Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК 517.518.823(075.8)
ББК 22.161.11я73
В31

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А.
В31 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : учебное пособие / Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А. – Санкт-Петербург : РГГМУ , 2022. – 72 с.

ISBN 978-5-86813-546-0

Пособие является девятым выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам. Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок. Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

Рецензент: Петрова В.В. доцент каф. высшей математики и теоретической механики РГГМУ

© Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А., 2022 ©Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2022
ISBN 978-5-86813-546-0

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной переменной не охватывают всех зависимостей, существующих в природе.

Так, **например**, площадь прямоугольника $S = xy$ есть произведение длин его сторон. Таким образом, значение S зависит от переменной упорядоченной пары чисел $(x;\ y)$ или, как говорят, S есть функция двух переменных x и y.

Температура T, измеряемая в различных точках водоема, есть функция от координат точки, в которой она измеряется, и от момента времени t, $T = f(x;\ y;\ z;\ t)$. Таким образом, значение T зависит от переменной упорядоченной четверки чисел $(x;\ y;\ z;\ t)$ или, T есть функция четырех переменных $x, y,\ z$ и t.

Мы ставим себе целью научиться исследовать функции многих переменных так же, как мы научились исследовать функции одного переменного. Как и в случае функций одного переменного, изучение функций многих переменных начинается с описания их области определения.

1 Некоторые определения и обозначения

Систему из двух чисел x и y геометрически можно интерпретировать как точку плоскости, а функцию одной переменной $y = f(x)$ можно геометрически представить ее графиком. Желая распространить геометрические методы на теорию функций любого числа переменных, в анализе введено понятие n-мерного пространства при любом натуральном n. Условимся через R^n обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, состоящих из n вещественных чисел $x_i \in R$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. В соответствии с удобной геометрической терминологией каждый такой набор будем называть ***точкой*** множества R^n. Число x_i в наборе $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называют i-й ***координатой*** точки $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Множество всевозможных таких точек образует так называемое ***n* - *мерное пространство***, которое иногда называют арифметическим. Точку n-мерного пространства в случаях $n = 1,\ n = 2$ и $n = 3$ можно представить геометрически как точку прямой, плоскости или трехмерного пространства соответственно.

Геометрические аналогии можно продолжить и ввести на множестве R^n ***расстояние*** между двумя любыми точками $M'(x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n)$ и $M''(x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_n) \in R^n$ по формуле

$$\rho\,(M';\ M'') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x''_i - x'_i)^2}. \tag{1}$$

При значении $n = 1$ получаем $\rho\,(M';\ M'') = |x''_1 - x'_1|$ – расстояние между точками $M'(x'_1)$ и $M''(x''_1)$ прямой $(R^1 \equiv R)$.

При значении $n = 2$ имеем

$$\rho\,(M';\ M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2}$$

–расстояние между точками $M'(x'_1;\ x'_2)$ и $M''(x''_1;\ x''_2)$ плоскости (R^2).

Функция $\rho\,(M';\ M'')$, определенная формулой (1), очевидно, обладает следующими свойствами:

$$1. \rho\,(M';\ M'') \geq 0;$$

$$2. \left(\rho\,(M';\ M'') = 0\right) \Leftrightarrow \left(M' = M''\right);$$

$$3. \rho\,(M';\ M'') = \rho\,(M'';\ M');$$

$$4. \rho\,(M';\ M''') \leq \rho\,(M';\ M'') + \rho\,(M'';\ M''').$$

Последнее неравенство называется (по геометрической аналогии) ***неравенством треугольника***.

Функцию, определенную на парах $(M';\ M'')$ точек некоторого множества R^n и обладающую свойствами 1 – 4, называют ***метрикой*** или ***расстоянием*** в R^n.

Множество R^n вместе с фиксированной в нем метрикой называют ***n* - *мерным евклидовым пространством***.

Таким образом, мы превратили R^n в n-мерное евклидово пространство, наделив множество R^n метрикой, заданной соотношением (1). В частности, евклидово пространство R^1 называется ***координатной прямой***, а R^2 – ***координатной плоскостью***.

Множество точек $\{M\}$ пространства R^n, удовлетворяющих условию $\rho(M;\ M_0) < \varepsilon$, где ε - положительное число, называется ε - ***окрестностью точки*** M_0 ***этого пространства***.

В частности, при $n = 1$ ε - окрестность точки M_0 образует открытый промежуток с центром в точке M_0, длина которого равна 2ε, при $n = 2$ – круг радиуса ε с центром в точке M_0 без ограничивающей его окружности.

Определение. Пусть точка $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \in R^n$ и пусть $\varepsilon > 0$ – вещественное число. Совокупность всех точек $M \in R^n$ таких, что $\rho(M; M_0) < \varepsilon$, называется ***n-мерным*** (***открытым***) ***шаром в точке*** M_0 ***радиусом*** ε***, или шаровой*** ε ***- окрестностью точки*** $M_0 \in R^n$.

В случае $n = 2$ имеем $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$. Это внутренность круга с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ радиуса ε (круг без ограничивающей его окружности; рис. 1).

Для значения $n = 3$ имеем $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2$. Это шар радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (шар без ограничивающей его сферы; рис. 2).

Наряду с шаровыми окрестностями рассматривают ***прямоугольные окрестности*** точки $M_0(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots,\ x_n^0)$.

Это совокупность всех точек $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in R^n$ таких, что

$$x_i^0 - \varepsilon_i < x_i < x_i^0 + \varepsilon_i,\ \ \varepsilon_i > 0\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В случае $n = 1$ имеем обычную ε – окрестность $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \eta$ точки x_0 на прямой числовой линии.

Если $n = 2$, то это прямоугольник со сторонами длины $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ (без границы, рис. 3).

Если $n = 3$, то это (открытый) параллелепипед с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, ребра которого имеют длины $2\varepsilon_1,\ 2\varepsilon_2,\ 2\varepsilon_3$ (рис. 4).

Рассмотрим некоторое бесконечное множество **E** точек пространства R^n. Точка M_0 пространства R^n называется ***внутренней точкой множества* E**, если она принадлежит **E** вместе с

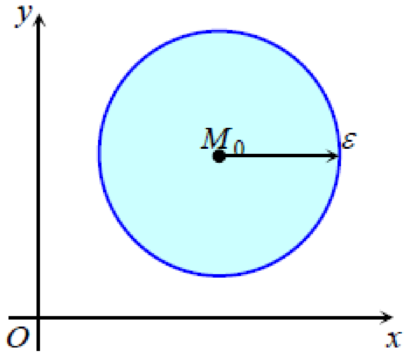

Рис. 1: замкнутый шар

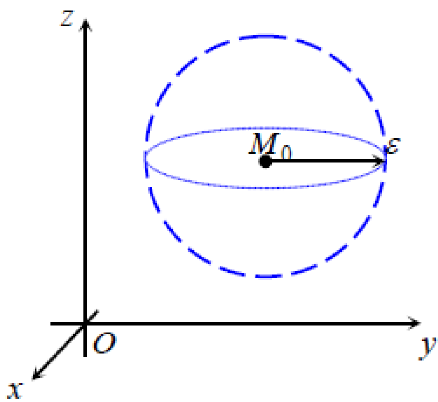

Рис. 2: открытый шар

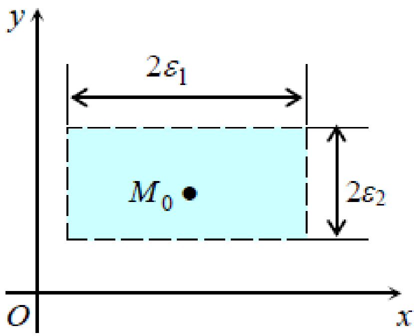

Рис. 3: открытый прямоугольник

некоторой окрестностью точки M_0.

Множество **E** называется ***открытым***, если каждая его точка внутренняя.

Примером открытого множества пространства R^2 является множество точек, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < 1$.

Определение. Пусть множество $E \subset R^n$. Точка $M \in E$ называется ***внутренней точкой*** множества **E**, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что точка M содержится во множестве **E** вместе со своей ε – окрестностью.

Если все точки множества **E** внутренние для множества **E**, то множество **E** называется ***открытым множеством***.

Так, в случае $n = 2$ любой круг без ограничивающей его окружности является примером открытого множества.

Однако условие $x^2 + y^2 \leq 1$ определяет множество, не являющееся открытым, потому что, например, точка $(1;\ 0)$ нашему множеству принадлежит, но она не является внутренней точкой рассматриваемого множества.

Определение. Точка $P \in R^n$ называется ***граничной точкой*** множества $E \subset R^n$, если в любой окрестности точки P существуют точки, как принадлежащие множеству **E**, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества **E**

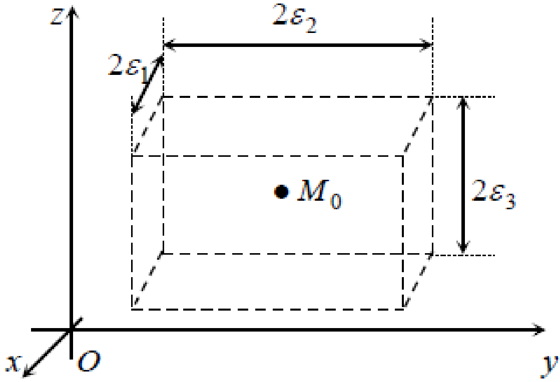

Рис. 4: открытый параллелепипед

называется его ***границей*** и обозначается ∂E.
Если к множеству **E** присоединить его границу, то получим ***замкнутое множество*** $\bar{E}$: $\bar{E} = E \bigcup \partial E$.

Из определения следует, что характеристическое свойство граничной точки множества состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого множества, так и точки, ему не принадлежащие.

Примеры. Каждая точка окружности $x^2 + y^2 = 1$ является граничной точкой области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 < 1$. Неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$ определяет замкнутую область пространства R^2. И вообще, примером замкнутого множества может служить круг вместе с ограничивающей его окружностью.

Определение. Множество $E \in R^n$ называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной линии), всеми своими точками содержащейся во множестве **E** (рис. 5).

а) связное множество б) несвязное множество

Определение. Открытое связное множество называется ***областью***. Область называется ***ограниченной***, если существует шар (круг), содержащий эту область.

Рис. 5: связное и несвязное множество

Например, множество точек, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$, есть область пространства R^2.

Всякую область, содержащую данную точку M_0, будем называть ***окрестностью*** точки M_0 (просто окрестностью, в отличие от ε – окрестности). В частности, ε – окрестность точки является ее окрестностью.

Предельной точкой множества **E**, называется точка P пространства R^n, в любой окрестности которой имеются точки множества **E**, отличные от точки P. Каждая предельная точка области является либо ее внутренней точкой, либо ее граничной точкой.

2 Понятие функции нескольких переменных

В нашем курсе наиболее подробно рассматривается случай функции двух переменных. Однако все введенные понятия и полученные результаты могут быть соответственно обобщены на случай функции любого числа независимых переменных.

Пусть **E** есть область изменения независимых переменных x и y. Переменная z называется ***функцией независимых переменных*** x и y ***на множестве*** **E**, если каждой паре чисел x, y из множества **E** соответствует определенное значение z. Переменные x, y называются также аргументами функции z.

Множество **E** пар чисел x, y, на котором определена функция, называется ***областью определения***, или областью существования ***функции***. Областью **E** определения функции двух переменных может быть область плоскости (открытое связное множество точек евклидова двумерного пространства R^2). Ею может быть линия или какое-либо иное множество точек плоскости R^2.

2.1 Способы задания функции

I. *Аналитический способ* – задание функции с помощью формул.

1. Функция задана формулой $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ внутри круга, определяемого неравенством $x^2 + y^2 < 1$.
2. Функция задана формулой $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ внутри и на границе круга, определяемого неравенством $x^2 + y^2 \leq r^2$.
3. Функция задана формулой $z = x - y$на эллипсе $x^2 + 4y^2 = 4$.

Обозначение. В общем случае тот факт, что z есть функция аргументов x и y, изображается символом $z = f(x;\ y)$, $8; 8$ $z = z(x;\ y)$ и т.п.

II. ***Табличный способ*** – задание функции с помощью таблицы с двойным входом.

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	$f(x_1;\ y_1)$	$f(x_2;\ y_1)$	$\ldots$	$f(x_n;\ y_1)$
y_2	$f(x_1; y_2)$	$f(x_2;\ y_2)$	$\ldots$	$f(x_n;\ y_2)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_n	$f(x_1;\ y_n)$	$f(x_2;\ y_n)$	$\ldots$	$f(x_n;\ y_n)$

III. ***Геометрический способ*** – это задание функции $z = f(x;\ y)$ в виде поверхности в прямоугольной системе координат в пространстве.

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой области G на плоскости Oxy. Тогда каждой точке $(x; y) \in G$ будет отвечать точка $(x;\ y;\ f(x;\ y))$ трехмерного пространства. Множество всех таких точек $(x;\ y;\ f(x;\ y))$, где точка $(x; y) \in G$, называется ***графиком функции*** $z = f(x;\ y)$.

Например, график функции $z = x^2 + y^2$– параболоид вращения (рис. 6).

Для изучения характера изменения функции $z = f(x;\ y)$ пользуются линиями уровня. ***Линией уровня*** называется множество

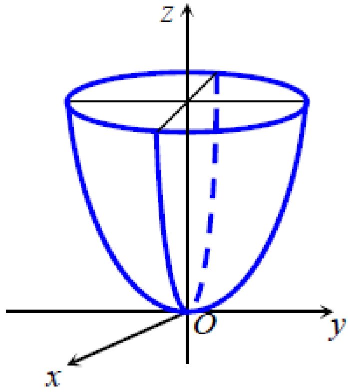

Рис. 6: параболоид вращения

точек на плоскости Oxy, в которых функция f принимает данное постоянное значение $z = c$.

Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z = f(x;\ y)$ плоскостью $z = c$, параллельной плоскости Oxy, и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость Oxy.

Система линий уровня $f(x;\ y) = c_m$ $(1 \leq m \leq k)$, где $c_{m+1} - c_m = h = const$, позволяет судить о ходе изменения уровня. Там, где линии расположены густо, функция изменяется быстро, а где линии расположены редко, функция изменяется медленно.

Для функции $z = x^2 + y^2$ линии уровня – концентрические окружности с центром в начале координат.

Этот прием изучения функции может быть распространен и на функции $u = f(x;\ y;\ z)$ трех независимых переменных. Вместо линий уровня тогда возникают ***поверхности уровня*** – множество точек $M(x;\ y;\ z)$ пространства, в которых функция $f(M)$ принимает данное постоянное значение.

Например, для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхности уровня – концентрические сферы с центром в начале координат.

Понятие функции двух независимых переменных легко обобщается на случай функции любого числа независимых переменных.

Если каждой точке $M(x_1;\ x_2;\ \ldots,\ x_n)$ множества **E** точек n - мерного евклидова пространства R^n, по некоторому закону, поставлено в соответствие определенное вещественное число u, то говорят, что на множестве **E** определена ***функция точки*** M или ***функция*** n ***переменных*** $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, и пишут $u = f(M)$, или $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $M \in E$.

Множество **E** называется ***областью определения*** функции f.

Функция $u = f(M)$ с областью определения **E** есть отображение множества **E** на множество **U**, представляющее область изменения переменной u.

3 Предел функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0;\ y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0.

Определение 1. Число A называется ***пределом функции*** $f(M)$ ***в точке*** $M_0(x_0;\ y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x;\ y) \in \Omega$, отличных от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и удовлетворяющих условию

$$0 < \rho\,(M;\ M_0) < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Обозначения: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ или $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;\ y).$

Предполагается, что точка M может стремиться к точке M_0 по любому соответствию, по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу A.

Примеры.

1. Рассмотрим функцию $f(x;\ y) = x^2 + y^2$.

Она определена на всей плоскости Oxy, причем $f(0;\ 0) = 0$. Покажем, что предел этой функции в точке $O\,(0;\ 0)$ равен нулю. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда условие $|f(x;\ y) - 0| < \varepsilon$ запишется так: $\left|x^2 + y^2 - 0\right| < \varepsilon$, или $\left|x^2 + y^2\right| < \varepsilon$.

Замечая, что $\sqrt{x^2+y^2} = \rho\,(M;\ O)$, где $M(x;\ y)$ – точка с координатами $(x;\ y)$, последнему неравенству можно придать вид $\rho^2(M;\ O) < \varepsilon$, или $\rho\,(M;\ O) < \sqrt{\varepsilon}$.

Если взять $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, то для любой точки $M(x;\ y)$, для которой $\rho\,(M;\ O) < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, будем иметь
$\left|x^2 + y^2 - 0\right| < \varepsilon$ или $|f(x;\ y) - 0| < \varepsilon$.

Согласно определению это означает, что число $A = 0$ есть предел данной функции в точке $O\,(0;\ 0)$.

2. Рассмотрим функцию $f(x;\ y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Этим заданием она определена всюду, исключая точку $O\,(0;\ 0)$. Рассмотрим поведение функции на различных лучах $y = kx,\ x \neq 0$. Имеем
$f(x;\ kx) = \dfrac{2x^2k}{(1+k^2)x^2},\ x \neq 0$, откуда $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2k}{(1+k^2)x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$.

Получили, что значение предела зависит от углового коэффициента прямой линии. Но так как предел не должен зависеть от способа приближения точки $(x;\ y)$ к точке $(0;\ 0)$ (например, по прямой $y = 2x$ или $y = 5x$), то рассматриваемый предел не существует.

Функция $u = f(M)$ называется ***бесконечно малой при стремлении*** $M : M_0$, если

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = 0.$$

Все основные теоремы о бесконечно малых функциях и о пределах, сформулированные для функции одной переменной, обобщаются и на случай функций нескольких переменных.

Например, имеет место следующие теоремы.

Теорема 1. *Сумма двух бесконечно малых функций $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ при $M \to M_0$ есть функция бесконечно малая.*

Теорема 2. *Если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют предел в точке M_0, то в точке M_0 существуют пределы суммы $f(M) + g(M)$,* *разности* $f(M)-g(M)$*, произведения* $f(M)\cdot g(M)$ *и частного* $\frac{f(M)}{g(M)}$ *(последнее при дополнительном условии, что* $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)\neq 0$*), причем*

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)\pm g(M))=\lim_{M\to M_0} f(M)\pm\lim_{M\to M_0} g(M),$$

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)\cdot g(M))=\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot\lim_{M\to M_0} g(M),$$

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}\quad\left(\lim_{M\to M_0} g(M)\neq 0\right).$$

Пример . Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x^2+4y-1)$.

Принимая во внимание теорему о пределе суммы функций, получаем
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x^2+4y-1)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}3x^2+\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}4y-1=\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{y\to 2}4y-1=3+8-1=10.$

Замечание. Удобным бывает следующее определение предела функции в точке (эквивалентное определению 1).

Определение 2. Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой «проколотой» окрестности Ω точки M_0 (т.е. окрестности, из которой удалена точка M_0). Число A называется ***пределом функции*** $f(M)$ ***в точке*** M_0, если для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке M_0 ($M_n\in\Omega,\ M_n\neq M_0$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к числу A.

Замечание. Рассмотренное выше понятие предела предполагает одновременное стремление всех аргументов к их предельным значениям: $(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)$.

Для функций многих переменных приходиться иметь дело и с пределами другого рода, получаемыми в результате ряда последовательных предельных переходов в том или ином порядке. Такие пределы называются ***повторными***. Они составляют специфику функций многих переменных.

Рассмотрим, **например**, функцию $f(x;\ y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, определенную этой формулой всюду, кроме точки $O\,(0;\ 0)$. При постоянном значении $y\neq 0$ и $x\to 0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ y)=-1$; при постоянном значении $x\neq 0$ и $y\to 0$ получаем $\lim\limits_{y\to 0} f(x;\ y)=1$. Стало быть, для этой функции

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x;\ y)\right)\neq \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x;\ y)\right),$$

и результат зависит от порядка предельных переходов.

4 Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0;\ y_0)$.

Определение. Функция $f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;\ y_0)$, если
$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$, или, что есть то же,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;\ y)=f(x_0;\ y_0).$$

Предполагается, что точка $M(x;\ y)$ может стремиться к точке $M_0(x_0;\ y_0)$ произвольным образом, но, постоянно оставаясь в области определения функции $f(M)$. На языке «$\varepsilon-\delta$» непрерывность функции в точке M_0 выражается так:
функция $f(M)$ ***непрерывна в точке*** M_0, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех точек $M\in\Omega$, таких, что $\rho\,(M;\ M_0)<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon.$$

Определению непрерывности функции в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ можно придать еще следующую форму. Обозначим через Δx и

Δy приращения независимых переменных x и y при переходе от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ к точке $M(x;\ y)$, а через

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$$

обозначим соответствующее полное приращение функции $z = f(x;\ y)$. Тогда равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0)$$

будет равносильно равенству

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0, \tag{3}$$

которое означает, что ***бесконечно малому расстоянию между точками*** M ***и*** M_0 ***соответствует бесконечно малое приращение функции***. Это равенство выражает условие непрерывности функции $z = f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$. Величины Δx, Δy могут стремиться к нулю произвольным образом, независимо друг от друга.

Пример . Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке плоскости.
Действительно, при любых значениях x и y величина

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-(x^2+y^2) = 2x\Delta x+2y\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

стремится к нулю при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Таким образом, выполнено условия (3), что и доказывает наше утверждение.

Понятие непрерывности функции, введенное выше, называется ***непрерывностью по совокупности переменных*** x, y.

Из этого определения следует, что если функция $f(x;\ y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных x и y. Напротив, из непрерывности функции $f(x;\ y)$ в точке M_0 по каждой из переменных x, y не вытекает непрерывность функции f в этой точке.

Рассмотрим, **например**, функцию

$$f(x;\ y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

По заданию функции $f(x;\ y)$ имеем $f(x;\ 0) = 0\ \forall x$, так что $\lim\limits_{x\to 0} f(x;\ 0) = 0 = f(0;\ 0)$. Поэтому функция $f(x;\ 0)$ непрерывна по x при $x = 0$.

Аналогично функция $f(0;\ y)$ непрерывна по y при $y = 0$, так как $f(0;\ y) = 0$ для всякого y, и потому $\lim\limits_{y\to 0} f(0;\ y) = 0 = f(0;\ 0)$.

Однако данная функция $f(x;\ y)$ в точке $O\,(0;\ 0)$ разрывна. В самом деле, пусть $y = x$. Тогда

$$\lim_{x=y\to 0} f(x;\ y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \neq f(0;\ 0).$$

Это не удивительно.

Говоря о непрерывности по x и по y в отдельности, мы учитываем лишь приближения к точке $O\,(0;\ 0)$ по оси Ox или по оси Oy, оставляя в стороне бесконечное множество других способов приближения.

Теорема 3. . *Сумма, разность и произведение функций $f(M)$ и $g(M)$, непрерывных в точке M_0, есть функция непрерывная в точке M_0. Частное $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ непрерывных в точке M_0 функций $f(M)$ и $g(M)$ непрерывно в точке M_0, если $g(M_0) \neq 0$.*

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке области G, то она называется ***непрерывной в области*** G. Точки, в которых функция $f(M)$ не является непрерывной, называются ***точками разрыва*** этой функции. Точки разрыва функции $f(x;\ y)$ могут быть изолированными и могут заполнять целые линии.

Так функция $f(x;\ y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ имеет единственную точку разрыва $O\,(0;\ 0)$; точки разрыва функции $f(x;\ y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$ заполняют прямые $y = x$ и $y = -x$.

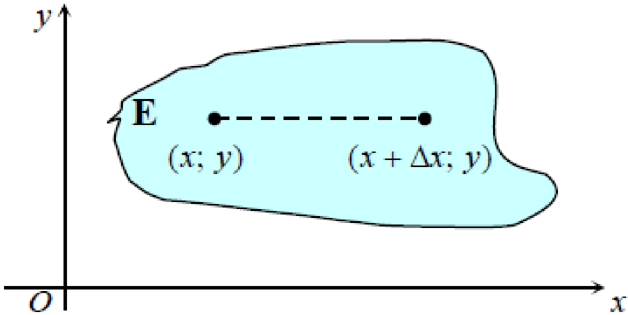

Рис. 7: приращение по x

Теорема 4. *. Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной области $\bar{G}$, то*
1. функция $f(M)$ ограничена в области $\bar{G}$;
2. $f(M)$ принимает в $\bar{G}$ наибольшее и наименьшее значения.

5 Частные производные

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой области G на плоскости Oxy. Одной из основных задач теории функций нескольких переменных является задача исследования данной функции. Метод сечений, с помощью которого в аналитической геометрии проводилось исследование формы поверхности по ее уравнению, нашел своеобразное отражение и в математическом анализе при решении указанной задачи.

Возьмем внутреннюю точку $(x;\ y)$ из области G и дадим x приращение Δx такое, чтобы точка $(x + \Delta x; y) \in E$ (рис. 7).

Величину

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x;\ y) - f(x;\ y)$$

назовем ***частным приращением функции*** z по переменной x.

Составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Для данной точки $(x;\ y)$ это отношение является функцией от Δx.

Определение. ***Частной производной функции*** $z = f(x;\ y)$ ***по переменной*** x ***в точке*** $(x;\ y)$ называется предел (если он существует) отношения соответствующего частного приращения функции $\Delta_x z$ к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, когда Δx стремится к нулю.
Обозначение. Обозначается частная производная любым из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, z''_x, $f'_x(x;\ y)$.

Таким образом, по определению
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, или, что то же самое,

$$f'_x(x;\ y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x;\ y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)}{\Delta y}.$$

Она **обозначается** также и другими символами: $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x;\ y)$.

Если $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots,\ x_n)$– функция n независимых переменных, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_{k-1};\, x_k + \Delta x_k;\, x_{k+1};\, \ldots,\, x_n) - f(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_{k-1};\, x_k;\, \ldots;\, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при постоянном значении переменной y, а $\Delta_y z$ – при неизменном значении переменной x, определения частных производных можно сформулировать так:
частной производной по x функции $z = f(x;\ y)$ называется обычная производная этой функции по x, вычисленная в предположении, что y – ***<u>постоянная</u>***;
частной производной по y функции $z = f(x;\ y)$ называется ее производная по y, вычисленная в предположении, что x – ***<u>постоянная</u>***.

Отсюда следует, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, доказанными для функции одной переменной.

Отметим одну ***особенность обозначения*** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
Надо помнить, что это есть ***<u>цельный символ</u>*** для z'_x, а никак не дробь.
Чем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и отличается от обозначения $\dfrac{dz}{dx}$ для производной функции одного аргумента $z = f(x)$. Действительно, ведь $\dfrac{dz}{dx}$ и в самом деле есть самая настоящая дробь.
Нелишне заметить, что (в отличие от dx и dz) символы ∂z и ∂x сами по себе ***не имеют смысла***.

Пример . Найти частные производные функции $z = x^y$.
Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

Пример . Найти частные производные функции $z = arctg^3 \frac{x}{y}$.

$$z'_x = 3arctg^2 \tfrac{x}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \tfrac{1}{y},\ z'_y = 3arctg^2 \tfrac{x}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \tfrac{-x}{y^2}\ .$$

Пример . Найти частные производные функции $u = xyz$.
Имеем $u'_x = yz$, $u'_y = xz$, $u'_z = xy$.

Пользуясь понятием скорости изменения переменной, можно сказать:

1. частная производная $f'_x(x;\ y)$ характеризует скорость изменения функции $f(x;\ y)$ относительно x при постоянном значении y,

2. частная производная $f'_y(x;\ y)$ характеризует скорость изменения функции при изменении y и фиксированном x.

5.1 Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Пусть в трехмерном пространстве поверхность S задана уравнением $z = f(x;\ y)$, где $f(x;\ y)$ – функция, непрерывная в некоторой области G и имеющая там частные производные по x и по y. Выясним геометрический смысл этих производных в точке

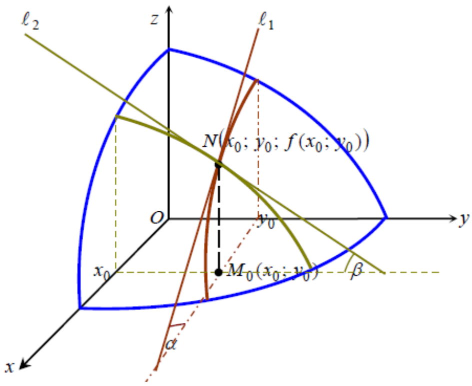

Рис. 8: геометрический смысл частных производных

$M_0(x_0; y_0) \in G$, которой на поверхности $z = f(x;\ y)$ соответствует точка $N_0\,(x_0;\ y_0;\ f(x_0;\ y_0))$.

При нахождении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке M_0 мы полагаем, что z является только функцией аргумента x, тогда как аргумент y сохраняет постоянное значение $y = y_0$, т. е. $z = f(x;\ y_0) = \tilde{f}(x)$.

Функция $\tilde{f}(x)$ геометрически изображается кривой ℓ, по которой поверхность S пересекается плоскостью $y = y_0$. В силу геометрического смысла производной функции одной переменной $\tilde{f}'(x_0) = tg\alpha$, где, α – угол, образованный касательной к линии ℓ в точке N_0 с осью Ox (рис. 8).

Но $\tilde{f}'(x_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0)}$, так что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)|_{M_0} = tg\alpha$.

Таким образом, частная производная $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)|_{M_0}$ равна тангенсу угла α между осью Ox и касательной в точке N_0 к кривой, полученной в сечении поверхности $z = f(x;\ y)$ плоскостью $y = y_0$.

Аналогично получаем, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)|_{M_0} = tg\beta$.

6 Дифференцируемость функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой области G на плоскости Oxy. Возьмем точку $(x; y) \in G$ и выбранным значениям x и y дадим любые приращения Δx и Δy, но такие, чтобы точка $(x + \Delta x; y + \Delta y) \in G$.

Определение. Функция $z = f(x;\ y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $(x; y) \in G$, если полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)$$

этой функции, отвечающее приращениям $\Delta x,\ \Delta y$ аргументов, можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x;\ \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\ \Delta y)\Delta y, \qquad (4)$$

где A и B не зависят от Δx и Δy (но вообще зависят от x и y), а $\alpha(\Delta x; \Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\ \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy.

Если функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x;\ y)$, то часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции в точке $(x;\ y)$ и обозначается символом dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (5)$$

Таким образом,

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.$$

Пример . Пусть $z = x^2 - xy + y^2$.
Во всякой точке $(x;\ y)$ и для любых Δx и Δy имеем

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (x^2 - xy + y^2) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y +$$
$$+ y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2 =$$

$$= 2x\Delta x - x\Delta y + 2y\Delta y - y\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2 =$$
$$= (2x - y)\Delta x + (2y - x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2.$$

Здесь

$$A = 2x - y,\ B = 2y - x,\ \alpha(\Delta x;\ \Delta y) = \Delta x^2 - \Delta x\Delta y,\ \beta(\Delta x;\ \Delta y) = \Delta y^2,$$

так что α и β стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx **и** Δy.

Согласно определению, данная функция дифференцируема в любой точке плоскости Oxy. При этом $dz = 2xdx + 2ydy$.

Заметим, что в наших рассуждениях не был формально исключен тот случай, когда приращения $\Delta x,\ \Delta y$ порознь или даже оба сразу равны нулю.

Формулу (4) можно записать компактно, если ввести выражение

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(***расстояние*** между точками $(x;\ y)$ и $(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$).

Пользуясь им, можем написать

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho,\ (\rho \neq 0).$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через ε, будем иметь $\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \varepsilon\rho$, где ε зависит $>$ В $\Delta x,\ \Delta y$.

Т. к. $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right| \leq 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right| \leq 1$, то $|\varepsilon| = \left|\dfrac{\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\rho}\right| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Значит, при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ будет $\varepsilon \to 0$. Заметим еще, что пара соотношений $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ равносильна соотношению $\rho \to 0$.

Формулу (4), выражающую условие дифференцируемости функции $z = f(x;\ y)$ в точке $(x;\ y)$, можно теперь записать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{6}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

6.1 Необходимые условия дифференцируемости функции

Теорема 5. *. Если функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

Если в точке $(x;\ y)$ функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема, то полное приращение функции z в этой точке, отвечающее приращениям Δx и Δy аргументов, можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x;\ \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\ \Delta y)\Delta y \qquad (7)$$

(величины A, B для данной точки постоянны и $\alpha,\ \beta \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\to} 0$),

откуда следует, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Последнее означает, что в точке $(x;\ y)$ функция $z = f(x;\ y)$ непрерывна.

Теорема 6. *. Если функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в данной точке, то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.*

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x;\ y)$. Тогда приращение Δz этой функции, отвечающее приращениям Δx, Δy аргументов, можно представить в виде (4).

Взяв в равенстве (4) $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x;\ 0)\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x;\ 0).$$

Т.к. в правой части последнего равенства величина A не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x;\ 0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

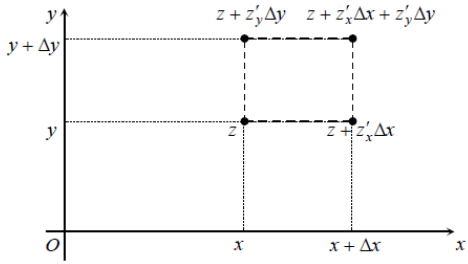

Рис. 9: полное приращение

Это означает, что в точке $(x;\ y)$ существует частная производная функции $z = f(x;\ y)$ по x, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$.

Подобными же рассуждениями убеждаемся в том, что в точке $(x;\ y)$ существует частная производная функции $z = f(x;\ y)$ по y, причем $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Из теоремы следует, что

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Формула проиллюстрирована на рис. 9, где рядом с точками плоскости аргументов указаны значения функции с членами высшего порядка малости

Подчеркнем, что теорема (5) утверждает существование частных производных только в точке $(x;\ y)$, но ничего не говорит о непрерывности их в этой точке, а также об их поведении в окрестности точки $(x;\ y)$.

Обратные утверждения к теоремам 5 и 6 неверны, т. е. из непрерывности функции двух переменных в точке $(x;\ y)$, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемость функции.

Например, функция $f(x;\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $(0;\ 0)$, но не имеет в этой точке частных производных. В самом деле,

$$\frac{f(0+\Delta x;\ 0)-f(0;\ 0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $f'_x(0;\ 0)$ не существует. Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0;\ 0)$. Так как данная функция не имеет частных производных в точке $(0;\ 0)$, то она и не дифференцируема в данной точке.

Функция

$$f(x;\ y)=\left[\begin{array}{ll} 0 & \text{на осях координат,} \\ 1 & \text{в остальных точках плоскости} \end{array}\right.$$

имеет частные производные по x и yв точке $(0;\ 0)$.

Это следует из того, что $f(x;\ 0)\equiv 0$ и $f(0;\ y)\equiv 0$, следовательно,

$$f'_x(0;\ 0)=0$$

и

$$f'_y(0;\ 0)=0.$$

Но $f(x;\ y)$ не является непрерывной в этой точке, так как, например, вдоль прямой $y=x$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y)=1$, а $f(0;\ 0)=0$.

Следовательно, функция $f(x;\ y)$ недифференцируема в точке $(0;\ 0)$.

И последний **пример**. Функция $f(x;\ y)=\sqrt{|x|\cdot|y|}$ непрерывна в точке $(0;\ 0)$, так как $f(0;\ 0)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y)=0$ и имеет частные производные по x и по y в этой точке:

$$f'_x(0;\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,\ f'_y(0;\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0,$$

но, тем не менее, данная функция не является дифференцируемой в точке (0; 0).

Действительно, полное приращение функции в точке (0; 0) равно

$$\Delta z = \sqrt{|\Delta x| \ |\Delta y|}.$$

Если бы функция была дифференцируема в точке (0; 0), то, как следует из соотношения (4) и теоремы 6.2, выполнялось бы равенство

$$\Delta z = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где α и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Далее из равенства

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = \left(\frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right) \rho = \gamma \rho,$$

где

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

получаем, что $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$ (см. вывод формулы (6.3)) .

Но в данном случае при любых $\Delta x = \Delta y$.

$$\gamma = \frac{\sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. не является бесконечно малой функцией при $\rho \to 0$.

Таким образом, функция $f(x;\ y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0; 0), имеет в этой точке частные производные и, тем не менее, не является дифференцируемой в этой точке.

6.2 Достаточные условия дифференцируемости

6.3 функции нескольких переменных

Как известно, необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $y = f(x)$ одной переменной в точке x_0 является существование конечной производной $f'(x)$ в точке x_0. В случае, когда функция зависит от нескольких переменных, дело обстоит значительно сложнее. Необходимых и достаточных условий дифференцируемости нет уже для функции $z = f(x;\ y)$ двух независимых переменных x, y; есть лишь отдельно необходимые условия (см. выше) и отдельно – достаточные. Эти достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных выражаются следующей теоремой.

Теорема 7. *. Если функция $z = f(x;\ y)$ имеет частные производные f'_x и f'_y в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ и если эти производные непрерывны в самой точке $(x_0;\ y_0)$, то функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x_0;\ y_0)$.*

Придадим переменным x и y столь малые приращения Δx и Δy, чтобы точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ не выходила за пределы указанной окрестности точки $(x;\ y)$. Полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)$$

можно записать в виде

$$\Delta z = (f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y + \Delta y)) + (f(x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)) \tag{8}$$

Выражение

$$f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y + \Delta y)$$

можно рассматривать как приращение функции $f(x;\ y + \Delta y)$ одно переменной x (второй аргумент имеет постоянное значение, равное $y + \Delta y$). Так как согласно условию эта функция имеет производную $f'_x(x;\ y + \Delta y)$, то по теореме Лагранжа получаем

$$f(x+\Delta x;\ y+\Delta y) - f(x;\ y+\Delta y) = f'_x(x+\theta_1 \Delta x;\ y+\Delta y)\Delta x,\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Рассуждая аналогично, для выражения $f(x;\ y+\Delta y) - f(x;\ y)$ имеем

$$f(x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y) = f'_y(x;\ y + \theta_2 \Delta y)\Delta y,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Производные f'_x и f'_y непрерывны в точке $(x;\ y)$, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y) = f'_x(x;\ y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x;\ y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x;\ y).$$

Отсюда следует, что

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x;\ y+\Delta y) = f'_x(x;\ y)+\alpha(\Delta x;\ \Delta y), f'_y(x;\ y+\theta_2\Delta y) =$$

$$= f'_y(x;\ y)+\beta(\Delta x;\ \Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x;\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\ \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Подставляя полученные выражения в формулу (8) для Δz, находим

$$\Delta z = f'_x(x;\ y)\Delta x + f'_y(x;\ y)\Delta y + \alpha(\Delta x;\ \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\ \Delta y)\Delta y,$$

а это означает, что функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x;\ y)$.

Следствие. Из непрерывности частных производных следует непрерывность самой функции.

Теорема 7 имеет большое значение для установления дифференцируемости функций, поскольку непосредственная проверка дифференцируемости функции с помощью определения часто затруднительна. В то время как проверка непрерывности частных производных оказывается проще.

В заключение заметим, что понятие дифференцируемости для функций трех и более переменных вводится аналогично случаю функции двух переменных.

7. Полный дифференциал. Частные дифференциалы Напомним, что если функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема, то ее полный дифференциал dz равен

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{9}$$

Замечая, что $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, запишем формулу (9) в следующем виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{10}$$

Распространим понятие дифференциала функции на независимые переменные, положив дифференциалы независимых переменных равными их приращениям $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$. После этого формула полного дифференциала функции примет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{11}$$

Пример. Пусть $z = \ln(x + y^2)$.
Тогда $dz = \dfrac{1}{x + y^2}dx + \dfrac{2y}{x + y^2}dy$.

Аналогично, если $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots,\ x_n)$ есть дифференцируемая функция n независимых переменных, то

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\ (dx_k = \Delta x_k).$$

Выражение

$$d_x z = f'_x(x;\ y)dx \tag{12}$$

называется ***частным дифференциалом функции*** $z = f(x;\ y)$ ***по переменной*** x;
выражение

$$d_y z = f'_y(x;\ y)dy \tag{13}$$

называется ***частным дифференциалом функции*** $z = f(x;\ y)$ ***по переменной*** y.

Из формул (11), (12) и (13) следует, что полный дифференциал функции является суммой ее частных дифференциалов:

$$dx = d_x z + d_y z.$$

Отметим, что полное приращение Δz функции $z = f(x;\ y)$, вообще говоря, не равно сумме частных приращений.

Содержание понятия полного дифференциала функции заключается в следующем: если $(f'_x)^2 + (f'_y)^2 > 0$, то ***полный дифференциал есть <u>главная часть</u> полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных.***

Термин «***<u>главная часть</u>***» означает, что при стремлении ρ к нулю

1. разность $\Delta z - dz$ есть величина бесконечно малая

$$\lim_{\rho\to 0}(\Delta z - dz) = \lim_{\rho\to 0}\gamma\rho = 0, \tag{14}$$

2. разность $\Delta z - dz$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению A dz, т. е.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - dz}{dz} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\gamma\rho}{dz} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\gamma}{z'_x\dfrac{\Delta x}{\rho} + z'_y\dfrac{\Delta y}{\rho}} = 0. \tag{15}$$

Следовательно, величины dz и Δz – эквивалентные бесконечно малые:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{dz} = \lim_{\rho\to 0}\left(1 + \frac{\gamma\rho}{dz}\right) = 1.$$

Если в точке $(x;\ y)$ функция $z = f(x;\ y)$ дифференцируема и дифференциал $dz \neq 0$ в этой точке, то ее полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x;\ \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\ \Delta y)\Delta y$$

отличается от своей линейной части

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

только на сумму последних слагаемых $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, которые при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем слагаемые линейной части.

Поэтому получаем приближенную формулу $\Delta z \approx dz$, которую широко используют в приближенных вычислениях, так как легче вычислять дифференциал, чем полное приращение.

7 Производные сложной функции

I. Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой области G на плоскости Oxy, причем каждая из переменных x, y в свою очередь является функцией аргумента t:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t_0 < t < t_1. \tag{16}$$

Будем предполагать, что при изменении t в интервале $(t_0;\ t_1)$ соответствующие точки $(x;\ y)$ не выходят за пределы области G. Если подставить значения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в функцию $z = f(x;\ y)$, то получим сложную функцию $z = f\left(x(t);\ y(t)\right)$ одной переменной t.

Теорема 8. . *Если в точке t существуют производные $\dfrac{dt}{dx} = x'(t)$ и $\dfrac{dy}{dt} = y'(t)$ и при соответствующих значениях $x = x(t)$, $y = y(t)$ функция $f(x;\ y)$ дифференцируема, то сложная функция $z = (x(t);\ y(t))$ в точке t имеет производную $\dfrac{dz}{dt}$, причем $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.*

Дадим t приращение Δt. Тогда x и y получат некоторые приращения Δx и Δy. В результате этого при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \neq 0$ функция z также получит некоторое приращение Δz, которое в силу дифференцируемости функции $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$ в точке $(x;\ y)$ может быть представлена в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x;\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\ \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy. Доопределим α и β для $\Delta x = \Delta y = 0$, положив $\alpha(0;\ 0) = 0$, $\beta(0;\ 0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta x;\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\ \Delta y)$ будут непрерывны при $\Delta x = \Delta y = 0$.

Рассмотрим отношение $\frac{dz}{dt}$. Имеем

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{17}$$

В каждом слагаемом в правой части формулы (17) оба сомножителя имеют пределы при $\Delta t \to 0$.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$ для данной точки $(x;\ y)$ являются постоянными, по условию существуют пределы

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

и

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'(t),$$

из существования производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t следует непрерывность в этой точке функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$; поэтому при $\Delta t \to 0$ стремятся к нулю и Δx и Δy, что в свою очередь влечет стремление к нулю $\alpha(\Delta x;\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x;\ \Delta y)$.

Таким образом, правая часть равенства (17) при $\Delta t \to 0$ имеет предел, равный

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Значит, существует при $\Delta t \to 0$ и предел левой части (17), т. е. существует $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$, равный $\frac{dz}{dt}$. Переходя в равенстве (17) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем требуемую формулу

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{18}$$

Пример . Пусть $z = x\sin\dfrac{x}{y},\ x = 1 + 3t,\ y = \sqrt{1 + t^2}$.

Тогда в силу (18) $\dfrac{dz}{dt} = \left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right)\cdot 3 - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

В частном случае, когда

$$z = f(x;\ y),\ \ 0\ y = y(x), \tag{19}$$

и, следовательно, z является сложной функцией от x, $z = f\,(x;\ y(x))$. На основании формулы (18), в которой роль t играет теперь x, получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

а т. к. $\dfrac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

В формуле (20) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ есть ***частная, или локальная, производная*** функции $z = f(x;\ y)$ по переменной x, при вычислении которой в выражении $f(x;\ y)$ аргумент y принимается за постоянную величину. А $\dfrac{dz}{dx}$ есть ***полная, или материальная, производная*** функции z по независимой переменной x, при вычислении которой y в выражении $f(x;\ y)$ уже не принимается за постоянную, а считается в свою очередь функцией от $x:\ \ y = y(x)$, и поэтому зависимость z от x учитывается полностью.

Пример . Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = arctg\dfrac{y}{x}$ и $y = x^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{1}{1+x^2}.$$

II. Рассмотрим дифференцирование сложной функции двух независимых переменных.

Пусть $z = f(x;\ y)$, где в свою очередь $x = x(\xi;\ \eta)$, $y = y(\xi;\ \eta)$, так что

$$z = z(\xi;\ \eta) = f\left(x(\xi;\ \eta);\ y(\xi;\ \eta)\right).$$

Предположим, что в точке $(\xi;\ \eta)$ существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, а в соответствующей точке $(x;\ y)$, где $x = x(\xi;\ \eta)$, $y = y(\xi;\ \eta)$, функция $f(x;\ y)$ дифференцируема. Покажем, что при этих условиях сложная функция $z = z(\xi;\ \eta)$ в точке $(\xi;\ \eta)$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, и найдем выражения для этих производных. Заметим, что этот случай от уже изученного существенно не отличается. Действительно, при дифференцировании z по ξ вторая независимая переменная η принимается за постоянную величину, вследствие чего x и y при этой операции становятся функциями одной переменной

$$\xi:\ \ x = x(\xi;\ c),\ \ y = y(\xi;\ c)$$

и вопрос о производной $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ решается совершенно так же, как вопрос о производной $\frac{dz}{dt}$ при выводе формулы (18).

Используя формулу (18) и формально заменяя в ней производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dx}{dy}$ на производные $\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$ соответственно, получим $\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$.

Аналогично находим $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}$.

Пример . Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ функции

$$z = x^2 y - x y^2,$$

если

$$x = \xi\,\eta,\ y = \tfrac{\xi}{\eta}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \left(3xy - y^2\right)\,\eta + \left(x^2 - 2xy\right)\,\frac{1}{\eta} =$$

$$= \left(2\xi\eta\cdot\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\,\eta + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right)\,\frac{1}{\eta} = 3\xi^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(2xy - y^2\right)\,\xi + \left(x^2 - 2xy\right)\,\left(-\frac{1}{\eta^2}\right) =$$

$$= \left(2\xi\eta\cdot\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\xi + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\cdot\frac{\xi}{\eta}\right)\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) = \xi^2\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right).$$

Если сложная функция u задана формулами

$$u = f(x;\ y\ z),\ x = x(\xi;\ \eta),\ y = y(\xi;\ \eta),\ z = z(\xi;\ \eta),$$

причем $u = u(\xi;\ \eta)$, то при выполнении соответствующих условий имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi},\ \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Переменные $x,\ y,\ z$ называются ***промежуточными аргументами***.
Отсюда следует ***правило*** дифференцирования сложной функции:
частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной.

8 Дифференциал сложной функции.

Инвариантность формы дифференциала Если $z = f(x;\ y)$ – дифференцируемая функция независимых переменных x и y, то ее полный дифференциал dz равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{21}$$

где $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$.

Пусть теперь $z = f(x;\ y)$, где $x = x(\xi;\ \eta),\ y = y(\xi;\ \eta)$.

Теорема 9 (об инвариантности формы первого дифференциала). *Предположим, что функция $z = f(x;\ y)$ непрерывно дифференцируема в области P плоскости Oxy,*

1. функции $x = x(\xi;\ \eta)$ и $y = y(\xi;\ \eta)$ непрерывно дифференцируемы в области Q независимых переменных ξ и η,
***2.** функции $x = x(\xi;\ \eta)$ и $y = y(\xi;\ \eta)$принимают значения в области P при всех значениях ξ, η, принадлежащих Q.*

Переменную z будем рассматривать как сложную функцию ξ и η в Q

$$z = f\left(x(\xi;\ \eta);\ y(\xi;\ \eta)\right).$$

По определению дифференциала функции имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta. \tag{22}$$

По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)d\eta,$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right) \tag{23}$$

Так как по условию функции $x = x(\xi;\ \eta)$ и $y = y(\xi;\ \eta)$ в точке $(\xi;\ \eta)$ имеют непрерывные частные производные, то они в этой точке дифференцируемы и

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\ \ dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) получаем, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{25}$$

Сравнение формул (21) и (25) показывает, что полный дифференциал функции $z = f(x;\ y)$ выражается *формулой одного и того же вида*

1. *как в случае, когда аргументы x и y функции $f(x;\ y)$ являются независимыми переменными* (тогда dx и dy суть приращения этих переменных),

2. *так и в случае, когда эти аргументы являются в свою очередь функциями от некоторых переменных* (тогда dx и dy представляют полные дифференциалы этих функций).

Таким образом, полный дифференциал функции нескольких переменных обладает свойством ***инвариантности формы***.

9 Неявные функции

Пусть имеем уравнение

$$F(x;\ y) = 0, \tag{26}$$

где $F(x;\ y)$ есть функция двух переменных, заданных в некоторой области G на плоскости Oxy. Если для каждого значения x из некоторого интервала $(x_0 - \delta_0;\ x_0 + \delta_0)$ существует ровно одно значение y, которое совместно А x удовлетворяет уравнению (30), то этим определяется функция $y = y(x)$, для которого равенство $F\left(x;\ y(x)\right) = 0$ выполняется тождественно по x в указанном интервале. В этом случае говорят, что уравнение (30) определяет величину y как ***неявную функцию*** x.

Если мы решим какое-либо уравнение и подставим в него вместо неизвестного его значение, то получим тождество.

Например, решая уравнение $2x + 1 = 7$, найдем $x = 3$. Подставляя в данное уравнение вместо неизвестного x его значение 3, получим ***тождество*** $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Аналогично, если из уравнения $2x^2 + y = 5$ найти $y = 5 - 2x^2$ и подставить это в исходное уравнение, то получим ***тождество*** $2x^2 + (5 - 2x^2) = 5$.

Иными словами, функция $y = y(x)$, заданная уравнением $F(x;\ y) = 0$, не разрешенным относительно y, называется ***неявной функцией***; она становится явной, если зависимость y от x задается непосредственно.

Примеры.

1. Уравнение $y - x = 0$ определяет на всей оси Ox величину y как однозначную функцию x: $y = x$.

2. Уравнением

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0,\ 0 < \varepsilon < 1, \tag{27}$$

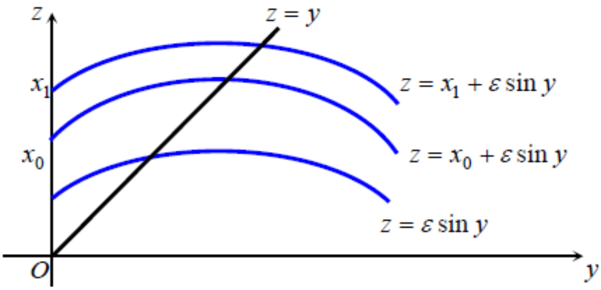

Рис. 10: геометрическая интерпретация для уравнения $y - x - \varepsilon \sin y = 0$

величина y определяется как однозначная функция x.

Проиллюстрируем это утверждение. Уравнение $y - x - \varepsilon \sin y = 0$ удовлетворяется парой значений $x = 0,\ y = 0$. Будем считать x параметром и рассмотрим функции $z = y$ и $z = x + \varepsilon \sin y$. Вопрос о том, существует ли для выбранного значения x_0 соответствующее *единственное* значение y_0 такое, что пара $(x_0;\ y_0)$ удовлетворяет уравнению (27), сводится к тому, пересекаются ли кривые $z = y$ и $z = x + \varepsilon \sin y$ в единственной точке. Построим их графики на плоскости Oxy (рис.10).

Кривая $z = x + \varepsilon \sin y$, где x рассматривается как параметр, получается параллельным переносом вдоль оси Oz кривой $z = \varepsilon \sin y$. Геометрически очевидно, что при всяком x кривые $z = y$ и $z = x + \varepsilon \sin y$ имеют единственную точку пересечения, ордината y которой является функцией от x, определяемой уравнением (27) неявно. Через элементарные функции эта зависимость не выражается.

3. Уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{28}$$

показывает, что, фиксировав одну из координат, например, x, мы не вправе брать вторую координату произвольно.

Таким образом, соотношение (28) предопределяет зависимость y от x. Нас интересует вопрос об условиях, при которых неявная связь (28) может быть разрешена в виде явной функциональной зависимости $y = y(x)$.

Решая уравнение (28) относительно y, найдем, что

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \tag{29}$$

т. е. каждому значению x такому, что $|x| < 1$, на самом деле отвечают два допустимых значения y. При формировании функциональной зависимости $y = y(x)$, удовлетворяющей соотношению (28), нельзя без привлечения дополнительных требований отдать предпочтение какому-нибудь одному из значений (29). Например, функция $y(x)$, которая в рациональных точках отрезка $[-1;\ 1]$ принимает значение $\sqrt{1 - x^2}$, а в иррациональных точках $-\sqrt{1 - x^2}$, очевидно, удовлетворяет соотношению (28). Ясно, что вариацией этого примера можно предъявить бесконечно много функциональных зависимостей, удовлетворяющих соотношению (28).

Вопрос о том, является ли множество, задаваемое в R^2 соотношением (28), графиком некоторой функциональной зависимости $y = y(x)$, очевидно, решается отрицательно, ибо с геометрической точки зрения он равносилен вопросу о возможности прямого взаимно однозначного проектирования окружности на некоторую прямую линию. Но наблюдение (см. рис. 11) подсказывает, что все-таки в окрестности отдельной точки $(x_0;\ y_0)$ дуга окружности взаимно однозначно проектируется на ось Ox и ее единственным образом можно представить в виде $y = y(x)$, где $y(x)-$ непрерывная функция, определенная в окрестности точки x_0 и принимающая в x_0 значение y_0.

В этом отношении плохими являются только точки $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, ибо никакая содержащая их внутри себя дуга окружности не проектируется взаимно однозначно на ось Ox. Зато окрестности этих точек на окружности хорошо расположены относительно оси Oy и могут быть представлены в виде графика функции $x = x(y)$, непрерывной в окрестности точки 0 и принимающей в этой точке значение -1 или 1 в соответствии с тем, идет ли речь о дуге, содержащей точку $(-1;\ 0)$ или $(1;\ 0)$.

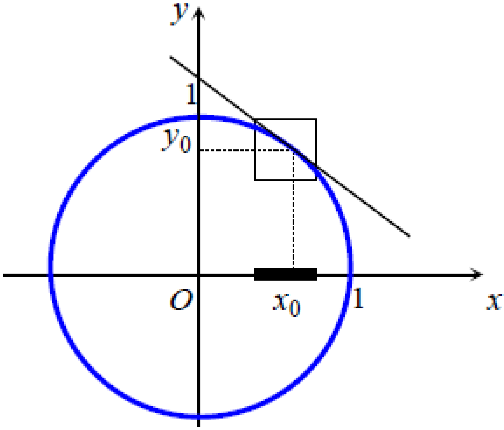

Рис. 11:

Как же аналитически узнавать, когда наше геометрическое место точек, определяемое соотношением типа (28), в окрестности некоторой точки $(x_0;\ y_0)$, принадлежащей ему, может быть представлено в виде явной зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$?

Следующая теорема дает достаточные условия однозначной разрешимости уравнения

$$F(x;\ y) = 0 \tag{30}$$

относительно y в некоторой окрестности заданной точки $(x_0;\ y_0)$.

Теорема 10 (существования неявной функции)**.** . *Пусть выполнены следующие условия:*
1) функция $F(x;\ y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике

$$D = \{x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1;\ y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2\},\ \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,$$

с центром в точке $(x_0;\ y_0)$;
2) в точке $(x_0;\ y_0)$функция $F(x;\ y)$ обращается в нуль $F(x_0;\ y_0) = 0$;

3) в прямоугольнике D существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$;

$$4) \frac{\partial F(x;\ y)}{\partial y}\bigg|_{(x_0;\ y_0)} \neq 0\ .$$

Тогда для любого достаточно малого положительного числа ε найдется окрестность

$$x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0,\ \ \delta_0 > 0,$$

точки x_0 такая, что в этой окрестности существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ (рис.12), которая принимает значение y_0 при $x = x_0$ $(y(x_0) = y_0)$, удовлетворяет условию $|y - y_0| < \varepsilon$ и обращает уравнение (30) в тождество: $F\,(x;\ y(x)) \equiv 0$.
Эта функция $y = y(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, причем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\ \left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right). \tag{31}$$

Выведем формулу (31) для производной неявной функции, считая существование этой производной доказанным.

Пусть $y = y(x)$ – неявная дифференцируемая функция, определяемая уравнением (30). Тогда в интервале $(x_0 - \delta_0;\ x_0 + \delta_0)$ имеет место тождество $F\,(x;\ y(x)) \equiv 0$, вследствие чего в этом интервале

$$\frac{dF\ (x;\ y(x))}{dx} = 0.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dF\ (x;\ y(x))}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Отсюда при $y = y(x)$ получаем, что

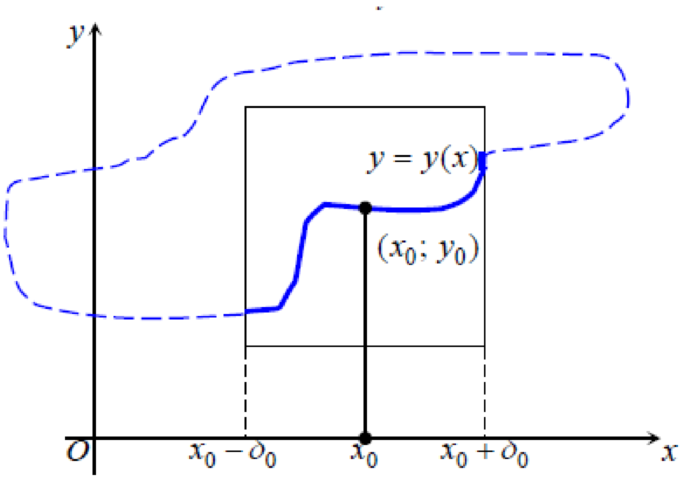

Рис. 12: окрестность точки (x_0, y_0)

$\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0$, и, значит, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$.

Пример . Найти производную функции y, заданной неявно уравнением

$$x^3+y^3-e^{x\,y}-5=0.$$

Согласно формуле (31), имеем $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2-e^{x\,y}y}{3y^2-e^{x\,y}x}$.

Теорема существования, аналогичная теореме 10, имеет место и в случае неявной функции $z=z(x;\ y)$ двух переменных, определяемой уравнением

$$F(x;\ y;\ z)=0. \tag{32}$$

Если $F(x;\ y;\ z)$, $\dfrac{\partial F(x;\ y;\ z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F(x;\ y;\ z)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F(x;\ y;\ z)}{\partial z}$ – *непрерывные функции в области, содержащей точку* $(x;\ y;\ z)$, *в ко-*

торой $\dfrac{\partial F(x;\ y;\ z)}{\partial z} \neq 0$, *то*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{33}$$

Пример . Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением

$$xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0.$$

Воспользуемся формулами (33). Получим:
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2}.$

10 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

10.1 Предварительные сведения

Пусть имеем поверхность S, заданную уравнением

$$F(x;\ y;\ z) = 0. \tag{34}$$

Определение. Точка $M(x;\ y;\ z)$ поверхности (36) называется ***обыкновенной точкой*** этой поверхности, если в точке M все три производные $\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля.

Если в точке $M(x;\ y;\ z)$ поверхности (36) все три производные $\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю или хотя бы одна их этих производных не существует, то точка M называется ***особой точкой*** поверхности.

Пример . Рассмотрим круговой конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (рис. 13).
Здесь $F(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 - z^2$, так что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial z} = -2z.$$

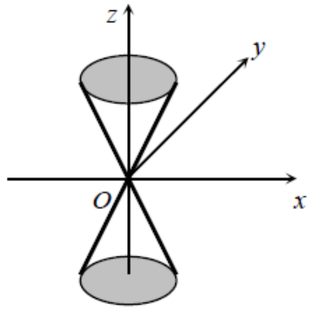

Рис. 13: круговой конус

Единственной особой точкой является начало координат $O\,(0;\ 0;\ 0)$: в этой точке все частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ одновременно обращаются в нуль.

Рассмотрим пространственную кривую ℓ, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \xi(t), \\ y = \eta(t),\ \alpha < t < \beta \quad . \\ z = \varsigma(t), \end{cases} \tag{35}$$

Пусть функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\varsigma(t)$ имеют непрерывные производные $\xi'(t)$, $\eta'(t)$, $\varsigma'(t)$ в интервале $\alpha < t < \beta$. Исключим из рассмотрения особые точки кривой, в которых

$$(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 + (\varsigma'(t))^2 = 0.$$

Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$– обыкновенная точка кривой ℓ, определяемая значением t_0 параметра t, $t_0 \in (\alpha;\ \beta)$. Тогда $r = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k$ – вектор касательной к кривой ℓ в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Найдем уравнение касательной к линии (37) , проведенной в точке M_0. Для этого дадим параметру приращение Δt и обозначим через $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y;\ z_0 + \Delta z)$ точку, отвечающую значению $t = t_0 + \Delta t$.

Секущая M_0M как прямая, проходящая через две заданные точки, имеет канонические уравнения $\dfrac{x-x_0}{\Delta x}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y}=\dfrac{z-z_0}{\Delta z}$, которые можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Когда $\Delta t\to 0$, отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ стремятся соответственно к пределам

$$x'_t(t_0)=\xi'(t_0),\ y'_t(t_0)=\eta'(t_0),\ z'_t(t_0)=\varsigma'(t_0).$$

Значит, искомые уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

Пример . Провести касательную к линии $\begin{cases} x=3t^2-2, \\ y=t^3+1, \\ z=2t^2+6 \end{cases}$ в точке $t=1$.

Здесь $x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=8,\ x'_t=6t,\ y'_t=3t^2,\ z'_t=4t,\ x'(1)=6,\ y'(1)=3,\ z'(1)=4$ и искомая касательная есть

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-8}{4}.$$

10.2 Касательная плоскость поверхности

Пусть поверхность S задана уравнением

$$F(x;\ y;\ z)=0. \tag{36}$$

Возьмем на поверхности S обыкновенную точку M и проведем через нее некоторую кривую ℓ, лежащую на поверхности и задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \;\; \alpha < t < \beta \\ z = z(t), \end{cases} . \qquad (37)$$

Предположим, что функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ имеют непрерывные производные, нигде на промежутке $(\alpha;\ \beta)$ не обращающиеся одновременно в нуль. По определению, касательная кривой ℓ в точке M называется ***касательной*** к поверхности S в этой точке.

Если выражения (37) подставить в уравнение (36), то, поскольку кривая ℓ лежит на поверхности S, уравнение (36) обратится в тождество относительно t:

$$F\ (x(t); y(t); z(t)) \equiv 0,\ t \in (\alpha;\ \beta).$$

Дифференцируя это тождество по t, по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \qquad (38)$$

Выражение в левой части (38) является скалярным произведением двух векторов:

$$n = \frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j + \frac{\partial F}{\partial z}k \qquad (39)$$

и

$$r = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{t}k. \qquad (40)$$

В точке M вектор $\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой ℓ в этой точке (рис. 14). Что касается вектора $\mathbf{n}$, то он зависит только от координат этой точки и вида функции $F(x;\ y;\ z)$ и не зависит от вида кривой, проходящей через точку M.

Так как M – обыкновенная точка поверхности S, то длина вектора $\mathbf{n}$ отлична от нуля,

$$|n| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

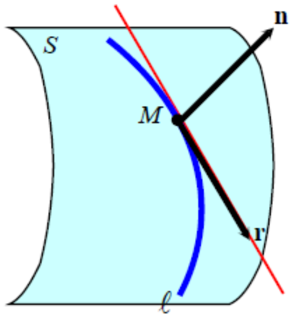

Рис. 14: касательный и нормальный вектор

То, что скалярное произведение $(n,\, r) = 0$ означает, что вектор $\mathbf{r}$, касательный к кривой ℓ в точке M, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$ в этой точке (рис. 14). Эти рассуждения сохраняют свою силу для любой кривой, проходящей через точку M и лежащей на поверхности S. Следовательно, любая касательная прямая к поверхности S в точке M перпендикулярна вектору $\mathbf{n}$, и, значит, все эти прямые лежат в одной плоскости, тоже перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$.

Определение. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к поверхности S, проходящие через данную обыкновенную точку $M \in S$, называется ***касательной плоскостью*** поверхности в точке M (рис. 15).

Вектор $n\,|_M = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\,|_M\,,\, \frac{\partial F}{\partial y}\,|_M,\, \frac{\partial F}{\partial z}\,|_M \right\}$ есть нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $F(x;\ y;\ z) = 0$ в точке M. Отсюда сразу получаем уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;\ y;\ z) = 0$ в обыкновенной точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$

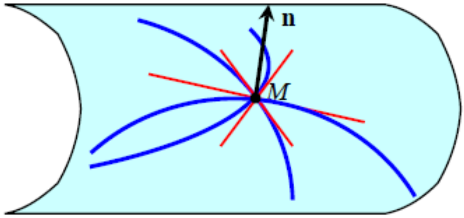

Рис. 15: касательная плоскость

этой поверхности:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0;\ z_0)}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0;\ z_0)}(y-y_0)+ \\ +\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0;\ z_0)}(z-z_0)=0\ . \tag{41}$$

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x;\ y)$, то, записав это уравнение в виде

$$F \equiv f(x;\ y) - z = 0,$$

получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y},\ \ \frac{\partial F}{\partial z}=-1,$$

и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0),\ z_0 = f(x_0;\ y_0)$, будет выглядеть так

$$z-z_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0)}(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0;\ y_0)}(y-y_0). \tag{42}$$

10.3 Геометрический смысл полного дифференциала

Если в формуле (42) положить $x - x_0 = \Delta x,\ \ y - y_0 = \Delta y$, то она примет вид

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0)} \Delta y. \qquad (43)$$

Правая часть (43) представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x;\ y)$ в точке $N_0(x_0;\ y_0)$ на плоскости Oxy, так что $z - z_0 = dz$.

Таким образом, полный дифференциал функции $z = f(x;\ y)$ двух независимых переменных x и y, в точке $N_0(x_0;\ y_0)$, отвечающей приращениям Δx и Δy переменных x и y, равен приращению $z - z_0$ аппликаты z точки касательной плоскости поверхности S в точке $M_0\,(x_0;\ y_0;\ f(x_0;\ y_0))$ при переходе от точки $N_0(x_0;\ y_0)$ к точке $N(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$.

10.4 Нормаль к поверхности

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхности

$$F(x;\ y;\ z) = 0$$

перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в точке M_0, называется ***нормалью к поверхности*** в точке M_0.

Вектор $n = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial\_z}\right\}|_{M_0}$ является направляющим вектором нормали, а ее уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0;\, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0;\, z_0)}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0;\, z_0)}}. \qquad (44)$$

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x;\ y)$, то уравнения нормали в точке $M_0\,(x_0;\ y_0;\ f(x_0;\ y_0))$ выглядит так:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (45)$$

Пример . Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точке $M_0(1;\ 2;\ -1)$.
Здесь

$$F(x;\ y;\ z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6,$$

так что

$$\tfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + yz,\ \tfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + xz,\ \tfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + xy.$$

В точке $(1;\ 2;\ -1)$ эти производные равны:

$$F'_x\,(1;\ 2;\ -1) = 1,\ F'_y\,(1;\ 2;\ -1) = 11,\ F'_z\,(1;\ 2;\ -1) = 5,$$

и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1;\ 2;\ -1)$ принимает следующий вид:

$$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0.$$

Уравнение нормали:$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{5}$.

Пример . Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 2)$.
Здесь

$$f(x;\ y) = x^2 + y^2,\ \tfrac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \tfrac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

В точке $(1;\ 1)$ эти производные равны: $f'_x\,(1;\ 1) = f'_y\,(1;\ 1) = 2$, и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1;\ 1;\ 2)$принимает следующий вид
$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, т. е. $2x + 2y - z - 2 = 0$.

Уравнение нормали $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

11 Производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в каждой точке x области G. Тогда эти производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x\,(x;\ y)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y\,(x;\ y)$$

будут функциями от x и y в области G, которые в свою очередь в точках области G (во всех или в некоторых) могут иметь частные производные.

Эти частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (если они существуют) называются ***вторыми частными производными*** или ***частными производными второго порядка*** функции $z = f(x;\ y)$. Для функции $z = f(x;\ y)$ двух независимых переменных x, y получаем четыре частные производные второго порядка, которые **обозначаются** так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

или

$$f''_{xx},\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

или

$$f''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

и

$$f''_{xy},\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

и

$$f''_{yy}.$$

Производные f''_{xy} или f''_{yx} называются ***смешанными***: одна из них получается дифференцированием функции сначала по x, затем по y; другая, наоборот, дифференцированием сначала по y, затем по x.

Аналогично определяются частные производные 3-го и т. д. порядков.

Пример . Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от функции $z = e^{x^2y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 2xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} \cdot 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 2x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} \cdot 4x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy.$$

Обратим внимание на то, что смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} оказались тождественно равными. Это не случайно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 11 (о равенстве смешанных производных)**.** *Пусть для функции $z = f(x;\ y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\ y_0)$ существуют производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} и пусть, кроме того, производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ непрерывны. Тогда в точке M_0 эти производные равны, $f''_{xy}(x_0;\ y_0) = f''_{yx}(x_0;\ y_0)$.*

Требование непрерывности производных f''_{xy} и f''_{yx} в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ существенно.

Так, для функции

$$f(x;\ y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} разрывны в точке $O\,(0;\ 0)$, и для этой функции имеем

$$f''_{xy}\,(0;\ 0) = -1,\ f''_{yx}\,(0;\ 0) = 1.$$

Верен и более общий факт:
если для функции $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ какие-либо смешанные производные порядка $m \geq 2$ отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и то же значение.

12 Дифференциалы высших порядков

Пусть в области G задана функция $z = f(x;\ y)$ независимых переменных x и y. Если эта функция дифференцируема в области G, то ее полный дифференциал в точке $(x;\ y) \in G$, соответствующий приращениям dx и dy независимых переменных x, y, выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(здесь $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, т. е. произвольные числа, не зависящие от x и y). Поэтому мы можем изменять x и y, оставляя dx и dy постоянными. При фиксированных приращениях dx и dy полный дифференциал dz есть функция от x и y, которая в свою очередь может оказаться дифференцируемой.
Определение. Полный дифференциал от dz в точке $(x;\ y)$, соответствующий приращениям независимых переменных, равным прежним dx и dy, называется ***дифференциалом второго порядка*** функции $z = f(x;\ y)$ и **обозначается** символом d^2z:

$$d^2z = d(dz). \tag{46}$$

Пусть функция $z = f(x;\ y) \in C^2(G)$, т. е. имеет в области G непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда полный дифференциал dz этой функции будет дифференцируемым, т. е. будет существовать d^2z. Пользуясь известными правилами дифференцирования и помня, что dx и dy – постоянные, получим

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \\ = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy. \tag{47}$$

По формулам полного дифференциала, примененным : $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, имеем

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{y\partial x}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy.$$

Поэтому из формул (47) следует

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ в силу непрерывности этих смешанных производных, то для d^2z получаем формулу

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{48}$$

Здесь $dx^2 = (dx)^2,\ dy^2 = (dy)^2$.

С помощью формального символа $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ формулу (48) записываем условным равенством

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z. \tag{49}$$

Здесь символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ рассматриваются как «множители» и формула квадрата суммы с последующим условным умножением на z приводит к нужному результату.

Именно, запишем

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2.$$

«Умножим» обе части полученного выражения почленно $= 0$ z, поместив множитель z в «числители» ∂^2 дробей, стоящих в правой части. Получим

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

что совпадает с формулой (48).

Подобным же образом вводятся понятия дифференциалов 3-го, 4-го и т. д. порядков. Вообще, полный дифференциал n-го порядка $d^n z$ есть полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Если функция $z = f(x;\ y) \in C^n(E)$, то у нее существует дифференциал n-го порядка. Этот дифференциал выражается формулой следующего вида

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \tag{50}$$

Для функции $u = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m)$ от m независимых переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ при выполнении соответствующих условий получаем

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u.$$

13 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно во всех точках $(x;\ y)$ некоторой δ - окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ и пусть точка $(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности (рис. 16).

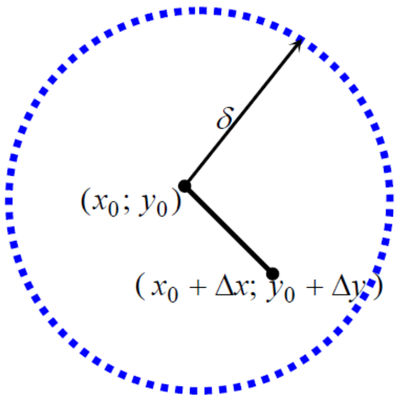

Рис. 16:

Положим
$$x = x_0 + t\Delta x, \; y = y_0 + t\Delta y, \tag{51}$$
где t – новая независимая переменная.

Тогда
$$z = f(x;\; y) = f(x_0 + t\Delta x;\; y_0 + t\Delta y) = \varphi(t),$$
так что величина z оказывается сложной функцией по t, определенной на отрезке $[0;\; 1]$ и имеющей там производные до порядка n включительно.

Поэтому $z = \varphi(t)$ можно представить формулой Тейлора по степеням t.
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta\, t)}{n!}t^n,$$
$$0 < \theta < 1.$$

Полагая $t = 1$, получим
$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta\, t)}{n!}, \;\; 0 < \theta < 1. \tag{52}$$

Выразим величины правой части формулы (52) при помощи исходной функции $f(x;\ y)$ и ее производных. Заметим, что аргументы x и y функции $f(x;\ y)$ являются функциями по t, но имеют постоянные дифференциалы $dz = \Delta x \cdot dt,\ \ dy = \Delta y \cdot dt$ $(\Delta x,\ \Delta y$ – фиксированные числа). Поэтому для вычисления последовательных дифференциалов функции $z = f(x;\ y)$ применима формула

$$d^p z = \left(\tfrac{\partial}{\partial x} dx + \tfrac{\partial}{\partial y} dy\right)^p f(x;\ y) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}(\Delta x\, dt) + \tfrac{\partial}{\partial y}(\Delta y dt)\right)^p f(x;\ y) = \\ = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x;\ y)\,(dt)^p,$$

откуда

$$\frac{d^p z}{dt^p} = \varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x;\ y). \qquad (53)$$

Если $t = 0$, то в силу соотношений (51) имеем $x = x_0,\ y = y_0$, и формула (53) принимает вид

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}},\ (p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n{-}1). \qquad (54)$$

Если $t = \theta$ формула (54) принимает вид

$$\varphi^{(n)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x = x_0 + \theta\Delta x \\ y = y_0 + \theta\Delta y}}. \qquad (55)$$

Заметим еще, что

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y). \qquad (56)$$

Подставляя выражения (54), (55) и (56) в равенство (52) получим, что

$$f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y) = f(x_0;\ y_0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \qquad (57)$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n-1} f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n} f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ 0<\theta<1.$$

Это – ***формула Тейлора для функции*** $z = f(x;\ y)$ ***двух переменных***, а

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n} f(x;\ y)\Bigg|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}}$$

– ***остаточный член*** этой формулы ***в форме Лагранжа***.

Приведем сокращенную форму записи формулы Тейлора. Перенося первое слагаемое правой части формулы (57) в левую часть и обозначив разность

$$f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y) - f(x_0;\ y_0)$$

через $\Delta f\left.\right|_{(x_0;\, y_0)}$, получаем, что

$$\Delta f\left.\right|_{(x_0;\, y_0)} = df\left.\right|_{(x_0;\, y_0)} + \frac{1}{2!}d^2 f\left.\right|_{(x_0;\, y_0)} + \ldots + \tag{58}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f\left.\right|_{(x_0;\, y_0)} + \frac{1}{n!}d^n f\left.\right|_{(x_0+\theta\Delta x;\, y_0+\theta\Delta y)}.$$

Формулой (58) пользуются для приближенного вычисления приращения Δf функции $z = f(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$. При достаточно малых по модулю значениях Δx и Δy если $df \neq 0$ за приращение функции Δf приближенно можно принять дифференциал df. Это означает, что в правой части формулы Тейлора (58) берется только одно слагаемое. Если приближенное равенство $\Delta f \approx df$ не дает требуемой точности, то для повышения точности можно воспользоваться дальнейшими членами формулы Тейлора (58).

14 Экстремум функции нескольких переменных

14.1 Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена в некоторой области G и пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ –внутренняя точка этой области.
Определение. Если существует такое число $\delta > 0$, что для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$, верно неравенство

$$\Delta f(x_0;\ y_0) = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0) \leq 0, \tag{59}$$

то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ называется ***точкой локального максимума*** функции $f(x;\ y)$;

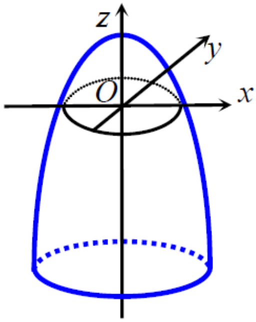

Рис. 17:

если же для всех $\Delta x,\ \Delta y$, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$,

$$\Delta f(x_0;\ y_0) = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0) \geq 0, \tag{60}$$

то точка $M_0(x_0;\ y_0)$ называется ***точкой локального минимума***.

Иными словами, точка $M_0(x_0;\ y_0)$ есть точка максимума или минимума функции $f(x;\ y)$, если существует δ- окрестность точки $M_0(x_0;\ y_0)$ такая, что во всех точках $M(x;\ y)$ этой окрестности приращение функции $\Delta f = f(x;\ y) - f(x_0;\ y_0)$ сохраняет знак.

Примеры

1. Для функции $z = 1 - x^2 - y^2$ точка $O\,(0;\ 0)$является точкой максимума (рис.17).

2. Для функции $z = x^2 + y^2$ точка $O\,(0;\ 0)$ – точка минимума (рис. 18).

Мы будем рассматривать только точки ***строгого*** максимума и минимума функций, когда строгое неравенство $\Delta f < 0$ или строгое неравенство $\Delta f > 0$ выполняется для всех точек $M(x;\ y)$ из некоторой проколотой δ- окрестности точки M_0.

Значение функции в точке максимума называется ***максимумом***, а значение функции в точке минимума – ***минимумом***

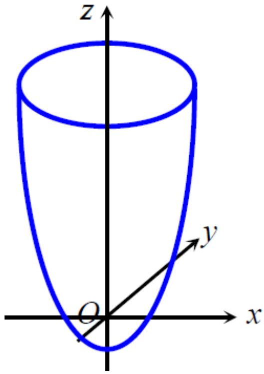

Рис. 18:

этой функции. Точки максимума и точки минимума функции называются ***точками экстремума*** функции, а сами максимумы и минимумы функции – ее ***экстремумами***.

Теорема 12 (необходимое условие экстремума)**.** *]Если функция $z = f(x;\ y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, то в этой точке каждая частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ либо обращается в нуль, либо не существует.*

Пусть в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $z = f(x;\ y)$ имеет экстремум. Дадим переменной y значение y_0. Тогда функция $z = f(x;\ y)$ будет функцией одной переменной x: $z = f(x;\ y_0)$.

Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум (максимум или минимум), то ее производная по x при $x = x_0$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\ y_0)}$, либо равна нулю, либо не существует.

Аналогично убеждаемся в том, что $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\ y_0)}$ или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ либо не существуют, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x;\ y)$.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются также ***стационарными точками*** функции.

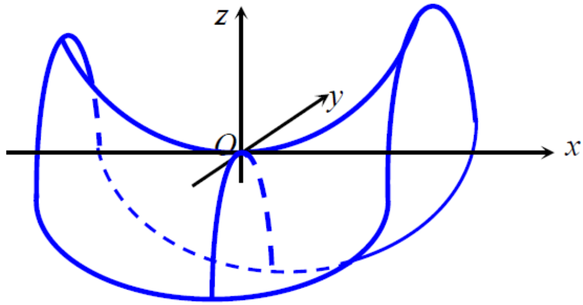

Рис. 19:

Теорема 12 выражает лишь ***необходимые условия экстремума***, не являющиеся достаточными.

Пример . Функция $z = x^2 - y^2$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, которые обращаются в нуль при $x = y = 0$. Но эта функция в точке $O\,(0;\ 0)$ не имеет экстремума.
Действительно, функция $f(x;\ y) = x^2 - y^2$ равна нулю в точке $O\,(0;\ 0)$ и принимает в точках $M(x;\ y)$, как угодно близких к точке $O\,(0;\ 0)$, как положительные, так и отрицательные значения. Для нее $\Delta f(0;\ 0) = f(x;\ y) - f(0;\ 0) = x^2 - y^2$, так что $\begin{cases} \Delta f > 0 \text{ в точках } (x;\ 0) \\ \Delta f < 0 \text{ в точках } (0;\ y) \end{cases}$ при сколь угодно малых значениях $|x| > 0$ и $|y| > 0$.

Точку $O\,(0;\ 0)$ указанного типа называют ***точкой минимакса*** (рис.19).

Достаточные условия экстремума функции двух переменных выражаются следующей теоремой.

Теорема 13 (достаточные условия экстремума функции двух переменных). *Пусть точка $M_0(x_0;\ y_0)$ является стационарной точкой функции $f(x;\ y)$,$f'_x\,(x_0;\ y_0) = 0$ и $f'_y\,(x_0;\ y_0) = 0$,
и в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\ y_0)$, включая саму точку M_0, функция $f(x;\ y)$ имеет непрерывные частные про-*

изводные до второго порядка включительно. Тогда:
***1.** в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $f(x;\ y)$ имеет* ***максимум**, если в этой точке определитель*

$$D\,(x_0;\ y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0;\ y_0) & f''_{xy}(x_0;\ y_0) \\ f''_{xy}(x_0;\ y_0) & f''_{yy}(x_0;\ y_0) \end{vmatrix}=$$

$$=f''_{xx}(x_0;\ y_0)\cdot f''_{yy}(x_0;\ y_0)-(f''_{xy}(x_0;\ y_0))^2>0$$

и $f''_{xx}(x_0;\ y_0)<0\ \big(f''_{yy}(x_0;\ y_0)<0\big)$;
2. *в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $f(x;\ y)$ имеет м**инимум***
если $D\,(x_0;\ y_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0;\ y_0)>0\quad\big(f''_{yy}(x_0;\ y_0)>0\big)$;
3. *в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ функция $f(x;\ y)$ не имеет экстремума, если $D\,(x_0;\ y_0)<0$.*
Если же $D\,(x_0;\ y_0)=0$, то в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ экстремум функции $f(x;\ y)$ может быть, а может и не быть. В этом случае требуется дальнейшее исследование.
Ограничимся доказательством утверждений 1) и 2) теоремы. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x;\ y)$:

$$f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)=f(x_0;\ y_0)+f'_x\,(x_0;\ y_0)\Delta x+f''_y\,(x_0;\ y_0)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}\,(x;\ y)\Delta x^2+2f''_{xy}\,(x;\ y)\Delta x\Delta y+\right.$$
$$\left.\left.+f''_{yy}\,(x;\ y)\Delta y^2\right)\right|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}},$$

где $0<\theta<1$.

По условию $f'_x\,(x_0;\ y_0)=0,\ f'_y\,(x_0;\ y_0)=0$, так что

$$\Delta=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}\,(x;\ y)\Delta x^2+2f''_{xy}\,(x;\ y)\Delta x\Delta y+f''_{yy}\,(x;\ y)\Delta y^2\right)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}},\qquad(61)$$

откуда видно, что знак приращения Δf определяется знаком трехчлена в правой части (61), т. е. знаком второго дифференциала $d^2 f$. Обозначим для краткости

$$A = f''_{xx}(x;\ y),\ B = f''_{xy}(x;\ y),\ C = f''_{yy}(x;\ y).$$

Тогда равенство (61) можно записать так:

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2)\Big|_{x = x_0 + \theta\Delta x y = y_0 + \theta\Delta y}. \tag{62}$$

пусть в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеем

$$AC - B^2 > 0, \tag{63}$$

т.е. $f''_{xx}(x_0;\ y_0)\cdot f''_{yy}(x_0;\ y_0) - f''_{xy}(x_0;\ y_0) > 0$.

Так как по условию частные производные второго порядка от функции $f(x;\ y)$ непрерывны, то неравенство (63) будет иметь место и в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\ y_0)$.

Если выполнено условие (63), то $A = f''_{xx}(x;\ y) \neq 0$ в точке M_0, и в силу непрерывности производная $f''_{xx}(x;\ y)$ будет сохранять знак в некоторой окрестности точки M_0. В области, где $A \neq 0$, имеем

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \tfrac{1}{A}\left((A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC - B^2)\Delta y^2\right).$$

Отсюда видно, что если $AC - B^2 > 0$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\ y_0)$, то знак трехчлена $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ совпадает со знаком A в точке $(x_0;\ y_0)$ (а также и со знаком C, поскольку при $AC - B^2 > 0$ A и C не могут иметь разные знаки).

Так как знак суммы $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ в точке $(x_0 + \theta\,\Delta x;\ y_0 + \theta\,\Delta y)$ определяет знак разности $\Delta f = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$, то мы приходим к следующему выводу:

если для функции $f(x;\ y)$ в стационарной точке $(x_0;\ y_0)$ выполнено условие $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$ $(C < 0)$, то для достаточно малых значений $|\Delta x|$ 8 $|\Delta y|$ будет выполняться неравенство

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0) \leq 0.$$

Тем самым, в точке $(x_0;\ y_0)$ функция $f(x;\ y)$ имеет максимум.

Если же в стационарной точке $(x_0;\ y_0)$ выполнено условие $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$ $(C > 0)$, то для всех достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ верно неравенство

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0) \geq 0,$$

и, значит, в точке $(x_0;\ y_0)$ функция $f(x;\ y)$ имеет минимум.

Пример . Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Пользуясь необходимыми условиями экстремума, разыскиваем стационарные точки функции. Для этого находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и приравниваем их нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases}$ откуда

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 1,\ y_2 = 1.$$

Таким образом, получили две стационарные точки: $M_0(0;\ 0)$ и $M_1(1;\ 1)$.

Находим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Тогда $D = AC - B^2 = 36xy - 9$.

В точке $M_0(0;\ 0)$ величина $D\,|_{M_0} = -9 < 0$, т.е. в этой точке экстремума нет.

В точке $M_1(1;\ 1)$ величина $D\,|_{M_0} = 27 > 0$ и ; $A\,|_{M_0} = 6 > 0$; следовательно, в этой точке данная функция достигает локального минимума: $z_{\min} = -1$.

14.2 Наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций

Пусть требуется найти наибольшее (наименьшее) значение функции $z = f(x;\ y)$, непрерывной в некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{G}$. По теореме 4.2 в этой области найдется точка $(x_0;\ y_0)$, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если точка $(x_0;\ y_0)$ лежит внутри области G, то в ней функция f имеет максимум (минимум), так что в этом случае интересующая нас точка содержится среди критических точек функции $f(x;\ y)$. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x;\ y)$ может достигать и на границе области. Поэтому, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение, принимаемое функцией $z = f(x;\ y)$ в ограниченной замкнутой области $\bar{G}$, нужно найти все максимумы (минимумы) функции, достигаемые внутри этой области, а также наибольшее (наименьшее) значение функции на границе этой области. Наибольшее (наименьшее) из всех этих чисел и будет искомым наибольшим (наименьшим) значением функции $z = f(x;\ y)$ в области $\bar{G}$. Покажем, как это делается в случае дифференцируемой функции.

Пример . Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области $\bar{G}$, ограниченной линиями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -3$.
Находим стационарную точку M_1 из следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -1,\ y = -1$. Получили точку $M_1(-1;\ -1)$, в которой $z_1 = z(-1;\ -1) = -1$.

Исследуем данную функцию на границе области. На прямой OB (рис. 20), где $x = 0$, имеем $z = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке $[-3;\ 0]$.

Находим $z'_y = 2y + 1 = 0,\ y = -\frac{1}{2},\ z''_{yy} = 2$.

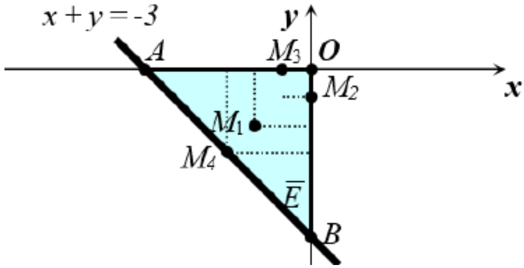

Рис. 20:

Получили точку условного локального минимума $M_2\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$, в которой

$$z_2 = z\left(0;\ -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

На концах отрезка OB

$$z_3 = z(0;\ -3) = 6,\ z_4 = z(0;\ 0) = 0.$$

Аналогично на прямой линии OA, где $y = 0$, имеем:

$$z = x^2 + x,\ z'_x = 2x + 1 = 0,\ x = -\frac{1}{2},\ z''_{xx} = 2.$$

Т.е. $M_3\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$ – точка локального минимума, в которой $z_5 = z\left(-\frac{1}{2};\ 0\right) = -\frac{1}{4}$.

В точке A $z_6 = z(-3;\ 0) = 6$.

На отрезке AB прямой $x + y = -3$ имеем, исключив y из z в соответствии с уравнением

$$y = -x - 3:\ z = 3x^2 + 9x + 6,\ z'_x = 6x + 9 = 0,\ x = -\frac{3}{2},$$

отсюда находим стационарную точку $M_4\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$, в которой $z_7 = z\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. На концах отрезка AB значения функции уже найдены.

Сравнивая все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 6$ достигается в точках $A(-3;\ 0)$ и $B(0;\ -3)$, а $z_{\text{наим}} = -1$ – в стационарной точке $M_1(-1;\ -1)$.

Содержание

Учебное издание

Веретенников В.Н.,
Ржонсницкая Ю.Б.,
Бровкина Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 27.06.2022. Формат 60×90 1/16.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 4,5.
Тираж 5 экз. Заказ № 1246.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.