



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра гидрофизики и гидропрогнозов

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

на тему

**ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ РЕК**

<b>Исполнитель</b>	Панкова Анастасия
	(фамилия, имя, отчество)
<b>Руководитель</b>	К.Т.Н., доцент
	(ученая степень, ученое звание)
	Гайдукова Екатерина Владимировна
	(фамилия, имя, отчество)
<b>«К защите допускаю» Заведующий кафедрой</b>	
	
	(подпись)
	д.т.н., профессор
	(ученая степень, ученое звание)
	Коваленко Виктор Васильевич
	(фамилия, имя, отчество)

«07» июня 2016 г.

Санкт-Петербург

2016



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра гидрофизики и гидропрогнозов

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему **ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ РЕК**

<b>Исполнитель</b>	Панкова Анастасия (фамилия, имя, отчество)
<b>Руководитель</b>	К.Т.Н., доцент (ученая степень, ученое звание)
Гайдукова Екатерина Владимировна (фамилия, имя, отчество)	

<b>«К защите допускаю» Заведующий кафедрой</b>	
(подпись)	
д.т.н., профессор (ученая степень, ученое звание)	
Коваленко Виктор Васильевич (фамилия, имя, отчество)	

«07» июня 2016 г.

Санкт-Петербург

2016

## Содержание

	Стр.
Введение	3
1 Теоретические основы исследования	5
1.1 Фракталы в природе	5
1.2 Методы определения размерности геометрических фракталов	10
1.3 Постановка цели и задач исследования	22
2 Формирование базы данных для исследования	23
3 Вычисление фрактальных размерностей речных систем	35
4 Возможное применение значений фрактальных размерностей в гидрологической практике	43
Заключение	47
Список использованных источников	48
Приложение А – Гидрологическая информация по выбранным водосборам	50

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема расхождения в значениях длин береговых линий и многих других природных объектов, существенная зависимость точности показателей их протяженности от способа измерения обуславливают постановку концептуальной задачи поиска других параметров, характеризующих морфометрические свойства природных кривых.

При измерении береговой линии в постоянно укрупняющемся масштабе в рассмотрение попадают все более мелкие изгибы, и каждая новая деталь увеличивает общую длину берега, реки, любой другой природной границы или различного ранга государственных границ, если они проведены по естественным природным рубежам. В типичном случае наблюдаемая длина склонна возрастать неограниченно. Такое поведение природных границ наводит на мысль о некотором закономерном соответствии длины и масштаба [1].

Фракталы находят все большее и большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика [2].

Природные объекты на поверхности Земли в большинстве случаев можно описать методами фрактальной геометрии. Сложность и разнообразие процессов, вызвавших образование поверхности, не позволяет теоретически создать количественную характеристику для ее описания [3].

Методы фрактальной геометрии широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. Умение их применять, приобретение навыков моделирования фрактальных систем необходимо современному исследователю. В этом и состоит цель работы – привить навык решения задач методами фрактальной геометрией [4].

Применение современных технологий и фрактальной геометрии для построения моделей речных систем служит средством решения задачи их

детального и всестороннего изучения и моделирования различных процессов, происходящих на реках. Фрактальный анализ – универсальный математический метод, позволяющий характеризовать большинство природных объектов и процессов. Его применение дает возможность (при соблюдении одинаковых методических подходов к расчету фрактальной размерности) получать численное описание организации природных структур различного генезиса и сравнивать их между собой

Объектом наших исследований являются речные сети бассейнов рек Енисей, Лена, Обь.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

## 1.1 Фракталы в природе

Фрактальная геометрия рассматривает закономерности, которые в основе природных объектов, процессов и явлений, имеющих явно выраженную фрагментарность, изломанность и искривленность. Огромное количество объектов на поверхности Земли и атмосфере подвластны степенным законам. Моделированием этих закономерностей и есть работа фрактальной геометрии. Приемы фрактальной геометрии активно используются в различных областях науки. Способность и возможность ими пользоваться, умение моделировать фрактальные системы нужны многим.

Геометрия встречающихся в природе объектов имеют огромный диапазон – от атомных масштабов до Вселенной – является самым главным в прототипах, которые необходимо создавать, дабы познать природу. Так повелось, что фундаментом интуитивного постигания геометрии природы были евклидовы прямые, окружности, из которых создавали пространства с дискретной размерностью. Впрочем, образцовая подборка геометрических объектов: прямых, окружностей и прочих, начинает быть не возможной для представления протяженности рек, границ водных объектов, вида облаков и другого большого разнообразия природных предметов. Бенуа Б. Мандельброт рассказал всем об объектах, для работы с которыми используются нецелочисленные, дробноразмерные пространства. Он назвал их – фрактал. С целью представления натуральных созданий требуется вовлекать идеи новой фрактальной геометрии. Появилось описание фрактальной размерности, которой является дробная размерность новых объектов, она же является численной границей обозначения непосредственно фракталов.

Представление изъятий природы нуждается в использовании необходимых научных знаний и аксиом. Именно это дает возможность определения исходных принципов. Ради оптимального восприятия устанавливаемых обозначений пользуются признанными аналогиями, проводят параллели с известными эффектами и представлениями. При всем при этом в освоении фрактальной геометрии появляются явные сложности к вовлечению очевидных очертаний. Порядком интересно и необычно адаптироваться, что одномерные предметы в реальности все-таки являются чем-то другим.

Каждая математическая структура в своем фундаменте имеет комплект определенных аксиом. Фрактальная геометрия не является особенной, в ее основе имеются математические мысли о многомасштабности и самоподобии. Главным значением фрактальной геометрии есть фрактальная размерность.

В математической науке в 1975 году произошло обновление, единственное, что осталось неизменным, это положение о точке. Второй по трудности предмет – кривая линия – получает свежие особенности. Вселенная оказывается является цельноразмерной. Из присутствия длины, ширины и высоты следует, что вещественные предметы располагаются в трехмерном пространстве. Однако значительные физические объекты и творящиеся в них явления изломаны, изрезаны. Исключительно работа с значительными иллюстрациями могут приблизить нас к постижению фрактальной геометрии. Нахождение ответов на определенные задачи помогают понять фрактальную геометрию.

В Евклидовой геометрии линия – это одномерный объект и с целью замера ее параметров необходимо знать всего лишь масштаб. Новая геометрия работает с фрактальной линией, диагностирование длины которой нуждается в неизмеримом числе масштабов. Размерность такой фрактальной линии на самом деле превышает единицу. В связи с этим можно рассуждать о многомасштабности, или масштабируемости,

объектов. Однако, во фрактальной геометрии фрактальные линии имеют вдобавок еще один поразительный признак. В каком бы масштабе ученые не глядели на фрактальную линию, она останется изрезанной и изломанной. Как целиком, так и любой участок кривой линии имеют одинаковую фрактальную размерность. Это явление называется самоподобием. Цельноразмерная Евклидова геометрия включает в себя 39 аксиом (по Давиду Гильберту). Многомасштабность на должном уровне можно выразить другим способом. Конечно же известно, что восприятие масштабов «на глаз» в пространстве с большим уклоном не тождественно действительному промежутку. Это зависит от того, что традиционно контуры мы воспринимаем себе плавными, а в действительности в природе большинство линий значительно изломаны. Именно эти линии Мандельброт прозвал фрактальными. Они имеют различные удивительные признаки, основным из них есть взаимосвязь длины от обычной линейки. Замер длины метровой линейкой не тождественен длине от сантиметровой. Дебют был у математика Ричардсона, около 1920 г., он начал говорить о многомасштабности. Он заметил, что периметры стран обусловлены тем, чем их измеряют. В Польше ученые проводили измерения длины р. Висла в 30х гг. И у них возник удивительный итог: при уточнении измерений длина реки увеличивалась! Таким образом, математики получили задачу, которую сравнили с математическим курьезами. В 70-х гг. туристы заметили, что при измерении периметров Великих Озер в Америке у всех людей получались разные результаты. Посредством этого природа в третий раз показала, что длина природной линии зависит от масштаба измерения. Только после математической формулировки задачи начинается Наука, становится возможным объяснить известные факты и экспериментально, после соответствующих измерений, проверить предсказание о новых явлениях. Прямая линия имеет размерность, равную 1. Если кривая линия заполняет всю плоскость, то,

как и для всякого двухмерного образования, размерность кривой будет равна 2.

Таким образом, изломанная линия на плоскости будет иметь фрактальную размерность, принимающую любое значение между 1 и 2. Если линия проходит через пространство и плотно ее заполняет, то ее размерность, соответственно, будет равной 3. Математика – это такая наука, что может предложить геометрические объекты, обладающие фрактальной размерностью меньше 1, такие объекты называют канторовскими множествами. В XIX в. было замечено, что существуют функции, не имеющие производных. Наглядно это можно представить, нарисовав «птичку» – обычную галочку, таким образом в точке излома будет две касательные. Так как касательные определяются производными, то получаем, что в какой-то точке необходимо рассматривать две производные. Это показывает, что мы не знаем, какую производную надо брать в данной точке – наша «птичка» в этой точке не имеет обычную производную. Многомасштабные самоподобные кривые аналогичны точке излома рассмотренной галочке. Надо только представить, что кривая линия изломана в каждой точке. Такая наглядная картина дает возможность прочувствовать необычные свойства новой геометрии. Отличие фрактальной размерности от единицы можно еще представить следующим образом. Спроецируем нашу «птичку» на горизонтальную ось. Тогда из места излома будут проецироваться как бы две точки. Для фрактальной линии из каждого его места будут проецироваться как бы больше, чем одна точка.

Многие объекты в природе обладают свойствами фрактала, например: побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система, система альвеол человека или животных.

Природные объекты, обладающие фрактальными свойствами. На рисунке 1.1 Показан вид спереди на трахею и бронхи.

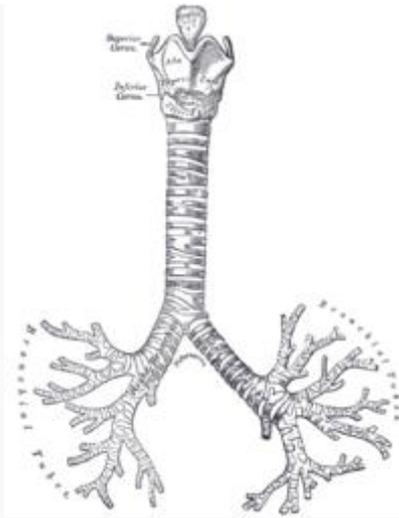


Рисунок 1.1 – Трахеи и бронхи.

Фракталы в живой природе:

- Кораллы
- Морские звезды и ежи
- Морские раковины
- Цветы и растения (брокколи, капуста)
- Кроны деревьев и листья растений
- Плоды (ананас)
- Кровеносная система и бронхи людей и животных

Фракталы в неживой природе:

- Границы географических объектов (стран, областей, городов)
- Береговые линии
- Горные хребты
- Снежинки
- Облака
- Молнии
- Морозные узоры на оконных стеклах
- Кристаллы
- Сталактиты, сталагмиты, геликтиты.

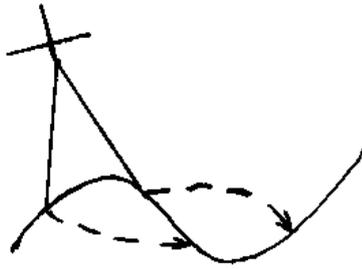
## 1.2 Методы определения размерности геометрических фракталов

Глава написана по материалам [1 – 4].

Математика, как и любая наука, основывается на простых, интуитивно понятных и легко проверяемых положениях. Фрактальная геометрия в этом смысле начинается с измерения длины какой-либо кривой линии. Сам процесс измерения означает, что надо смотреть, сколько раз заранее выбранный масштаб уложится на кривую. Затем масштаб меняется, и процесс измерения повторяется. Масштабом называют прямой отрезок длиной в 1 м. Для простоты можно брать доли масштаба – км, см ... Надо только смотреть, чтобы масштаб заранее был гораздо меньше измеряемой длины, а это всегда можно сделать. Масштаб измерения обозначается символом  $\chi$ . Если его хорошо приложить к линии два раза, то длина линии будет равна  $2\chi$ . В практических случаях применяют циркуль, обходя с его помощью всю кривую. На рисунке 1.2, а показаны два шага раствором циркуля. Также используется другой способ, называемый стандартным клеточным методом. При этом лист, на котором начертана измеряемая линия, покрывается сеткой ячеек со стороной  $\chi$  (рисунок 1.2 б). Тогда длина будет равна произведению размера ячейки на число ячеек, в которых находится рассматриваемая кривая линия. В качестве кривой, у которой измеряется длина, выбирается линия, показанная на рисунке 1.3. Ее некоторой периодичностью пытаются учесть свойство самоподобия, хотя это и трудно продемонстрировать «от руки». Берется циркуль с раствором  $\chi$  единиц измерения и считается число шагов  $N(\chi)$ , необходимых для обхода из одного конца в другой конец всей линии. Даже если останется лишний участок кривой, то при достаточно большом числе  $N$  это не сказывается на общем фрактальном свойстве кривой. Произведение измеренного числа шагов  $N(\chi)$  на заранее выбранный масштаб  $\chi$  по определению означает искомую длину  $L$ :

$$L = N(\chi) \cdot \chi \quad (1.1)$$

а)



б)

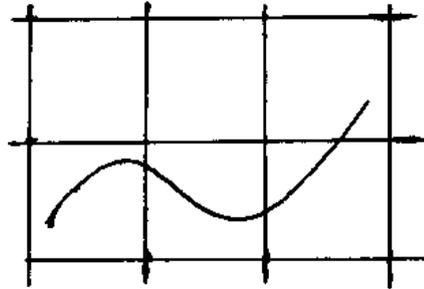


Рисунок 1.2 – Измерение длины: а) обходом по линии раствором циркуля, б) подсчетом клеток, содержащих линию.

Проводится первое измерение с масштабом  $1/10$   $\chi =$  (в некоторых условных единицах). На рисунке 1.3 показано, что этот масштаб укладывается  $N^1 = 5$  раз, так что длина будет равна  $L^1 = N^1 \cdot \chi^1 = 5/10$ . Следующее измерение проводится с меньшим масштабом  $\chi^2 = 2/3 \cdot 1/10 = 1/15$ . На рисунке 1.4 показано, что циркуль с новым масштабом обойдет линию  $9$   $N^2 = 9$  раз. Новая длина станет равной  $L^2 = N^2 \cdot \chi^2 = 6/10$ , что больше, чем  $5/10$  – предыдущий результат. Видно, что при уменьшении масштаба измерения длина кривой линии увеличивается, и такое увеличение является общим свойством непрерывных фрактальных линий.

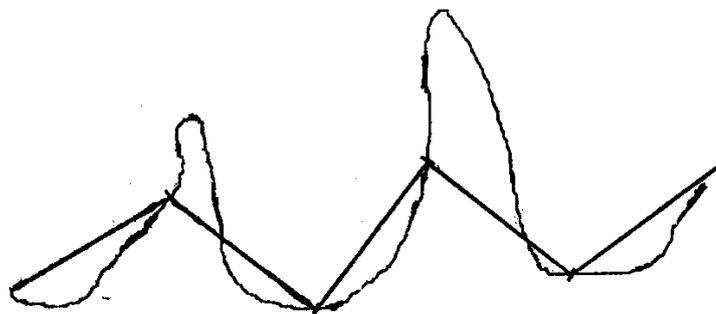


Рисунок 1.3 – Пример самоподобной кривой линии; первое измерение длины.



Рисунок 1.4 – Пример самоподобной кривой линии; второе измерение длины.

Продолжают измерения, уменьшая последовательно масштаб и считая каждый раз число растворов циркуля. Все измерения сведены в таблице 1.1. Для наглядности нанесены измеренные значения на график в билогарифмическом масштабе (рисунок 1.5). Логарифмирование – это такая операция, что небольшое изменение своего аргумента мало сказывается на самом логарифме. Поэтому небольшие «хвосты», возникающие при подсчете числа  $N$ , можно не учитывать. Как видно из рисунка 1.5, все точки  $(\ln N, \ln 1/\chi)$  практически идеально легли на прямую линию. Таким образом, методом линейной регрессией, для кривой на рисунке 1.3 получено:

$$\ln N = -1.12 + 1.23 \ln 1/\chi,$$

$$N = 0,33 * \chi^{-1,23}$$

Таблица 1.1 – Результаты измерения

Изм. 1	Изм. 2	Изм. 3	Изм. 4
$\chi_1 = 1/10$	$\chi_2 = 1/15$	$\chi_3 = 1/20$	$\chi_4 = 1/30$
$N_1 = 5$	$N_2 = 9$	$N_3 = 13$	$N_4 = 22$

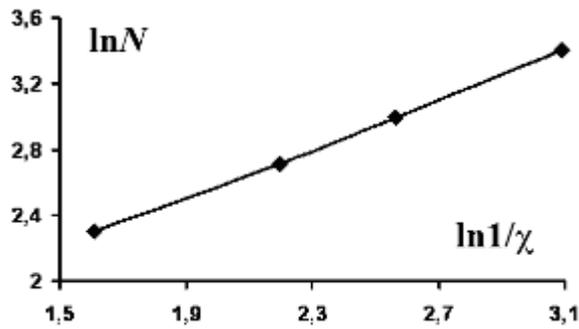


Рисунок 1.5 – График зависимости  $N$  от  $\chi$   
(в билогарифмическом масштабе, натуральные логарифмы).

Линейная зависимость между  $\ln N$  и  $\ln 1/\chi$  соблюдается для любой кривой, какую только можно вообразить. Это положение удобно записывается в виде следующей степенной зависимости между  $N$  и  $\chi$ :

$$N = C \cdot \chi^{-D}. \quad (1.2)$$

Для кривой на рисунке 1.3 будет  $C = 0.33$  и  $D = 1.23$ . Чтобы не отвлекаться на множитель  $C$ , соотношения записываются в виде  $N \sim \chi^{-D}$ , как это принято во фрактальной геометрии. Результат (1.2) означает, что кривая линия представляет собой фрактальный объект с размерностью  $D$ . Чтобы не обращать внимания на множитель  $C$ , степенной показатель  $D$ , как это следует из (1.2), удобно определить следующим образом:

$$D = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\ln N(\chi)}{\ln 1/\chi} \quad (1.3)$$

Таким образом, число масштабов степенным образом зависит от масштаба измерения, а степенной показатель оказывается фрактальной размерностью рассматриваемого объекта. При этом, чем меньше масштаб, тем больше требуется число масштабов. Умножая число  $N(\chi)$  на масштаб  $\chi$ , согласно (1.1), получаем длину измеряемой кривой линии:

$$L = C * \chi^{1-D} \quad (1.4)$$

Это формула Мандельброта, с которой и началось становление фрактальной геометрии. Аналогичное соотношение для границ государств в 1920 г. установил Ричардсон, поэтому часто формулу (1.4), называют законом Мандельброта–Ричардсона. Бенуа Мандельброта указывал, что величина  $D$  в (1.4) как раз и является фрактальной размерностью. Формулу (1.4) определяется как математическая формулировка первой аксиомы фрактальной геометрии – аксиомы многомасштабности: чтобы что-то измерить, надо иметь набор масштабов. Поскольку  $D > 1$ , то при  $\chi \rightarrow 0$  длина  $L \rightarrow \infty$ . Обратно, увеличивая масштаб измерения, следует уменьшить длину кривой. При движении по пересеченной местности шаги надо делать как можно шире. На рисунке 1.5 по осям отложены натуральные логарифмы. Однако в литературе часто используют десятичные логарифмы [4]. В этом случае график зависимости  $N$  от  $\chi$  будет выглядеть так, как показано на рисунке 1.6.

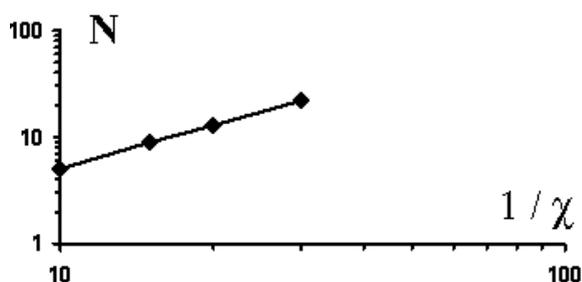


Рисунок 1.6 – Зависимость  $N$  от  $\chi$  (десятичные логарифмы).

В формулах (1.2) и (1.4) содержится множитель  $C$ , который является типичным для фрактальной геометрии. Он зависит от размерности величин и их разрядов. Чтобы не отвлекаться на этот множитель, его часто называют неопределенным. Его даже можно не выписывать. Тогда, например, формулу (1.4) записывают в виде:  $L \sim \chi^{1-D}$

Фрактальные объекты имеют удивительные свойства – как в целом, так и любые их участки обладают одной и той же размерностью. Это свойство называется самоподобием. Стараясь разглядеть более тонкую структуру, ученый с удивлением видит, что в окуляре микроскопа ничего не меняется. Это хорошо видно на рисунке 1.7 (рисунок взят из книги Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир. 1968). Математическую формулировку самоподобия фрактальных объектов дается следующим образом. Растягивается или сжимается кривая линия в  $\eta$  раз, так что новая длина будет  $L^* = \eta L$ .

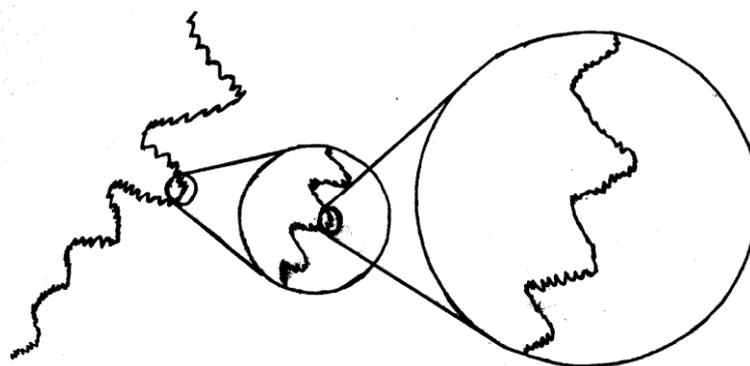


Рисунок 1.7 – Изменяя поле зрения, будем наблюдать одну и ту же картину.

Величину  $\eta$  называют масштабным множителем. Поскольку самоподобие означает, что любая часть кривой подобна всей линии, то измерение новой длины можно осуществить масштабом, в  $\eta$  раз отличным от исходного масштаба, т. е.

$$\chi^* = \eta \chi. \quad (1.6)$$

Два выражения (1.5) и (1.6) составляют математическую формулировку второй аксиомы фрактальной геометрии – самоподобия

фрактальных объектов. Используя формулу Мандельброта–Ричардсона (1.4), второй аксиоме можно придать компактную формулировку:

$$\eta L = C \cdot (\eta \chi)^{1-D}. \quad (1.7)$$

Надо только учитывать, что здесь скобки представляют собой оператор, означающий, что сначала надо задавать масштабный множитель, и только после этого можно будет возводить в степень. Формула (1.7) означает, что любой участок фрактальной линии обладает одной и той же фрактальной размерностью.

Теперь есть все, чтобы решать разнообразные задачи, связанные с фрактальным описанием геометрических и физических объектов.

Формулы Мандельброта–Ричардсона (1.4) и самоподобия (1.7), несмотря на формальную схожесть, независимы друг от друга. «Они получены в результате обобщения экспериментов – измерения длины и наблюдение линии в различных масштабах. Аксиомы фрактальной геометрии составляют два уравнения для трех величин – длины, масштаба и фрактальной размерности. В качестве свободного параметра, очевидно, надо брать фрактальную размерность, ее можно определить либо опытным путем, либо вычислить математически, либо установить методами теоретической физики, рассматривая детальный механизм явления. Природные объекты описываются геометрическими и физическими величинами. Если эти объекты обладают свойствами многомасштабности и самоподобия, т. е. являются фрактальными, то геометрические и физические величины будут связаны между собой степенным образом. Это приводит к появлению обилия степенных показателей. Если после измерений или другим способом определена размерность фрактального объекта, то постулаты позволят выразить через найденную размерность все степенные показатели. Это одна из целей

научной работы – свести многообразие явлений и процессов как можно к меньшему числу способов их описания.» [4].

«Природа состоит буквально из нерегулярных, хаотических объектов. Нерегулярности земного ландшафта, впадины и холмы приводят к тому, что русла рек имеют искривленный, причудливый рисунок. Если устье реки пологое, то поток воды разольется по площади. Но всегда имеющиеся неоднородности земной поверхности поток воды разобьет на множество рукавов и притоков. В итоге пологое устье реки приобретает характерную форму треугольника (рисунок 1.8). Древние греки называли такой рисунок дельтой реки. На Земле счетное количество дельты рек. Мы рассмотрим три из них – дельты рек Волги, Лены и Селенги. Неоднородности земной поверхности приводят, помимо изгиба рек и образования их дельты, к появлению луж, болот и озер. Мы рассмотрим тундровые озера. Располагаясь на обширной площади, они играют важную роль в экосистеме Земли, реагируют на климатическую обстановку. Простое наблюдение за ними из космоса, мониторинг ареала их распределения делают тундровые озера одними из индикаторов глобального температурного режима планеты.

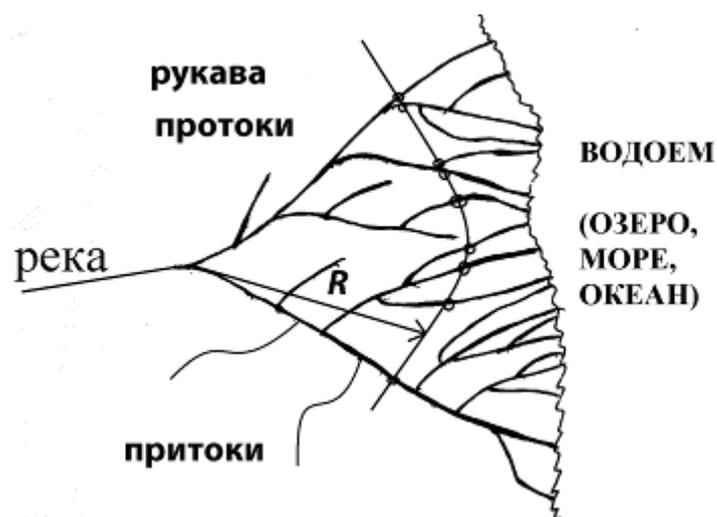


Рисунок 1.8 – Дельтообразное устье реки.

Приложим к фотографической пластине металлическое острие и подадим на него высокое электрическое напряжение. После проявления на фотопластинке увидим расходящиеся во все стороны лучи, вдоль которых на всем их протяжении также расходились отростки. Такие фигуры Лихтенберга стали называть стримерными каналами. Аналогичную картину рисуют на небосклоне грозовые разряды – молнии, проскакивающие между облаками, облаками и землей. Молнии – источник естественного электромагнитного поля Земли и играют важную роль в радиосвязи. Дельты рек, стримерные каналы и разряды молнии относятся к определенному классу фрактальных объектов – разветвленным структурам. Прямой и трудоемкий способ измерения их фрактальной размерности состоит в использовании формулы Мандельброта – Ричардсона (1.4). При этом предполагается, что раствором циркуля необходимо обойти один раз все ветвления структуры. Более экономичный в вычислительном плане способ измерения состоит в использовании самоподобия (1.7). Для этого необходимо внутри разветвленной структуры провести замкнутую область линейного размера  $R$ . Масштабный множитель  $\eta$  надо выбрать как  $1/R$ . Полагая в (1.7)  $\eta = 1/R$  и раскрывая скобки, после очевидных сокращений, получаем:

$$L \sim R^D. \quad (1.8)$$

Полученная формула относится к одномерному образованию, и в этом смысле в (1.8) под фрактальной размерностью  $D$  надо понимать величину  $D^1$ . Если фрактальный объект представляет собой двухмерную структуру, то постулаты (1.4) и (1.7) для площади  $S$  примут следующий вид:

$$S = C \cdot \chi^{2-D_2}, \quad (1.9)$$

$$\eta^2 L = C \cdot (\eta \chi)^{2-D_2}, \quad (1.10)$$

Полагая  $\eta = 1/R$ , получаем:

$$S \sim R^{D_2}, \quad (1.11)$$

Аналогично для объемной фрактальной структуры измерение ее объема  $V$  подчиняется следующим постулатам:

$$V = C \cdot \chi^{3-D_3}, \quad (1.12)$$

$$\eta^3 L = C \cdot (\eta \chi)^{3-D_3}, \quad (1.13)$$

Полагая  $\eta = 1/R$ , получаем:

$$V \sim R^{D_3}, \quad (1.14)$$

Если фрактальное тело однородно, то его плотность постоянна, а масса  $M$  будет пропорциональна объему тела. В этом случае:

$$M \sim R^D, \quad (1.15)$$

Этим соотношением пользуются в кластерной физике, где оно служит определением для фрактальной размерности  $D$ . У нас результат (1.14) является следствием многомасштабности и самоподобия фрактальной геометрии. Метод измерения фрактальной размерности, основанный на формуле (1.15), естественно назвать кластерным. Отличие использование результата (2.1) для измерения фрактальной размерности от применения

формулы Мандельброта – Ричардсона (1.4) в следующем. Использование (1.4) предполагает изменение масштаба после каждого измерения. Применение (1.8) заключается в изменении размера области при фиксированном масштабе. Подсчет упрощается, хотя и остается относительно трудоемким.» [4].

### *Канторовский метод измерения фрактальной размерности*

Клеточный и кластерный методы измерения можно назвать классическими. «Для разветвленных структур изложим новый метод измерения фрактальной размерности, который назовем канторовским. Если посмотреть на границу замкнутой области внутри разветвленной структуры, то увидим точки пересечения. Так, на рисунке 1.9 разветвленная структура пересекает область линейного размера  $R^1$  в  $N^1 = 14$  точках. При размере  $R^2$  число пересечений будет в  $N^2 = 23$  точках. Эти точки образуют канторовское множество, поэтому и излагаемый метод мы назвали канторовским. Согласно идеологии фрактальной геометрии связь между  $N$  и  $R$  будет степенной. Эту связь запишем в следующем виде

$$N \sim R^h. \quad (1.16)$$

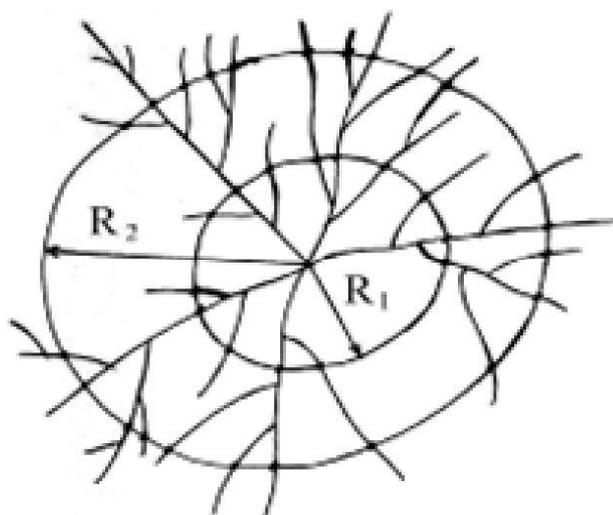


Рисунок 1.9 – Точками отмечены границы пересечений.

Степенной показатель  $h$  обычно называют размерностью блуждания. Развиваемый далее математический аппарат новой геометрии – фрактальное исчисление – позволит установить для фрактальных объектов на плоскости связь между размерностью блуждания и фрактальной размерностью:

$$h = 2(D - 1). \quad (1.17)$$

Так, если  $h = 0.8$ , то  $D = 1.4$ . Результат (1.17) можно обосновать следующим образом. Если ветвлений нет, то число  $N$  не зависит от размера  $R$ , т. е. в этом случае (рисунок 1.10)

$$D = 1, N = \text{const} \text{ и } h = 0.$$

Если ветвления полностью заполняют плоскость, то их число  $N$  прямо пропорционально площади области, т. е. в этом случае (рисунок 1.11)  $D = 1$ ,  $N = R^2$  и  $h = 2$ . Предполагая, что размерность блуждания линейно связано с фрактальной размерностью, т. е.  $h = a + b D$ , из выше приведенных условий поручаем  $h = 2(D - 1)$ , т. е. формулу (1.17).» [4].

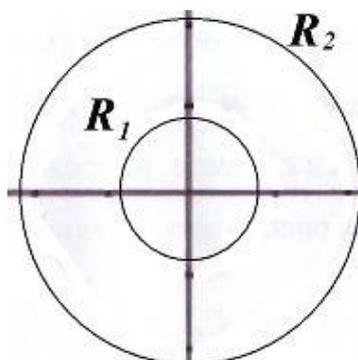


Рисунок 1.10 – Линии не раздваиваются, ветвлений нет, поэтому число ветвлений не зависит от размера области.

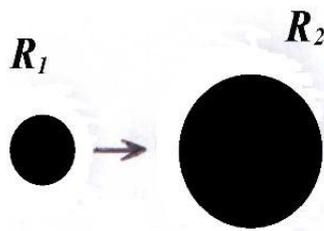


Рисунок 1.11 – Ветвления полностью занимают всю плоскость.

### 1.3 Постановка цели и задач исследования

Основной задачей данной работы является исследование главных методов определения фрактальной размерности речных систем. Для получения точных результатов нужно сопоставить значения вычисленной фрактальной размерности для такого объекта, у которого они предельно ясно определены теоретически, и соответственно, для решения главной задачи исследования требуется выбрать такой объект. После сделанного выбора, для тестирования методов следует определить его фрактальную размерность каждым из рассматриваемых методов и сравнить их результаты.

Второй задачей является нахождение связи фрактальной размерности с гидрологическими характеристиками. Необходимо рассчитать статистические характеристики рядов по постам замыкающих речные системы и сопоставить их с фрактальными размерностями.

Цель работы заключается в разработке методики определения геометрической фрактальной размерности речных водосборов и поиска связи фрактальной размерности с гидрологическими характеристиками.

## 2 ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для решения поставленных цели и задач необходимо сформировать базу данных, содержащую схемы рек и многолетние ряды расходов воды в замыкающих створах водосборов [5–14], в пределах которых рассчитывается фрактальная размерность. Кроме того, база данных должна содержать гидрологическую информацию о водосборах.

На рисунках 2.1 – 2.5 показаны карты Российской Федерации с нанесенными контурами водосборов.

На рисунках видно, что речная система достаточно густая и разветвленная, особенно ярко это видно у реки Обь. Карты взяты одинакового масштаба, 1: 20 000 000, что позволяет оценивать объективно. Посты расположены на крупных притоках или на главной реке.



Рисунок 2.1 – Карта водосбора реки Енисей.



Рисунок 2.2 – Карта водосбора реки Лены





Рисунок 2.4 – Карта водосбора реки Енисей с отмеченными гидропостами.



Рисунок 2.5 – Карта водосбора реки Енисей с отмеченными гидропостами.



Рисунок 2.6 – Карта водосбора реки Лена с отмеченными гидропостами.

В таблице 2.1 представлена информация о статистических характеристиках гидрологических рядов постов замыкающих выбранные для оценки водосборов.

Таблица 2.1 – Статистическая характеристика гидрологических рядов

Река – пункт	Координаты поста, град.		Период наблюдений гг.	$F$ , км <sup>2</sup>	$q$ , л/с км <sup>2</sup>	$h$ , мм	$C_v$	$C_s$	$r(1)$
	широта	долгота							
р. Обь									
Бия – г. Бийск	52°33'	85°17'	1963–1975	36900	12,8	405,5	0,227	1,0	-0,171
Тым – с. Напас	59°51'	81°87'	1937–1975	24500	7,76	244,7	0,203	0,531	0,615
Лямин – факт. Горшково	61°42'	70°40'	1963–1975	12800	7,20	226,9	0,199	0,938	0,453
Полуй – ГМС Полуй	66°2'	68°41'	1963–1975	15100	9,39	295,9	0,149	-0,628	0,182
р. Енисей									
Тембенчи – факт. Тембенчи	64°57'	98°54'	1939–1975	9260	13,5	426,8	0,167	0,203	-0,018
Мана – пос. Манский	55°47'	92°36'	1936–1975	18900	10,8	340,1	0,191	0,059	0,124
р. Лена									
Пеледуй – пос. Сользавод	59°50'	112°24'	1936–1973	13600	3,37	106,4	0,249	0,325	0,607

По рядам были построены разностно-интегральные кривые для подтверждения наличия маловодного и многоводного периодов водности, рисунки 2.7 – 2.13.

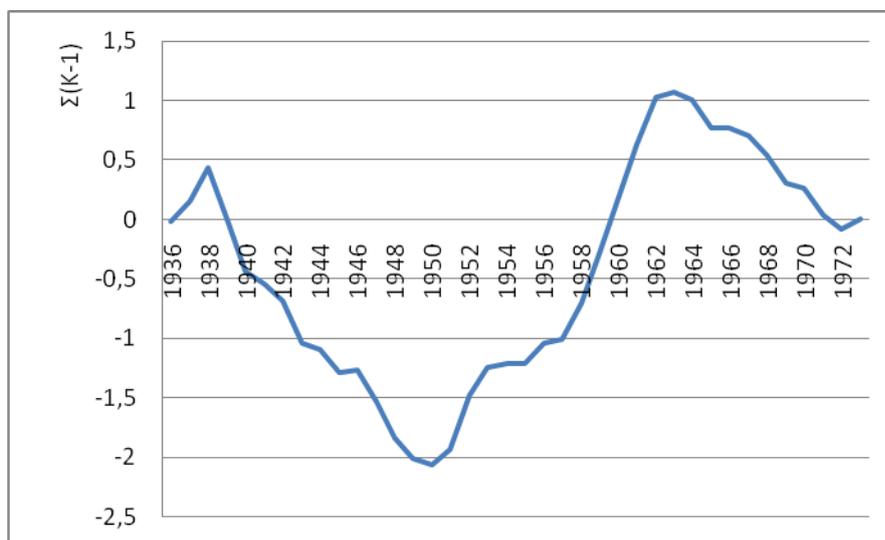


Рисунок 2.7 – Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Пеледуй – ГМС Сользавод.

На данной кривой видно, что 1940–1959 гг. – маловодный период, пик маловодности приходится на 1950 год, постепенно идет увеличение водности и пик многоводности приходится на 1963 год.

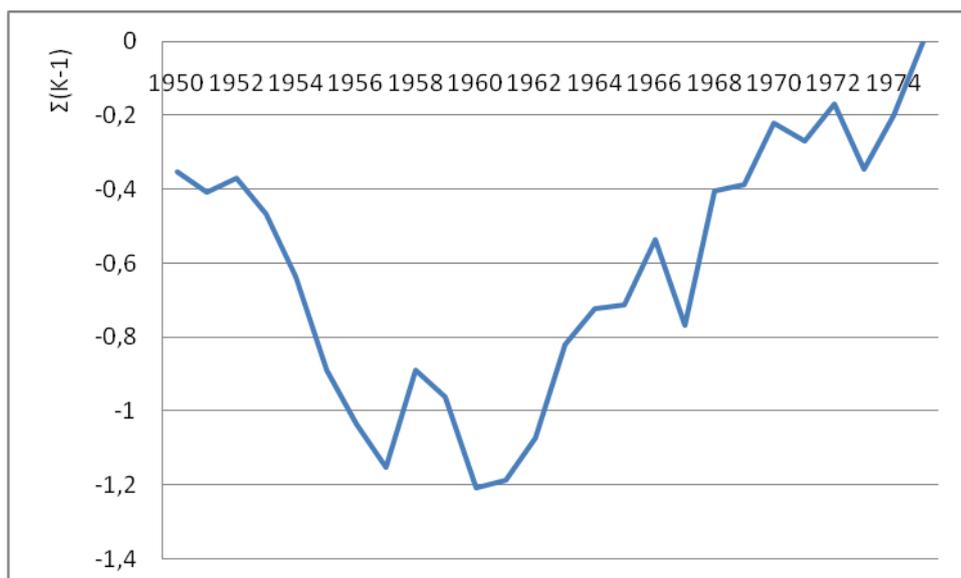


Рисунок 2.8 Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Тембенчи – факт.Тембенчи.

На данной кривой видно, что очень много скачков водности, есть и очень маловодные года, такие как 1954–1957, 1959–1962, так и очень многоводные года, 1963–1965, 1967–1970.

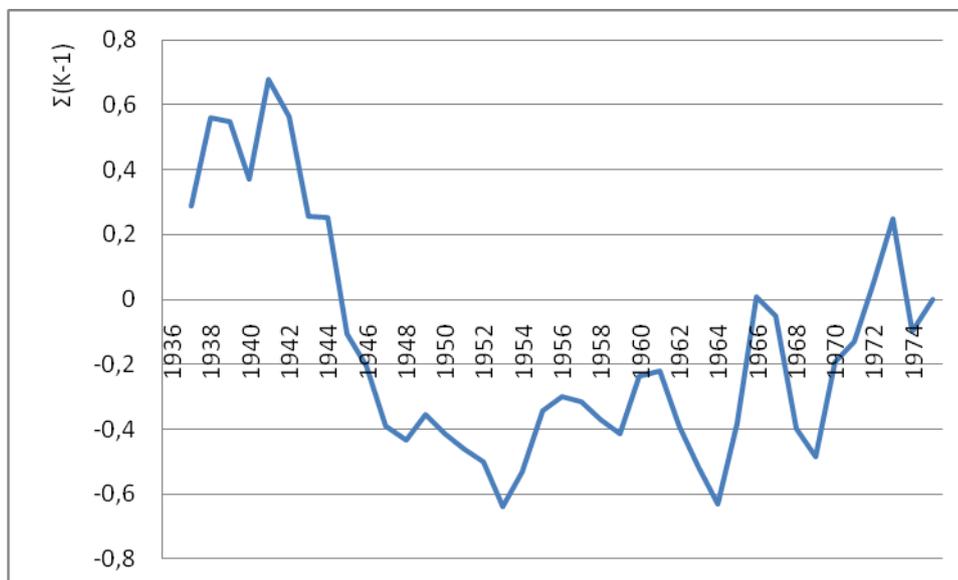


Рисунок 2.9 Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Мана–пос. Манский.

На кривой видно, что с самого начала наблюдений прослеживается многоводный период, с 1936 по 1945 год, а до 1966 мы видим маловодный период.

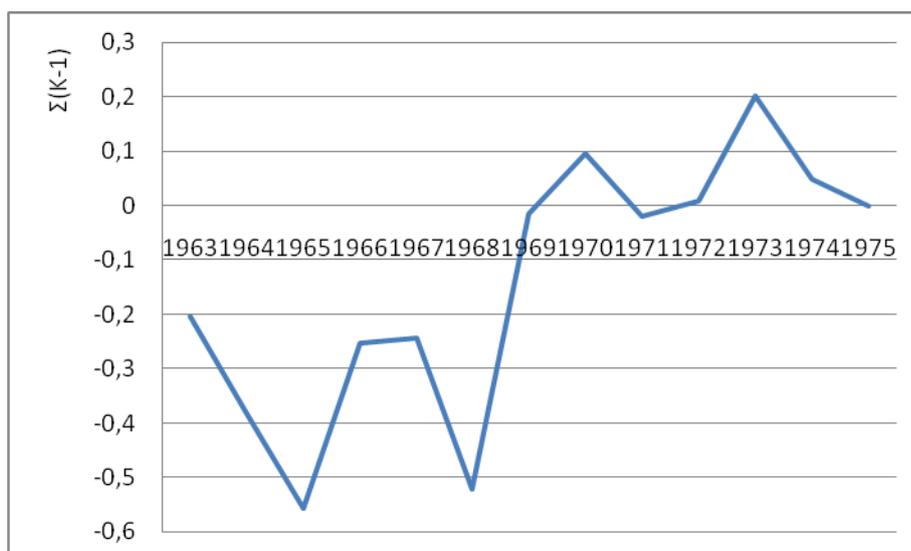


Рисунок 2.10 – Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Бия – г.Бийск.

На кривой можно наблюдать, что очень маловодный период с 1963 по 1969, сменяется многоводным.

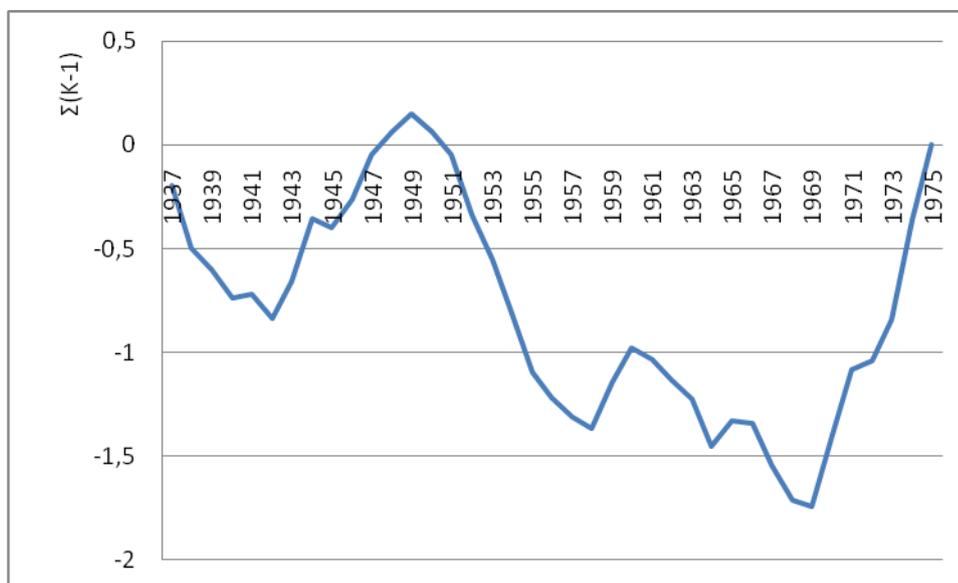


Рисунок 2.11 – Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Тым – с. Напас.

На кривой видно, что практически весь период наблюдений является маловодным, за исключением периода с 1947 по 1951 год.

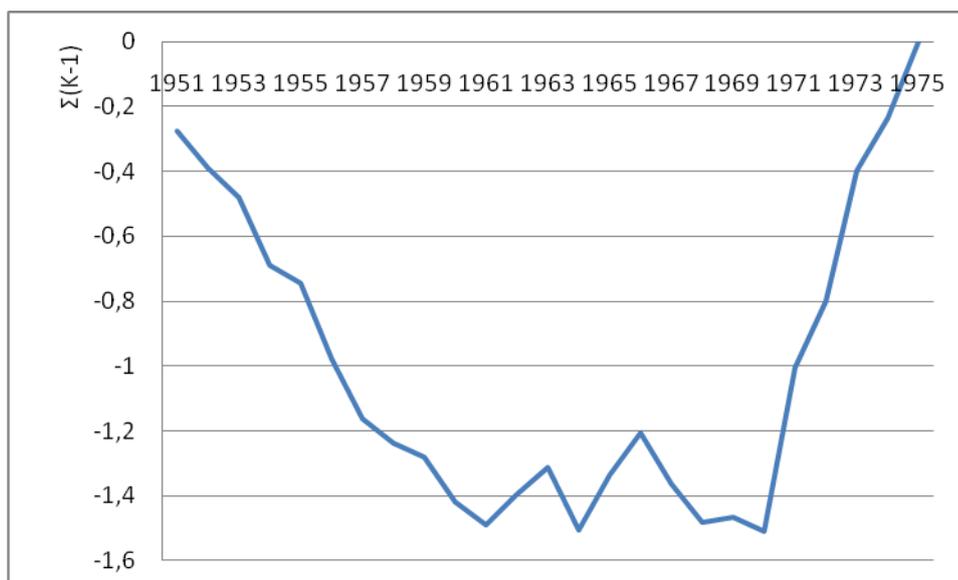


Рисунок 2.12 – Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Лямин–факт. Горшково

На кривой видно, что весь период наблюдений маловодный.

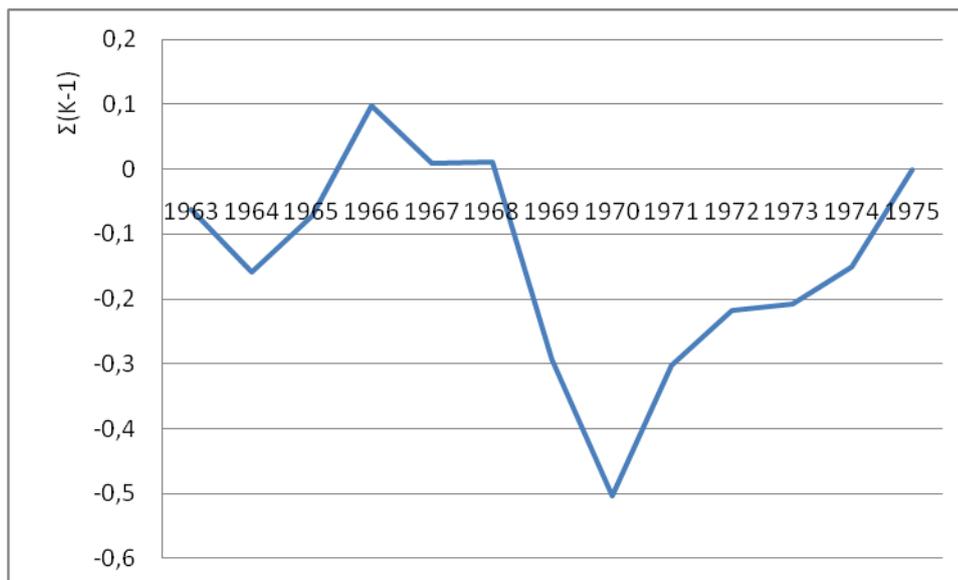


Рисунок 2.13 – Разностно-интегральная кривая модульных коэффициентов годового стока р. Полуй – ГМС Полуй.

На кривой видно, что маловодный период с 1963 по 1965 сменяется многоводным, а затем снова очень маловодный период, у которого пик приходится на 1970 год.

### 3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ РЕЧНЫХ СИСТЕМ

Фрактальные размерности будем вычислять канторовским методом.

*Алгоритм расчетов:*

- а) обводим границы водосбора пункта реки;
- б) разделяем выделенный участок горизонтальными линиями, на равные части, т. е. расчерчиваем на прямоугольники с единичным основанием;
- в) отмечаем точками пересечения ветвлений с горизонтальными линиями;
- г) находим площади треугольников в условных единицах;
- д) определяя угол наклона по методу линейной регрессии, находим размерность блуждания  $h$ ;
- е) из полученного значения  $h$ , находим фрактальную размерность –  $D$ .

Далее приведены примеры вычисления фрактальной размерности. В таблицах показаны расчеты фрактальной размерности.

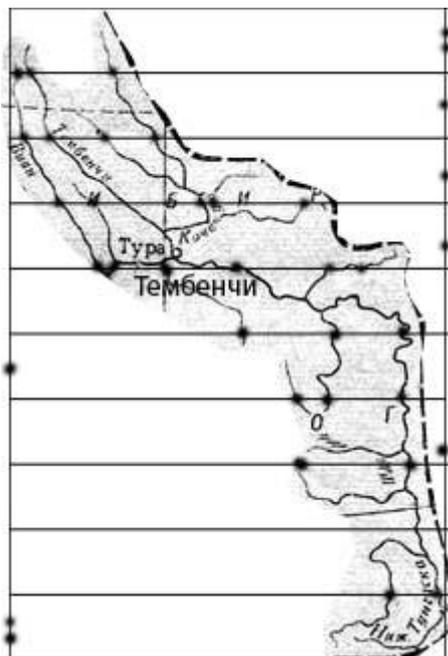


Рисунок 3.1 – Участок реки Енисей (Тембенчи – факт. Тембенчи), размечен на 10 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.1 – Расчет фрактальной размерности для р. Тембенчи – факт. Тембенчи

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	4	1,39	1,00	0,00	1,163	1,58
2	3	1,10	1,41	0,35		
3	4	1,39	1,73	0,55		
4	6	1,79	2,00	0,69		
5	7	1,95	2,24	0,80		
6	11	2,40	2,45	0,90		
7	11	2,40	2,65	0,97		
8	11	2,40	2,83	1,04		
9	10	2,30	3,00	1,10		
10	9	2,20	3,16	1,15		

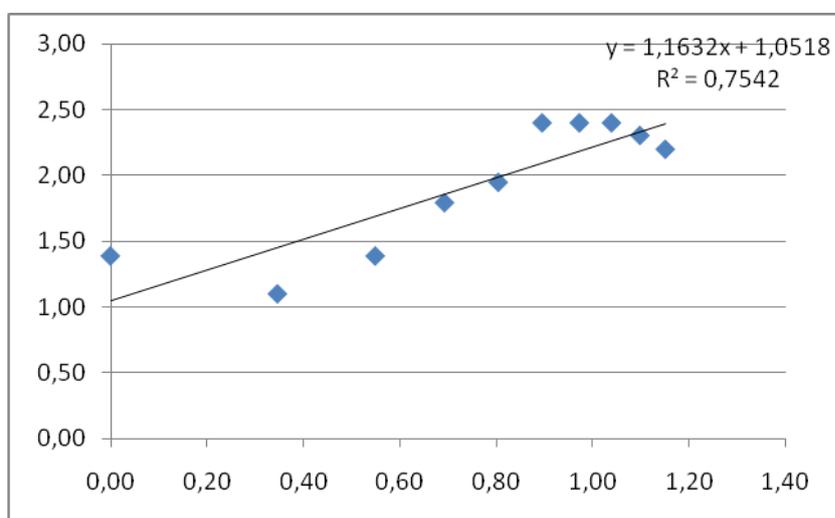


Рисунок 3.2 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Тембенчи – факт. Тембенчи).



Рисунок 3.3 – Участок реки Енисей (Мана – пос. Манский), размечен на 10 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.2 – Расчет фрактальной размерности для р. Мана – пос. Манский

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	2	0,69	1,00	0,00	0,604	1,302
2	2	0,69	1,41	0,35		
3	6	1,79	1,73	0,55		
4	10	2,30	2,00	0,69		
5	8	2,08	2,24	0,80		
6	7	1,95	2,45	0,90		
7	4	1,39	2,65	0,97		
8	3	1,10	2,83	1,04		
9	3	1,10	3,00	1,10		

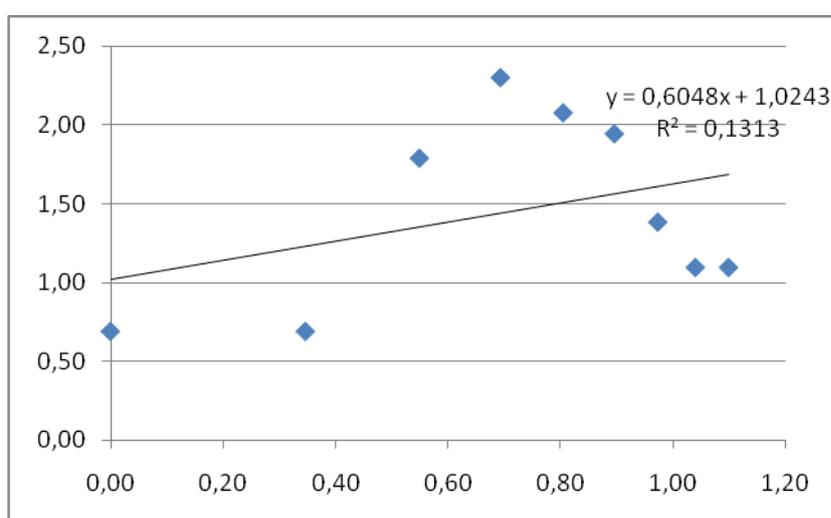


Рисунок 3.4 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Мана – пос. Манский).

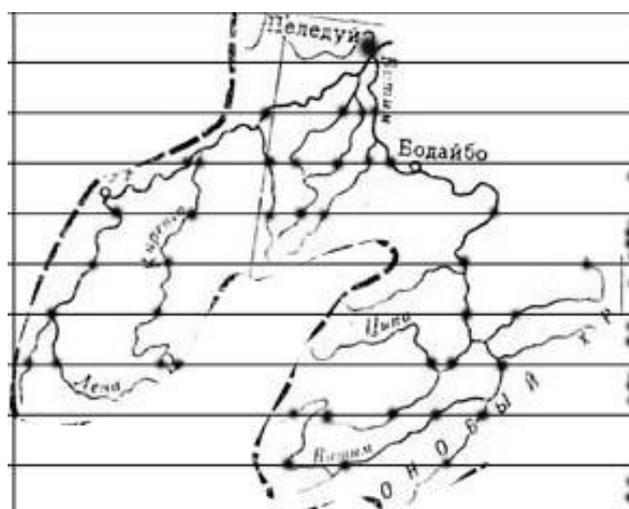


Рисунок 3.5 – Участок реки Енисей (р. Пеледуй – пос. Сользавод),  
размечен на 10 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.3 – Расчет фрактальной размерности для р. Пеледуй – пос.  
Сользавод

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	5	1,61	1,00	0,00	1,068	1,534
2	7	1,95	1,41	0,35		
3	12	2,48	1,73	0,55		
4	11	2,40	2,00	0,69		
5	12	2,48	2,24	0,80		
6	18	2,89	2,45	0,90		
7	20	3,00	2,65	0,97		
8	17	2,83	2,83	1,04		
9	15	2,71	3,00	1,10		
10	14	2,64	3,16	1,15		

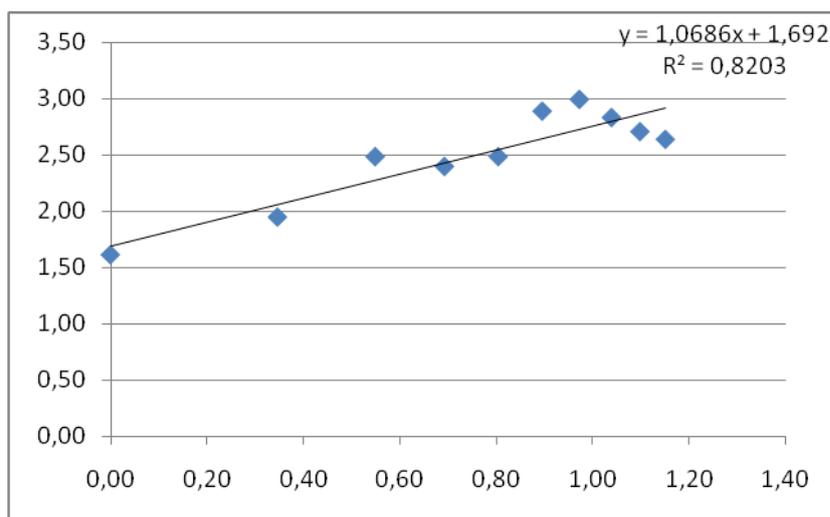


Рисунок 3.6 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Пеледуй – пос. Сользавод).



Рисунок 3.6 – Участок реки Обь (Бия – г. Бийск), размечен на 8 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.4 – Расчет фрактальной размерности для р. Бия – г. Бийск

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	2	0,69	1,00	0,00	0,647	1,3235
2	2	0,69	1,41	0,35		
3	4	1,39	1,73	0,55		
4	6	1,79	2,00	0,69		
5	3	1,10	2,24	0,80		
6	4	1,39	2,45	0,90		
7	3	1,10	2,65	0,97		
8	4	1,39	2,83	1,04		

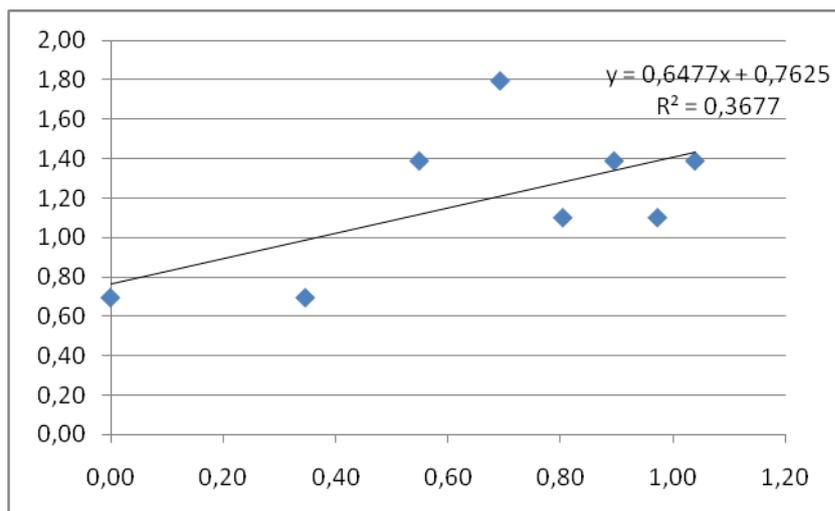


Рисунок 3.7 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Бия – г. Бийск).

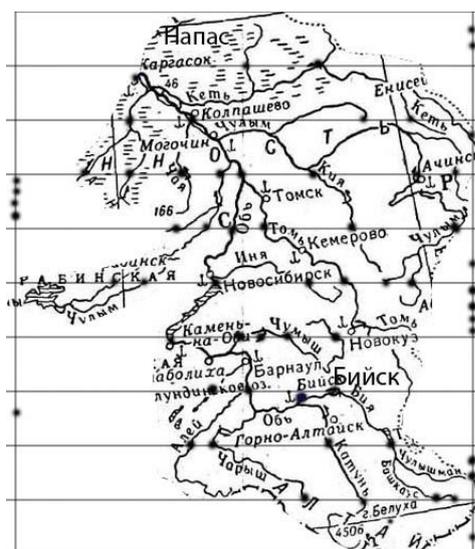


Рисунок 3.8 – Участок реки Обь (Тым – г. Напас), размечен на 10 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.5 – Расчет фрактальной размерности для р. Тым – г. Напас

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	8	2,08	1,00	0,00	1,249	1,6245
2	11	2,40	1,41	0,35		
3	11	2,40	1,73	0,55		
4	18	2,89	2,00	0,69		
5	19	2,94	2,24	0,80		
6	26	3,26	2,45	0,90		
7	19	2,94	2,65	0,97		
8	25	3,22	2,83	1,04		
9	33	3,50	3,00	1,10		
10	32	3,47	3,16	1,15		

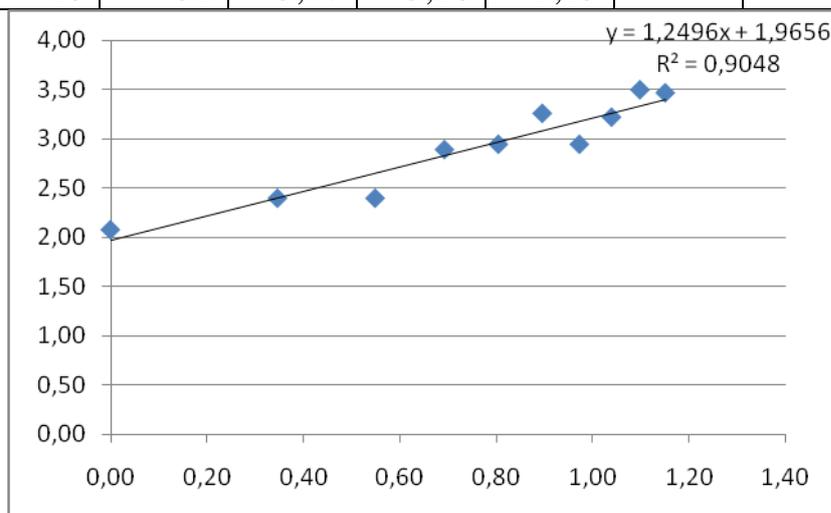


Рисунок 3.9 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Тым – г. Напас).

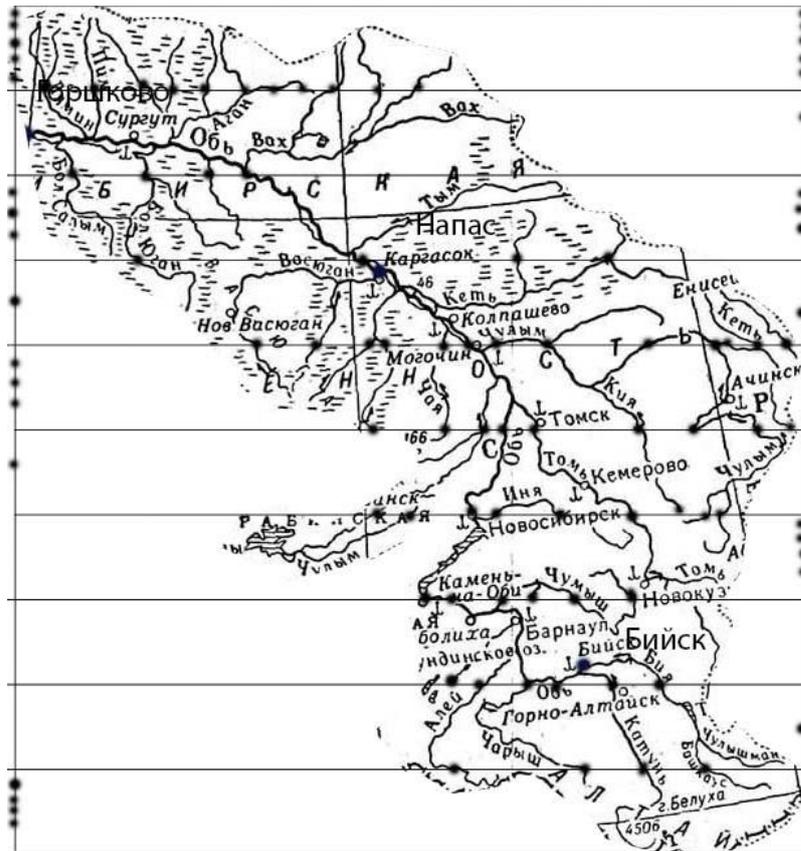


Рисунок 3.10 – Участок реки Обь (Лямин – факт. Горшково), размечен на 10 равновеликих прямоугольников.

Таблица 3.6 – Расчет фрактальной размерности для р. Лямин – факт. Горшково

$S$	$N$	$\ln N$	$R$	$\ln R$	$h$	$D$
1	8	2,08	1,00	0,00	1,249	1,6245
2	11	2,40	1,41	0,35		
3	11	2,40	1,73	0,55		
4	18	2,89	2,00	0,69		
5	19	2,94	2,24	0,80		
6	26	3,26	2,45	0,90		
7	19	2,94	2,65	0,97		
8	25	3,22	2,83	1,04		
9	33	3,50	3,00	1,10		
10	32	3,47	3,16	1,15		

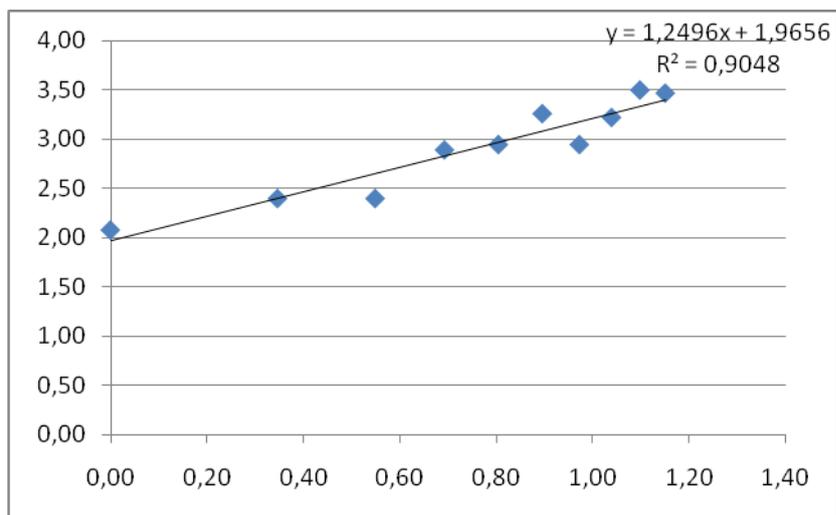


Рисунок 3.11 – Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$  (р. Лямин – факт. Горшково).

В таблице 3.7 представлены все результаты определения фрактальной размерности речных систем.

Таблица 3.7 – Значения фрактальных размерностей (ф.р.К.), вычисленных канторовским методом

Река – пункт	Масштаб карты	ф.р.М.
Тембенчи – факт. Тембенчи	1:20 000 000	1,580
Ман – пос. Манский	1:20 000 000	1,302
Пеледуй – Сользавод	1:20 000 000	1,534
Бия – г. Бийск	1:20 000 000	1,323
Лямин – факт. Горшково	1:20 000 000	1,624
Тым – с. Напас	1:20 000 000	1,626
Полуй – ГМС Полуй	1:20 000 000	1,761

#### 4 ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ В ГИДРОЛОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

В данной главе была сделана попытка связать фрактальную размерность рек с гидрологическими характеристиками.

На рисунках 4.1 – 4.6 показаны различные зависимости с указанием коэффициента детерминации. Выявлено, что наилучшая связь наблюдается между фрактальной размерностью и площадью водосбора и коэффициентом вариации. Подобные взаимосвязи могут быть использованы для получения характеристик малоизученных рек, так как в настоящее время доступны детальные (спутниковые) карты любого водосбора, по которым можно определить фрактальную размерность речной системы.

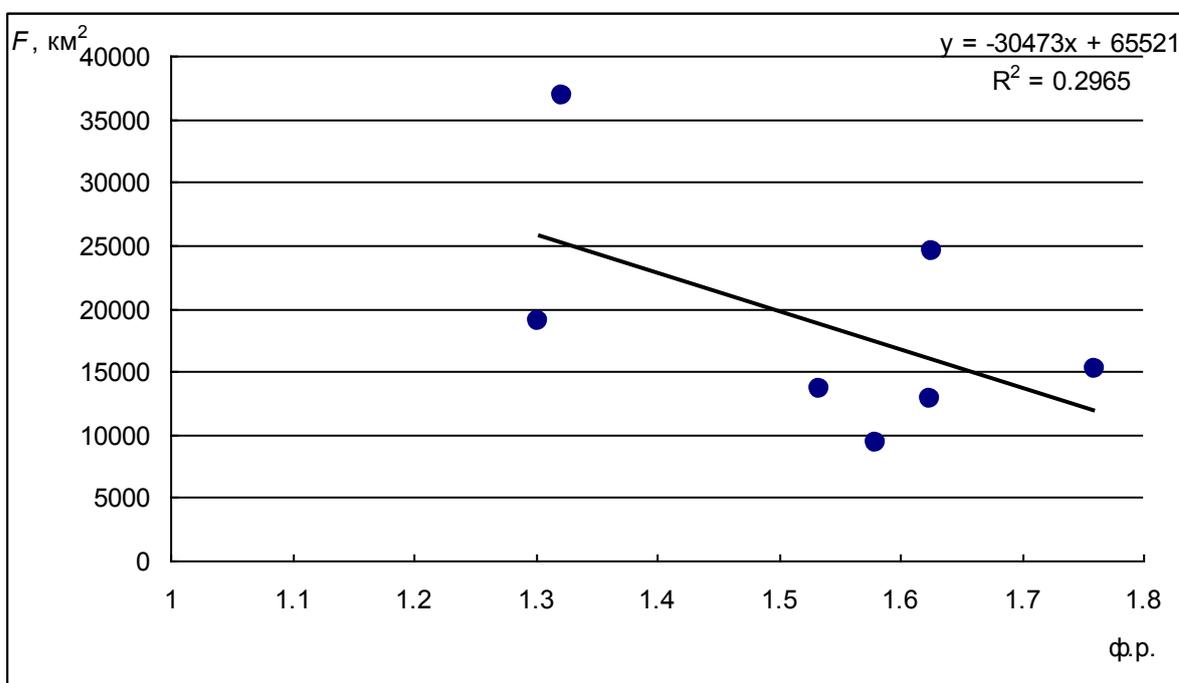


Рисунок 4.1 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и площади водосбора ( $F$ ).

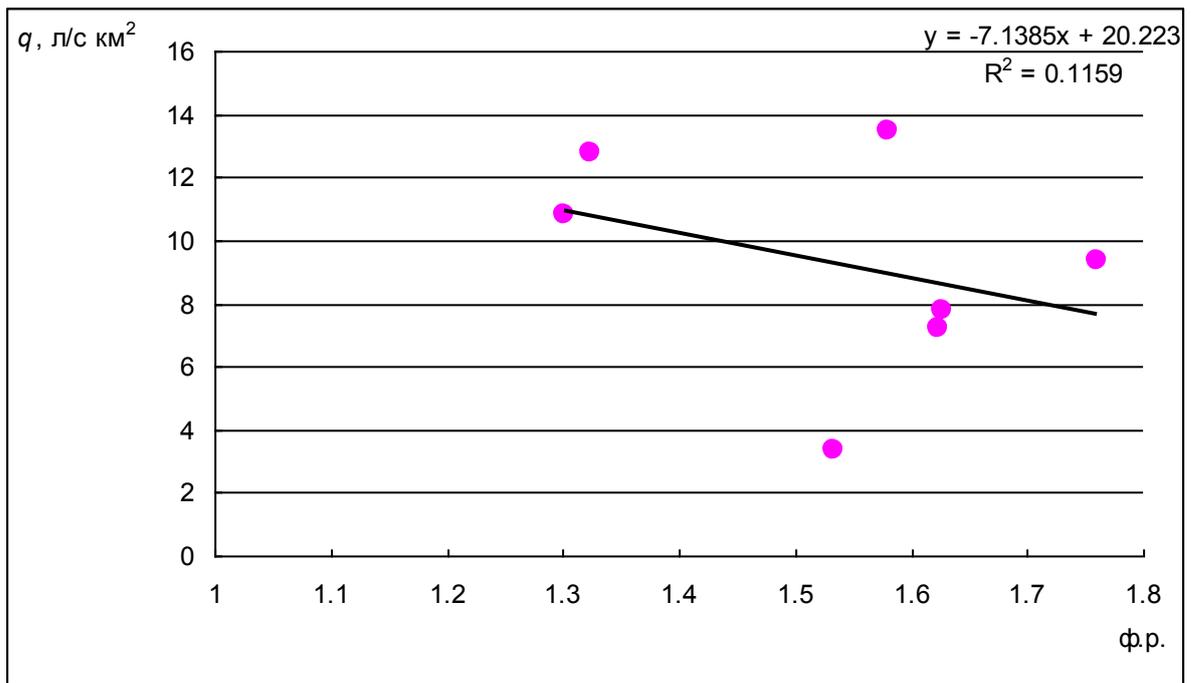


Рисунок 4.2 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и модуля стока ( $q$ ).

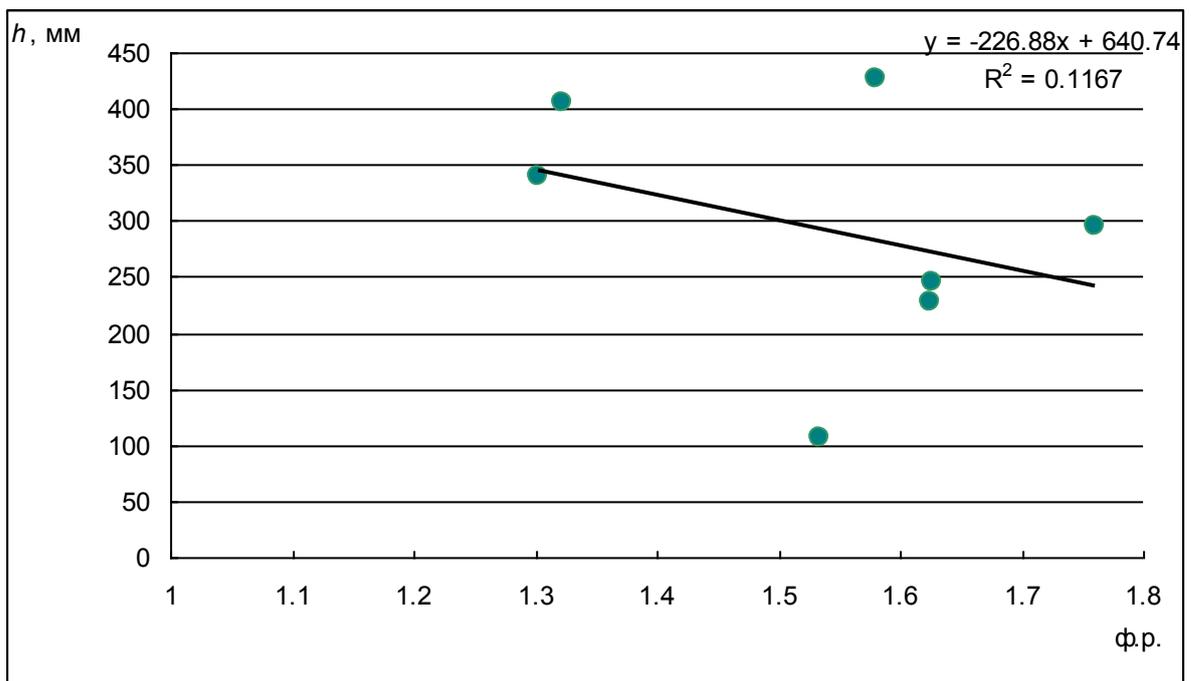


Рисунок 4.3 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и слоя стока ( $h$ ).

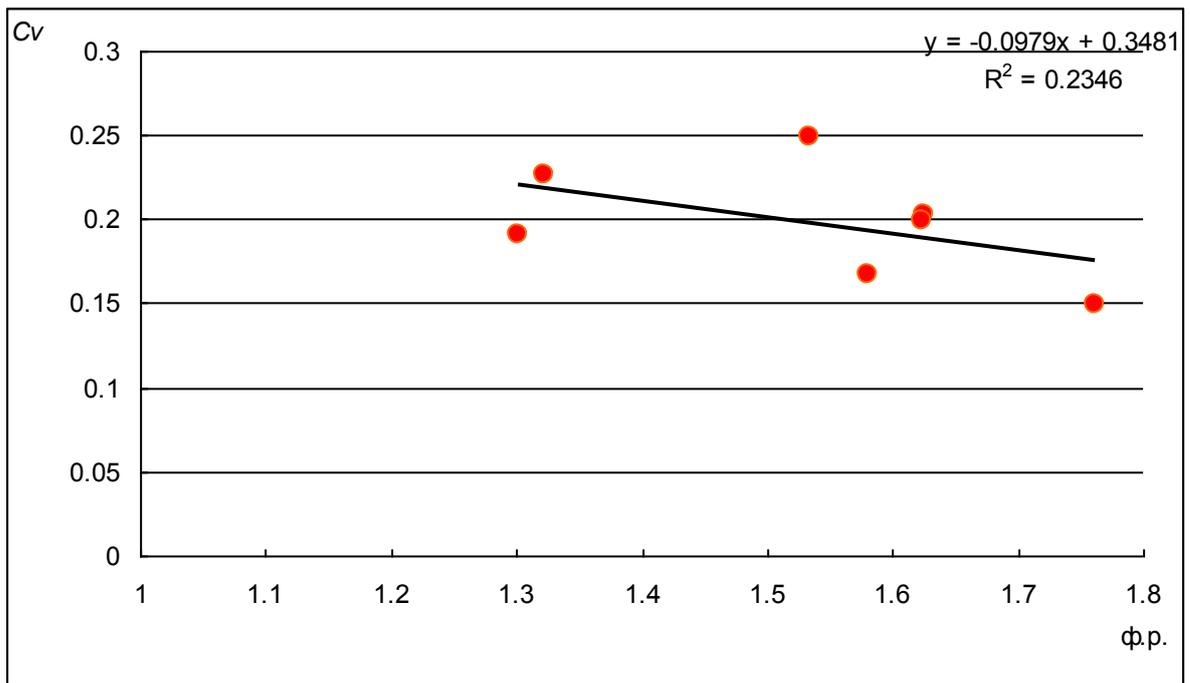


Рисунок 4.4 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и коэффициента вариации ( $Cv$ ).

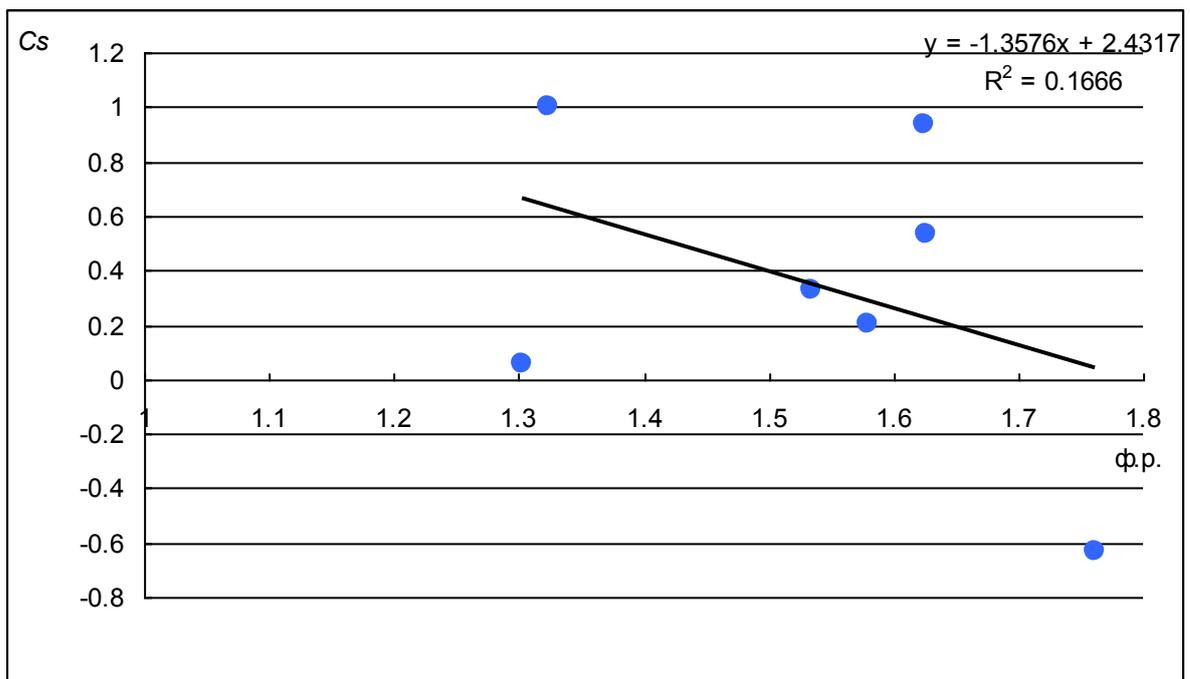


Рисунок 4.5 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и коэффициента асимметрии ( $Cs$ ).

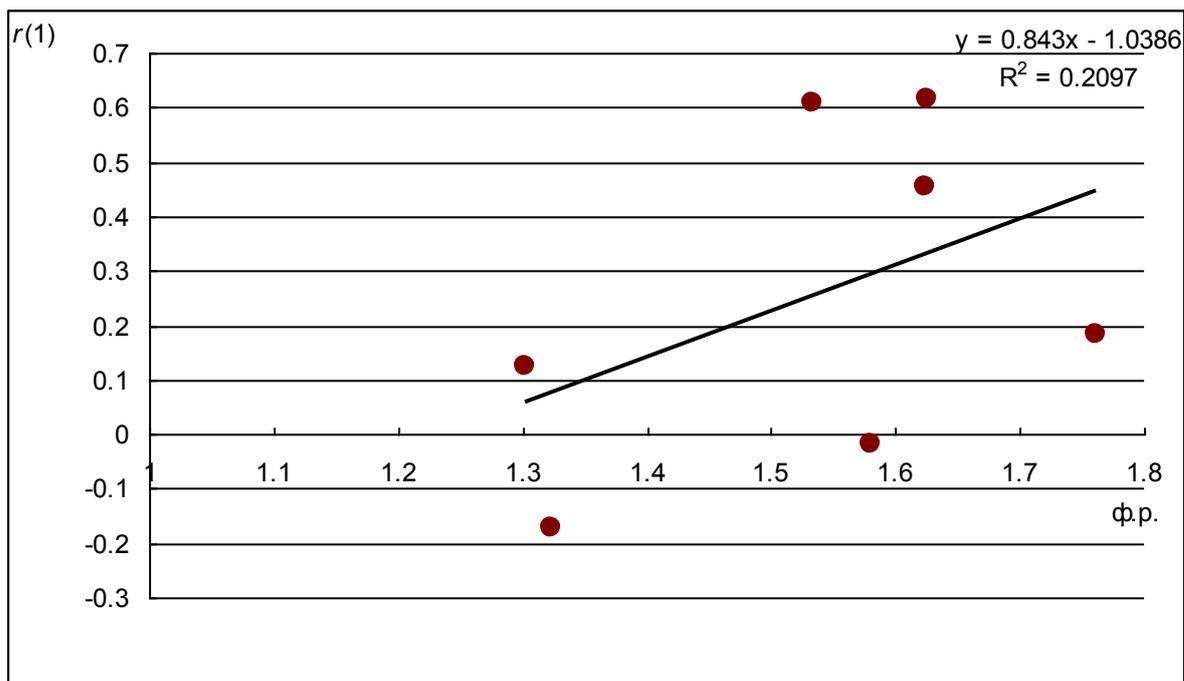


Рисунок 4.6 – Зависимость фрактальной размерности (ф.р.) и коэффициента автокорреляции ( $r(1)$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения исследования были получены следующие результаты:

а) изучены методы определения размерности геометрических фракталов;

б) подобран и апробирован метод определения фрактальной размерности к речным системам;

в) найдены зависимости гидрологических характеристик от фрактальной размерности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Мельник, М. А. Фрактальный анализ извилистости рек (на примере Томской области) [Электронный ресурс] / М.А. Мельник, 2010. – Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/fraktalnyy-analiz-izvilistosti-tek-na-primere-tomskoy-oblasti>
- 2 Тугой И. Фракталы и мир вокруг нас [Электронный ресурс] / И. Тугой, 2000.– Режим доступа: <http://www.ghcube.com/fractals/general.html>
- 3 Балханов, В. К. Фрактальная размерность дельты реки Лена и тундровых озер Якутии [Электронный ресурс] / В. К. Балханов, О. Ф. Лухнева, Ю. С. Куснер, Ю. Б. Башкуев, 2006. – Режим доступа: <http://www.izdatgeo.ru/pdf/gipr/2008-2/153.pdf>
- 4 Балханов, В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления [Текст] / В. К. Балханов / под ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. – 224 с.
- 5 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики (за 1936 – 1962 гг.). Том 17 Лено-Индибирский район [Текст] // Под ред. А.В. Шестакова. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1967.
- 6 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики ( за 1971 – 1975 гг. и весь период наблюдений). Том 17 Лено-Индибирский район [Текст] // Под ред. З.К. Егоровой, А.В. Шестакова. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1979.
- 7 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики (за 1971 – 1975гг. и весь период наблюдений). Том 15 Алтай, Западная Сибирь и Северный Казахстан, выпуск 1. Верхняя и Средняя Обь [Текст] // Под редакцией Е.П. Шурупа – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1979
- 8 Ресурсы поверхностных вод СССР. Основные гидрологические характеристики (за 1963 – 1970 гг. и весь период наблюдений) Том 16

Ангаро – Енисейский район. Выпуск 1. Енисей [Текст] // Под ред. Е.В. Соколовской – Ленинград: Гидрометеиздат, 1975.

9 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики (за 1971 – 1975 гг. и весь период наблюдений) Том 16. Ангаро – Енисейский район. Выпуск 1. Енисей [Текст] // Под ред. В.Г. Соколовской – Ленинград: Гидрометеиздат, 1978.

10 Ресурсы поверхностный вод СССР . Основные гидрологические характеристики (с начала наблюдений – по 1962 гг) Том 16. Ангаро – Енисейский район. Выпуск 1 [Текст] // Под ред. Г.С. Караваева – Ленинград: Гидрометеиздат, 1967.

11 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики (за 1971 – 1975 гг. и весь период наблюдений) Том 15. Алтай, Западная Сибирь и северный Казахстан. Выпуск 3. Нижний Иртыш и Нижняя Обь [Текст] // Под ред. И.И. Романченко – Ленинград, Гидрометеиздат, 1978.

12 Ресурсы поверхностный вод СССР. Основные гидрологические характеристики (за 1963 – 1970 гг. и весь период наблюдений) Том 15. Алтай и Западная Сибирь. Выпуск 3. Нижний Иртыш и Нижняя Обь [Текст] // Под ред. Н.И. Калач – Ленинград: Гидрометеиздат, 1974.

13 Ресурсы поверхностных вод СССР. Основные гидрологические характеристики. Том 15. Алтай и Западная Сибирь. Выпуск 3. Нижний Иртыш и Нижняя Обь [Текст] // Под ред. Г.Д. Эйриха – Москва: Московское отделение Гидрометеиздата, 1965.

14 Государственный водный кадастр. Основные гидрологические характеристики (за 1971 – 1975 гг. и весь период наблюдений) Том 15. Алтай, Западная Сибирь и Северный Казахстан. Выпуск 1. Верхняя и Средняя Обь [Текст] // Под ред. Е.П. Шурупа – Ленинград, Гидрометеиздат, 1979.

Приложение А – Гидрологическая информация по выбранным водосборам

Таблица А.1 – р. Тым – с. Напас

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1937	153	6,24	197
1938	133	5,43	171
1939	170	6,94	219
1940	165	6,73	212
1941	193	7,88	248
1942	168	6,86	216
1943	225	9,18	289
1944	248	10,1	318
1945	181	7,39	233
1946	216	8,82	278
1947	232	9,47	298
1948	211	8,61	271
1949	207	8,45	266
1950	174	7,1	224
1951	169	6,9	217
1952	135	5,51	174
1953	149	6,08	192
1954	141	5,76	181
1955	137	5,59	176
1956	166	6,78	214
1957	173	7,06	222
1958	180	7,35	232
1959	232	9,47	298
1960	222	9,06	285
1961	180	7,35	232
1962	171	6,98	220
1963	173	7,06	222
1964	147	6	189
1965	214	8,73	275
1966	187	7,63	240
1967	152	6,2	196
1968	159	6,49	205
1969	184	7,51	237
1970	256	10,4	329
1971	250	10,2	322
1972	199	8,12	257
1973	227	9,26	291
1974	282	11,5	363

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1975	259	10,6	333
$Q_{cp}$	190,3	7,76	244,7
$\sigma$	38,6		
$Cv$	0,203		
$Cs$	0,531		
$r(1)$	0,615		

Таблица А.2 – р. Лямин – факт. Горшково

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1951	66,6	5,2	164
1952	81,9	6,4	202
1953	83,8	6,55	206
1954	72,7	5,68	179
1955	87	6,8	214
1956	71	5,55	175
1957	75,1	5,87	185
1958	85,2	6,66	210
1959	88,1	6,88	217
1960	79,2	6,19	195
1961	85,8	6,7	211
1962	101	7,89	249
1963	99,5	7,77	245
1964	74,4	5,81	183
1965	108	8,44	266
1966	104	8,13	256
1967	77,5	6,05	191
1968	81,4	6,36	201
1969	93,7	7,32	230
1970	87,8	6,86	216
1971	139	10,9	342
1972	111	8,67	274
1973	129	10,1	318
1974	107	8,36	264
1975	114	8,87	280
$Q_{cp}$	92,148	7,20	226,9
$\sigma$	18,3		
$Cv$	0,199		
$Cs$	0,937		
$r(1)$	0,453		

Таблица А.3 – р. Бия – г. Бийск

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1963	378	10,2	322
1964	389	10,5	332
1965	392	10,6	334
1966	619	16,8	530
1967	479	13	410
1968	343	9,3	293
1969	714	19,3	610
1970	528	14,3	453
1971	419	11,4	358
1972	488	13,2	418
1973	566	15,3	482
1974	402	10,9	344
1975	452	12,2	385
$Q_{cp}$	474,54	12,85	405,46
$\sigma$	107,72		
$Cv$	0,227		
$Cs$	1,004		
$r(1)$	-0,171		

Таблица А.4 – р. Полуй – ГМС Полуй

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1963	133	8,81	278
1964	128	8,48	267
1965	154	10,2	322
1966	166	11	346
1967	129	8,54	269
1968	142	9,4	297
1969	98,8	6,54	206
1970	112	7,42	234
1971	170	11,3	355
1972	154	10,2	322
1973	143	9,47	298
1974	150	9,93	313
1975	163	10,8	340
$Q_{cp}$	141,75	9,39	295,92
$\sigma$	21,145		
$Cv$	0,149		
$Cs$	-0,628		
$r(1)$	0,182		

Таблица А.5 – р. Пеледуй – Сользавод

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1936	44,9	3,3	104
1937	53,9	3,96	125
1938	58,9	4,33	137
1939	25,5	1,88	59
1940	26	1,91	60
1941	41	3,01	95
1942	39,6	2,88	91
1943	29,4	2,16	68
1944	43,8	3,22	102
1945	36,6	2,69	85
1946	46,9	3,45	109
1947	33,6	2,47	78
1948	32	2,35	74
1949	37,9	2,79	88
1950	43,7	3,21	101
1951	51,8	3,81	120
1952	66,8	4,91	155
1953	56,6	4,16	131
1954	47,3	3,48	110
1955	45,8	3,37	106
1956	54	3,97	125
1957	47,1	3,46	109
1958	59,8	4,4	139
1959	65,5	4,82	152
1960	67,4	4,96	156
1961	66,2	4,87	154
1962	64,1	4,71	149
1963	48,1	3,54	112
1964	42,7	3,14	99
1965	34,9	2,57	81
1966	46,3	3,41	108
1967	42,6	3,13	98
1968	38,6	2,84	89
1969	34,8	2,56	81
1970	44,3	3,26	103
1971	35,2	2,59	82
1972	40,3	2,96	94
1973	49,9	3,68	116
$Q_{cp}$	45,9	3,374	106,4
$\sigma$	11,4		
$Cv$	0,249		

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
$C_s$	0,325		
$r(1)$	0,607		

Таблица А.6 – р. Мана – пос. Манский

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1937	127	14	441
1938	125	13,8	434
1939	97,5	10,7	337
1940	80,8	8,9	280
1941	129	14,2	448
1942	86,9	9,57	301
1943	68,2	7,51	237
1944	98,4	10,8	341
1945	62,9	6,93	218
1946	88,8	9,78	308
1947	80,2	8,83	278
1948	94,4	10,4	327
1949	106	11,7	368
1950	92,8	10,2	322
1951	93,6	10,3	325
1952	94,8	10,4	327
1953	84,7	9,33	294
1954	109	12	378
1955	117	12,9	406
1956	103	11,3	357
1957	96,9	10,7	337
1958	92,9	10,2	322
1959	94,3	10,4	327
1960	116	12,8	402
1961	100	11	347
1962	81,7	9	283
1963	86	9,47	298
1964	87,1	9,59	302
1965	123	13,5	425
1966	137	15,1	476
1967	92,8	10,2	321
1968	64,1	6,92	218
1969	90	9,72	306
1970	127	13,7	432
1971	105	11,3	356

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1972	116	12,5	394
1973	118	12,7	400
1974	64,5	6,97	220
1975	108	11,7	369
$Q_{cp}$	98,469	10,79	340,1
$\sigma$	18,8		
$Cv$	0,191		
$Cs$	0,059		
$r(1)$	0,124		

Таблица А.7 – р. Тембенчи – факт. Тембенчи

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1939	297	15,7	495
1940			
1941			
1942	216	11,4	360
1949			
1950	231	12,2	385
1951	240	12,7	400
1952	263	13,9	438
1953	228	12,1	380
1954	211	11,2	352
1955	189	10	315
1956	217	11,5	362
1957	223	11,8	372
1958	320	16,9	533
1959	235	12,4	392
1960	191	10,1	318
1961	259	13,7	432
1962	282	14,9	470
1963	318	16,8	529
1964	278	14,7	463
1965	256	13,5	425
1966	298	15,8	497
1967	194	10,3	324
1968	346	18,3	579
1969	258	13,6	429
1970	295	15,6	491
1971	241	12,8	403
1972	279	14,8	466

Годы	$Q$ , м <sup>3</sup> /с	$q$ , л/(с км <sup>2</sup> )	$h$ , мм
1973	209	11,1	350
1974	290	15,3	482
1975	304	16,1	507
$Q_{cp}$	256	13,543	426,75
$\sigma$	42,839		
$C_v$	0,167		
$C_s$	0,203		
$r(1)$	-0,018		