 1$
 - треугольная матрица $a_{ij} = 0$ для $i > j$ или $i < j$
 - транспонированная матрица $A^T = (a_{ji})$
 - симметрическая матрица $A = A^T$: $a_{ij} = a_{ji}$
 - кососимметрическая матрица $A = -A^T$: $a_{ij} = -a_{ji}$
 - обратносимметричная матрица: $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $a_{ii} = 1$
 - положительная (неотрицательная) матрица: $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$)
 - скаляр – матрица порядка 1×1 (число)

Матричная форма системы уравнений



- стенографический способ записи коэффициентов СЛАУ

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{array} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- сложение матриц: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

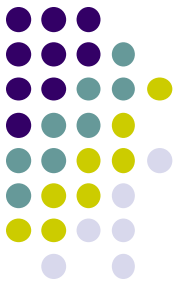
$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad z_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \quad y_1 + z_1 = (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad z_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \quad y_2 + z_2 = (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

- умножение матрицы A на скаляр α : $\alpha A = \alpha (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$

$$\begin{array}{l} \alpha y_1 = \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 \\ \alpha y_2 = \alpha a_{21}x_1 + \alpha a_{22}x_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11}x_1 & \alpha a_{12}x_2 \\ \alpha a_{21}x_1 & \alpha a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Матрица парных сравнений



- Матрица $A=(a_{ij})$ размера $n \times n$, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности n разных критериев на данном уровне иерархии
 - *парное сравнение* критериев в строке i ($i = 1, 2, \dots, n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами ($j = 1, 2, \dots, n$).
 - *оценки важности* $a_{ij}=\{1,2,\dots, 9\}$:
 - $a_{ij} = 1$ означает, что i -й и j -й критерии одинаково важны ЛПР
 - $a_{ij} > 1$ отражает мнение ЛПР, что i -й критерий важнее, чем j -й
 - $a_{ij} < 1$ отражает мнение ЛПР, что i -й критерий менее важный, чем j -й
 - *условие согласованности*:

$$a_{ij} \cdot a_{ji} = 1 \text{ (если } a_{ij} = k, \text{ то } a_{ji}=1/k; a_{ij=i}=1)$$

Шкала относительной важности приоритетов Т. Саати



Количественное значение	Уровень относительной важности
1	Равная важность
3	Умеренное превосходство
5	Существенное или сильное превосходство
7	Значительное превосходство
9	Очень сильное превосходство
2, 4, 6, 8	Промежуточная оценка между двумя соседними суждениями
Обратная величина	Если при сравнении одного элемента получена одна из вышеуказанных оценок, то при сравнении второго элемента с первым в качестве оценки относительной важности применяется обратная величина

Системы указания предпочтений:

- $\delta_{sr} =$
- 1 – равенство продуктов $sur (P_s = P_r)$
 - 3 – умеренное (легкое) превосходство $P_s > P_r$
 - 5 – существенное (сильное) превосходство $P_s \gg P_r$
 - 7 – значительное превосходство $P_s \ggg P_r$
 - 9 – очень сильное превосходство $P_s \gggg P_r$
 - 2,4,6,8 – промежуточные решения

**Шкала
Саати**

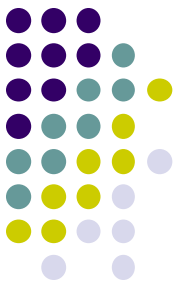
Thomas L. Saaty

	1
1	δ_{11}
2	δ_{21}
...	...
s	δ_{s1}
...	...
M	δ_{M1}



M
δ_{1M}
δ_{2M}
...
δ_{sM}
...
δ_{MM}

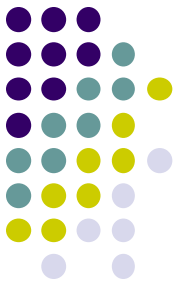
Таблица попарных сравнений групп



	Полная матрица			Нормализованная матрица			Среднее по строке (вес группы)
	Вознаграждение	Особенности и деят.	Личн. предпочт.	Вознаграждение	Особенности деят.	Личн. предпочт.	
Вознаграждение	1	5	9				
Особенности деятельности		1	3				
Личные предпочтения			1				
Сумма по столбцу							

Матрица парных сравнений.

Свойства



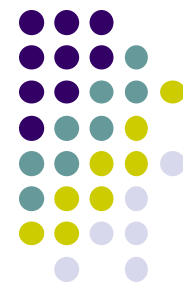
- матрица является квадратной $n \times n$, обратносимметрической $a_{ji} = 1/a_{ij}$, с положительными элементами $a_{ij} > 0$
- диагональные элементы матрицы равны единице: $a_{ij=i} = 1$
- для каждого элемента матрицы выполняется условие согласованности: $a_{ij} \cdot a_{ji}$
- элементы матрицы обладают свойствами обратной симметричности: если $a_{ij} = f_i / f_j$, то $a_{ji} = f_j / f_i$
- для матрицы ($a_{ij} = f_i / f_j$) выполняется условие транзитивности:
 $f_i > f_j; f_j > f_k$, то $f_i > f_k$
- собственные значения согласованной матрицы равны нулю $\lambda_i = 0$, кроме максимального $\lambda_{max} = n$

Схема (алгоритм) метода анализа иерархий



1. Построение модели проблемы в виде иерархии: *цель, альтернативные варианты достижения цели и критерии промежуточных уровней для оценки приоритетов альтернатив*
2. Построение матриц парных сравнений для частных приоритетов элементов иерархии
3. Проверка суждений на согласованность: *вычисление собственных значений для каждой матрицы парных сравнений*
4. Определение глобальных приоритетов альтернатив (линейная свертка частных приоритетов элементов на иерархии): *локальные приоритеты перемножаются на приоритет критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу*
5. Принятие решения на основе полученных глобальных приоритетов альтернатив

Проверка согласованности оценок парных сравнений



- индекс согласованности (ИС) суждений в матрице:

$$ИС = \frac{|\lambda_{\max} - n|}{(n - 1)}$$

- главное собственное значение МПС:

$$\lambda_{\max} = (\text{сумма по столбцам МПС}) \times (\text{столбец весов})$$

- случайный индекс согласованности (СИ)

Размерность матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

- отношение согласованности (ОС):

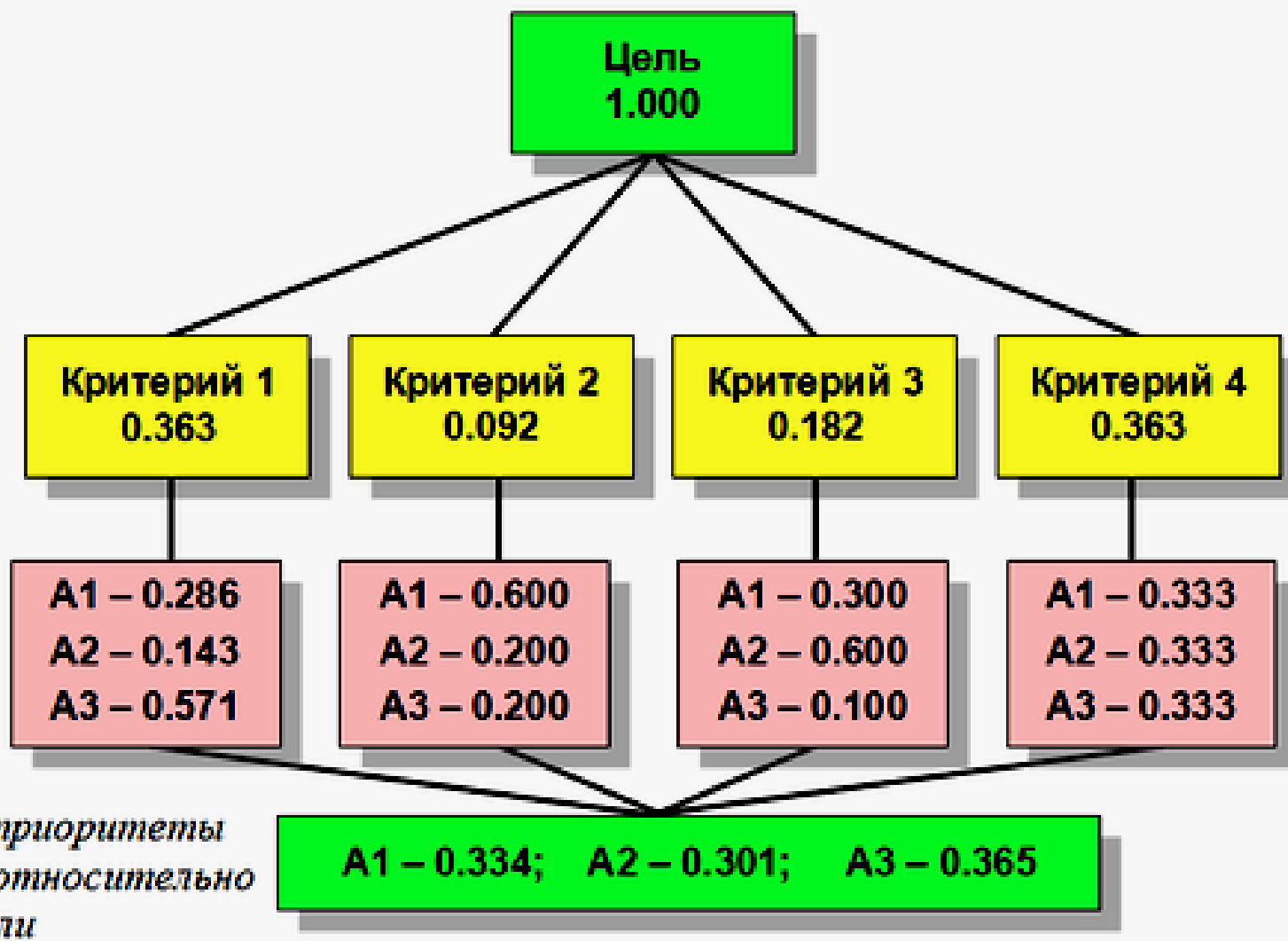
$$ОС = \frac{ИС}{СИ} \leq 0,1 \quad \text{при } n = \text{const}$$

Способы нормализация матрицы парных сравнений (МПС)

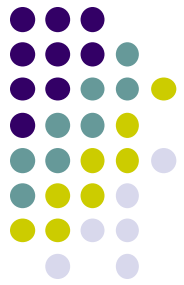


- **Нормализация МПС в среднем арифметическом:** деление каждого элемента строк (столбцов) на сумму всех элементов по строкам (столбцам)
 - сумма по строкам и столбцам равна 1.
- **Нормализация МПС в среднем геометрическом:** умножить n элементов каждой строки, извлечь корень n -й степени и нормализовать полученные значения
- **Нормализация МПС в среднем:** суммировать элементы по строкам (столбцам) и нормализовать элементы делением на сумму всех элементов матрицы
 - первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта и т.д.
- **Нормализация МПС в среднем гармоническом:** деление обратных элементов строк (столбцов) на сумму обратных элементов и нормализовать полученные значения

Иерархия МАИ с глобальными и локальными приоритетами

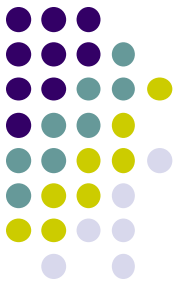


Порядок выполнения МАИ



- I. Выделение проблемы. Определение цели, критериев и альтернатив.**
- II. Построить иерархическую структуру модели, начиная с вершины:**
 - A. Первый уровень: цель.**
 - B. Второй уровень: группы критериев.**
 - C. Третий уровень: критерии**
 - D. Четвертый уровень: перечень альтернатив.**
- III. Построить множество матриц парных сравнений для каждого из нижележащих уровней.**
- IV. После проведения всех парных сравнений определить итоговые оценки альтернатив по всем критериям.**
- V. Осуществить выбор альтернативы с наибольшей оценкой.**

Задача выбора места работы



- **Альтернативы:**
 - Рабочее место А: научное учреждение
 - Рабочее место В: промышленное предприятие
 - Рабочее место С: коммерческая структура
- **Критерии выбора:**
 - К1 – годовая заработная плата;
 - К2 – перспективы продвижения;
 - К3 – местоположение
 - К4 – уровень самостоятельности в принятии решений;
 - К5 – риск увольнения;
 - К6 – престижность работы;
 - К7 – продолжительность рабочей недели;
 - К8 – продолжительность отпуска;
 - К9 – удаленность от дома
- **Группы критериев иерархии:**
 - «Вознаграждение» $P1 = \{K1, K2, K8\}$
 - «Особенности деятельности» $P2 = \{K4, K5, K6\}$
 - «Личные предпочтения» $P3 = \{K3, K7, K9\}$

Иерархическая модель выбора места работы

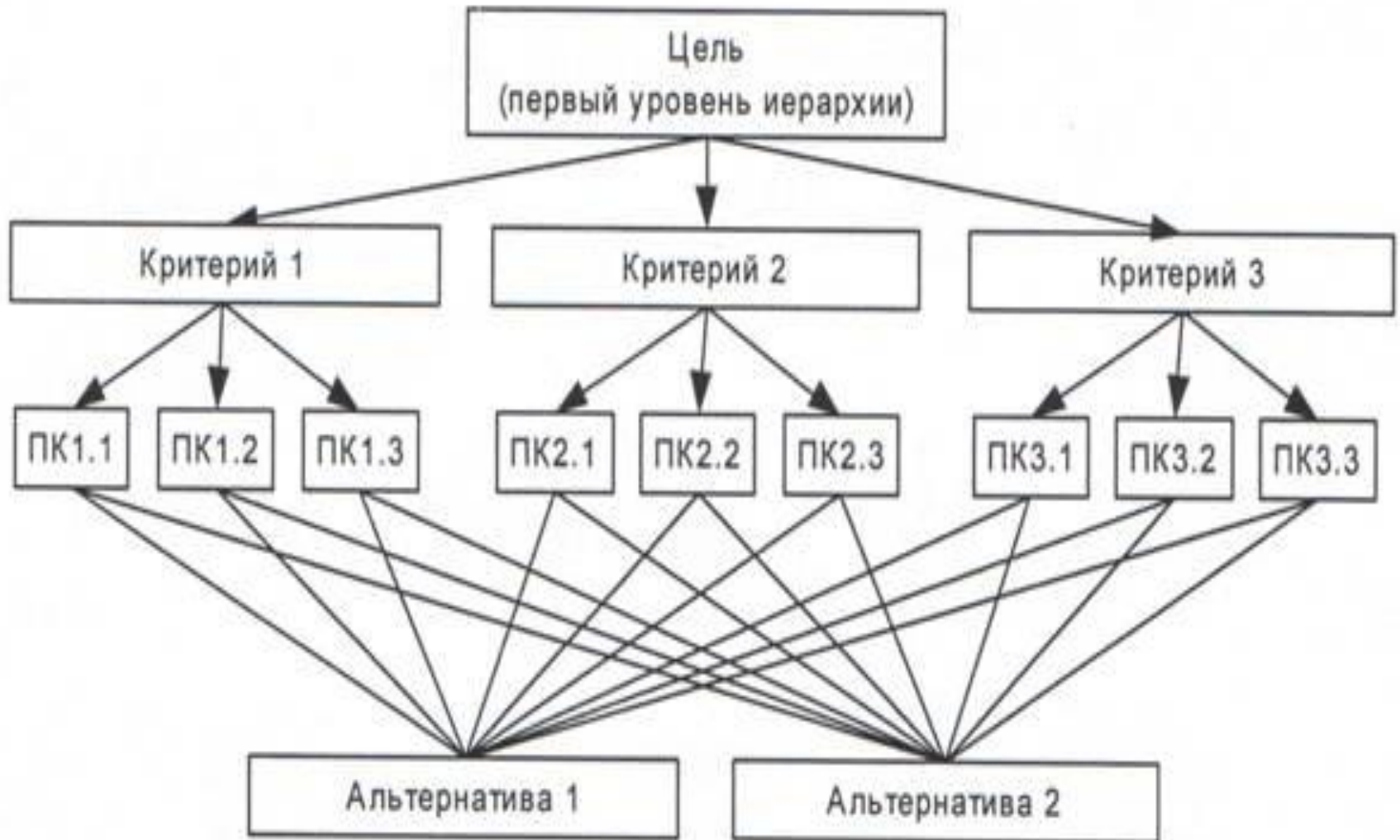
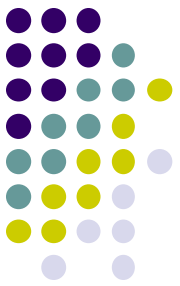
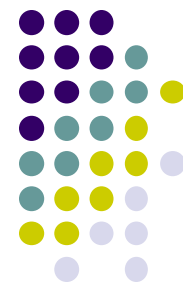


Таблица попарных сравнений групп Р1,Р2,Р3



	Полная матрица			Нормализованная матрица			Среднее по строке (вес группы)
	Вознагр.	Особ. деят.	Лич. предп.	Вознагр.	Особ. деят.	Лич. предп.	
Вознаграждение	1	5	9	0,762	0,789	0,692	0,747
Особенности деятельности	1/5	1	3	0,153	0,158	0,231	0,181
Личные предпочтения	1/9	1/3	1	0,085	0,053	0,077	0,072
Сумма по столбцу	59/45	19/3	13				

Таблица попарных сравнений критериев и альтернатив

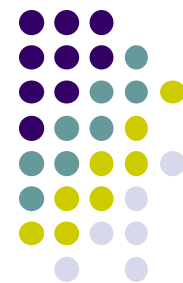
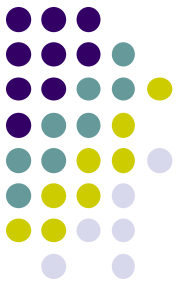


Таблица попарных сравнений критериев первой группы Р1

	Полная матрица			Нормализованная матрица			среднее по строке	весовой коэффициент
	K1	K2	K8	K1	K2	K8		
K1	1	3	5	0,652	0,667	0,625	0,648	0,484
K2	1/3	1	2	0,218	0,222	0,250	0,230	0,182
K8	1/5	1/2	1	0,130	0,111	0,125	0,122	0,091
сумма по столбцу	23/15	9/2	8					

Таблица попарных сравнений альтернатив по критерию K1

Заработная плата	Полная матрица			Среднее по строке нормализованной матрицы
	Рабочее место А	Рабочее место В	Рабочее место С	
Рабочее место А	1	1/5	1/7	0,076
Рабочее место В	5	1	1/3	0,078
Рабочее место С	7	3	1	0,234

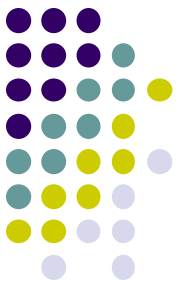


Вычисления МАИ в MS Excel

- Расчет весов приоритетов МПС (вычисление суммы и деление на нее):

	А	В	С	Д	Е
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	1	4	0.25	5
3	Критерий2	=1/C2	1	2	3
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	1	8
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	1
6	СУММА	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)
7					
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6

- обратить внимание на выбор абсолютных и относительных ссылок

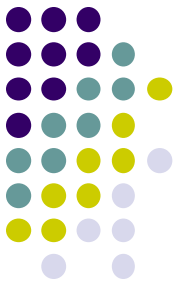


Вычисления МАИ в MS Excel

- Расчет среднего значения в строке (весового столбца):

	A	B	C	D	E	F
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	
2	Критерий1	1	4	0.25	5	
3	Критерий2	=1/C2	1	2	3	
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	1	8	
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	1	
6	СУММА	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)	
7						
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	СРЗНАЧ
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6	=СРЗНАЧ(B9:E9)
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6	=СРЗНАЧ(B10:E10)
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6	=СРЗНАЧ(B11:E11)
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6	=СРЗНАЧ(B12:E12)

Схема вычислений МАИ в MS Excel



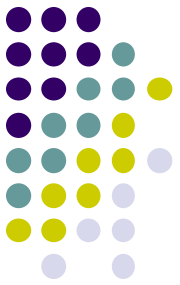
- Аккуратно организовать работу с одной матрицей сравнения альтернатив по первому критерию на отдельном листе.
- Скопировать лист в количестве, соответствующем числу критериев. Назвать листы соответственно.
- Исправить на каждом листе треугольную часть матрицы попарных сравнений над верхней диагональю.
- Результат будет автоматически пересчитан.

Характеристика методов оценки альтернатив



Название метода	Преимущества	Недостатки
Метод рейтинговых оценок	Простой и быстрый расчет показателей	Трудно получить объективные данные
Метод оценки затрат	Учитывает все возможные затраты	Анализ только категории затрат
Метод доминирующих характеристик	Простое использование, оценка главного фактора	Невозможность комплексной оценки
Метод анализа иерархий	Комплексная оценка	Сложные расчеты и необходимость большого объема информации

SWOT-анализ



- структурированное описание проблемной ситуации, относительно которой нужно принять решение

	Возможности	Угрозы
Сильные стороны	S trengths	W eaknesses
Слабые стороны	O pportunities	T hreats

- Поле СиВ – сильные стороны, чтобы получить отдачу от возможностей
- Поле СлВ – возможности внешней среды чтобы преодолеть слабости
- Поле СиУ – возможности для устранения угроз.
- Поле СлУ – устранение слабостей, чтобы предотвратить угрозу.

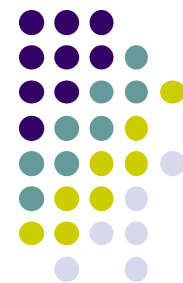
	Возможности	Угрозы
Сильные стороны	СиВ	СиУ
Слабые стороны	СлВ	СлУ



Факторы SWOT-анализа

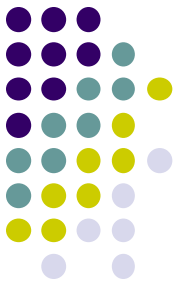
<i>Внутренние сильные стороны (S):</i>	<i>Внутренние слабости (W):</i>
Четко проявляемая компетентность	Потеря компетентности
Адекватные финансовые источники	Недоступность финансов
Высокое искусство конкуренции	Рыночное искусство ниже среднего
Хорошее понимание потребителей	Отсутствие анализа потребителей
Признанный рыночный лидер	Слабый участник рынка
Четко сформулированная стратегия	Отсутствие четкой стратегии
Использование экономии на масштабах	Относительно высокая цена продукции
Собственная уникальная технология	Устарелые технологии
Проверенное надежное управление	Потеря гибкости управления
Надежная сеть распределения	Слабая сеть распределения
Высокое искусство НИОКР	Слабые позиции в НИОКР
Эффективная реклама	Слабая политика продвижения
<i>Внешние возможности (O):</i>	<i>Внешние угрозы (T):</i>
Обслуживание новых потребителей	Ослабление роста рынка
Расширение диапазона товаров	Увеличение заменяющих товаров
Благодушие конкурентов	Ожесточение конкуренции
Снижение барьеров входа на рынок	Появление иностранных конкурентов
Благоприятный сдвиг в курсах валют	Неблагоприятный сдвиг в курсах валют
Большая доступность ресурсов	Усиление требований поставщиков
Ослабление законодательства	Законодательное регулирование

Интеграция образовательных учебных заведений. Пример



		Возможности			Угрозы		
Изменение организации образования. Интеграция вузов	A_i	Интеграция образования, производства и науки. Выполнение программ, получение грантов	Усиление контроля за образованием. Повышение роли менеджмента качества	Расширение открытости образования. Привлечение новых абитуриентов	Ослабление роста рынка. Снижение роли высшего образования	Ожесточение конкуренции. Коммерциализация образования	Сумма
Вероятность проявления, P_j		0,5	0,8	0,7	0,5	0,8	
Коэффициент влияния внешней среды, K_j		0,4	0,6	0,3	0,5	0,6	
Сильные стороны							
Повышение самостоятельности. Возможность подготовки по комплексным и уникальным специальностям. Интеграция подготовки	3	1,2	2,88	1,89	0,75	-1,44	5,28
Повышение устойчивости	4	1,6	3,84	1,68	1	0	8,12
Имидж вуза	3	1,2	1,44	1,26		1,44	5,34
Слабые стороны							
Недостаточная финансовая самостоятельность	3	0	0	-0,63	0	-2,88	-3,51
Усложнение процессов управления	2	0	-1,92	-0,42	0	-0,96	-3,3
Сумма		4	6,24	3,78	1,75	-3,84	11,93

Метод PATTERN



- **Дерево целей** - иерархическая структура разделения общей цели на подцели, а их на более детальные составляющие (новые подцели, функции и т.д.)
- **Метод PATTERN** (Planning Assistance Through Technical Evaluation of Relevance Numbers)

– планирование по оценкам научно-технических показателей на основе композиции метода сценариев и дерева целей

