Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. Зайцева, О.А. Малафеев

ТЕОРИЯ ИГР

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

УДК УДК 518.9
ББК 22.18B25
З - 17

Рецензент

Колпак Евгений Петрович, доктор физико-математических наук профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Зайцева И.В., Малафеев О.А.
Теория игр : учебное пособие / И.В. Зайцева, О.А. Малафеев. — Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. — 174 с.

Данная книга представляет собой материалы лекций по теории игр и ее приложениям, которые предназначены для студе6нтов математических и экономических специальностей университетов. Книга состоит из семнадцати глав. Построение материала отличается от общепринятого. аввторам удалось одновременно с изложением классических разделов одновременно представить в доступной форме современные достижения в оюласти кооперативных, стохастических и сетевых игр. В книгу вошел ряд результатов из издаваемого ежегодника по теории игр Game Theory and Applications, где представлены современные достижения по теории игр, в частности, принадлежащие и авторам данной книги. Книга может быть использована как учебное пособие для чтения лекций по теории игр для студентов направлений 09.03.03. Прикладная информатика и 38.03.01 Экономика. Кроме того, она представляет интерес для математиков, работающих в области теории игр, а также специалистов в области экономики, управления и исследования операций. В конце каждой главы приведен библиографический обзор, который поможет читателю ориентироваться в дальнейших исследованиях по интересующему его направлению.

ISBN 978-5-86813-525-5

Оглавление

1 Введение

Еще Лейбниц в его Теодицее высказывал мысль о необходимости построения теории игровых процессов, моделирующих реальные конфликты, однако первые существенные результаты в этой области были получены лишь сравнительно недавно, а сама теория конфликтных процессов (или иначе, теория игр) стала интенсивно развиваться лишь в последние десятилетия. Так, понятие равновесия, то есть ситуации, для которой невыгодны индивидуальные отклонения, было введено А.О.Курно [77] в рамках его модели дуополии в 1838 году, в общем же виде в качестве решения конечной бескоалиционной игры со многими участниками повторно оно было рассмотрено в 1951 году Нэшем [164], который для рандомизированного случая доказал и его существование. Реальные конфликты носят, как правило, динамический характер, примером может служить игра в шахматы, существование равновесия для которой было доказано в 1913 году Цермело [183]. Для непрерывных антагонистических процессов (то есть процессов с двумя участниками и функциями дохода с нулевой суммой), определяемых посредством линейных дифференциальных уравнений разделенных по участникам и с выпуклыми функциями дохода, существование равновесия было доказано в 1961 году Флемингом [143]. В конце шестидесятых – начале семидесятых годов этот результат был распространен независимо рядом математиков на случай нелинейной разделенной динамики и произвольной непрерывной функции дохода, причем в работе [72] динамика участника процесса определяется посредством обобщенной динамической системы в метрическом пространстве, так что теорема о существовании равновесия оказывается справедливой и для процессов, описываемых уравнениями в частных производных, а также охватывает случай наличия фазовых ограничений. Во второй половине семидесятых годов существование абсолютной ситуации равновесия (то есть сохраняющей свойство равновесности относительно сужений на любые свои подпроцессы) было доказано несколькими способами в [73], [70] (см. также [74]).

Для того, чтобы корректно описать многокритериальную динамическую задачу нахождения оптимальной траектории развития народного хозяйства с учетом конфликтного взаимодействия, необходимо побеспокоиться о в меру строгом формализованном описании социально-экономической системы и ее потенциала. Текущее состояние всякой социально-экономической системы, в том числе и страны, может быть описано посредством конечного, хотя и очень большого набора вещественных чисел $(x, y, ..., z) = X$. Таким образом, множество всех возможных состояний рассматриваемой социально-экономической системы, которую в дальнейшем будем обозначать через S, представляет собой некоторую область R в конечномерном векторном пространстве E. Мы будем считать его снабженным структурой евклидова пространства. Заметим, что при анализе социально-экономической системы S, в зависимости от рассматриваемой задачи, можно выделять сравнительно небольшое число интересующих нас переменных — компонент вектора X, описывающих некоторую часть системы S.

Характерной особенностью социально-экономической системы S является наличие множества $I = \{1, 2, ...|I|\}$ активных элементов (называемых также экономическими агентами, игроками), действующих в соответствии со своими интересами. Элементы этого множества мы условимся обозначать буквой i. Эти интересы могут быть формализованы, например, посредством указания их отношений предпочтения на множестве возможных состояний системы. При некоторых не очень ограничительных условиях отношение предпочтения агента i может быть представлено вещественной функцией H_i, определенной на множестве R состояний системы, так что целью агента i естественно считать выведение системы в точку области R с максимальным значением его функции предпочтения. Характеризация потенциала социально-экономической системы, описывающего ее состояние и возможности, является непростой задачей. Классический подход заключается в указании величины ВНП для каждого возможного состояния X из области R. Такой подход никоим образом не учитывает отношений между активными элементами системы, характеризующих ее как единое целое. Представляется естественным оценивать потенциал системы S на основе отношений предпочтения или функций предпочтения агентов, входящих в эту систему. Наличие отношения предпочтения агента на множестве возможных состояний системы позволяет для каждой пары (a, b) возможных состояний системы выяснить, какое из этих состояний данный агент предпочитает. Если отношение предпочтения определяется функцией предпочтения (которую равным образом мы будем также называть функцией полезности), то состояние a предпочтительнее состояния b для агента, если значение функции полезности в точке a больше значения этой функции в точке b.

В рамках подхода, который можно назвать утилитаристским, потенциал системы S в состоянии X оценивается суммой значений функций предпочтения всех агентов в этом состоянии (неравноправие агентов может быть учтено введением коэффициентов, на которые умножаются значения функций предпочтения). Данный подход может быть обобщен, если рассматривать вместо вещественнозначных векторные функции предпочтения. Такой подход позволяет оценить наличие или отсутствие противоречивых сил в системе, препятствующих ее функционированию как единого целого.

Этот же подход может быть использован для оценки чисто экономической компоненты системы посредством, например, указания в каждом состоянии системы оценки благосостояния каждого агента. После построения функций или отношений предпочтения H_i на множестве X возможных состояний системы S возникает важная задача выбора такого состояния, которое можно было бы назвать наилучшим, оптимальным для всего сообщества (системы). Правила построения (выбора) такого состояния, основывающиеся на этических нормах и на каких-либо понятиях целесообразности, называются функциями коллективного выбора. Такие функции могут быть полезными при выработке коллективных решений, которые невозможно эффективно реализовать на основе рыночного механизма. Опишем некоторые способы построения таких функций, основанные на анализе общественного агрегирования политических процедур и нормативных экономических решений. При этом нам понадобится ряд вспомогательных понятий.

Состояние системы x называется социальным оптимумом (эффективной точкой, состоянием или решением Парето), если не существует такого состояния y, которое было бы предпочтительнее x одновременно для всех агентов. Сразу ясно, что коллективное решение разумно выбирать среди точек социального оптимума. Принцип (его можно считать этическим), на основе которого предписывается выбирать коллективное решение среди точек Парето, иногда называют принципом единогласия, ибо ни у одного из агентов нет оснований отклоняться от этого множества.

Другой принцип, который можно выдвинуть как основу для выбора коллективного решения есть принцип равноправия агентов. Формальное использование этого принципа в некоторых ситуациях может приводить к неоднозначно приемлемым выводам, например, к несовместимости указанных двух принципов.

Принцип равноправия может быть представлен в форме так называемого компромиссного решения, определяемого следующим образом. Представим, что в каждой точке x множества возможных состояний полезности всех агентов упорядочены по убыванию. Полезность наименее удовлетворенного игрока в данной точке принимается за коллективную полезность сообщества в этой точке, далее отыскивается та точка множества состояний, в которой достигается максимум коллективной полезности. Такая процедура позволяет выделить точку из обширного быть может множества Парето, так как если максимум достигается на многих точках, то мы повторяем рассмотрение второго по степени неудовлетворенности агента, сужая таким образом компромиссное множество. Если единственности снова нет, то учитываем третьего по порядку агента и так далее.

Оба описанных выше принципа предполагают возможность организации совместных действий по выбору и реализации наилучшего состояния социально-экономической системы, что, однако, имеет место не всегда. В таком случае в качестве состояния, реализующего коллективный выбор общества можно принять решение Курно-Нэша — это есть такое состояние, от которого невыгодны индивидуальные отклонения в силу уменьшения при этом значений функций полезности агентов. Другими словами, это есть точка, в которой достигается максимум функции полезности каждого агента по его собственным переменным, то есть тем параметрам, которыми он может управлять. Однако, в то время как эффективные точки и компромиссные точки существуют почти всегда при естественных условиях, ситуации, равновесные по Курно-Нэшу, могут не найтись в реальных задачах. Важным свойством эффективного решения и решения Курно-Нэша является независимость их от масштаба единиц полезности и от начального капитала (полезности) у каждого агента.

На функции полезности следует наложить, например, условие выпуклости для того, чтобы гарантировать наличие равновесия.

При оценке потенциала социально-экономической системы представляется перспективным построить функцию или отношение общественной полезности по функциям или отношениям индивидуальных ее членов (агентов) на основе аксиом и постулатов, выражающих этические нормы общества. Такая агрегирующая функция будет характеризовать сообщество как целостную систему. Кроме этого, функция коллективной полезности позволяет оценить степень неравенства среди агентов (членов сообщества). По сути, сравнить два состояния a и b системы означает сравнить два варианта распределения благ среди членов общества и сказать, какой из них является более полезным для всего сообщества.

Центральным постулатом в этом круге вопросов является постулат Пигу-Дальтона, требующий, чтобы передача полезности от одного агента другому не уменьшала уровень общественной полезности, если полезность первого агента выше полезности второго агента в состояниях системы как до, так и после передачи полезностей. Функции $\Pi = H_1 + ... + H_n$, $P = min\{H_i\}$, отражающие соответственно подходы к оценке потенциала системы с позиций безразличия к уровню благополучия отдельного агента (лишь бы общая полезность была больше) и с позиций стремления увеличить полезность самого обделенного агента в том или ином состоянии, удовлетворяют этому постулату.

Кроме того, сравнение между собой различных состояний системы на основе этих функций не зависит от масштаба выбираемых единиц полезности и от начальных полезностей агентов. Не зависит от масштаба также функция коллективной полезности $C = H_1 H_2 ... H_n$, исследованная Нэшем в связи с задачей коллективных торгов (арбитражная схема Нэша).

Допустим теперь, что два состояния системы являются различными только для множества A_1 агентов. Естественно желание при сравнении коллективных полезностей этих двух состояний не принимать во внимание уровни полезностей остальных агентов сообщества. Аксиома, накладывающая на коллективную функцию полезности такое ограничение, называется аксиомой сепарабельности.

Еще одной важной аксиомой является постулат симметричности или равноправности агентов, требующий совпадения коллективных полезностей при перестановке агентов в функции коллективной полезности.

При анализе возможности перехода системы в то или иное состояние в реальных условиях необходимо учитывать конкурентное взаимодействие различных коалиций агентов, объединяющихся с целью увеличения полезностей агентов, составляющих эти коалиции. Это можно сделать в рамках формализма теории кооперативных игр. Для каждого подмножества K множества всех агентов сообщества N рассматривается максимальная величина полезности, которую может гарантировать себе данная коалиция посредством согласованных действий (в обобщенной модели вместо полезности может фигурировать вектор состояний, достижимых данной коалицией). В этой теории исследуется вопрос о том, какое состояние системы реализуется в действительности в результате переговоров между всеми членами сообщества на основе нормативных соглашений, принимаемых в качестве постулатов этического характера. Кооперативная теория исследует возможное поведение агентов на переговорах о выборе того или иного состояния для нетривиального случая супераддитивного (или субаддитивного) поведения полезностей гарантируемых коалициями. Это означает увеличение гарантированной полезности, достижимой объединением коалиций, по сравнению с суммой полезностей, гарантированных отдельными коалициями (или соответственно уменьшение удельных расходов по проведению коллективных общественно значимых работ, таких как, например, постройка очистных сооружений при объединении коалиций).

Свойство супераддитивности (или субаддитивности) имеет следствием стремление отдельных коалиций и агентов к объединению с целью увеличения получаемого в результате объединения выигрыша (или расходов).

Рассмотрим чисто экономические предпосылки (их можно представлять как постулаты экономической этики), на основе которых координирующий центр выделяет наиболее приемлемое с точки зрения всего сообщества агентов состояние системы. Для простоты изложения ограничимся анализом одного аспекта — распределения расходов между агентами на общественные нужды.

Принцип самостоятельности (автономности) утверждает, что коалиция агентов никогда не согласится заплатить сумму превосходящую затраты, которые она должна сделать, если пожелает получать предлагаемые блага не за счет коллективной организации мероприятия, а индивидуальным образом без помощи остальных агентов. Например, пусть предлагается построить очистные сооружения в масштабе региона (города) с помощью средств, собираемых с агентов (предприятий, учреждений и т.д.) этого региона. Принцип самостоятельности тогда гласит, что не следует взимать средства с тех агентов, которые пожелают обеспечить себя чистой водой самостоятельно.

Представляется экономически целесообразным другой принцип — отсутствия субсидий, гласящий, что никакая коалиция агентов не должна платить меньше дополнительных затрат на ее обслуживание по сравнению с затратами на агентов сообщества без ее участия. Можно показать, что эти два постулата эквивалентны.

Точкой ядра называется такое обеспеченное распределение затрат, которое удовлетворяет одному (а значит и любому) из двух вышеприведенных постулатов.

Данную модель можно также назвать моделью конфликтного распределения общественных затрат. Формально модель может быть описана следующим образом.

Пусть $C(K)$ — минимальные расходы на обеспечение группы агентов (коалиции) K из множества N услугами рассматриваемого типа. Распределение расходов есть вектор $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, такой что $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = C(N)$.

Точкой общественного согласия — точкой ядра назовем такое распределение X, для которого выполняется одно из неравенств

$$X_1 + ... + X_{|K|} < C(K) \quad \text{или} \quad X_1 + ... + X_{|K|} > C(N) - C(N-K).$$

В данном примере функция $C(K)$ является субаддитивной, для супераддитивной функции двойственная модель может быть описана следующим образом.

Например, допустим, что несколько государств, скажем для определенности K, планируют договориться проводить согласованную в той или иной степени социально-экономическую политику. В таком случае будем говорить, что они образуют коалицию. Предполагается, что объединение в коалицию выгодно, так как при этом увеличивается средний доход на одного члена коалиции (следствие супераддитивности функции дохода коалиции $C(K)$). Точкой общественного согласия — точкой ядра при этом называется такое распределение дохода X, для которого выполняется неравенство

$$X_1 + ... + X_{|K|} > C(K) \quad \text{для всех коалиций} \quad K \quad \text{из} \quad N.$$

Содержательный экономический смысл точки ядра заключается в том, что от этого распределения ни у одной группы агентов нет обоснованного побуждения отклониться, так как это может лишь уменьшить ее доход. В этом смысле точка общего согласия — точка ядра является экономически устойчивой. Естественно назвать состояние системы, соответствующее точке общественного согласия — точке ядра состоянием общественного согласия. Недостатком этого подхода является то, что точка общественного согласия и соответствующее состояние может не существовать.

В рамках несколько иных систем постулатов можно все-таки гарантировать существование общественно приемлемых решений (состояний системы). Опишем кратко два из них. Допустим, что каждая группа агентов K из N декларирует образование устойчивого объединения своих членов и выделение "дивиденда"$D(K)$, который получается распределением поровну между членами коалиции K разности между его "потенциалом"(полезностью) и суммарными заявками о дивидендах со стороны всех подкоалиций коалиции K. Формула для дивиденда выглядит следующим образом:

$$D(K) = 1/K(C(K) - tD(T)).$$

Общая полезность агента равна, по определению, сумме всех его дивидендов. Оказывается, что такое распределение дополнительной полезности, полученное за счет объединения агентов, может быть выражено, как и точка, и состояние ядра на основе постулатов экономической этики. Замечательный факт заключается в том, что для точки и состояния ядра можно доказать, в рамках строгой математической модели, его существование и единственность. Предположим, что распределение $\Phi(C)$ дополнительной полезности, полученной за счет объединения агентов, является эффективным (паретовским), то есть выполняется равенство : $(\Phi\ C)(N) = C(N)$, удовлетворяет условию симметрии (не меняется при перестановке номеров агентов), не зависит от масштаба и от величины начальных капиталов агентов, а также удовлетворяет принципу "кто не вносит вклада в функцию полезности коалиций, $C(K)$, тот не получает при распределении коалиционной полезности ничего."

Тогда можно доказать, что для всякой функции полезности коалиций $C(K)$ существует и единствен вектор распределения полезности $\Phi(C)$, называемый вектором Шепли, выражаемый по приведенным выше формулам.

Недостатком потенциала, выражаемого посредством вектора Шепли, является то, что в случае непустого множества точек общественного согласия — точек ядра он может лежать вне этого множества. Эта нерегулярность устранима посредством введения процедуры распределения полезности, приводящей к точке N-ядра и соответствующему состоянию, которые существуют всегда и единственны. Определяется такая точка общественного согласия следующим образом. Пусть $C(K)$ — функция полезности коалиций и P — множество эффективных распределений полезности X, таких что $X_1 + X_2 + ... + X_n = C(N)$. Эксцессом или кооперационным доходом $e(x, K)$ коалиции K сравнительно с ее гарантированно получаемой полезностью в условиях распределения X называется разность $X_1 + X_2 + ... + X_{|K|} - C(K)$ между полезностью, выделяемой коалиции агентов K в условиях вектора распределения X, и полезностью, гарантированно получаемой этой коалицией без кооперации с другими агентами всего сообщества. Найдем теперь точки распределений X и состояния, в которых максимизируется минимальный эксцесс. Среди таких распределений и состояний ищутся точки, в которых максимального значения достигает второй по минимальности эксцесс. Процесс продолжается аналогичным образом далее до тех пор, пока не стабилизируется в единственной точке, которая и называется точкой общественного согласия — N-ядром.

Динамический переход от одного состояния социально-экономической системы X_1 с оценкой его потенциала C_1 к другому состоянию социально-экономической системы X_2 с оценкой потенциала C_2 осуществляется на основе общественного соглашения, получаемого путем коллективного выбора либо всеми агентами (членами сообщества), либо представителями основных групп (коалиций) агентов, выражающих мнения, точки зрения членов этих коалиций. Такой выбор осуществляется путем голосования на основе принимаемых в сообществе правил (например, правила простого большинства). Итак, отсюда мы можем заключить, что динамический оператор перехода от одного состояния социально-экономической системы к другому определяется, по сути дела, правилом голосования в сообществе, в рамках которого задача коллективного принятия решения ставится перед несколькими агентами-выборщиками, которые должны выбрать один из нескольких исходов, относительно сравнительной ценности которых их мнения расходятся. Таким образом, выбор правила голосования является важной этической проблемой социально-экономического характера с далеко идущими последствиями для выбора пути развития социально-экономической системы.

Вопрос справедливости различных систем голосования является предметом рассмотрения многих ученых на протяжении двух столетий. Формальная постановка проблемы восходит к работам Кондорсе и де Борда XVIII века. Имеется конечное множество A альтернатив $k = 1, 2, \ldots, a = |A|$ и конечное число агентов-выборщиков $(i = 1, ..., n)$, которые выражают свое мнение о предпочтительности этих альтернатив, выстраивая их в ряд: на первое место — наиболее предпочтительную альтернативу, на второе место — менее предпочтительную, на третье — еще менее предпочтительную, и так далее. Такую упорядоченную перестановку альтернатив назовем рядом предпочтений агента, или просто его предпочтением. Правило голосования указывает (выделяет) одну альтернативу на основе сообщаемых агентами предпочтений, составляющих так называемый профиль (предпочтений).

Если альтернатив всего две, то стандартное правило абсолютного большинства является наиболее справедливым правилом голосования. Справедливость этого правила может быть строго доказана. Именно, можно проверить, что если способ голосования удовлетворяет этическим постулатам равноправия выборщиков, равноправия альтернатив и постулату монотонности (увеличение числа сторонников альтернативы не ухудшает ее позиции), то это правило голосования есть стандартное правило абсолютного большинства. Естественным обобщением этого правила на случай многих альтернатив является правило относительного большинства: каждый агент-выборщик называет наиболее предпочтительную альтернативу, выигрывает та, которая получает наибольшее число голосов. Свыше двухсот лет тому назад Кондорсе и де Борда указали, что такое правило голосования может привести к выигрышу плохой альтернативы, то есть такой, которая при парном сравнении проигрывает любой другой альтернативе.

Кондорсе предложил правило, согласно которому выбирается альтернатива, которая побеждает любую другую альтернативу в попарном сравнении. Однако, такая альтернатива существует не всегда. Де Борда выдвинул правило голосования, согласно которому каждой альтернативе сопоставляется некоторое число очков, возрастающее в соответствии с упорядочением альтернатив данного агента-выборщика. Выигрывает альтернатива с максимальным числом очков. Оказывается, правило де Борда оптимально по Парето (если альтернатива a лучше альтернативы b для всех агентов, то альтернатива b не выбирается), равноправно по альтернативам и агентам и монотонно.

Эволюцию системы S во времени, то есть, динамику изменения во времени определяющих ее числовых параметров можно описывать также посредством обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, u) \qquad (*)$$

в конечномерном евклидовом векторном пространстве E, размерность которого равна числу параметров, определяющих данную социально-экономическую систему. Это уравнение увязывает скорость развития системы с моментом времени, ее текущим состоянием и выбором управляющего параметра u. Характерной особенностью системы является то обстоятельство, что выбор управляющих параметров находится в распоряжении ее активных элементов — агентов, каждый из которых, преследуя свою цель, может оказывать влияние на развитие системы в целом. Мы полагаем, что цели, преследуемые агентами, описываются вещественными функциями полезности, определенными на траекториях системы $(*)$, или на пространстве E состояний системы, при этом агенты посредством выбора параметров u стремятся максимизировать свои функции полезности. Возникает вопрос — какие траектории в действительности реализуются для социально-экономической системы? Для различным образом устроенных систем этот вопрос решается по-разному — реализуются, как говорят, различные принципы оптимальности. Если рассматриваемая система состоит из двух активных подсистем, то есть имеет всего двух агентов, находящихся в антагонизме, что формально означает равенство по абсолютной величине их функций полезности и противоположность их по знаку, причем дифференциальные уравнения, описывающие динамику подсистем полностью разделены и независимы, то в случае полной текущей информации агентов о состояниях систем, при разумных действиях агентов реализуется принцип оптимальности седловой точки. Это — нетривиальный математический факт, доказанный в начале семидесятых годов. Он означает, что при указанных условиях система развивается вдоль траектории, на которой реализуется равновесие — седловая точка функции полезности агентов — от использованных агентами стратегий ни одному не выгодно отклоняться — иначе он потерпит ущерб. Иными словами, на этой траектории достигается величина гарантированной полезности первой подсистемы (агента) при любых способах действия второго агента. Способ действия, или иначе, стратегия агента в динамическом процессе перехода (развития) социально-экономической системы есть важный элемент, характеризующий этот процесс. Она представляет собой правило, по которому агент сопоставляет имеющейся у него текущей информации о состоянии процесса развития некоторое значение управляющего параметра, которым он имеет право распоряжаться. В результате применения агентами их стратегий реализуется единственная траектория процесса.

Формулируя приведенный выше результат, мы предполагали, что динамика системы является разделенной по агентам. В экономических моделях, однако, такое ограничение не является реальным — экономические агенты, как правило, тесно между собой связаны. В этих условиях при информационной равноправности седловой точки, вообще говоря, не существует. Ситуация может быть все-таки исправлена введением дискриминированности одного из агентов — если его противник в каждый момент времени информируется об управляющем параметре, выбираемом им в этот момент, то седловая точка в таком процессе снова будет существовать. В общем случае, когда число подсистем (агентов), оказывающих влияние на развитие системы больше или равно двум, и они, действуя независимо друг от друга, стремятся максимизировать каждый свою собственную функцию полезности, то реализуется та траектория, которая соответствует набору стратегий, составляющих равновесие Курно. Допущение о том, что при некоторых условиях социально-экономическая система на этапах стабильного развития изменяется вдоль траектории, соответствующей набору равновесных стратегий, можно рассматривать как аналог вариационных принципов механики для случая многокритериальных управляемых систем.

В случае последовательного выбора агентами управляющих параметров на каждом шаге, процесс становится аналогичным шахматной игре — ее модель можно двойственным образом представить в виде конечной разветвленной диаграммы, нижняя вершина которой соответствует началу процесса, а на каждой из конечных вершин заданы значения функций полезности всех агентов, представляющих интересы подсистем. Рассмотрим следующую процедуру выбора управлений агентами. В предпоследнем состоянии процесса (на последнем шаге) агент, совершающий в соответствии с правилами выбор управления, делает это таким образом, чтобы максимизировать значение его функции полезности, заданной вместе с функциями полезности остальных агентов в конечных состояниях. Эту альтернативу можно, для наглядности, отметить на диаграмме стрелкой. Она указывает направление развития процесса на последнем шаге; затем значения функций полезности всех агентов переписываются на предпоследние состояния системы и вся процедура повторяется, но уже для укороченной на один шаг диаграммы. Действуя индуктивно, мы за конечное число шагов в каждой вершине диаграммы выберем по альтернативе, отмечая соответствующее направление стрелкой. Нетрудно видеть теперь, что существует единственный путь, выходящий из начальной позиции диаграммы и отмеченный стрелками. Можно показать, что этот путь развития является равновесным в том смысле, что он представляет собой реализацию равновесного набора стратегий всех агентов.

Принятие для многокритериального управляемого процесса в качестве принципа оптимальности равновесия Курно естественно при независимом выборе стратегий агентами. Как было отмечено выше, оно привлекательно своим свойством устойчивости — ни одному агенту не выгодно от него индивидуальное отклонение. Однако имеются примеры таких систем, в которых совместное отклонение всех агентов приводит к одновременному увеличению их полезностей, причем новая ситуация (состояние системы) может быть как равновесной, так и неравновесной. Поэтому представляется естественным, при возможности заключать соглашение между агентами, принять в качестве оптимальной такую траекторию системы, для которой не существует другой, которая бы была выгоднее сразу для всех агентов. Такая траектория называется паретовской. По небольшому размышлению возникает мысль о желательности такой траектории или состояния, которые были бы одновременно эффективными (паретовскими) и устойчивыми (равновесными). К сожалению, доказано, что эти два принципа оптимальности в определенном смысле взаимно противоречивы — множество многокритериальных систем, в которых равновесие Курно оптимально по Парето, составляет пренебрежимо малое множество по сравнению со всем множеством таких систем. Иными словами, как правило, если агенты в многокритериальном процессе выбирают стратегии, максимизирующие (относительно индивидуальных отклонений) их функции полезности, то как правило, можно найти другую ситуацию, которая будет для ряда агентов строго лучше, а для остальных — не хуже первых. Вместе с тем, если имеется несколько состояний и ситуаций равновесных по Курно, которые одновременно составляют социальный оптимум, то это обстоятельство порождает неустойчивость, ибо каждому агенту в этом случае выгодно захватить первенство хода, так как это приносит большее значение функции полезности (говорят, что имеет место борьба за лидерство). Проиллюстрируем теперь соотношение между равновесием и социальным оптимумом на следующем простом примере. Каждый из двух агентов имеет выбор между двумя стратегиями: мирной (P) и агрессивной (A); если оба агента придерживаются мирных стратегий, то их доходы равняются по две единицы, если оба выбирают агрессивные стратегии, то они получают по одной единице, если стратегии разноименные, то агрессор получает три, а мирный игрок — ноль. Нетрудно проверить непосредственно, что ситуация (A, A) — равновесие, а (P, P) — социальный оптимум, однако он неустойчив, так как каждому игроку выгодно нарушить соглашение, получив вместо двух три единицы; с другой стороны, равновесие устойчиво, но не выгодно, так как игроки при совместном отклонении от A к P получают вместо одной единицы по две каждый. Пример легко обобщается на случай любого числа агентов.

Если в реальной системе имеется очень большое число участников, каждый из которых стремится максимизировать свою функцию полезности, то оказывается целесообразным представить ее моделью с бесконечным числом агентов, так как это упрощает ее исследование. Многие из приведенных выше результатов обобщаются на случай как счетного так и несчетного числа агентов.

Для значительного числа моделей сложных социально-экономических систем общая картина динамики развития может быть обрисована следующим образом. Пространство моделей (систем) данного типа (конечномерное или бесконечномерное) определяемых набором числовых параметров, может быть разбито на конечное число областей, в каждой из которых оптимальных решений (скажем для определенности, состояний равновесия) имеется конечное число. При этом каждое из них гладко или непрерывно зависит от параметров модели. Разрывы (скачки) оптимальных решений происходят лишь при переходе системы через границу области. Поэтому в случае общего положения (типичном случае) преобладающую часть времени развивающаяся система изменяется плавно. Такая синергетическая картина не только получается из теоретических рассмотрений, но и подтверждается многочисленными примерами. Отметим, что вдоль траектории развития системы равновесные ситуации появляются парами. В синергетике такого типа явления называют бифуркациями.

Из изложенного можно заключить, что рассмотренные модели развития удобны, главным образом, при анализе социально-экономических систем на относительно длинных интервалах времени их стабильного развития. При локальном же рассмотрении процесса в окрестности скачка такой подход не отражает некоторых особенностей развития социально-экономических систем, не раскрывает механизма качественного скачка в ее развитии, и поэтому здесь требуется более глубокое и подробное описание, включающее механизм развития. Для определенности, будем здесь рассматривать экономическую систему.

Аналогичные рассмотрения можно провести для социальных структур. Изменения, структурные сдвиги в экономике происходят, как правило, в результате общей смены технологий под действием факторов научно-технического прогресса. Опишем поэтому одну модель конфликтного взаимодействия и смены технологий.

Для простоты изложения будем полагать, что имеются всего две технологии. Будем описывать технологию объемом ее фондов, числом X, и для второй технологии — числом Y. Будем также считать, что при благоприятных условиях и при отсутствии влияния другой технологии и при наличии спроса на продукцию объем фондов растет с коэффициентом роста a и соответственно b линейно. Будем считать также, что величина выпуска продукции равна величине спроса на нее. Естественно также полагать, что при уменьшении спроса на продукцию, производимую посредством данной технологии, коэффициент роста ее фондов уменьшается. Если часть общего спроса на продукцию данного типа удовлетворяется конкурирующей технологией, то должно уменьшаться производство продукции данной технологии, а следовательно, и коэффициент роста. Отсюда выводится система дифференциальных уравнений, увязывающих скорость роста фондов технологий с состоянием системы, которое описывается с помощью величин a, b, X, Y. Стандартным образом показывается, что с течением времени объем фондов той технологии, для которой отношение величины a к величине b меньше стремится к нулю, то есть становится доминирующей та технология, у которой это отношение меньше. При этом объем фондов доминирующей технологии с течением времени стремится к конечному пределу, отличному от нуля. В конечном счете, это отношение выражается через удельные затраты данной технологии.

Для оценки и прогноза динамики потенциала социально-экономической системы необходимы динамические модели, позволяющие моделировать развитие отрасли в целом с учетом конкуренции между отдельными фирмами. Ниже мы приводим описание модели такого рода.

Пусть имеется замкнутая развивающаяся экономика, динамика которой определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n). \qquad (1)$$

Здесь компоненты вектора x интерпретируются как концентрации фондов типа i наряду с другими показателями, например, с концентратами выпускаемых продуктов. Стационарные точки (точки покоя) системы (1) определяются из системы управлений

$$f_i(x, u) = 0. \qquad (2)$$

Для простоты допустим, что состояние экономики определяется одним числовым параметром, например, объемом выпуска продукта, или объемом фондов, а u — также числовой параметр — результат воздействия всей совокупности управляющих параметров. Так как уравнение (2) может иметь несколько корней при одном u, то стационарных точек может быть несколько. Пусть тогда $x_0(u) = x_0$ — уравнение зависимости стационарной точки x_0 от параметра u. Понятно, что эта функция многозначная. Положим, для определенности, что при $u = u_0$ в случае общего положения имеются три стационарных состояния: $x_0^k; \quad k = 1, 2, 3$. Пусть, также для определенности, в первых двух точках производные по x функции f отрицательны, а в третьей точке производная положительна. Тогда первые две точки суть устойчивые стационарные, а третья — неустойчивая. Имеются два бифуркационных значения параметра u, при которых изменяются и число стационарных состояний, и тип устойчивости. Обозначим их u_1, u_2. Если u меняется между u_1 и u_2, то насчитывается три стационарных состояния, то есть кривая $x_0(u)$ имеет вид буквы. Обозначим эту кривую справа налево и вниз через "АВСД где "В"и "С"суть точки поворота, "Д"и "В— суть значения $x_0(u_1)$. "А"и "С"суть значения $x_0(u_2)$, "А"и "ДС"суть устойчивые ветви, а "ВС— неустойчивая ветвь стационарных состояний. Допустим, что в результате действия некоторых причин, факторов, влияющих на экономику (это могут быть причины социального характера или изменения в природных условиях и т.д.) происходит уменьшение параметра u от u_2 к u_1 и экономика переходит из стационарного состояния "А"к состоянию "В". В точке "В"происходит переход скачком на нижнюю, устойчивую ветвь "ДС". Если теперь увеличивать параметр u от u_1 к u_2 вдоль устойчивой ветви "ДС то получается замкнутый цикл "АВДСА". Изменения параметра u такого типа проявляются в экономике в виде периодических, колебательных процессов (типа движения по спирали или "волн колебаний различных экономических показателей). Чтобы описать конкретную картину изменения экономики вдоль кривой "АВДСА следует построить дифференциальное уравнение, описывающее скорость изменения параметра u в зависимости от воздействий $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$. Данный способ моделирования экономической динамики может позволить описывать явления типа конъюнктурного цикла, "длинных волн"в экономике, изменений за счет смены способа управления и так далее.

Опишем теперь модель управляемого технического прогресса, сходную с моделями описанного выше типа, скажем, модель технического прогресса, основанного на инновациях, связанных с изменением плотностей капитала и труда (рабочей силы). Предполагается, что они соединены между собой в оптимальных пропорциях, так что далее будем говорить лишь о капитале (оснащенном рабочей силой или наоборот). Для простоты изложения процесс рассматривается на прямой R. Это есть плотность капитала в первом цикле развития экономики, получаемая за счет внедрения инновации первого цикла. Механизм перехода ко второму циклу развития может быть описан двояким образом. Первое описание является более простым.

Смены технологий (инновация) связаны с взаимным влиянием размещенных на прямой R капиталов, которое описывается коэффициентами $K(x,y)$ и их величиной (плотностью) $f_1(x)$. Отсюда выводится, что плотность капитала второго цикла есть

$$f_2(x) = \int\limits_0^\infty K(x,y) f_1(y)\, dy. \tag{3}$$

Вторая интерпретация носит вероятностный характер и заключается в следующем. В течение каждого цикла происходит рост капитала в каждой точке, причем этот процесс сопровождается ростом научного потенциала, вызывающего появление новой технологии. Можно считать, что инновация появляется либо без задержки, либо с задержкой периода T. Вероятность ее появления в период $[t, t+\Delta t]$ есть $\varphi(c)\ \Delta t$, где c — величина капитала в момент t, $\varphi(c)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dc}{dt} = q(c, u_1, \ldots, u_n).$$

Указываются условия на вид уравнения, при которых мы приходим к уравнению (3). Период T истолковывается как время развития инновации. Вид ядра K зависит от скорости роста капитала и вероятности появления инновации. Естественным образом вводится оператор P, действующий на плотности по правилу

$$Pf(x) = \int\limits_0^\infty K(x,y) f(y)\, dy.$$

Существуют простые условия, при которых получаемая повторением действия этого оператора последовательность плотностей капитала асимптотически устойчива и существует стационарная плотность, являющаяся неподвижной точкой этого оператора. На основе данного подхода можно исследовать различные задачи, связанные с моделированием управляемого технического прогресса.

При феноменологическом подходе с экономическим акцентом естественным представляется положить в основу модели понятие фондов. Причем для простоты изложения можно считать, что рабочая сила соединена с фондами в оптимальном соотношении, и далее ее специально не выделять. Фонды имеют неоднородный характер, поэтому можно выделить следующие их формы.

Функционирующие фонды (фонды, вкладываемые в производственную и непроизводственную сферу предпринимателем, — доход, получаемый при этом, называется предпринимательским), ссудные фонды, ссужаемые их собственником предпринимателям; доход, получаемый при этом, называется ссудным процентом.

Функционирующие фонды делятся, в зависимости от того, куда они вкладываются, на земельные, торговые, обслуживающие фонды в сфере науки, образования, здравоохранения, управления и так далее.

Ссудные фонды подразделяются аналогичным образом. Дальнейшее рассмотрение можно вести либо в дискретном, либо в непрерывном варианте. Мы выберем последний. Фиксируем область A двухмерного пространства, которую будем называть социально-технологической, и для каждого типа K фондов распределение их в области A в момент времени t обозначим через $m_k(x,t)$. Состояние и динамика социально-экономической системы описывается функциями $m_k(x,t)$ концентрации фондов типа K, где K меняется от 1 до $\bar{K}(m_1,\ldots,m_k)=m$.

Изменение концентрации фондов $m_k(x,t)$ во времени, обусловленное внутренними факторами в точке X области A, описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{m}_k = f_k(t,x,m)$. Если же учитывать динамику изменения фондов в пространстве, то, принимая для простоты область A одномерной, изменение концентрации фондов можно описать уравнением в частных производных

$$\frac{\delta m_k}{\delta t} = fk(m) + Dv^2 m.$$

Здесь D — коэффициенты диффузии. На границе A необходимо задать условия, описывающие взаимодействие системы с внешней средой. Диффузия фондов m_k происходит за счет разницы в степени их концентрации в разных точках и в скорости ее изменения, что обусловлено различным влиянием НТП на различные звенья системы, а также рядом других причин.

Можно считать, в первом приближении, что величина потока фондов пропорциональна разности их значений в рассматриваемых точках, то есть, определяется градиентом — вектором, указывающим направление наибольшего возрастания. При этом коэффициент пропорциональности зависит лишь от свойств системы и не зависит от потока.

Будем для простоты изложения считать, что имеются коэффициенты α_k (быть может, зависящие от времени, что отражает эволюцию системы), позволяющие описать потенциал системы, ее мощность посредством линейной комбинации:

$$\sum_k \alpha_k \cdot m_k = m.$$

Рост развития системы тогда определяется производной:

$$Z = \frac{dm}{dt}.$$

Полагая, что вся система может быть охарактеризована набором чисел m_k, $k = 1, \ldots, \bar{K}$, получаем, что движущие силы определяются величинами $Z_k = dm/dm_k$, а потоки — величинами $j_k = m_k$. Тогда рост потенциала системы определяется величиной:

$$Z = \sum_k Z_k \cdot j_k.$$

Еще раз отметим, что данный подход справедлив лишь в первом приближении, нелинейный же случай будет разобран далее. Между разнотипными потоками и силами имеются следующие соотношения: $j_k = \sum\limits_l \mu_{kl} \cdot Z_l$, в которых коэффициенты μ_{kl} не зависят ни от j_k, ни от Z_l. В силу линейности подхода можно сделать вывод о симметричности матрицы коэффициентов — $\mu_{kl} = \mu_{lk}$. В наших обозначениях факт ускорения НТП можно охарактеризовать неравенством $Z \geq 0$.

Описанный выше феноменологический подход можно назвать неравновесным термодинамическим подходом. В химии, термодинамике, биологии он развивался в работах Донде, Онсагера, Гроота, Пригожина [96] и других авторов. В 1937 г. в работе Колмогорова, Петровского, Пискунова [53] было изучено поведение решения нелинейного параболического уравнения, описывающего изменения в ареале распределения генотипа. Эта работа положила начало изучению процессов реакции — диффузии, связанных с изменением концентрации реагентов. Мы используем его для описания процессов развития социально-экономической системы, при котором в каждой точке социально-экономического пространства A происходит рост потенциала системы по логистическому закону. При агрегированных фондах можно в рамках одномерной модели (при одномерном социально-экономическом пространстве) изучать распространение НТП в виде волнообразного процесса.

Такая модель описывается параболическим уравнением описанного выше типа

$$\frac{\delta m}{\delta t} = D \frac{\delta^2 m}{\delta x^2} + f(m).$$

Здесь f — гладкая функция, удовлетворяющая ряду естественных условий.

Предполагается, что выбрана система единиц, при которой максимальная плотность фондов равна единице; при малых m скорость роста пропорциональна m с коэффициентом пропорциональности $\alpha > 0$, а при увеличении фондов происходит насыщение, и его рост прекращается, происходит стабилизация, вслед за которой должно произойти качественное изменение фондов (источников развития) на основе нового скачка в процессе ускорения НТП, после чего процесс распространения новых типов источников (фондов) будет повторяться с иными параметрами D, d, F.

Динамику указанного процесса распространения достижений НТП можно описать следующим образом. Пусть в начальный момент времени t_0 при $x < a$ плотность фондов $m = 0$, а при $x > b \geq a$ она максимальна: $m = 1$. С течением времени область больших плотностей m распространяется в сторону областей меньших плотностей. Например, при $a = b$ область резких изменений плотности фондов со временем $t \to \infty$ приближается к некоторой кривой, определяемой уравнением:

$$2\sqrt{K\alpha} \frac{dm}{dx} = K \frac{d^2 m}{dx^2} + F(m),$$

где $2\sqrt{K\alpha}$ есть предельная скорость распространения упомянутой кривой.

Данная монография, в основном, посвящена проблеме моделирования динамических процессов конфликтного типа в социально-экономической сфере. Она содержит как изложение общих результатов, относящихся к этой области, так и исследование конкретных моделей. Описание моделей сопровождается, как правило, алгоритмами отыскания решения и результатами численного счета.

ТЕОРИЯ ИГР

2 Предварительные сведения из теории игр

Определение 2.1. Позиционной игрой Γ называется объект, состоящий из следующих элементов:

$$\Gamma = \{\Gamma_A, S, H\} I,$$

где $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, граф Γ_A — конечное дерево (конечный граф без циклов); выделена вершина (корень) A — начало игры; $S = S_T \cup \bar{S}$, где S_T — множество терминальных позиций; $\bar{S}$ — множество нетерминальных позиций; $\bar{S} = \cup S_i$, где S_i — множество очередности i-го игрока, это множество всех позиций, в которых совершает выбор своей альтернативы i-й игрок, $i = \overline{1, n}$; S_0 — множество очередности посредника; $S_i = \cup S_{ji}$, где S_{ji} — информационные множества i-го игрока. Если игрок находится в информационном множестве S_{ji}, то это означает, что он не знает точно, в какой точке информационного множества он находится.

Будем далее предполагать, для простоты, что вершины, принадлежащие одному информационному множеству, имеют одинаковое число альтернатив. В каждом информационном множестве имеется конечное число альтернатив.

Задана векторная функция выигрыша $H = (H_1, \ldots, H_n)$, где H_i — функция выигрыша i-го игрока, определенная на множестве всех терминальных позиций игры.

Для каждой точки из S_0 задано вероятностное распределение на множестве непосредственно следующих за ней позиций.

Определение 2.2. Стратегией игрока i в позиционной игре Γ называется отображение, заданное на информационных множествах данного игрока. Это отображение принимает значения на множестве альтернатив.

Неформально говоря, стратегия указывает игроку его выбор в любой позиции игры.

Рассмотрим, как будет развиваться игра, если каждый игрок выбрал свою определенную стратегию.

Обозначим множество стратегий игрока i в позиционной игре Γ через: $\Phi_i = \{\varphi_i\}$. Так как граф игры конечен, то множество Φ_i — конечное, а посредник отсутствует.

Тогда набор стратегий игроков $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \varphi$ однозначно определяет траекторию на дереве игры и, тем самым, значение функции выигрыша в каждой ситуации. Таким образом, по данной позиционной игре однозначным образом мы построили ее нормальную форму $\Gamma_H = \langle I, \{\Phi_i\}_1^n, \{H_i\}_1^n \rangle$.

Дадим теперь формальное определение игры в нормальной форме.

Определение 2.3. Игрой в нормальной форме Γ_H называется совокупность

$$\Gamma_H = \{I = \{1, \ldots, n\}, \{\Phi_i\}_1^n, \{H_i\}_1^n\}.$$

Здесь $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков; Φ_i — множество стратегий игрока i; H_i — функция выигрыша игрока i, определенная на множестве $\Phi = \prod_i \Phi_i \to R_1$.

Набор стратегий $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ называется ситуацией нормальной игры Γ_H. В этой игре каждый игрок i независимо от остальных выбирает свою стратегию φ_i; в реализующейся ситуации $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ каждый игрок i получает выигрыш $H_i(\varphi)$.

Положим $\varphi \parallel \varphi'_i = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi'_i, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)$.

Определение 2.4. Пусть дана игра в нормальной форме Γ_H. Ситуация φ в этой игре называется равновесной, если для любого $i = 1, \ldots, n$ и любого $\varphi'_i \in \Phi_i$ выполняется неравенство:

$$H_i(\varphi) \geq H_i(\varphi \parallel \varphi'_i),$$

то есть ситуация φ — равновесная, если индивидуальное отклонение от этой ситуации невыгодно ни одному из игроков.

Определение 2.5. Ситуация φ называется оптимальной по Парето, если для нее не существует ситуации φ' такой, что $H_i(\varphi') \geq H_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$, причем здесь хотя бы одно неравенство — строгое.

Определение 2.6. Позиционная игра Γ называется игрой с полной информацией, если все информационные множества в этой игре одноточечные. (Это означает, что каждому игроку в любой позиции известна данная позиция и выборы, совершенные всеми игроками в этой игре).

Примером позиционной игры с полной информацией являются шахматы.

Теорема 2.7. (Цермело-Неймана) В конечной позиционной игре с полной информацией существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [**?**].

Определение 2.8. Игра Γ_H называется игрой с постоянной суммой, если

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = const.$$

Если $const = 0$, то игра называется игрой с нулевой суммой.

Определение 2.9. Игра двух игроков с нулевой суммой называется антагонистической, если $H_1 = -H_2$.

Конечная игра двух лиц с произвольной суммой может быть описана парой матриц размерности $m \times n$: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Элементы a_{ij} и b_{ij} являются выигрышами (в единицах полезности) соответственно игроков I и II в предположении, что они выберут свои i-ю и j-ю чистые стратегии. Такая игра называется биматричной.

Теорема 2.10. Пусть имеется антагонистическая игра Г, Φ_1, Φ_2 — множества стратегий, H — функция выигрыша. Пусть (φ_1, φ_2), (ψ_1, ψ_2) — две ситуации равновесия, тогда:

1) (φ_1, ψ_2), (ψ_1, φ_2) — ситуации равновесия (свойство взаимозаменяемости равновесных стратегий);

2) $H(\varphi_1, \varphi_2) = H(\psi_1, \psi_2) = H(\varphi_1, \psi_2) = H(\psi_1, \varphi_2)$.

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. По определению ситуации равновесия, если первый игрок отклоняется от стратегии φ_1 к стратегии ψ_1, то $H(\varphi_1, \varphi_2) \geq H(\psi_1, \varphi_2)$, с другой стороны, (ψ_1, ψ_2) — ситуация равновесия, поэтому если второй игрок от стратегии ψ_2 отклонится к стратегии φ_2, то его проигрыш разве что увеличится, поэтому $H(\psi_1, \varphi_2) \geq H(\psi_1, \psi_2)$; таким образом,

$$H(\varphi_1, \varphi_2) \geq H(\psi_1, \varphi_2) \geq H(\psi_1, \psi_2).$$

Аналогично, если первый игрок отклонится от стратегии ψ_1 к стратегии φ_1, то его выигрыш разве что уменьшится: $H(\psi_1, \psi_2) \geq H(\varphi_1, \psi_2)$; так как (φ_1, φ_2) — ситуация равновесия, то если второй игрок отклонится от стратегии φ_2 к стратегии ψ_2, то его проигрыш разве что увеличится: $H(\varphi_1, \psi_2) \geq H(\varphi_1, \varphi_2)$. Таким образом,

$$H(\psi_1, \psi_2) \geq H(\varphi_1, \psi_2) \geq H(\varphi_1, \varphi_2).$$

Цепочка замкнулась и эти два неравенства доказывают требуемое равенство.

Первое утверждение теоремы докажем для (ψ_1, φ_2). По второму условию теоремы, имеем:

$$\text{для } \forall\ \overline{\varphi}_1 \quad H(\overline{\varphi}_1, \varphi_2) \le H(\varphi_1, \varphi_2) = H(\psi_1, \varphi_2)$$

$$\text{для } \forall\ \overline{\varphi}_2 \quad H(\psi_1, \overline{\varphi}_2) \ge H(\psi_1, \psi_2) = H(\psi_1, \varphi_2)$$

следовательно, (ψ_1, φ_2) — ситуация равновесия; для (φ_1, ψ_2) доказательство аналогично. Теорема доказана.

Нормальная форма конечной антагонистической игры сводится к матрице A, $\mathrm{A} = \{\mathrm{a_{ij}}\}$. Число строк равно числу стратегий игрока I, число столбцов равно числу стратегий игрока II. Первый игрок получает выигрыш a_{ij}, если $a_{ij} > 0$ и платит проигрыш a_{ij}, если $a_{ij} < 0$; матрица A имеет размерность $m \times n$.

Ситуация (пара стратегий) (i, j) будет равновесна тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является одновременно наибольшим в столбце j и наименьшим в строке i.

Такая ситуация (если она существует) называется седловой точкой, а стратегии двух игроков, ее составляющие, называются оптимальными.

Если первый игрок выбрал первую строчку, он гарантирует себе $\min\limits_j a_{1j} = m_1$; если вторую строчку, он гарантирует себе $\min\limits_j a_{2j} = m_2$, и так далее, выбор m-й строчки гарантирует ему $\min\limits_j a_{mj} = m_m$.

Первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, следовательно, он должен выбрать ту строчку, в которой величина выигрыша максимальна:

$\max\{m_1, \ldots, m_m\}$.

Его выигрыш выглядит так:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \underline{V}_A.$$

Эта величина называется нижним значением матричной игры Γ_A.

Второй игрок, выбирая первый столбец, обеспечивает себе максимальный проигрыш $\max\limits_i a_{i1}$, и так далее, выбирая n-й столбец — проигрыш $\max\limits_i a_{in}$. Поскольку второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш, он выбирает

$$\min_j \max_i a_{ij} = \overline{V}_A.$$

Величина $\overline{V}_A$ называется верхним значением матричной игры Γ_A.

Если $\underline{V}_A = \overline{V}_A = V_A$, то эта величина называется значением игры. Это и есть ситуация равновесия. Точка $a_{i_0 j_0} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ —

седловая точка игры. В этом случае говорят, что данная игра Γ_A вполне определена.

Если в игре не существует седловой точки, то можно утверждать лишь, что при правильном поведении игрок I не должен выиграть меньше $\underline{V}$, игрок II не должен проиграть больше, чем $\overline{V}$.

В отличие от игры с седловой точкой, игрок не может открыть противнику выбор своей стратегии без ущерба для себя: за счет дополнительной информации, полученной от противника, можно повысить свой выигрыш. В этом случае рассмотрение игры Γ_A заменяется рассмотрением ее смешанного расширения $\bar{\Gamma}_A$.

Определение 2.11. Смешанная стратегия игрока есть вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий.

В случае, когда игрок имеет только конечное число m чистых стратегий, смешанная стратегия представляет собой m-вектор $x = (x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$$

Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$ — множества чистых стратегий игроков I и II, a_{ij} — функция выигрыша.

Тогда множества их смешанных стратегий имеют вид:

$$X^m = \left\{x \in R^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\right\}$$

$$Y^n = \left\{y \in R^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0\right\}.$$

Предположим, что игроки I и II участвуют в матричной игре Γ_A. Если первый игрок применяет смешанную стратегию x, а второй — смешанную стратегию y, то выигрыш будем понимать как среднее значение: $xAy = \sum\limits_{ij} a_{ij} x_i y_j$.

Игра $\bar{\Gamma}_A = \{X^m, Y^n, xAy\}$ называется смешанным расширением игры Γ_A. Игроки выбирают независимо друг от друга смешанные стратегии, выигрыш задается билинейной формой xAy. Фиксируем стратегию первого игрока — x. Тогда первый игрок гарантирует себе выигрыш $\min\limits_{y} f(x, y)$, $f(x, y) = xAy$.

$\min\limits_{y} \max\limits_{x} f(x, y) = \overline{V}$ — верхнее значение игры,

$\max\limits_x \min\limits_y f(x,y) = \underline{V}$ — нижнее значение игры:

Аналогично случаю игры Γ_A, для случая смешанного расширения $\bar{\Gamma}_A$ выполняется неравенство:

$$\overline{V} \geq \underline{V}.$$

Утверждение 2.12. Эквивалентны следующие пять утверждений:

Для всякой матричной игры Γ_A

1) $V = \min\limits_y \max\limits_x xAy = \max\limits_x \min\limits_y xAy$.

2) Существует такое число V и такие смешанные стратегии x_0 и y_0, что выполняются неравенства:

$x_0Ay \geq V$, для любой смешанной стратегии $y \in Y^n$;

$xAy_0 \leq V$, для любой смешанной стратегии $x \in X^m$.

3) Существуют такие смешанные стратегии игроков x_0 и y_0, что выполняется двойное неравенство:

$$xAy_0 \leq x_0Ay_0 \leq x_0Ay, \tag{4}$$

для любой смешанной стратегии первого игрока $x \in X^m$ и любой смешанной стратегии второго игрока $y \in Y^n$.

4) Существуют такие смешанные стратегии игроков x_0 и y_0, что выполняется двойное неравенство:

$$A_{i\cdot}y_0 \leq x_0Ay_0 = V \leq x_0A_{\cdot j}, \tag{5}$$

для любых $i \in I = \{1,\ldots,m\}$, $j \in J = \{1,\ldots,n\}$.

5) $\min\limits_y \max\limits_i A_{i\cdot}y = \max\limits_x \min\limits_j xA_{\cdot j}$.

Доказательство. Покажем, что 1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)$\Longrightarrow$4)$\Longrightarrow$5)$\Longrightarrow$1), то есть все эти утверждения эквивалентны.

1. Докажем, что из 1) следует 2).

Пусть y_0 таково, что на нем достигается минимум:

$$\max_x xAy_0 = \min_y \max_x xAy = V.$$

Это означает, что для любого $x \in X^m$

$$xAy_0 \leq V. \tag{6}$$

Пусть x_0 таково, что на нем достигается максимум:

$$\min_y x_0Ay = \max_x \min_y xAy = V,$$

то есть для любого $y \in Y^n$

$$x_0 A y \geq V; \tag{7}$$

таким образом получили, что из 1) следует 2).

2. Докажем, что из 2) следует 3).

Рассмотрим (6) и (7):

$$xAy_0 \leq V \leq x_0 A y,$$

для любых смешанных стратегий $x \in X^m$ и $y \in Y^n$. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда $x_0 A y_0 \leq V \leq x_0 A y_0$, следовательно $V = x_0 A y_0$; таким образом, из 2) следует 3).

3. Докажем, что из 3) следует 4). Доказательство очевидно, так как неравенство (5) является частным случаем неравенства (4).

4. Докажем, что из 4) следует 5).

Для любого $i \in I$, $A_{i\cdot} y_0 \leq V$, следовательно можно взять то i, при котором слева достигается максимум, то есть $\max\limits_i A_{i\cdot} y_0 \leq V$; так как это имеет место для любого $y \in Y^n$, то неравенство будет выполнено, если взять минимум по y: $\min\limits_y \max\limits_i A_{i\cdot} y \leq V$.

Аналогично, для любого $j \in J$, $x_0 A_{\cdot j} \geq V$, следовательно можно взять то j, при котором слева достигается минимум: $\min\limits_j x_0 A_{\cdot j} \geq V$; так как это имеет место для любого $x \in X^m$, то неравенство будет выполняться, если взять и максимум по x: $\max\limits_x \min\limits_j x A_{\cdot j} \geq V$. Таким образом $\min\limits_y \max\limits_i A_{i\cdot} y \leq \max\limits_x \min\limits_j x A_{\cdot j}$, но $\min\limits_y \max\limits_i A_{i\cdot} y \geq \max\limits_x \min\limits_j x A_{\cdot j}$ всегда.

Так как, по линейности,

$$\min_y xAy = \min_j x A_{\cdot j},$$

$$\max_x xAy = \max_i A_{i\cdot} y,$$

то получаем:

$$\begin{aligned} \max_x \min_y xAy &= \max_x \min_j x A_{\cdot j}, \\ \min_y \max_x xAy &= \min_y \max_i A_{i\cdot} y. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Таким образом получили, что из 4) следует 5).

5. Докажем,что из 5) следует 1). (Это вытекает непосредственно из равенств $(*)$).

Утверждение доказано.

Определение 2.13. Говорят, что ситуация (пара смешанных стратегий (x_0, y_0)) в биматричной игре является ситуацией равновесия, если для любых других смешанных стратегий $x \in X^m$ и $y \in Y^n$

$$xAy_0 \leq x_0Ay_0 \qquad x_0By \leq x_0By_0$$

Теорема 2.14. В смешанном расширении игры всегда $\overline{V} = \underline{V}$, где

$$\max_x \min_y xAy = \underline{V}$$

$$\min_y \max_x xAy = \overline{V}.$$

Эта теорема является частным случаем более общего результата, принадлежащего Дж. Нэшу.

Теорема 2.15. В любой конечной бескоалиционной игре n лиц существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

Доказательство. Для простоты изложения ограничимся случаем двух игроков, то есть случаем биматричной игры.

Пусть x и y — произвольная пара смешанных стратегий в биматричной игре (A,B). Положим

$$c_i = \max\{A_{i\cdot}y - xAy, 0\} \qquad d_j = \max\{xB_{\cdot j} - xBy, 0\},$$

и

$$x'_i = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum\limits_k c_k} \qquad y'_j = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum\limits_k d_k}.$$

Ясно, что преобразование $T(x, y) = (x', y')$ непрерывно. Кроме того, легко видеть, что как x', так и y' — смешанные стратегии. Покажем, что $(x', y') = (x, y)$ тогда и только тогда, когда (x, y) есть ситуация равновесия.

Действительно, если (x, y) — ситуация равновесия, то ясно, что для всех i

$$A_{i\cdot}y \leq xAy \text{ и следовательно, } c_i = 0.$$

Аналогично $d_j = 0$ для всех j. Следовательно, $x' = x$, $y' = y$.

Предположим теперь, что (x, y) — не является ситуацией равновесия. Это значит, что либо существует такое $\overline{x}$, что $\overline{x}Ay > xAy$, либо существует такое $\overline{y}$, что $xB\overline{y} > xBy$. Пусть имеет место первый случай; доказательство во втором аналогично.

Так как $\overline{x}Ay$ есть взвешенное среднее величин $A_{i\cdot}y$, то должно существовать некоторое i, для которого $A_{i\cdot}y > xAy$, и, следовательно, для этого i будет $c_i > 0$. Так как все c_i неотрицательны, то $\sum\limits_k c_k > 0$.

Далее, xAy есть взвешенное среднее (с весами x_i) величин $A_{i\cdot}y$. Следовательно, для некоторго i такого, что $x_i > 0$, мы должны иметь $A_{i\cdot}y \leq xAy$. Но для этого i будет $c_i = 0$, так что

$$x_i' = \frac{x_i}{1 + \sum\limits_k c_k} < x_i$$

и значит $x' \neq x$. Во втором случае мы покажем, что $y' \neq y$. Следовательно, $(x', y') = (x, y)$ тогда и только тогда, когда (x, y) — ситуация равновесия.

Далее, множество всех ситуаций является замкнутым, ограниченным и выпуклым, и следовательно, применима теорема Брауэра о неподвижной точке: так как преобразование $T(x, y) = (x', y')$ непрерывно, оно должно иметь неподвижную точку. Эта неподвижная точка будет ситуацией равновесия. Теорема доказана.

Введем определение ситуации ε-равновесия.

Определение 2.16. Ситуация x^ε является ситуацией ε-равновесия в игре $\bar{\Gamma}_H$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_i' \in X_i$ выполнено неравенство:

$$H_i(x^\varepsilon) \geq H_i(x^\varepsilon \parallel x_i') - \varepsilon.$$

Определение 2.17. Говорят, что игра Γ_H стратегически эквивалентна игре $\Gamma_{H'}$ ($\Gamma_H \sim \Gamma_{H'}$), если существуют такие не зависящие от x_i функции $\lambda_i = \lambda_i(x)$, $\lambda_i > 0$, $\mu_i = \mu_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что справедливо равенство:

$$H_i = \lambda_i H_i' + \mu_i. \tag{8}$$

Покажем, что отношение стратегической эквивалентности удовлетворяет условиям, которым должно удовлетворять любое отношение эквивалентности. Должны быть выполнены три свойства: симметричность, рефлексивность и транзитивность.

1) Симметричность. Если $\Gamma_H \sim \Gamma_{H'}$, то и $\Gamma_{H'} \sim \Gamma_H$.

Действительно, из соотношения (8) получаем:

$$H_i' = \frac{1}{\lambda_i} H_i - \mu_i,$$

и так как функции $\frac{1}{\lambda_i}$ и $-\mu_i$ не зависят от x_i, то симметричность доказана.

2) Рефлексивность. Каждая игра стратегически эквивалентна самой себе:

$$\Gamma_H \sim \Gamma_H.$$

Доказательство очевидно, достаточно положить в (8) $\lambda_i = 1$, $\mu_i = 0$.

3) Транзитивность. Если $\Gamma_H \sim \Gamma_{H'}$, $\Gamma_{H'} \sim \Gamma_{H''}$, то $\Gamma_H \sim \Gamma_{H''}$.

Действительно, пусть

$$H_i = \lambda_i H_i' + \mu_i, \quad H_i' = \lambda_i' H_i'' + \mu_i'.$$

Отсюда

$$H_i = \lambda_i(\lambda_i' H_i'' + \mu_i') + \mu_i = \lambda_i \lambda_i' H_i'' + (\lambda_i \mu_i' + \mu_i).$$

Так как произведение и сумма функций, не зависящих от x_i есть функция, не зависящая от x_i, то функции $\lambda_i \lambda_i'$, $\lambda_i \mu_i' + \mu_i$ не зависят от x_i.

Таким образом, отношение стратегической эквивалентности является отношением эквивалентности, и все игры разбиваются на классы стратегической эквивалентности (данного формата).

Утверждение 2.18. Если две игры Γ_H и $\Gamma_{H'}$ лежат в одном классе стратегической эквивалетности, то у них совпадают множества ситуаций равновесия.

(если $\Gamma_H \sim \Gamma_{H'}$, тогда $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H'}$, где $\mathcal{E}_H$, $\mathcal{E}_{H'}$ — множества равновесных ситуаций в играх Γ_H и $\Gamma_{H'}$ соответственно).

Доказательство. Пусть $H_i = \lambda_i H_i' + \mu_i$, $i \in I$, $x \in \mathcal{E}_H$. Тогда для всяких $i \in I$, $x_i' \in X_i$ выполняется:

$$H_i(x) \geq H_i(x \parallel x_i').$$

Умножим левую часть неравенства на значение функции λ_i в точке x — $\lambda_i(x)$, а правую часть на $\lambda_i(x \parallel x_i') = \lambda_i(x)$; получаем, что

$$\lambda_i(x) H_i(x) \geq \lambda_i(x \parallel x_i') H_i(x \parallel x_i').$$

Аналогично, добавляя к левой и правой частям последнего неравенства равные числа μ_i, $\mu_i(x \parallel x_i')$, получаем, что

$$\lambda_i(x) H_i(x) + \mu_i(x) \geq \lambda_i(x \parallel x_i') H_i(x \parallel x_i') + \mu_i(x \parallel x_i'),$$

то есть $x \in \mathcal{E}_{H'}$, и следовательно, $\mathcal{E}_H \subset \mathcal{E}_{H'}$. Аналогично показывается, что $\mathcal{E}_{H'} \subset \mathcal{E}_H$, то есть $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H'}$. Утверждение доказано.

Свойства множеств оптимальных стратегий матричных игр.

Пусть X^0 — множество оптимальных стратегий первого игрока, а Y^0 — множество оптимальных стратегий второго игрока.

Утверждение 2.19. Во всякой матричной игре Γ_A каждое из множеств X^0 и Y^0 является выпуклым, замкнутым, ограниченным множеством.

Доказательство. Доказательство проведем только для множества X^0 (для множества Y^0 оно аналогично).

Множество смешанных стратегий игрока (симплекс) является выпуклым, замкнутым, ограниченным множеством, поэтому множество оптимальных стратегий как подмножество множества всех смешанных стратегий ограничено.

Проверим теперь выпуклость и замкнутость.

Выпуклость. Пусть V — значение игры. Пусть x^0, $x^{0'}$ — оптимальные стратегии: $x^0, x^{0'} \in X^0$. Тогда $V \leq x^0 Ay$, $V \leq x^{0'} Ay$, для любого $y \in Y^n$.

Домножим первое неравенство на λ, а второе — на $(1-\lambda)$ и сложим эти два неравенства, где $\lambda \in (0, 1)$. Получаем:

$$[\lambda x^0 + (1-\lambda)x^{0'}]Ay = (\lambda x^0)Ay + (1-\lambda)x^{0'}Ay \geq \lambda V + (1-\lambda)V = V.$$

Следовательно, стратегия, составленная таким образом, оптимальна: $[\lambda x^0 + (1-\lambda)x^{0'}] \in X^0$ и поэтому множество X^0 выпуклое.

Замкнутость. Пусть $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots$ — последовательность оптимальных стратегий игрока I, сходящаяся к стратегии x^0. Из оптимальности стратегий x_k^0, $k = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$x_k^0 Ay \geq V, \quad \text{для всех } k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, переходя к пределу, получаем:

$$x^0 Ay \geq V,$$

что и требовалось доказать.

Определение 2.20. Говорят, что в матричной игре Γ_A i-я чистая стратегия первого игрока является активной, если она входит в некоторую оптимальную смешанную стратегию x^0 этого игрока с положительным весом:

$$x^0 = (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0), \quad x_i^0 > 0.$$

Определение 2.21. Если $A_{i\cdot} y^0 = V$, то говорят, что чистая стратегия i первого игрока строго уравновешивает оптимальную смешанную стратегию y^0 второго игрока.

Лемма 2.22. Пусть чистая стратегия j_0 игрока II является активной в оптимальной смешанной стратегии y^0, то есть $y^0_{j_0} > 0$. Тогда для любой оптимальной смешанной стратегии игрока I $x^0 \in X^0$ выполняется следующее равенство

$$x^0 A_{\cdot j_0} = V.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in X^0$. Тогда, в силу оптимальности x^0, выполняется неравенство $x^0 A_{\cdot j} \geq V$, для всякой чистой стратегии j игрока II.

Предположим, что для некоторого $j = j_0$ это неравенство является строгим:

$$x^0 A_{\cdot j_0} > V.$$

Умножим данное неравенство на компоненту $y^0_{j_0}$, следовательно

$$x^0 A_{\cdot j_0} y^0_{j_0} > V y^0_{j_0}.$$

Для всякого $j \neq j_0$ выполняется неравенство

$$x^0 A_{\cdot j} \geq V.$$

Умножим это неравенство на y^0_j, получим

$$x^0 A_{\cdot j_0} y^0_j > V y^0_j.$$

Суммируя все неравенства, получаем: $x^0 A y^0 > V$.

Имеем цепочку соотношений $V \geq x^0 A y^0 > V$, что противоречит оптимальности смешанной стратегии y^0. Следовательно $x^0 A_{\cdot j_0} = V$. Лемма доказана.

Лемма 22 может быть сформулирована иначе:

Если чистая стратегия i игрока I активна в оптимальной стратегии, то она уравновешивает любую оптимальную стратегию y^0 игрока II:

$$A_{i\cdot} y^0 = V.$$

Доминирование стратегий.

Определение 2.23. Вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ строго доминирует вектор $b = (b_1, \ldots, b_n)$, если $a_i > b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2.24. Говорят, что в матричной игре Γ_A стратегия x' игрока I доминирует его стратегию x'' (а стратегия x'' доминируется стратегией x'), если для любой чистой стратегии j игрока II:

$$x' A_{\cdot j} \geq x'' A_{\cdot j}, \quad j \in J.$$

Определение 2.25. Говорят, что в матричной игре Γ_A стратегия x' игрока I строго доминирует его стратегию x'' (а стратегия x'' строго доминируется стратегией x'), если для любой чистой стратегии j игрока II:

$$x'A_{\cdot j} > x''A_{\cdot j}, \quad j \in J.$$

Аналогичные определения можно дать и для стратегий игрока II.

Утверждение 2.26. Предположим, что в игре Γ_A i-я строка строго доминируется выпуклой комбинацией других строк этой же матрицы

$$xA > A_{i\cdot},$$

тогда i-я чистая стратегия не является активной во всех оптимальных смешанных стратегиях $x_0 \in X_0$, то есть без изменения множества X_0 i-я строка может быть опущена.

Доказательство. Из условия утверждения вытекает, что существует такая смешанная стратегия $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_i = 0$, что

$$xA > A_{i\cdot}.$$

Домножим это неравенство на y_0. Если $y_0 \in Y_0$, то

$$V \geq xAy_0 > A_{i\cdot}y_0 = V. \tag{9}$$

Из (9) и из леммы 22 следует, что i-я чистая стратегия не может быть активной в оптимальной смешанной стратегии x, что и требовалось доказать.

Утверждение 2.27. Предположим, что некоторая строка i нестрого доминируется выпуклой комбинацией остальных строк, тогда найдется такая оптимальная смешанная стратегия первого игрока, в которую i-я чистая стратегия входит с нулевым весом.

Игроки могут в играх не употреблять своих доминируемых стратегий. Точный смысл этого утверждения содержится в следующих теоремах.

Теорема 2.28. Если в игре стратегия одного из игроков z' доминирует его стратегию z'' и стратегия z'' оптимальна, то стратегия z' также оптимальна.

Доказательство. Пусть для определенности речь идет об игроке I. Из оптимальности его стратегии z'' следует, что для значения игры V

$$V = \min_j z''A_{\cdot j}$$

так что
$$V \le z'' A_{\cdot j} \text{ при любом } j.$$
Далее, из условия доминирования следует, что
$$z'' A_{\cdot j} \le z' A_{\cdot j} \text{ при любом } j,$$
и поэтому
$$V \le z' A_{\cdot j} \text{ при любом } j,$$
следовательно, стратегия z' оптимальна. Теорема доказана.

Теорема 2.29. Если в игре стратегия z'' одного из игроков строго доминируется его стратегией z', то стратегия z'' не может быть оптимальной.

Доказательство. Будем снова говорить о стратегиях игрока I.

Из условия строгого доминирования стратегий следует, что
$$z'' A_{\cdot j} < z' A_{\cdot j} \text{ при любом } j,$$
это будет справедливо, если взять минимум по j:
$$\min_j z'' A_{\cdot j} < \min_j z' A_{\cdot j},$$
Но $\min\limits_j z' A_{\cdot j} \le V$, так что
$$\min_j z'' A_{\cdot j} < V \text{ при любом } j,$$
следовательно стратегия z'' не может быть оптимальной. Теорема доказана.

Теорема 2.30. Если чистая стратегия k игрока доминируется его (чистой или смешанной) стратегией z (отличной от k), то существует оптимальная стратегия z^0 этого игрока, в которую k входит с нулевой вероятностью.

Доказательство. Рассмотрим доказательство для игрока I. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_m)$. Составим вектор $z' = (z'_1, \ldots, z'_m)$, где
$$z'_i = \begin{cases} \dfrac{z_i}{1 - z_k} & \text{при } i \ne k, \\ \\ 0 & \text{при } i = k. \end{cases} \tag{10}$$
Очевидно, $z'_i \ge 0$ для всех i и
$$\sum_{i=1}^{m} z'_i = \sum_{i=k} \frac{z_i}{1 - z_k} = \frac{1}{1 - z_k} \sum_{i \ne k} z_i = \frac{1}{1 - z_k}(1 - z_k) = 1,$$

так что вектор z' является смешанной стратегией игрока. Из условия доминирования следует, что $zA_{\cdot j} \geq a_{kj}$ при любом j, что можно переписать как

$$\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m} z_i a_{kj}.$$

Отбрасывая теперь справа и слева общее слагаемое $z_k a_{kj}$ и деля обе части получаемого равенства на (положительное!) число $\sum\limits_{i \neq k} z_i = 1 - z_k$, имеем

$$\sum_{i \neq k} z'_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} z'_i a_{ij} \geq a_{kj} \text{ при любом } j, \tag{11}$$

то есть $z'A_{\cdot j} \geq a_{kj}$ при любом j.

Пусть $z^* = (z_1^*, \ldots, z_m^*)$ — оптимальная стратегия игрока, возможно, содержащая чистую стратегию k с ненулевой вероятностью ($z_k^* > 0$).

Рассмотрим вектор $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_m^0)$, в котором

$$z_i^0 = \begin{cases} z_i^* + z_k^* z'_i & \text{если } i \neq k, \\ 0 & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Очевидно, $z_i^0 \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^0 = \sum_{i \neq k} z_i^* + z_k^* \sum_{i=1}^{m} z'_i = \sum_{i \neq k} z_i^* + z_k^* = \sum_{i=1}^{m} z_i^* = 1,$$

так что z^0 является смешанной стратегией игрока. Употребление игроком этой стратегии, очевидно, можно понимать как применение стратегии z^*, если она не реализуется в виде чистой стратегии k, а если "выпадает"k, то как применение смешанной стратегии z'. Таким образом, в смешанную стратегию z^0 чистая стратегия k входит с нулевой вероятностью. Для доказательства того, что стратегия z^0 искомая, нам остается установить ее оптимальность.

При любом j мы имеем

$$z^0 A_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} z_i^0 a_{ij} = \sum_{i \neq k} (z_i^* + z_k^* z'_i) a_{ij} = \sum_{i \neq k} z_i^* a_{ij} + z_k^* \sum_{i \neq k} z'_i a_{ij},$$

или, учитывая что $z'_k = 0$ (см. (10)),

$$z^0 A_{\cdot j} = \sum_{i \neq k} z_i^* a_{ij} + z_k^* \sum_{i=1}^{m} z'_i a_{ij},$$

и в виду (11) и неотрицательности числа z_k^*

$$z^0 A_{\cdot j} \geq \sum_{i \neq k} z_i^* a_{ij} + z_k^* a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} z_i^* a_{ij} = z^* A_{\cdot j}$$

Так как это неравенство имеет место при любом j, стратегия z^0 должна доминировать стратегию z^*. Но стратегия z^* по предположенному оптимальна. Следовательно на основании теоремы 28, оптимальна и стратегия z^0. Теорема доказана.

Крайние оптимальные стратегии.

Определение 2.31. Стратегия x_0 называется крайней оптимальной стратегией, если x_0 — крайняя точка множества X^0.

Пусть имеется невырожденная матрица $A_{n \times n}$ такая, что $|A| \neq 0$ и x^0, y^0 — оптимальные смешанные стратегии.

Пусть все чистые стратегии игроков являются активными: $x_i^0 > 0$, $y_j^0 > 0$ для любых i, j и пусть задан вектор $e = (1, \ldots, 1)$. Тогда по лемме 22

$$Ay^0 = Ve, \quad x^0 A = Ve,$$

где V — значение игры.

Умножим первое равенство справа на A^{-1}, а второе равенство слева на A^{-1}, получим:

$$y^0 = A^{-1}(V, e), \quad x^0 = (V, e)A^{-1}.$$

Умножим теперь скалярно на вектор e:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0 = (e, A^{-1}(V, e)) = V(e, A^{-1}e),$$

отсюда $V \neq 0$, следовательно,

$$V = \frac{1}{(e, A^{-1}e)};$$

подставляем в формулы для x^0, y^0:

$$y^0 = \frac{A^{-1}e}{(e, A^{-1}e)} = V(A^{-1}e), \quad x^0 = \frac{A^{-1}e}{(e, A^{-1}e)} = V(A^{-1}e).$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2.32. Если x^0, y^0 — крайние оптимальные стратегии и $V \neq 0$, то существует невырожденная матрица M, являющаяся подматрицей A такая, что

$$V = \frac{1}{(e, M^{-1}e)},$$

$$x^0 = \frac{M^{-1}e}{(e, M^{-1}e)}, \quad y^0 = \frac{M^{-1}e}{(e, M^{-1}e)}, \tag{12}$$

остальные x_i^0, y_j^0 суть нули.

Справедлива и обратная теорема

Теорема 2.33. Если x^0, y^0 — оптимальные стратегии, матрица $M \subset A$ — невырожденная и справедливы формулы (12), то x^0, y^0 суть крайние оптимальные стратегии.

Матрица M — существенная часть матрицы A (квадратная и невырожденная.)

Определение 2.34. Игра называется вполне смешанной, если любая чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с положительным вероятностью.

Теорема 2.35. Любая вполне смешанная игра имеет единственное решение.

Итеративный метод решения матричных игр

Представим себе следующую ситуацию. Два человека, совершенно неосведомленные в теории игр, играют друг с другом в матричную игру достаточно большое число раз. Не зная ничего о характере своего противника, каждый игрок решает внимательно следить за выбором другого в каждой партии и выбирать свою собственную стратегию в каждой партии, исходя из информации, которую он таким путем получает. Существует много путей для осуществления этого. Самым наивным было бы предположить, что в каждой партии противник будет выбирать ту же самую стратегию, которую оно использовал в предыдущей партии. Тогда игроку следовало бы выбирать свою наилучшую контрстратегию в соответствии с предыдущим выбором его противника. По поводу этой процедуры можно сразу же привести два возражения. Во-первых, в ней используется не вся информация, которая собирается о противнике, а лишь информация о его поведении в последней партии. Во-вторых, нет причин ожидать, что игрок будет неизменно повторять одну свою стратегию; это противоречило бы, по-видимому, и здравому смыслу. Схема, которая преодолевает эти возражения, состоит в следующем: предположим, что в игре было сыграно k партий и игрок 1, систематизировав свои наблюдения, обнаружил, что его противник выбрал свою первую стратегию k_1 раз, вторую — k_2 раз и т.д. Предположить, что вероятность выбора игроком 2 j-ой стратегии равна k_j/k будет для игрока 1 уже несколько менее наивным. Очевидно, это эквивалентно предположению о том, что игрок 2 будет применять смешанную стратегию $x^k = (k_1/k, \ldots, k_n/k)$. Делая такое предположение, игрок 1 выбирает такую же чистую стратегию, которая дает максимум выигрыша против стратегии x^k. Мы описали очень простую формулу «обучения на опыте». По-видимому, эта процедура весьма благоразумна, если известно заранее, что противник действительно применяет некоторую фиксированную смешаную стратегию. Игра против природы могла бы быть примером, где такое предположение представляется оправданным.

Развивая приведенную выше иллюстрацию, сделаем следующий шаг и предположим, что оба игрока решают продолжать игру только что описанным экспериментальным путем. Тогда, очевидно, после того, как каждый игрок выбрал свою начальную стратегию, стратегии, выбираемые ими во всех последующих партиях, по существу уже определены. Проиллюстрируем это одним простым примером. Рассмотрим игру в бейсбол при $p = 2$, так что матрица выигрышей в этой игре имеет вид

	t_1	t_2	t_3
s_1	2	-1	-1
s_2	-1	2	-1
s_3	-1	-1	1

Для того чтобы нам было с чего начать, предположим, что в первой партии оба игрока выбирают свои первые стратегии. Запишем это следующим образом:

	Игрок 1				Игрок 2			
1	s_1	2	-1	-1	t_1	2	-1	-1

Число 1 слева указывает на номер партии. Число s_1, стоящее на втором месте, означает, что в первой партии игрок 1 использовал чистую стратегию s_1. В третьем столбце мы поместили строку из матрицы выигрышей, соответствующую стратегии, выбранной игроком 1. Такая форма записи

станет понятной из дальнейшего. Последние два столбца описывают стратегию, выбранную игроком 2, а именно t_1, и соответствующий столбец из матрицы.

Теперь в соответствии с простой схемой игры опишем выбор игроком 1 своей стратегии в следующей партии. Игрок 1 замечает, что его противник использовал в первой партии стратегию t_1 и, полагая, что он поступит так же и во второй партии, сам решает выбрать стратегию s_1, которая дает ему выигрыш в размере 2. С другой стороны, игрок 2 хочет минимизировать выигрыш (игрока 1). Замечая, что игрок 1 в первой партии использовал стратегию s_1, и предполагая, что игрок 1 будет использовать ту же стратегию и во второй партии, он осознает, что для него наилучшим будет применить стратегию t_2 или t_3. Для определенности будем считать, что в случае «ничьей» игрок всегда выбирает стратегию с меньшим номером. Из только что сказанного следует, что вторая партия выглядит следующим образом:

	Игрок 1				Игрок 2			
2	s_1	2	-1	-1	t_2	-1	2	-1

Из описаний этих двух партий удобно составить объединенную таблицу. Таким образом,

	Игрок 1				Игрок 2			
1	s_1	2	-1	-1	t_1	2	-1	-1
2	s_2	4	-2	-2	t_2	1	1	-2

Заметим, что во второй строке и третьем столбце мы поместили не строку, соответствующую стратегии s_1, а сумму строк, соответствующих стратегиям, выбранным в первой и второй партиях. Этими стратегиями в обоих случаях оказалась стратегия s_1. Для второго игрока в последнем столбце второй строки помещена сумма первого и второго столбцов матрицы. Объясним причины именно такого построения таблицы. Для этого выясним, какую стратегию выберет игрок 1 в третьей партии.

Согласно своим установкам, он должен теперь предположить, что игрок 2 выберет стратегию t_1 или t_2 с равной вероятностью. Его ожидаемый выигрыш для каждой из его трех стратегий определится тогда делением каждого элемента в последней строке и колонке на 2: $(1/2, 1/2, -1)$. Для того чтобы выбрать свою следующую стратегию, он должен найти наибольшую компоненту этого вектора и применить соответствующую стратегию.

Заметим, что для этого нет необходимости делить на 2. Игрок 1 просто отмечает, что первая и вторая компоненты вектора $(1, 1, -2)$ оказываются наибольшими, и, следовательно, он должен опять выбрать стратегию s_1. Аналогично, игрок 2 замечает, что вторая и третья координаты в векторе $(4, -2, -2)$ (вторая строка, третий столбец) оказываются наименьшими, и поэтому он в третьей партии использует стратегию t_2:

	Игрок 1				Игрок 2			
3	s_1	6	-3	-3	t_2	0	3	-3

Здесь опять векторы выигрышей игроков 1 и 2 получаются добавлением к предыдущим соответственно первой строки и второго столбца матрицы выигрышей. Метод построения таблицы теперь должен быть ясен. На k-м шаге мы имеем вектор u^k у игрока 1 и вектор v^k у игрока 2. Новый вектор u^{k+1} для игрока 1 получается добавлением к u^k i-ой строки a_i матрицы выигрышей, где i соответствует максимальной компоненте вектора u^k. Аналогично $v^{k+1} = v^k + a^j$, где j соответствует минимальной компоненте вектора u^k. Приведем таблицу, в которой даны первые 21 векторов u^k и v^k для игры в бейсбол.

При этом, конечно, возникает вопрос: а что дает этот метод теории игр? Весьма примечательно, что при таком поведении даже в этом наивном эксперименте средний выигрыш (игрока 1) будет стремиться к значению игры!

		Игрок 1				Игрок 2		
1	s_1	2	-1	-1	t_1	2	-1	-1
2	s_1	4	-2	-2	t_2	1	1	-2
3	s_1	6	-3	-3	t_2	0	3	-3
4	s_2	5	-1	-4	t_2	-1	5	-4
5	s_2	4	1	-5	t_3	-2	4	-3
6	s_2	3	3	-6	t_3	-3	3	-2
7	s_2	2	5	-7	t_3	-4	2	-1
8	s_2	1	7	-8	t_3	-5	1	0
9	s_2	0	9	-9	t_3	-6	0	1
10	s_3	-1	8	-8	t_3	-7	-1	2
11	s_3	-2	7	-7	t_3	-8	-2	3
12	s_3	-3	6	-6	t_3	-9	-3	4
13	s_3	-4	5	-5	t_3	-10	-4	5
14	s_3	-5	4	-4	t_1	-8	-5	4
15	s_3	-6	3	-3	t_1	-6	-6	3
16	s_3	-7	2	-2	t_1	-4	-7	2
17	s_3	-8	1	-1	t_1	-2	-8	1
18	s_3	-9	0	0	t_1	0	-9	0
19	s_1	-7	-1	-1	t_1	2	-10	-1
20	s_1	-5	-2	-3	t_1	4	-11	-2
21	s_1	-3	-3	-3	t_1	6	-12	-3

Имея это в виду, рассмотрим внимательно данные, содержащиеся в приведенной выше таблице. В течение 21 партии игрок 1 использовал 6 раз стратегию s_1, 6 раз стратегию s_2 и 9 раз стратегию s_3, что соответствует смешаной стратегии $(2/7, 2/7, 3/7)$, которой отвечает вектор средних выигрышей $(-1/7, -1/7, -1/7)$. Этот же вектор можно было получить, конечно, и делением вектора u^{21} на 21. Это снова указывает нам на то, что $\omega \geq -1/7$. Используя аналогичную аргументацию для игрока 2 и деля вектор v^{21} на 21, мы получим $(2/7, -4/7, -1/7)$, что дает $\omega \leq 2/7$. По существу мы можем получить оценку лучше этой, если заметим, что после 18 партий средний выигрыш игрока 2 равен $(0, -1/2, 0)$, что указывает на неположительность значения игры. Таким образом, мы видим, что оценка значения игры дается неравенством

$$-\frac{1}{7} \leq \omega \leq 0$$

(точное значение этой игры легко вычисляется, и поэтому мы не будем отнимать у читателя удовольствие, сообщая ему значение игры). Эта оценка не очень хорошая, и поэтому изложенный метод мы для практических вычислений не можем рекомендовать. Тем не менее, принимая во внимание приведенные выше замечания, мы видим, что если мы играем достаточно большое число партий, то получим сколь угодно хорошую оценку значения игры, и это представляет значительный теоретический интерес. Доказано, что после достаточно большого числа партий выигрыши будут «стабилизироваться», становясь асимптотически близкими к значению игры. Это первый пример теоремы об устойчивости, с которым мы столкнулись. Результаты такого типа часто обнаруживаются в связи с экономическими моделями.

Графический метод решения матричных игр размера $2 \times n$ и $m \times 2$

В этом разделе мы опишем графический метод нахождения решений прямоугольной игры. Этот метод очень просто применим к играм, имеющим матрицы $2 \times n$ или $2 \times m$. Его можно также применять (тому, кто умеет чертить трехмерные диаграммы) к играм, имеющим матрицы $3 \times n$ и $3 \times m$; но он непригоден для матриц $m \times n$, когда m и n больше 3. Мы поясним этот метод на нескольких примерах решения игр $2 \times n$.

Пример 2.1. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{array}{c} \\ \mathit{1} \\ \mathit{2} \end{array} \begin{Vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$$

Здесь под номерами *1*, *2*, $\boxed{1}$ и т. д. подразумеваются различные стратегии обоих игроков. Если P_1 применяет смешаную стратегию $\|x \ 1-x\|$, а P_2 — чистую стратегию $\boxed{1}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 будет

$$2x + 7(1-x) = 7 - 5x.$$

Аналогично, если P_2 применяет чистую стратегию $\boxed{2}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 равен

$$3x + 5(1-x) = 5 - 2x,$$

а если P_2 применяет чистую стратегию $\boxed{3}$, то ожидаемый платеж игроку P_1 равен

$$11x + 2(1-x) = 2 + 9x.$$

Проведем на интервале $[0, 1]$ три прямые,

$$y = 7 - 5x, \quad y = 5 - 2x, \quad y = 2 + 9x,$$

и обозначим их соответственно через $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ (рис. 1).

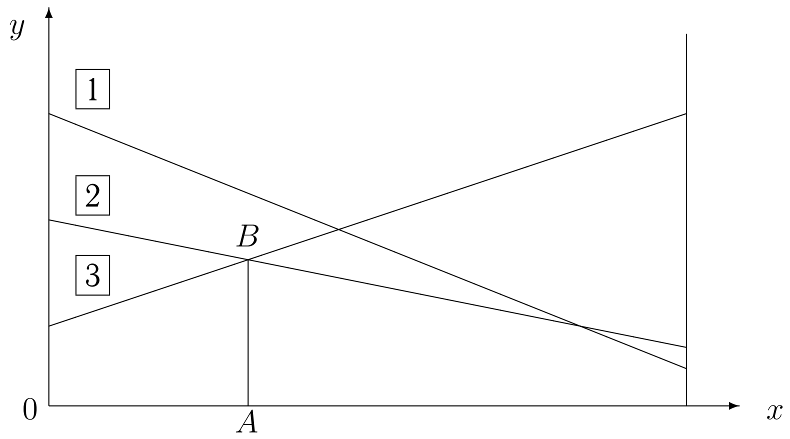

Рис. 1:

При каждом выборе игроком P_1 стратегии x он может быть уверен, что получит по крайней мере наименьшую из ординат трех прямых, соответствующих x. Таким образом, для P_1 выбрать оптимальное x — это значит выбрать такое x, при котором наименьшая из трех ординат возможно больше; из рисунка видно, что оптимальным x будет отрезок OA, а цена игры равна отрезку AB. Мы можем, следовательно, найти оптимальную стратегию для P_1 (в этой игре, как видно из рисунка, для P_1 есть только одна оптимальная стратегия) и цену игры, решив совместно уравнения

$$y = 5 - 2x, \quad y = 2 + 9x.$$

Проделав вычисления, мы находим, что оптимальная стратегия для P_1 — $\left\| \frac{3}{11} \; \frac{8}{11} \right\|$ и цена игры равна $\frac{49}{11}$. Далее, из рисунка видно, что стратегия $\boxed{1}$ не войдет в оптимальную смешанную стратегию игрока P_2. Следовательно, мы можем найти оптимальную стратегию для P_2 при помощи матрицы

$$\begin{Vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix},$$

так что оптимальная стратегия для P_2 равна $\left\| 0 \; \frac{9}{11} \; \frac{2}{11} \right\|$.

Замечание 2.1. Цена игры в приведенном выше примере находится следующим образом: берем максимальную ординату выпуклого множества, которое ограничено сверху прямыми линиями. Такой же способ применяется для любой игры с матрицей порядка $2 \times n$. Для игры с матрицей порядка $m \times 2$ графическое построение, очевидно, аналогично, но в этом случае цена игры равна минимальной ординате выпуклого множества, ограниченного снизу прямыми линиями.

Перейдем теперь к примеру, когда P_1 имеет много оптимальных стратегий.

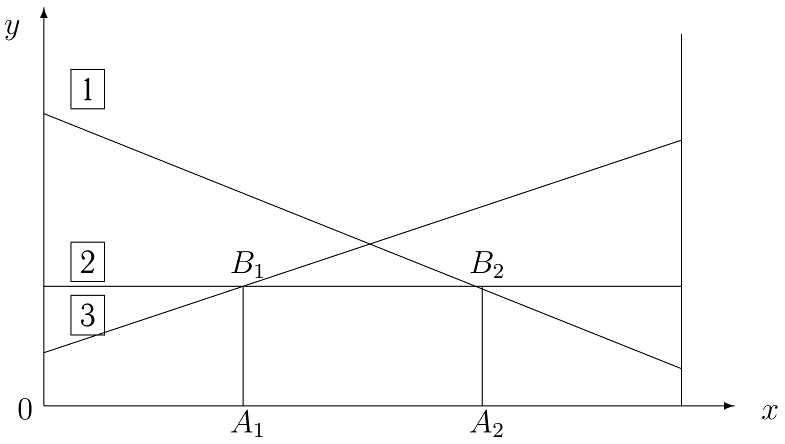

Рис. 2:

Пример 2.2. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{array} \right\|.$$

Обозначим стратегии, как в примере 2.1, и проведя соответствующие прямые, как в предыдущем примере, мы получим рис. 2

Из рис. 2 видно, что цена игры равна 4 и что любое x, удовлетворяющее условию $OA_1 \leq x \leq OA_2$, будет оптимальным для P_1. Решая совместно уравнения 2 и 3, 1 и 2, находим соответственно, что $OA_1 = \frac{2}{9}$, а $OA_2 = \frac{3}{5}$. Итак, оптимальной стратегией для P_1 является любая пара $\|x \ 1 - x\|$, где $\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{3}{5}$. Оптимальная стратегия для P_2 в этой игре равна $\|0 \ 1 \ 0\|$.

Замечание 2.2. В примере 2.2 мы нашли, что множество оптимальных смешанных стратегий игрока P_1 состоит из точек прямолинейного отрезка; очевидно, это всегда будет иметь место для игры $2 \times n$ (хотя, конечно, отрезок может стянуться в точку, как в примере 2.1. Далее, с полным основанием можно предположить, что для игры с матрицей порядка $m \times n$ множеством оптимальных стратегий каждого игрока будет естественное обобщение отрезка прямой в пространстве более высокой размерности, а именно выпуклая оболочка конечного множества точек (многогранник).

Стохастические игры

Стохастическая игра есть набор p "игровых элементов или позиций Γ_k. Каждый игровой элемент представляется $m_k \times n_k$-матрицей, элементы которой имеют вид

$$\alpha_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \Gamma_l, \tag{13}$$

где

$$q_{ij}^{kl} \geq 0, \tag{14}$$

$$\sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1. \tag{15}$$

Элемент α_{ij}^k, определенный в 13, означает, что если в k-м игровом элементе игрок I выбирает свою i-ю чистую стратегию, а игрок II выбирает свою j-ю чистую стратегию, то выигрыш равен a_{ij}^k и, кроме того, с вероятностью q_{ij}^{kl} для $l = 1, \ldots, p$ разыгрывается l-й игровой элемент, а с вероятностью

$$q_{ij}^{k0} = 1 - \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \tag{16}$$

партия заканчивается. Условие 15 утверждает, что на каждом шаге вероятность того, что партия закончится, положительна. Таким образом, вероятность того, что партия окажется бесконечной, равно нулю и математическое ожидание выигрыша конечно.

Определение 2.36. Стратегия игрока I представляет собой для $k = 1, \ldots, p$ и всех положительных целых t набор m_k-векторов x^{kt}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{m_k} x_i^{kt} = 1, \tag{17}$$

$$x_i^{kt} \geq 0. \tag{18}$$

Стратегия будет называться стационарной, если для всех k векторы x^{kt} не зависят от t.

Аналогично стратегия игрока II есть набор n_k-векторов y^{kt}.

Если дана пара стратегий, то математическое ожидание выигрыша можно вычислить для любого $k = 1, \ldots, p$ в предположении, что первым шагом игры будет игровой элемент Γ_k. Таким образом, математическое ожидание выигрыша для пары стратегий можно рассматривать как p-вектор. Как и в обычных матричных играх, это приводит к определению оптимальных стратегий и значения игры, причем значение игры есть p-вектор $v = (v_1, \ldots, v_p)$.

Ясно, что если вектор значений существует, то можно заменить игровой элемент Γ_k компонентой v_k значения. Отсюда следует, что мы должны иметь

$$v_k = Val B_k, \tag{19}$$

где B_k есть $(m_k \times n_k)$-матрица (b_{ij}^k), определенная формулой

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l. \tag{20}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.37. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ суть $m \times n$-матрицы, удовлетворяющие условию

$$a_{ij} < b_{ij} + k, \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

для некоторого k. Тогда $ValA < ValB + k$.

Доказательство. Пусть $v = ValB$, а y – оптимальная стратегия игрока II в игре B. Тогда для всех i

$$\sum a_{ij} y_j < \sum b_{ij} y_j + k \sum y_j \leq v + k,$$

так что y дает верхнюю границу проигрыша в игре A, которая меньше $v + k$.

Теорема 2.38. Существует в точности один вектор $v = (v_1, \ldots, v_p)$, удовлетворяющий соотношениям 19 и 20.

Доказательство. Докажем сначала единственность. Предположим, что существуют два таких вектора, v и w. Пусть k – номер компоненты, для которого величина $|v_k - w_k|$ наибольшая, и предположим для определенности, что $v_k - w_k = \; > 0$.

Определим две матрицы B_k и $\bar{B}_k$ соотношениями

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l, \quad \bar{b}_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} w_l.$$

Ясно, что

$$|b_{ij}^k - \bar{b}_{ij}^k| \leq \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} |v_l - w_l| < c$$

и из леммы 37 следует, что

$$ValB_k < Val\bar{B}_k + c.$$

Но так как, по предположению, v и w оба удовлетворяют 19 и 20, то

$$v_k < w_k + c.$$

Однако мы предположили, что $v_k - w_k = \;$. Это противоречие доказывает единственность.

Докажем теперь существование. Мы построим последовательность векторов, которая будет сходиться к требуемому вектору значений. Определим индуктивно

$$v^0 = (0, 0, \dots, 0), \tag{22}$$

$$b_{ij}^{kr} = a_{ij}^k + \sum_l q_{ij}^{kl} v_l^r,\ r = 1, 2, \dots, \tag{23}$$

$$v_k^{r+1} = ValB_k^r = Val(b_{ij}^{kr}). \tag{24}$$

Нам нужно доказать, что во-первых, последовательность векторов $v^r = (v_1^r, \dots, v_p^r)$ сходится и, во-вторых, предел обладает требуемыми свойствами 19 и 20. Положим

$$s = \max_{k,i,j} \left\{ \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} \right\}. \tag{25}$$

В силу 15 и конечности множеств индексов k, i, j имеем $s < 1$. Если мы положим

$$t_r = \max_k \{ |v_k^{r+1} - v_k^r| \},$$

то легко показать (по лемме 37), что $t_r \leq s t_{r-1}$ и, следовательно, $t_r \leq s^r t_0$. Отсюда следует, что последовательность векторов v^r есть последовательность Коши и поэтому должна сходиться к пределу; обозначим этот предел через v. Положим теперь

$$w_k = ValB_k = Val(b_{ij}^k),$$

где

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_l q_{ij}^{kl} v_l.$$

Мы увидим, что $w_k = v_k$ для всех k. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать r столь большим, чтобы для всех k выполнялись неравенства

$$|v_k^r - v_k| < \varepsilon/2, \tag{26}$$

$$|v_k^{r+1} - v_k| < \varepsilon/2. \tag{27}$$

Легко показать, что из 26 и из леммы 37 следует, что для всех k будет $|v_k^{r+1} - w_k| < \varepsilon/2$; это вместе с 27 означает, что для всех k

$$|w_k - v_k| < \varepsilon.$$

Но так как ε произвольно, $v_k = w_k$.

3 Седловые точки в антагонистических играх

В 1953 году Фань Цзи ввел понятие выпуклой функции на произвольном множестве без линейной структуры, оказавшееся весьма полезным в теории игр. Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma=< X, Y, f >$, где X, Y суть произвольные множества стратегий игрока 1 и соответственно игрока 2, а f - вещественная функция выигрыша $f : X \times Y \to R^1$.

Определение 3.1. f выпукла на Y, если для всяких $y_1, y_2 \in Y$ и $\lambda \in [0; 1]$ существует $y_0 \in Y$, таких что $f(x, y_0) \leq \lambda f(x, y_1) + (1 - \lambda) f(x, y_2)$ при любом $x \in X$. f вогнута на X, если для любого $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0; 1]$ существует $x_0 \in X$, такое что $f(x_0, y) \geq \lambda f(x_1, y)+(1-\lambda) f(x_2, y)$ при любом $y \in Y$. f выпукловогнутая функция, если она выпукла на Y и вогнута на X. Пусть X^* - множество выпуклых комбинаций мер Дирака на X, то есть $X^* = con\{\delta_x | x \in X\}$, где δ_x сосредоточена в $x \in X$. Если

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$$

и

$$y^* = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \delta_{y_i}$$

суть две стратегии - меры Дирака, то полагаем

$$f^*(x^*, y^*) = \sum_{i,j=1}^{m,n} \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j).$$

Теорема 3.2. Если X - конечное множество, а f - выпукла на Y, то игра $\Gamma=< X^*, Y, f^* >$ вполне определена (то есть в ней существует значение).
Доказательство Пусть $0 < \gamma < \inf\limits_{Y} \sup\limits_{X^*} f^* = \inf\limits_{Y} \sup\limits_{X} f$. Положим $S = \{f(., y) | y \in Y\} \subset R^n$ $T = conS$. Здесь n - число элементов в X. По выпуклости f на Y получаем, что $0 < \gamma < \max\limits_{i} t_i$ для всех $t = (t_1, ..., t_n) \in T$.

Пусть $U = \{u = (u_1, ..., u_n) | \max\limits_{i} U_i \leq \gamma\}$. Тогда существует гиперплоскость, разделяющая T и U, то есть существует $p = (p_1, ..., p_n) \in R^n, p æ 0$ и $\alpha \in R^1$, такие что $(p, u) \leq \alpha \leq (p, t)$, для $\forall t \in T, u \in U$ или $(p, (t - u)) \geq \alpha$, откуда $p_i \geq 0$, для любого i, так что можно считать $\sum p_i = 1$. Выбирая $u = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in U$, получаем, что $\alpha > \gamma$ и для

$$x^* = \sum_{1}^{n} p_i \delta_{x_i}$$

$f^*(x^*, y) \geq \gamma, \forall y \in Y$. Отсюда получаем, что $\sup\limits_{X^*} \inf\limits_{Y} f^*(x^*, Y) \geq \gamma$, и это доставляет утверждение теоремы, так как неравенство верно для любого $\gamma < \inf\limits_{Y} \sup\limits_{X} f$.

Теорема 3.3. (Фань Цзи). Пусть на y введена топология и существует $x_0 \in X, \beta > \sup\limits_{X} \inf\limits_{Y} f$, такие что $\{y | f(x_0, y) \leq \beta\}$ компактно и f - выпукло-вогнутая, а $f(x, .)$ полунепрерывна снизу для любого $x \in X$. Тогда игра $< X, Y, f >=\Gamma$ имеет значение.

Доказательство Пусть $\underline{V} = \sup\limits_{X} \inf\limits_{Y} f(x, y) < \gamma < \inf\limits_{Y} \sup\limits_{X} f(x, y) = \overline{V}$, и пусть γ такая что $\{y | f(x_0, y) \leq \gamma\}$ компактно. Семейство множеств $B_x = \{y | f(x, y) > \gamma\}$ определяет открытое покрытие Y, поэтому существует конечное покрытие $B_{x_1} ... B_{x_n}$ множества $B_{x_0} = \{y | f(x_0, y) \leq \gamma\}$ по компактности. Следовательно, семейство $B_{x_0}, B_{x_1} ... B_{x_n}$ покрывает Y, так что для $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ справедливо неравенство

$$\gamma \leq \inf_{Y} \sup_{A} f(x, y).$$

Из выпуклости f на X получаем, что

$$\sup_{A^*} \inf_{Y} f^*(x^*, y) \leq \sup_{X} \inf_{Y} f(x, y),$$

так что

$$\sup_{A^*} \inf_{Y} f^*(x^*, y) < \gamma \leq \inf_{Y} \sup_{A} f(x, y),$$

что противоречит 1.

Обозначим теперь через $F(X)$ множество всех конечных подмножеств множества X. Неравенством максиминимакса назовем неравенство

$$\inf_{B \in F(Y)} \sup_{X} \inf_{B} f(x, y) \leq \sup_{A \in F(X)} \inf_{Y} \sup_{A} f(x, y).$$

Теорема 3.4. Если f выпукло-вогнутая, то

$$\sup_{A \in F(X)} \inf_{Y} \sup_{A} f(x, y) = \sup_{X} \inf_{Y} f(x, y) = \underline{V},$$

$$\inf_{B \in F(Y)} \sup_{X} \inf_{B} f(x, y) = \inf_{Y} \sup_{X} f(x, y).$$

Доказательство В силу вогнутости на X, выпуклости, утверждения 2 и того, что экстремум линейной функции достигается на крайних точках, имеем цепочку соотношений

$$\sup_{A \in F(X)} \inf_{Y} \sup_{A} f(x, y) = \sup_{A \in F(X)} \sup_{A^*} \inf_{Y} f^*(x^*, y) = \sup_{X} \inf_{Y} f(x, y), \tag{28}$$

аналогичным образом

$$\inf_{B\in F(Y)} \sup_X \inf_B f(x,y) = \inf_{B\in F(Y)} \inf_{B^*} \sup_X f^*(x,y^*) = \inf_Y \sup_X f(x,y).$$

Теорема 3.5. Если f выпукло-вогнутая и для $\forall\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon \in F(x)$, такое что

$$\bigcup_{x_i\in A_\varepsilon} \{x| \sup_Y (f(x,y) - f(x_i,y)) < \varepsilon\} = x,$$

то игра $< X, Y, f >$ имеет значение.
Доказательство Из условия получаем

$$\inf_Y \sup_X f(x,y) = \sup_{A\in F(x)} \inf_Y \sup_A f(x,y),$$

а по (28)

$$\sup_{A\in F(x)} \inf_Y \sup_A f(x,y) = \sup_X \inf_Y f(x,y).$$

Теорема 3.6. Если f выпукло-вогнутая и неравенство

$$\lim_m \lim_n f(x_n, y_m) \leq \lim_n \lim_m f(x_n, y_m)$$

выполняется для всех последовательностей $\{x_n\}$ в X, $\{y_m\}$ в Y, для которых пределы существуют, то в игре существует значение.
Доказательство В силу пункта 5 достаточно проверить справедливость неравинства максиминимакса. Пусть

$$\alpha = \inf_{B\in F(Y)} \sup_X \inf_B f(x,y)$$

и

$$\beta = \sup_{A\in F(X)} \inf_Y \sup_A f(x,y).$$

Не умаляя общности, полагаем $\alpha > -\infty, \beta < \infty$. Выбераем числовые последовательности $\{\alpha_n\} \uparrow$ и $\{\beta_n\} \downarrow$ строго монотонные. Определим теперь последовательности $\{X_n\}_n$ и $\{Y_n\}_n$. Выберем произвольное $x_1 \in X$. Пусть $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_{n-1}$ уже определены. Выберем $y_n \in Y$, так что $\sup\limits_{1\leq i\leq n} f(x_n, y_n) \leq \beta_n$ и затем $x_{n+1} \in X$, так что $\inf\limits_{1\leq i\leq n} f(x_{n+1}, y_i) \geq \alpha_n$. Применяя диагональный процесс выберем, если необходимо, подпоследовательности x_{n_i}, y_{m_j}, такие что существуют пределы в условиях теоремы, так что выполняется неравенство

$$\lim_j \lim_k f(x_{n_k}, y_{m_j}) \leq \lim_k \lim_j f(x_{n_k}, y_{m_j}).$$

По построению
$$\lim_k f(x_{n_k}, y_{m_j}) \geq \alpha$$
для любого $j \in N$ и $\lim_j f(x_{n_k}, y_{m_j}) \leq \beta$ для любого $k \in N$. Следовательно,
$$\alpha \leq \lim_j \lim_k f(x_{n_k}, y_{m_j}) \leq \lim_k \lim_j f(x_{n_k}, y_{m_j}) \leq \beta,$$
откуда получаем утверждение.

Рассмотрим теперь бескоалиционную игру n лиц Г=$< I = \{1, ..., n\}, \{X_i\}_1^n, \{H_i\}_1^n >$ где I- множество игроков, X_i- множество стратегий игрока i, $H_i : x = \Pi_{\underset{I}{H}} X_i \to R_1$ – функция выигрыша игрока i. Образуем теперь функцию
$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, x_{\bar{i}}) - H_i(y_i, x_{\bar{i}}),$$
где $x_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Можно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 3.7. В игре Г для $\forall\varepsilon > 0$ существует ε-равновесная ситуация тогда и только тогда, когда $\inf_X \sup_Y \Phi(x, y) = 0$.

Допустим теперь, что функция $\Phi(x, y)$ выпукло-вогнутая, и выполняется одно из условий, гарантирующее существование значения в игре с функцией выйгрыша $\Phi(x, y)$, например, условие теоремы 5. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.8. В бескоалиционной игре Г для всякого $\varepsilon > 0$ существует ситуация ε-равновесия.

4 Конкурентная многопериодная задача почтальона с переменными параметрами

Введение

Часто бывает полезно наглядно изображать некоторую ситуацию в виде рисунка, состоящего из точек (вершин), представляющих основные элементы ситуации, и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними. Такие рисунки известны под названием графы. Сетевые и графовые модели охватывают довольно широкий класс задач, встречающихся при проектировании систем, планировании работ, распределении продукции, организации транспортных перевозок, размещении различных центров обслуживания населения и т.п.

Ввиду этого теория графов интересна не только сама по себе, но так же и тем, что представляет общую основу,на которой результаты, полученные в различных областях знания, могут быть собраны, классифицированы, обобщены и распространены.

В отличие от других научных дисциплин теория графов имеет вполне определенную дату рождения. Первая работа по теории графов, написанная швейцарским математиком Леонардом Эйлером, была опубликована в 1736 г. в Трудах Академии наук в Санкт-Петербурге. Исследование Эйлера было проведено в связи с так называемой . Город Кенигсберг (нынешний Калининград), был построен в месте слияния двух рек на их берегах и на двух островах. В городе было семь мостов, которые соединяли острова между собой и с береговыми частями города. Мог ли любой житель Кенигсберга, выйдя из дома, пройти по всем семи мостам города в точности по одному разу и вернуться домой? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. В дальнейшем, когда в главе 1 будет рассмотрен обобщенный вариант данной задачи, названной задачей почтальона, будет понятно с чем это связано.

В данной работе будет описана конкурентная многопериодная задача почтальона с переменными параметрами.

Во вспомогательных сведениях приводится ряд основных понятий и определений, которые используются на протяжении всей работы. Глава 1 данной работы посвящена достаточно подробному описанию задачи почтальона и способам и алгоритмам, с помощью которых данная задача может быть решена. В §1 описывается постановка задачи почтальона, в §2 описывается алгоритм поиска оптимального маршрута почтальона для неориентированного графа, и примеры, в §3 приведены алгоритмы, при помощи которых осуществляется поиск оптимального маршрута почтальона. В главе 2 описывается построение конкурентной многопериодной модели данной задачи и приводятся численные примеры.

4.1 Задача почтальона

Постановка задачи

Любой почтальон, перед тем как отправиться в путь, должен подобрать на почте письма, относящиеся к его участку, после этого он должен их доставить адресатам, располагающимся вдоль маршрута его следования, и вернуться на почту, чтобы возвратить оставшуюся неврученную корреспонденцию. Каждый почтальон, желая расходовать меньше сил, хотел бы покрыть свой маршрут кратчайшим путем. Таким образом, задача почтальона заключается в том, чтобы пройти все улицы маршрута и вернуться в его начальную точку, минимизируя при этом длину пройденного пути.

Очевидно, что такая задача стоит не только перед почтальоном, но и при выполнении многих курьерских заданий. Например, сотруднику ГИБДД хотелось бы знать наиболее эффективный путь патрулирования улиц своего района, фермеру было бы весьма полезно знать наилучший маршрут движения сельскохозяйственных машин по его полям при посеве, бригада ремонта дороги заинтересована в выборе наилучшего пути своего перемещения по всем дорогам.

Задача почтальона может быть переформулирована в терминах теории графов. Для этого построим граф $G = (X, E)$, в котором каждое ребро соответствует улице в маршруте движения почтальона, а каждая вершина – стык двух улиц. Эта задача представляет собой задачу поиска кратчайшего маршрута, включающего каждое ребро по крайней мере один раз и заканчивающегося в вершине начала движения движения.

Пусть s – начальная вершина маршрута и $a(i, j) > 0$ – длина ребра (i, j). Если есть маршруты, в которых каждое ребро обходится только один раз, то лучших маршрутов для почтальона не существует. Маршрут, в котором каждое ребро обходится точно один раз, называется .

Очевидно, что в несвязном графе (т.е графе, имеющем несколько компонент) не существует маршрута почтальона (не говоря уже о существовании эйлерова маршрута). Поэтому мы будем всегда предполагать, что рассматриваемый граф является связным. Очевидно также, что количество приходов почтальона в некоторую вершину должно быть равно количеству уходов его из этой вершины. При этом если почтальон не проходит более одного раза по ребру, инцидентному некоторой вершине, то эта вершина должна быть инцидентна четному числу ребер. Общее количество ребер, инцидентных вершине x, назовем степенью вершины x и будем обозначать через $d(x)$. Если в графе G все вершины имеют четную степень, то граф называется четным. В ориентированном графе число дуг, входящих в вершину x, называется *внутренней степенью* вершины x; эту степень мы будем обозначать через $d^{-}(x)$. Число дуг, выходящих из вершины x, называется *внешней степенью* $d^{+}(x)$ вершины x. Предположим, что мы знаем оптимальный маршрут почтальона в графе G, который начинается и заканчивается в вершине s. Каким будет оптимальный маршрут почтальона, если в качестве начальной выбирать некоторую другую вершину, скажем вершину t? Ответ на этот вопрос находится из следующих соображений. Любой оптимальный маршрут R, начинающийся в вершине s, в конечном счете когда-то впервые проходит через вершину t. Назовем эту часть маршрута R_1, а оставшуюся часть обозначим через R_2. Заметим, что R_1 начинается в вершине s и оканчивается в вершине t. В свою очередь R_2 начинается в вершине t и заканчивается в вершине s. Сформируем новый маршрут R', состоящий из R_2 и следующего за ним R_1. Маршрут R' начинается в вершине t, оканчивается также в вершине t и имеет такую же суммарную длину, как и маршрут R. Следовательно, R' должен быть оптимальным маршрутом, начинающимся из вершины t. Таким образом, мы можем сделать следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Суммарная длина оптимального маршрута почтальона не зависит от того, какая из вершин этого маршрута будет выбрана в качестве начальной.*

Задача почтальона для неориентированного графа

Ниже будет описан алгоритм решения задачи почтальона для любого неориентированного графа $G = (X, E)$, в котором ребра могут обходиться в каждом из двух направлений.

Необходимо рассмотреть отдельно следующие два случая:

Случай А. Граф G четный.

Случай Б. Граф G нечетный.

Случай А. Если граф четный, то оптимальное решение задачи почтальона является эйлеровым маршрутом. В этом случае почтальон не должен обходить более одного раза любое ребро графа.

Для этого, чтобы найти на графе G эйлеров маршрут, в котором вершина s являлась начальной вершиной, необходимо пройти любое ребро (s, x) инцидентное вершине s, а затем любое не использованное еще ребро инцидентное вершине x. Этот процесс прохождения неиспользованных ребер повторяется до тех пор, пока не происходит возврата в вершину s. (Мы должны обязательно прийти в вершину s, поскольку каждая вершина имеет четную степень и каждое посещение (приход и уход) некоторой вершины оставляет четное число неиспользованных ребер, инцидентных этой вершине. Следовательно каждый раз когда почтальон приходит в некоторую вершину, имеется неиспользованное ребро для того, чтобы покинуть эту вершину.) Ребра, по которым почтальоном совершен обход, образуют цикл C_1. Если в цикл C_1 вошли все ребра графа G, то C_1 является эйлеровым маршрутом (а значит, и оптимальным решение задачи).

В противном случае следует образовать цикл C_2, состоящий из неиспользованных ребер и начинающийся с произвольного неиспользованного ребра. Образование циклов C_3, C_4, ..., состоящих из неиспользованных ребер, продолжается до тех пор, пока не будут использованы все ребра графа. Далее следует соединить все циклы C_1, C_2, ... в один цикл C, который содержит все ребра графа G. В цикл C каждое ребро графа входит только по одному разу, и поэтому он является оптимальным решением задачи почтальона.

Два цикла C_1 и C_2 могут быть соединены в один только тогда, когда они содержат общую вершины x. Для соединения двух таких циклов необходимо выбрать в качестве исходного произвольное ребро цикла C_1 и двигаться вдоль ребер до достижения вершины x. Затем надо пройти все ребра цикла C_2 и вернуться в вершину x. Наконец, следует продолжить обход ребер цикла C_1 до возвращения к начальному ребру. Пройденный маршрут является циклом, полученным в результате соединения циклов C_1 и C_2. Эта процедура легко может быть расширена на случай соединения любого количества циклов и может выполняться до тех пор, пока не образуются два их подмножества, не имеющих общих вершин.

Случай Б. Граф G не является четным графом. В любом маршруте почтальона число входов в вершину равно числу выходов из нее. Следовательно, если вершина x имеет нечетную степень,то по крайней мере одно ребро, инцидентное вершине x, должно обходиться повторно.

Пусть $f(i,j)$ – число дополнительных прохождений почтальоном ребра (i,j). Значит, ребро (i,j) обходится почтальоном $f(i,j)+1$ раз. Очевидно, что $f(i,j)+1$ должно быть неотрицательным целым числом.Заметим, что $f(i,j)$ не содержит информации о направлении движения вдоль ребра (i,j).

Построим новый граф $G^* = (X, E^*)$, в котором ребро (i,j) графа G повторено $f(i,j)+1$ раз. Очевидно, что эйлеров маршрут в графе G^* соответствует маршруту почтальона в графе G. Почтальон желает выбрать значения переменных $f(i,j)$ такими, чтобы (а) граф G^* был четным графом, (б) $\sum a(i,j)f(i,j)$ – общая длина повторно обходимых ребер – была минимальной .

Если вершина x в графе G имеет нечетную степень, то для того, чтобы в графе G^* вершина x имела четную степень, почтальон должен повторно обойти нечетное число ребер, инцидентных этой вершине. Аналогично, если вершина x в графе G имеет четную степень, то для того, чтобы в графе G^* вершина x имела четную степень, почтальон должен повторно обойти четное число ребер, инцидентных этой вершине (нуль является четным числом). Граф G имеет четное число вершин с нечетной степенью. Если мы проследим до конца начинающуюся в вершине с нечетной степенью цепь повторно обходимых ребер, то она обязательно должна закончиться в другой вершине с нечетной степенью. Таким образом, повторно обходимые ребра образуют цепи, началом и концом которых являются вершины с нечетной степенью. Конечно, любая такая цепь может содержать в качестве промежуточных вершины с четной степенью. Следовательно почтальон должен (а) решить, какие вершины с нечетной степенью будут соединены цепью повторно обходимых ребер и (б) знать точный состав каждой такой цепи.

Почтальон может с помощью каждого из алгоритмов построения кратчайшего пути, предложенных Флойдом и Данцигом, определить в графе G кратчайший путь между каждой парой вершин с нечетной степенью.

Для определения пары вершин с нечетной степенью, которые должны быть соединены цепью повторно обходимых ребер, почтальон может поступить следующим образом. Построить граф $G' = (X', E')$, множество вершин которого состоит из всех вершин с нечетной степенью графа G, а множество ребер соединяет каждую пару вершин. Присвоить каждому ребру графа вес, равный некоторому очень большому числу за вычетом длины кратчайшего пути между соответствующими вершинами графа G,вычисленной с помощью алгоритмов Флойда и Данцига.

Далее на графе G' следует построить паросочетание с максимальным весом, используя для этого алгоритмы построения паросочетания с максимальным весом. Так как граф G' имеет четное число вершин и каждая пара вершин в G' соединена ребром, то паросочетание с максимальным весом будет покрывать каждую вершину в точности одним ребром. Это паросочетание связывает на графе G пары вершин с нечетными степенями. Почтальон повторно должен обходить ребра, составляющие цепь кратчайшей длины и соединяющие пару связанных в паросочетании вершин. Поскольку это паросочетание имеет наибольший общий вес, то получаемый в результате маршрут почтальона должен иметь минимальную общую длину.

Таким образом, задачу почтальона для неориентированного графа можно решить с помощью алгоритмов Флойда или Данцига и алгоритма построения паросочетания с максимальным весом. Никакого нового алгоритма для этого не требуется.

Если используется алгоритм построения паросочетания с максимальным весом, то вес каждого ребра в графе следует принять равным некоторому большому числу, скажем M, минус длина кратчайшего пути между соответствующими двумя конечными точками в графе. Использование большого числа M просто может рассматриваться как способ преобразования задачи построения паросочетания с минимальным весом, покрывающего все вершины графа, в задачу построения паросочетания с максимальным весом.

Алгоритмы решения задачи почтальона в случае неориентированного нечетного графа

Алгоритм Флойда.

Прежде чем представлять алгоритм,необходимо ввести некоторые обозначения. Перенумеруем вершины исходного графа целыми числами от 1 до N. Обозначим через d_{ij}^m длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j.,который в качестве промежуточных может содержать только первые m вершин графа. Если между вершинами i и j не существует ни одного пути указанного типа ,то условно будем считать,что $d_{ij}^m = \infty$. Из данного определения величин d_{ij}^m следует,что величина d_{ij}^0 представляет длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j,не имеющего промежуточных вершин,т.е. длину кратчайшей дуги, соединяющей i с j (если такие дуги присутствуют в графе). Для любой вершины i положим $d_{ii}^0 = 0$.

Обозначим через D^m матрицу размера $N \times N$,элемент i, j которой совпадает с d_{ij}^m. Если в исходном графе нам известна длина каждой дуги,то мы можем сформулировать матрицу D^0. Наша цель состоит в определении матрицы D^N,представляющей кратчайшие пути между всеми вершинами рассматриваемого графа.

В алгоритме Флойда в качестве исходной выступает матрица D^0. Вначале из этой матрицы вычисляется матрица D^1. Затем по матрице D^1 вычисляется матрица D^2 и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока по матрице D^{N-1} не будет вычислена матрица D^N.

Рассмотрим основную идею, лежащую в основе алгоритма Флойда. Предположим, что нам известны:

а) кратчайший путь из вершины i в вершину m, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m-1)$ вершин;

б) кратчайший путь из вершины m в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m-1)$ вершин;

в) кратчайший путь из вершины i в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых $(m-1)$ вершин;

Поскольку по предположению исходный граф не может содержать контуров отрицательной длины, один из двух путей – путь, совпадающий с представленным в п. "в или путь, являющийся объединением путей из пп. "а"и "б – должен быть кратчайшим путем из вершины i в вершину j, в котором в качестве промежуточных допускается использование только первых m вершин. Таким образом,

$$d_{ij}^{m} = \min\left\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}, d_{ij}^{m-1}\right\}. \tag{29}$$

Из соотношения (29) видно, что для вычисления элементов матрицы D^m необходимо располагать лишь элементами матрицы D^{m-1}. Более того, соответствующие вычисления могут быть проведены без обращения к исходному графу.

Теперь можно дать формальное описание алгоритма Флойда для нахождения на графе кратчайших путей между всеми парами вершин.

Шаг 1.

Перенумеровать вершины исходного графа целыми числами от 1 до N. Определить матрицу D^0, задав величину каждого ее элемента (i, j) равной длине кратчайшей дуги, соединяющей вершину i с вершиной j. Если в исходном графе указанные вершины не соединяются дугами, положить $d_{ij}^0 = \infty$. Кроме того, для всех i положить $d_{ii}^0 = 0$.

Шаг 2.

Для целого m, последовательно принимающего значения $1, 2, \ldots, N$, определить по величинам элементов матрицы D^{m-1} величины элементов матрицы D^m, используя рекурсивное соотношение (29). При определении величины каждого элемента матрицы D^m фиксировать соответствующий кратчайший путь.

По окончании данной процедуры величина элемента (i, j) матрицы D^N определяет длину кратчайшего пути, ведущего из вершины i в вершину j.

То, что описанный алгоритм действительно находит кратчайшие пути, может быть индуктивно доказано на основе следующего его факта. Длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j, допускающего использование в качестве промежуточных первых m вершин, должна быть не больше длины кратчайшего пути из i в j, допускающего использование в качестве промежуточных первых $(m-1)$ вершин, и не больше длины кратчайшего пути из i в j, допускающего использование в качестве промежуточных первых $(m-1)$ вершин и обязательно – вершины m.

Отметим, что для всех i и m должно быть $d_{ii}^0 = 0$. Поэтому нет необходимости в вычислении диагональных элементов матриц $D^1, D^2, \ldots, D^N$. Кроме того, для всех $i = 1, 2, \ldots, N$ имеют место соотношения $d_{im}^{m-1} = d_{im}^{m} = 0$ и $d_{mi}^{m-1} = d_{mi}^{m} = 0$. Эти соотношения обусловливаются тем, что вершина m в отсутствие контуров отрицательной длины не может выступать в качестве промежуточной в любых кратчайших путях, которые начинаются или заканчиваются в самой вершине m. Следовательно, при определении матрицы D^m нет необходимости в пересчете элементов m–й строки и m–ого столбца матрицы D^{m-1}. Таким образом, в матрице D^m по формуле (29) необходимо считать лишь величины $(N-1)(N-2)$ элементов, в число которых не входят диагональные элементы, а также элементы из m–й строки и m–ого столбца.

Алгоритм построения паросочетания с максимальным весом.

Пусть $V = V_1, \ldots, V_z$ — множество всех подмножеств вершин графа, включающих нечетное количество вершин. Пусть T_m — множество всех ребер, обе вершины которых принадлежат подмножеству V_m и $T = T_1, \ldots, T_z$.

Для того чтобы легче было понять алгоритм поиска паросочетания с максимальным весом, сначала должна быть рассмотрена постановка задачи поиска паросочетаний с максимальным весом как следующая задача линейного программирования:

$$\sum_{ij} a(i,j)x(i,j) \tag{30}$$

$$\sum_{j} [x(i,j) + x(i,j)] \leq 1, \qquad \text{для всех} \qquad i \in X \tag{31}$$

$$\sum_{i,j \in T_m} x(i,j) \leq n_m, m = 1, 2, \ldots, z \tag{32}$$

$$x(i,j) \geq 0, \qquad \text{для всех} \qquad (i,j) \tag{33}$$

Ограничение (31) требует, чтобы каждой вершине i было инцидентно не более чем одно ребро паросочетания. Ограничение (32) означает, что в паросочетание должно входить не более n_m ребер из множества T_m. Целевая функция (30) представляет собой суммарный вес ребер паросочетания. Каждое паросочетание удовлетворяет ограничениям (31)–(33).Применение алгоритма построения паросочетания с максимальным весом дает в результате паросочетание, являющееся оптимальным решением задачи линейного программирования (30)–(33).

4.2 Конкурентная многопериодная задача почтальона с переменными параметрами

Однопериодная задача почтальона с конечным числом агентов

В данной работе рассматривается следующее обобщение задачи почтальона. Предполагается, что в обеспечении движения почтальона по маршруту участвует конечное число агентов (ведомств) и каждый из них хочет минимизировать свои затраты.

Данная модель появляется в работе фирмы, продающей товары длительного потребления.

Торговому представителю фирмы необходимо посетить всех потенциальных покупателей, располагающихся вдоль маршрута его следования, и вернуться обратно на фирму. Движение представителя по маршруту обеспечивают различные отделы фирмы (агенты). Необходимо выбрать путь обхода маршрута, учитывая различные интересы всех отделов фирмы (агентов).

Например, на разных улицах маршрута разные затраты топлива, учитывая рельеф местности и загруженность дорог. Отделу, отвечающему за расход топлива, хотелось бы выбрать путь, на прохождение по которому ушло меньше бензина. Торговому представителю хотелось бы пройти маршрут и потратить на это как можно меньше времени. Но тогда будет потрачено больше бензина, что приводит к противоречию с отделом, отвечающим за расход бензина. И если пройти путь с большой скоростью, то это может привести к нежелательным поломкам автомобиля. Это приводит к противоречию с отделом, отвечающим за техническое состояние транспорта, на котором передвигаются торговые представители. За счет этого возникают различные функции издержек агентов на одном и том же пути.

Каждый агент хочет минимизировать свои затраты на обеспечение движения по маршруту или же, что эквивалентно, максимизировать свой остаток средств, то есть свой доход.

Таким образом, данную задачу можно формализовать следующим образом.

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц

$$\Gamma = \{I = \{1, \ldots, n\}, \{R_j\}_{j=1}^{n}, \{H_i^j\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}, \{A_i^j\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}\}, \text{где}$$

I — множество агентов, R_j— множество путей обхода маршрута, таких что, каждый из них включает каждое ребро по крайней мере один раз и заканчивается в вершине движения. H_i^j — вещественная функция издержек агента i на j–ом пути, A_i^j — сумма, которой располагает агент i для обеспечения движения техники по j–ому пути.

Перед каждым агентом стоит задача минимизации функционала $G = A_i^j - H_i^j$.

Построим матрицу доходов агентов, в которой строки соответствуют выбранным путям, столбцы обслуживающим агентам:

$$\begin{pmatrix} A_1^1-H_1^1 & \dots & A_n^1-H_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m-H_1^m & \dots & A_n^m-H_n^m \end{pmatrix}$$

Из матрицы выигрышей найдем компромиссный путь по следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения компромиссной ситуации.

Рассмотрим игру Γ , опишем для нее алгоритм нахождения компромиссного решения.

Шаг 1.

Построим идеальный вектор $M=[M_1,\dots,M_n]$, где $M_i=\max\limits_j(A_i^j-H_i^j)$ — максимальное значение дохода агента i.

Шаг 2.

Найдем для каждого пути j отклонение от максимума M_i остальных значений дохода, т.е. $M_i-(A_i^j-H_i^j)$.

Шаг 3.

Из найденных отклонений $(M_i-(A_i^j-H_i^j))$ для каждого агента выбираем максимальное отклонение $\max\limits_j(M_i-(A_i^j-H_i^j))$.

Шаг 4.

Выбираем минимальное из этих максимальных отклонений $\min\limits_i\max\limits_j(M_i-(A_i^j-H_i^j))$ и путь, на котором достигается минимум, является компромиссным решением игры для всех агентов.

Пример 1.

Пусть у нас три обслуживающих агента 1, 2 и 3, три возможных пути R_1,R_2,R_3 обхода маршрута. Функции издержек $H_1^{R_1}=20$, $H_1^{R_2}=22$, $H_1^{R_3}=19$, $H_2^{R_1}=26$, $H_2^{R_2}=23$, $H_2^{R_3}=27$, $H_3^{R_1}=21$, $H_3^{R_2}=28$, $H_3^{R_3}=25$. Плановая сумма пусть будет одинаковой для всех агентов на все возможные пути и равняется 30. Тогда матрица доходов выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 2 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1)Идеальный вектор $M=(11,7,9)$

2) Найдем для каждого пути j отклонение от максимума M_i остальных значений дохода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Из найденных отклонений для каждого агента выбираем максимальное отклонение

$$\max_j (M_i - (A_i^j - H_i^j)) = (3, 4, 7)$$

4) Выбираем минимальное из этих максимальных отклонений $\min_i \max_j (M_i - (A_i^j - H_i^j)) = (3)$

Следовательно, компромиссным решением игры для всех агентов является маршрут R_2.

Построение многопериодной задачи почтальона с переменными параметрами.

Рассмотрим вновь задачу почтальона. В действительности работа почтальона происходит в течение долгого времени, и в силу различных условий параметры модели изменяются. Данную модель можно рассмотреть на примере той же фирмы по продаже товаром длительного использования, пример которой был приведен в §1 главы 2.

В связи с тем, что фирма торгует товарами длительного потребления, через некоторый период времени рынок товарами насытится. Представитель будет обходить выбранный маршрут, пока не обеспечит покупателей, находящихся вдоль движения по этому маршруту, своими товарами. Ведь обеспечение не произойдет после первого же обхода. Кого-то из покупателей может не оказаться дома, у кого-то не найдется сразу достаточная сумма денег на покупку товара. Насыщение происходит постепенно. Таким образом, в силу различных условий параметры модели меняются. На графе соответствующему маршруту, на котором выбирается путь, это отразится изменением нагрузок на некоторых ребрах. Удаляются ребра, соответствующие тем улицам, на которых живут покупатели купившие товар. Добавляются новые ребра, соответствующие улицам, на которых могут жить потенциальные клиенты.

Это приведет к тому, что нужно будет искать план обхода нового маршрута. Т. е. должна будет решена новая задача почтальона с учетом изменений произошедших с графом. Таким образом, предстоит рассмотреть многопериодную задачу с переменными параметрами.

Обозначим время, в течение которого торговому представителю необходимо совершать обходы по своим маршрутам отрезком $[0, T]$. Разобьем этот отрезок на периоды $[0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots, [t_k, T]$, причем $0 < t_1 < t_2 < \ldots < T$. Таким образом, получили разбиение отрезка $[0, T]$. Изменения различного вида происходят после каждого из моментов t_k. Нам нужно, чтобы средства, потраченные за время $[0, T]$ на обходы маршрута, были минимальными. Общие затраты получаются путем суммирования затрат на каждом из отрезков времени, на которые мы разбили отрезок $[0, T]$. Учтем так же то, что путей прохождения маршрута, удовлетворяющих нашему условию (путь должен включать каждое ребро графа, по крайней мере, один раз и заканчиваться в вершине начала движения) может быть несколько, и не обязательно на каждом этапе выбирать оптимальный из них. Главное чтобы минимальными оказались конечные затраты. Таким образом, требуется получить такую последовательность путей для многопериодного процесса, чтобы при суммировании издержек на каждый путь, составляющий данную последовательность, получить наименьшие затраты.

Этот процесс можно для наглядности изобразить в виде дерева, корень которого - это начальная задача почтальона, вершинам соответствуют задачи с учетом изменений после каждого периода, а ветви - это выбранные маршруты для соответствующих задач.

Мы будем рассматривать неориентированные графы, т.е. подразумевается то, что почтальон может двигаться по всем улицам маршрута в обоих направлениях.

Пример 1.

Имеется граф G — полный граф с 4 вершинами. Матрица нагрузок на ребра графа G:

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\
1 & 0 & 5 & 2 & 3 \\
2 & 5 & 0 & 2 & 4 \\
3 & 2 & 3 & 0 & 3 \\
4 & 3 & 4 & 3 & 0
\end{array}
$$

Матрица путей наименьшей длины между всеми парами вершин графа G, найденная с помощью алгоритма Флойда:

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\
1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\
2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\
3 & 2 & 2 & 0 & 3 \\
4 & 3 & 4 & 3 & 0
\end{array}
$$

Т.к. некоторые вершины графа имеют нечетные степени, то нужно выбрать ребра, которые будут обходиться более одного раза. Для этого нужно найти возможные паросочетания. В этом примере это (1,4), (2, 3), или (1, 2), (3, 4), или (2,4),(1,3). Следовательно, возможные обходы графа это следующие пути:

R_1 =(1,2)(2,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,1)

R_2=(1,2)(2,3)(3,4)(4,2)(2,4)(4,1)(1,3)(3,1)

R_3=(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,3)(3,4)(4,1)

Возможны также другие циклы, проходящие ребра графа в ином порядке. Однако эти циклы будут проходить более одного раза по тем же множествам из двух ребе, которые представляют собой все возможные паросочетания на данном графе. Таким образом, на данном графе возможны три различных пути обхода. Их длины следующие:

R_1=24, R_2=25, R_3=26.

Теперь после времени t_1 граф изменился. Но при разных выборах путей произошли разные изменения. При выборе пути R_1 граф G поменялся на граф G_1. Матрица нагрузок на ребра графа G_1:

$$\begin{array}{r|cccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Матрица путей наименьшей длины между всеми парами вершин графа G_1, найденная с помощью алгоритма Флойда:

$$\begin{array}{r|cccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Для обхода графа G_1 имеются следующие пути:

R_6=(1,2)(2,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,1)

R_5=(1,2)(2,3)(3,4)(4,2)(2,4)(4,1)(1,3)(3,1)

R_4=(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,3)(3,4)(4,1)

Их длины:

R_6=18, R_5=15, R_4=19.

При выборе пути R_2 граф G поменялся на граф G_2. Матрица нагрузок на ребра графа G_2:

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	2	1
3	2	2	0	1
4	3	1	1	0

Матрица путей наименьшей длины между всеми парами вершин графа G_2, найденная с помощью алгоритма Флойда:

	1	2	3	4
1	0	1	2	2
2	1	0	2	1
3	2	2	0	1
4	2	1	1	0

Для обхода графа G_2 имеются следующие пути:
R_7=(1,2)(2,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,1)
R_8=(1,2)(2,3)(3,4)(4,2)(2,4)(4,1)(1,3)(3,1)
R_9=(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,3)(3,4)(4,1)
Их длины:
R_7=14, R_8=13, R_9=12.

При выборе пути R_3 граф G поменялся на граф G_3. Матрица нагрузок на ребра графа G_3:

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	2	4
3	2	2	0	3
4	3	4	3	0

Матрица путей наименьшей длины между всеми парами вершин графа G_3, найденная с помощью алгоритма Флойда:

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	2	4
3	2	2	0	3
4	3	4	3	0

Для обхода графа G_3 имеются следующие пути:
R_{10}=(1,2)(2,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,4)(4,1)
R_{11}=(1,2)(2,3)(3,4)(4,2)(2,4)(4,1)(1,3)(3,1)
R_{12}=(1,2)(2,4)(4,3)(3,1)(1,2)(2,3)(3,4)(4,1)

Их длины:

R_{10}=20, R_{11}=21, R_{12}=19.

Теперь нам надо выбрать два пути, суммарная длина которых минимальна. Это путь R_2 на отрезке времени $[0, t_1]$ и путь R_9 на отрезке времени $[t_1, T]$. Таким образом, выбирая эти два пути для обхода маршрута, мы минимизируем конечные затраты. На момент времени T затраты будут равняться 37 единиц.

Конкурентная многопериодная задача почтальона с переменными параметрами.

В данном параграфе будет рассмотрен случай многопериодной задачи почтальона с конечным числом агентов. Как уже говорилось в §1 главы 2, предполагается, что в обеспечении движения почтальона по маршруту участвует конечное число агентов (ведомств) и каждый из них хочет минимизировать свои затраты. Учитывается так же тот факт, что работа почтальона происходит в течение достаточно долгого времени, и в силу различных условий параметры модели изменяются. Этот процесс можно для наглядности изобразить в виде дерева, корень которого это начальная задача почтальона, вершинам соответствуют задачи с учетом изменений, а ветвям выбранные маршруты для соответствующих задач. Это было изложено в §2 главы 2.

Данная модель рассматривается на примере фирмы по торговле товаров длительного потребления, как и в предыдущих параграфах.

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц

$$\Gamma = \{I = \{1, \ldots, n\}, \{R_j\}_{j=1}^{n}, \{H_i^j\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}, \{A_i^j\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}\}, \text{где}$$

I — множество агентов, R_j— множество путей обхода дерева, соответствующего данному процессу. H_i^j — вещественная функция издержек агента i на j–ом пути, A_i^j — сумма, которой располагает агент i для обеспечения движения техники по j–ому пути.

Перед каждым агентом стоит задача минимизации функционала $G = A_i^j - H_i^j$.

Построим матрицу доходов агентов, в которой столбцы соответствуют агентам, а строки выбранным путям, найдем компромиссное решение по алгоритму, изложенному в §1 главы 2.

Пример 1.

Пусть бригаде необходимо двигаться по маршруту в течение времени T , после момента t_1 параметры задачи изменились. Таким образом, получили разбиение отрезка $[0,T]$ на отрезки $[0,t_1],[t_1,t]$. Пусть в обеспечении движения почтальона по маршруту участвует три агента 1, 2 и 3. Имеется три возможных пути обхода маршрута R_1,R_2,R_3 на отрезке времени $[0,t_1]$ и 9 возможных путей $R_4,R_5,R_6,R_7,R_8,R_9,R_{10},R_{11},R_{12}$ на отрезке времени $[t_1,t]$. Нам нужно найти компромиссное решение на конечный момент времени T, т.е. среди множества путей R_1+R_4,R_1+R_5 , R_1+R_6 ,R_2+R_7 ,R_2+R_8 ,R_2+R_9 ,R_3+R_{10} ,R_3+R_{11} ,R_3+R_{12}. Функции издержек $H_1^{R_1}$=20, $H_1^{R_2}$=22, $H_1^{R_3}$=19, $H_1^{R_4}$=23, $H_1^{R_5}$=27, $H_1^{R_6}$=24, $H_1^{R_7}$=26, $H_1^{R_8}$=18, $H_1^{R_9}$=25, $H_1^{R_{10}}$= 23, $H_1^{R_{11}}$=17, $H_1^{R_{12}}$=27, $H_2^{R_1}$=26, $H_2^{R_2}$=23,$H_2^{R_3}$ =27, $H_2^{R_4}$=26, $H_2^{R_5}$=20, $H_2^{R_6}$=21, $H_2^{R_7}$=27, $H_2^{R_8}$=28, $H_2^{R_9}$=17, $H_2^{R_{10}}$=21, $H_2^{R_{11}}$=14, $H_2^{R_{12}}$=19, $H_3^{R_1}$=28, $H_3^{R_2}$=21, $H_3^{R_3}$=25, $H_3^{R_4}$=25, $H_3^{R_5}$=19, $H_3^{R_6}$=22, $H_3^{R_7}$=21, $H_3^{R_8}$=23, $H_3^{R_9}$=24, $H_3^{R_{10}}$=16, $H_3^{R_{11}}$=25, $H_3^{R_{12}}$=29. Плановая сумма A_i^j пусть будет одинаковой для всех агентов на все возможные пути и равняется 30. Тогда матрица доходов на момент времени T выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 7 \\ 13 & 14 & 13 \\ 16 & 13 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \\ 20 & 9 & 16 \\ 13 & 20 & 15 \\ 18 & 12 & 19 \\ 24 & 19 & 10 \\ 14 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

1)Идеальный вектор $M=(24,20,19)$

2) Найдем для каждого пути j отклонение от максимума M_i остальных значений дохода:

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 12 \\ 11 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \\ 12 & 10 & 1 \\ 14 & 11 & 3 \\ 11 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 10 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

3) Из найденных отклонений для каждого агента выбираем максимальное отклонение

$$\max_j (M_i-(A_i^j-H_i^j))=(14,12,13)$$

4) Выбираем минимальное из этих максимальных отклонений $\min_i \max_j (M_i - (A_i^j - H_i^j)) = (12)$

Следовательно, компромиссным решением игры γ для всех агентов является является вариант, при котором выбирается путь R_1 на первом этапе $[0, t_1]$ и путь R_4 на втором этапе $[t_1, T]$.

Численный пример конкурентной многопериодной задачи почтальона с переменными параметрами.

Рассмотрим пример, в котором время, в течение которого почтальону следует обходить свой маршрут очень велико. Обозначим его отрезком $[0, T]$, разделим этот отрезок на 3 периода $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$.

Пусть в начальный момент времени имеется неориентированный граф G_1. Вершины графа 1, 2, 4, 5, 6 и 7 имеют нечетную степень.

Матрица нагрузок ребер графа G_1 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r|ccccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\ 1 & 0 & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & \infty & 6 & 6 & 0 & 2 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & 5 & 2 & 0 & 4 & \infty \\ 6 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & 5 & 0 \end{array}$$

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

$$\begin{array}{r|ccccccc} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 9 & 8 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 6 & 0 & 2 & 6 & 9 \\ 5 & 8 & 8 & 5 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 3 & 6 & 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 3 & 9 & 8 & 5 & 0 \end{array}$$

Т.к. некоторые вершины графа имеют нечетные степени, то нужно выбрать ребра, которые будут обходиться более одного раза. Для этого нужно найти возможные паросочетания. В этом примере это (1, 2), (4, 5), (7, 6) или (2, 4), (5, 6), (7, 1). Следовательно, возможные обходы графа G_1 это следующие пути:

R_1=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

R_2=(1,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_1 равна 64 единицы, и она на 12 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_1. Общая длина маршрута R_2 равна 68 единицы, и она на 16 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_1.

Возможны также другие циклы, проходящие ребра графа в ином порядке. Однако эти циклы будут проходить дважды по тому же множеству из трех ребер.

Теперь после момента времени t_1 граф изменился.

При выборе пути R_2 граф G_1 поменялся на граф G_2.

Матрица нагрузок ребер графа G_2 выглядит следующим образом:

	1	2	3	4	5	6	7
1|	0	6	4	∞	∞	∞	7
2|	6	0	5	6	∞	∞	∞
3|	4	5	0	6	5	3	3
4|	∞	6	6	0	2	∞	∞
5|	∞	∞	5	2	0	4	∞
6|	∞	∞	3	∞	4	0	5
7|	7	∞	3	∞	∞	5	0

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

	1	2	3	4	5	6	7
1|	0	6	4	10	9	7	7
2|	6	0	5	6	8	8	8
3|	4	5	0	6	5	3	3
4|	10	6	6	0	2	6	9
5|	9	8	5	2	0	4	8
6|	7	8	3	6	4	0	5
7|	7	8	3	9	8	5	0

Возможные обходы графа G_2 это следующие пути:

R_6=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

R_5=(1,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_6 равна 69 единицы, и она на 13 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_2. Общая длина маршрута R_5 равна 72 единицы, и она на 16 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_2.

При выборе пути R_1 граф G_1 поменялся на граф G_3.

Матрица нагрузок ребер графа G_3 выглядит следующим образом:

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>
1|	0	6	3	∞	∞	∞	5
2|	6	0	3	7	∞	∞	∞
3|	3	3	0	5	5	4	4
4|	∞	7	5	0	3	∞	∞
5|	∞	∞	5	3	0	3	∞
6|	∞	∞	4	∞	3	0	4
7|	5	∞	4	∞	∞	4	0

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>
1|	0	6	3	8	8	7	5
2|	6	0	3	7	8	7	7
3|	3	3	0	5	5	4	4
4|	8	7	5	0	3	6	9
5|	8	8	5	3	0	3	7
6|	7	7	4	6	3	0	4
7|	5	7	4	9	7	4	0

Возможные обходы графа G_3 это следующие пути:

R_4=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)
(6,7)(7,1)

R_3=(1,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)
(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_4 равна 70 единицы, и она на 13 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_3. Общая длина маршрута R_3 равна 72 единицы, и она на 15 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_3.

Теперь после момента времени t_2 условия задачи опять изменились. При выборе пути R_6 граф G_2 поменялся на граф G_4.

Матрица нагрузок ребер графа G_4 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r|ccccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\
1 & 0 & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & 5 & 0 & 4 & 4 & \infty & \infty & \infty \\
3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\
4 & \infty & 4 & 6 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
5 & \infty & \infty & 5 & 2 & 0 & 4 & \infty \\
6 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 & 0 & 5 \\
7 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 5 & 0
\end{array}$$

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

$$\begin{array}{r|ccccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\
1 & 0 & 5 & 3 & 9 & 8 & 6 & 6 \\
2 & 5 & 0 & 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\
3 & 3 & 4 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\
4 & 9 & 4 & 6 & 0 & 2 & 6 & 9 \\
5 & 8 & 6 & 5 & 2 & 0 & 4 & 8 \\
6 & 6 & 7 & 3 & 6 & 4 & 0 & 5 \\
7 & 6 & 7 & 3 & 9 & 8 & 5 & 0
\end{array}$$

Возможные обходы графа G_4 это путь:

R_7=(1,2)(2,4)(4,3)(3,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,3)(3,5)(5,6)(6,7)
(7,3)(3,1)

Общая длина маршрута R_7 равна 52 единицы, и она на 8 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_4.

При выборе пути R_5 граф G_2 поменялся на граф G_5.

Матрица нагрузок ребер графа G_5 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r|ccccccc}
 & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} \\
1 & 0 & 6 & 4 & \infty & \infty & \infty & 3 \\
2 & 6 & 0 & 5 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
3 & 4 & 5 & 0 & 5 & 4 & 2 & 3 \\
4 & \infty & 6 & 5 & 0 & 2 & \infty & \infty \\
5 & \infty & \infty & 4 & 2 & 0 & 3 & \infty \\
6 & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 & 8 \\
7 & 3 & \infty & 3 & \infty & \infty & 8 & 0
\end{array}$$

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	6	4	9	8	6	3
2	6	0	5	6	8	7	8
3	4	5	0	5	4	2	3
4	9	6	5	0	2	5	8
5	8	8	4	2	0	3	7
6	6	7	3	5	3	0	5
7	3	8	3	8	7	5	0

Возможные обходы графа G_5 это следующие пути:

R_8=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,3)(3,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

R_9=(1,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_8 равна 64 единицы, и она на 13 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_5. Общая длина маршрута R_9 равна 63 единицы, и она на 12 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_5.

При выборе пути R_4 граф G_3 поменялся на граф G_6.

Матрица нагрузок ребер графа G_6 выглядит следующим образом:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	6	∞	∞	∞	6
2	5	0	3	6	∞	∞	∞
3	6	3	0	6	5	3	5
4	∞	6	6	0	3	∞	∞
5	∞	∞	5	3	0	4	∞
6	∞	∞	3	∞	4	0	5
7	6	∞	5	∞	∞	5	0

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	6	11	11	9	6
2	5	0	3	6	8	6	8
3	6	3	0	6	5	3	5
4	11	6	6	0	3	7	11
5	11	8	5	3	0	4	9
6	9	6	3	7	4	0	5
7	6	8	5	11	9	5	0

Возможные обходы графа G_6 это следующие пути:

R_{10}=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,3)(3,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

R_{11}=(1,3)(3,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_{10} равна 70 единицы, и она на 13 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_6. Общая длина маршрута R_{11} равна 73 единицы, и она на 16 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_6.

При выборе пути R_3 граф G_3 поменялся на граф G_7.

Матрица нагрузок ребер графа G_7 выглядит следующим образом:

	1	2	3	4	5	6	7
1|	0	5	3	∞	∞	∞	2
2|	5	0	4	6	∞	∞	∞
3|	3	4	0	6	5	3	3
4|	∞	6	6	0	2	∞	∞
5|	∞	∞	5	2	0	10	∞
6|	∞	∞	3	∞	10	0	5
7|	2	∞	3	∞	∞	5	0

Длины кратчайших цепей между всеми парами вершин задаются следующей матрицей. Эти величины найдены с помощью алгоритма Флойда.

	1	2	3	4	5	6	7
1|	0	5	3	9	8	6	2
2|	5	0	4	6	8	7	7
3|	3	4	0	6	5	3	3
4|	9	6	6	0	2	9	9
5|	8	8	5	2	0	8	8
6|	6	7	3	9	8	0	5
7|	2	7	3	9	8	5	0

Возможные обходы графа G_7 это следующие пути:

R_{12}=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,3)(3,7)(7,3)(3,1)(1,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

R_{13}=(1,2)(2,4)(4,3)(3,5)(5,3)(3,6)(6,3)(3,7)(7,1)(1,3)(3,2)(2,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,1)

Общая длина маршрута R_{12} равна 65 единицы, и она на 12 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_7. Общая длина маршрута R_{13} равна 69 единицы, и она на 16 единиц больше, чем сумма длин ребер графа G_7.

Теперь нам надо выбрать такие пути в каждый из промежутков времени, чтобы суммарные затраты на конечный момент времени T были минимальны. Это пути R_2, R_6 и R_7. Если выбрать эти пути на соответствующих этапах, то итоговые затраты будут минимальны, а именно 137 единиц.

Пусть у нас три обслуживающих агента 1, 2 и 3, на момент времени T имеется семь возможных путей r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7 обхода маршрута. Функции издержек $H_1^{r_1}$=94, $H_1^{r_2}$=102, $H_1^{r_3}$=101, $H_1^{r_4}$=102, $H_1^{r_5}$=103, $H_1^{r_6}$=100, $H_1^{r_7}$=102, $H_2^{r_1}$=63, $H_2^{r_2}$=68, $H_2^{r_3}$=69, $H_2^{r_4}$=67, $H_2^{r_5}$=68, $H_2^{r_6}$=66, $H_2^{r_7}$=68 $H_3^{r_1}$=189, $H_3^{r_2}$=204,$H_3^{r_3}$=203,$H_3^{r_4}$=204, $H_3^{r_5}$=207, $H_3^{r_6}$=201, $H_3^{r_7}$=205. Бюджет игрока 1 150 единиц, игрока 2 100 единиц, игрока 3 230 единиц. Тогда матрица выигрышей выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 56 & 37 & 41 \\ 48 & 32 & 26 \\ 49 & 31 & 27 \\ 48 & 33 & 26 \\ 47 & 32 & 23 \\ 50 & 34 & 29 \\ 48 & 32 & 25 \end{pmatrix}$$

1)Идеальный вектор $M = (56, 37, 41)$

2) Найдем для каждого пути j отклонение от максимума M_i остальных значений дохода:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 15 \\ 7 & 6 & 14 \\ 8 & 4 & 15 \\ 9 & 5 & 18 \\ 6 & 3 & 12 \\ 8 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

3) Из найденных отклонений для каждого агента выбираем максимальное отклонение

$$\max_j (M_i - (A_i^j - H_i^j)) = (9, 6, 18)$$

4) Выбираем минимальное из этих максимальных отклонений $\min_i \max_j (M_i - (A_i^j - H_i^j)) = (6)$. Следовательно, оптимальным является маршрут r_3.

Заключение

Таким образом, в данном разделе рассмотрена многопериодная задача почтальона с переменными параметрами. Найдено компромиссное решение в случае одного периода и компромиссное решение многопериодной задачи. Также написаны программы на языке Java, реализующие алгоритм Флойда, алгоритм нахождения всех возможных путей обхода неориентированного нечетного графа, алгоритм нахождения компромиссной ситуации.

5 Инвестирование проектов в условиях конкуренции сетевыми методами

5.1 Экономическая модель

Имеется некоторая совокупность инвестиционных программ, каждая из которых заключается в осуществлении ряда инвестиционных строительных проектов. Необходимо выбрать программу с минимальными издержками.

5.2 Построение математической модели

Инвестиционную программу можно рассматривать как сеть с одним источником s и стоком t, соответствующим начальному и конечному состоянию процесса инвестирования капитала. Каждой дуге (x, y) (варианту инвестирования) ставится в соответствие коэффициент усиления $k(x, y)$, т.е. если в вершину x вошло $f(x, y)$ единиц потока, то в веришине y выйдет $k(x, y)f(x, y)$ единиц потока. В нашей модели потоком является количество денежных единиц, выделенных на тот или иной вариант инвестирования (т.е. является функцией на ребрах графа). Например, если некоторый вариант инвестирования приносит доход в 8%, то с соответствующей дугой можно связать коэффициент усиления $k(x, y) = 1.08$. Также введем для всех дуг (x, y) $c(x, y)$ - верхнюю пропускную способность (максимальное количество капитала, который может быть инвестирован по соответствующему варианту) и $l(x, y)$ - нижнюю пропускную способность (x, y). Затраты для каждого инвестиционного варианта (x, y) обозначим $a(x, y)$. Начальный капитал обозначим V (т.е. чистый поток из источника s равен V).

Задача: найти оптимальный с точки зрения затрат способ пересылки через сеть потока из источника в сток при заданном количестве V единиц потока в источнике и при наличии усиления в дугах. Особенности задачи: количество единиц потока в стоке заранее неизвестно и в общем случае не совпадает с V. С точки зрения экономической модели это естествено, т.к. целью инвестиций является получение прибыли.

5.3 Условия сведения к задаче о потоке на сети без усилений

В некоторых случаях задача о потоке на сети с усилениями может быть сведена к задаче о потоке на сети без усиления, которая решается при помощи алгоритма дефекта (Форд и Фалкерсон).

Введем понятие поглощающего и генерирующего цикла.

Определение. Цикл C называется *генерирующим* с направлением обхода по часовой стрелке, если

$$k_c = \frac{\prod\limits_{(x,y)\in C_1} k(x,y)}{\prod\limits_{(x,y)\in C_2} k(x,y)} \geq 1$$

где C_1 и C_2 обозначают множество прямых и обратных дуг для указанного направления обхода цикла C.

Цикл C называется *поглощающим* с направленим обхода по часовой стрелке, если

$$k_c = \frac{\prod\limits_{(x,y)\in C_1} k(x,y)}{\prod\limits_{(x,y)\in C_2} k(x,y)} \leq 1$$

где C_1 и C_2 обозначают множество прямых и обратных дуг для указанного направления обхода цикла C.

Аналогично можно определить генерирующие (поглощающие) циклы с направлением обхода против часовой стрелки. Поскольку граф может содержать генерирующий и (или) поглощающий циклы, то нельзя гарантировать, что каждая единица потока из источника придет в сток (она может быть поглощена каким-нибудь циклом) или что каждая единица потока, прибывшая в сток, первоначально вышла из источника (она может появиться в генерирующем цикле).

Следующие две теоремы [64] содержат необходимые и достаточные условия для возможности преобразования нашей задачи к обыкновенной потоковой задаче на сети без усиления.

Теорема 5.1 (Труемпера). .

Рассматриваемая потоковая задача на сети с усилениями может быть преобразована в аналогичную потоковую задачу на сети без усилений тогда и только тогда, когда существуют вершинные числа $m(x)$, что для всех дуг (x,y)

$$m(x) * k(x,y) : m(y) = 1$$

Теорема 5.2. Вершинные числа, удовлетворяющие условиям теоремы Труемпера существуют в том и только в том случае, когда исходный граф не содержит ни поглощающих, ни генерирующих циклов.

Для сетей, содержащих поглощающие и генерирующие циклы, рассматриваемая задача усложняется. Для ее решения предназначен алгоритм Джевелла [64], который представлен далее.

Наша экономическая модель подразумевает существование генерирующих и поглощающих циклов.

5.4 Задача о потоке минимальной стоимости в сети с усилениями, как задача линейного программирования

Сформулируем нашу задачу следующим образом:

Минимизировать

$$\sum\nolimits_{(x,y)} a(x,y) f(x,y) \tag{34}$$

при условии, что

$$\sum_y f(x,y) - \sum_y k(x,y) f(x,y) = \begin{cases} V, & x = s \\ 0, & x \neq s, x \neq t \end{cases} \tag{35}$$

$$l(x,y) \leq f(x,y) \leq c(x,y), \forall (x,y) \tag{36}$$

(34) определяет общие затраты потока.

(35) показывает, что чистый поток из вершины s равен V, а из любой другой вершины, не считая t, должен быть равен 0.

(36) показывает, что величина потока в каждой дуге должна находиться в интервале между нижней и верхней пропускной способностью.

При введении двойственный переменных $p(x), \gamma_1(x,y)$ и $\gamma_2(x,y)$ имеем двойственную задачу:

Максимизировать

$$V * p(s) - \sum_{x,y} c(x,y) \gamma_1(x,y) + \sum_{x,y} l(x,y) \gamma_2(x,y) \tag{37}$$

при условии, что для всех дуг

$$p(x) - k(x,y) p(y) - \gamma_1(x,y) + \gamma_2(x,y) \leq a(x,y) \tag{38}$$

$$\gamma_1(x,y) \geq 0 \tag{39}$$

$$\gamma_2(x,y) \geq 0 \tag{40}$$

и что для всех вершин $p(x)$ может быть любой знак.

Если задать значения $p(x)$ для всех вершин, то остальные двойственные переменные должны удовлетворять соотношению:

$$-\gamma_1(x,y) + \gamma_2(x,y) \leq a(x,y) - p(x) + k(x,y)p(y) = \xi(x,y) \tag{41}$$

Выбор этих переменных можно осуществлять в соответствии со следующими правилами (т.к. они входят лишь в одно общее для них ограничение (38)):

$$\text{Если } \xi(x,y) \geq 0, \text{то } \gamma_1(x,y) = 0 \text{ и } \gamma_2(x,y) = \xi(x,y) \tag{42}$$

$$\text{Если } \xi(x,y) < 0, \text{то } \gamma_1(x,y) = -\xi(x,y), \gamma_2(x,y) = 0 \tag{43}$$

Условия дополняющей нежесткости имеют вид:

$$\gamma_1(x,y) > 0, \text{то } f(x,y) = c(x,y) \tag{44}$$

$$\gamma_2(x,y) > 0, \text{то } f(x,y) = l(x,y) \tag{45}$$

Или в соответствии с (42) и (43)

$$\xi(x,y) < 0, \text{то } f(x,y) = c(x,y) \tag{46}$$

$$\xi(x,y) > 0, \text{то } f(x,y) = l(x,y) \tag{47}$$

Итак, чтобы решить задачу о потоке минимальной стоимости на сети с усилениями, необходимо найти такие допустимые значения потоков $f(x,y)$ и такие значения двойственных переменных $p(x)$, при которых выполняется условие дополняющей нежесткости для всех дуг (x,y).

5.5 Интерпретация двойственной задачи

Имеется фирма-посредник при выполненни инвестирования. Например, банк осуществляет инвестиционную программу в городском строительстве. Он находит подрядчика, которому на каждом этапе (в каждом узле) выдает определенные денежные средства. Задачей фирмы-подрядчика является максимизация его прибыли (что и соответствует (37)).

5.6 Основные шаги алгоритма Джевелла для решения задачи поиска потока с усилениями минимальной стоимости

Шаг 1. (Задание начальных условий).

Ведется поиск таких значений величин потоков $f(x,y)$ и вершинных чисел $p(x)$, что выполняются условия дополняющей нежесткости (46), (47) и условия допустимости потока (35), (36). Однако из источника можно отправлять количество единиц меньше V.

Шаг 2. (Увеличение потока).

Увеличивается количество единиц потока, выходящих из s, при выполнении всех прямых и двойственных ограничений, а также условий дополняющей нежесткости.

Шаг 3. (Изменение двойственных переменных).

Объясняется, каким образом можно изменять значения двойственных переменных, чтобы большее число единиц потока можно было отправлять из источника.

Выполняем шаг 1 (ищем начальный поток). Затем выполняем шаг 2, на котором посылаем из источника максимальное количество единиц потока таким образом, чтобы выполнялись все условия дополняющей нежесткости. После этого выполняется шаг 3, на котором двойственные переменные изменяются так, что появляется возможность еще большего увеличения потока из источника, затем осуществляется возврат к шагу 2 (затем - к 3).

Процедура повторяется до тех пор, пока из источника не будет отправлено V единиц потока.

5.7 Алгоритм поиска потока с усилениями

Шаг 1. (Задание начальных условий). Данный шаг показывает, как определить множество значений величин потоков $f(x,y)$ и двойственных переменных $p(x)$ для сети, эквивалентной исходной. При этом удовлетворяются все условия допустимости и все условия дополняющей нежесткости, однако чистый поток из источника может быть меньше или равен заданному количеству V единиц потока, отправляемого из источника.

Произвольно задать значения для двойственных переменных $p(x)$, где $x \in X$. Обратиться к условиям дополняющей нежесткости

$$\xi(x,y) = a(x,y) - p(x) + k(x,y)p(y) \leq 0 \Rightarrow f(x,y) = c(x,y) \qquad (48)$$

$$\xi(x,y) = a(x,y) - p(x) + k(x,y)p(y) \geq 0 \Leftarrow f(x,y) = l(x,y) \qquad (49)$$

с тем чтобы определить, какие из значений $f(x,y)$ с ними несовместимы. Для каждой дуги (x,y) выбрать такие значения потока f(x,y), которые совместимы с соответствующими условиями (48) и (49).

Далее определить чистый излишек потока $V(x)$ в каждой вершине x, определяя величину $V(x)$ следующим образом:

$$V(s) = \sum_y f(x,y) - \sum_y k(y,x)f(y,x) - V,$$

$$V(x) = \sum_y f(x,y) - \sum_y k(y,x) f(y,x). \tag{50}$$

Если $V(x) = 0$ для всех x, то текущее решение является максимальным, так как оно представляет собой допустимый поток, который удовлетворяет всем условиям дополняющей нежесткости для выбранных значений $p(x)$. (Заметим, что, как правило, на данном этапе не удается получить оптимальный поток).

Построить новую сеть, добавив к исходной сети вершину S и дуги (S,x), ведущие из S в каждую вершину x, для которой $V(x) \neq 0$. Для каждой дуги (S,x) положить $c(S,x) = |V(x)|$. Кроме того, положить $k(S,x) = +1$, если $V(x) \leq 0$, и $k(S,x) = -1$, если $V(x) \geq 0$. Наконец, для всех дуг (S,x) положить $a(S,x) = 0$.

Пусть поток в каждой добавленной дуге (S,x) равен 0, а во всех остальных дугах поток тот же, каким он был выбран в исходной сети. Очевидно, в новой сети условие сохранения потока во всех промежуточных вершинах не выполняется, поскольку по крайней мере в одной из таких вершин — вершине x — получается $V(x) \neq 0$. Однако, если бы можно было отправить в новую сеть из вершины S достаточное количество единиц потока, которые насытили бы все дуги (S,x), то возникающий в новой сети (недопустимый) поток соответствовал бы допустимому потоку в исходной сети. Последнее связано с тем, что указанный поток доставлял бы в вершину x дополнительное количество единиц потока, в точности совпадающее с излишком чистого потока в вершине x. Более того, потоку минимальной стоимости в новой сети, насыщающему все дуги (S,x), соответствует поток минимальной стоимости в исходной сети, так как все величины $a(S,x)$ равны 0. Следовательно, определяя оптимальный поток в новой сети, мы можем найти оптимальный поток в исходной сети.

Формулировка задачи о потоке минимальной стоимости для новой сети в виде задачи линейного программирования эквивалентна аналогичной формулировке той же задачи для исходной сети. Отличие обоих формулировок состоит лишь в том, что в задаче для новой сети в качестве источника фигурирует новая вершина S. Условия дополняющей нежесткости для новой сети аналогичны таким же условиям для исходной сети. Если для вершинных чисел $p(x)$ сохранить те значения, которые они имели в исходной сети, и положить вершину $p(S)$ равной достаточно большому по модулю отрицательному числу, то условия дополняющей нежесткости будут выполняться и для новой сети. Таким образом, первоначальный выбор значений потока и двойственных переменных в исходной сети позволяет сделать такой выбор значений потоков и двойственных переменных в новой сети, при котором потоки и двойственные переменные удовлетворяют условиям допустимости и условиям дополняющей нежесткости. Итак, теперь необходимо увеличить количество единиц потока, выходящих из вершины S.

Перейти к шагу 2.

Шаг 2. (Увеличение потока). На данном шаге поток из вершины S увеличивается настолько, насколько это возможно. Причем увеличение потока осуществляется так, что условия дополняющей нежесткости (48)- (49) не нарушаются и значения двойственных переменных не изменяются.

Для каждой дуги (x, y) необходимо определить, допускают ли условия дополняющей нежесткости (48), (49) увеличение или уменьшение значения потока $f(x, y)$. Для этого следует сформулировать множество увеличивающих дуг I и множество уменьшающих дуг R (далее на данном шаге будут рассматриваться лишь дуги из множеств I и R).

Чтобы определить, можно ли из S отправить дополнительные единицы потока, используя только дуги из множеств I и R, необходимо последовательно наращивать дерево с корнем в вершине S аналогично тому, как это делалось в алгороитме поиска максимального потока.

Дуги, включаемые в упомянутое дерево, будут окрашиваться. Если некоторая вершина покрывается деревом, то это означает, что дополнительные единицы потока могут быть отправлены из источника в эту вершину по дугам построенного дерева. При этом каждый раз, когда дуга, инцидентная вершине x, будет добавляться к дереву, а значит, окрашиваться, вершина x будет получать метку $f(x)$. Эта метка указывает на количество единиц потока, которые достигли бы вершины x, если из источника по соответствующей цепи была отправлена одна единица потока.

Если помечается сток, то это означает, что цепь из источника в сток, увеличивающая поток, найдена. По этой цепи из источника в сток отправляется максимально возможное количество единиц потока.

Если в процедуре окрашиваний может быть окрашена дуга, образующая цикл, то необходимо проверить, не может ли соответствующий цикл поглощать поток, отправленный из источника. Если может, то в этот цикл из источника посылается максимально возможное количество единиц потока, которое будет в нем поглощаться. Если же в указанном цикле поток, посланный из источника, не может поглощаться, то с одной из дуг цикла снимается окраска и процесс окрашивания продолжается.

Процедура наращивания дерева включает последовательное окрашивание дуг и присвоение вершинам меток $f(x)$. Перед началом процедуры все дуги являются неокрашенными и все вершины - непомеченными, кроме вершины S, для которой $f(S) = 1$. В рассматриваемой процедуре операции по окрашиванию дуг и разметке вершин выполняются следующим образом.

Окрасить дугу (x,y) при выполнении одного из четырех условий:

(1) Вершина x помечена, $f(x) \geq 0$ и $(x, y) \in I$;

(2) Вершина x помечена, $f(x) \leq 0$ и $(x, y) \in R$;

(3) Вершина y помечена, $f(y) \geq 0$ и либо $(x, y) \in R$, $k(x, y) \geq 0$, либо $(x, y) \in I, k(x, y) \leq 0$;

(4) Вершина y помечена, $f(y) \leq 0$ и либо $(x, y) \in I$, $k(x, y) \geq 0$, либо $(x, y) \in R, k(x, y) \leq 0$.

Если дуга (x, y) окрашивается в силу выполнения условия (1) или условия (2) (при этом мы будем говорить, что дуга (x, y) окрашивается из вершины величиной x), то необходимо пометить вершину y величиной $f(y) = f(x)k(x, y)$. Если дуга (x, y) окрашивается в силу выполнения условия (3) или условия (4) (при этом мы будем говорить, что дуга (x, y) окрашивается из вершины y), то следует пометить вершину x величиной $f(x) = f(y)/k(x, y)$.

Подчеркнем, что метка вершины $f(x)$ определяет количество единиц потока, которые накапливаются в вершине x в результате прохождения одной единицы потока по цепи из окрашенных дуг, соединяющей вершины S и x и генерирующей метку $f(x)$.

Процедуру окрашивания и формирования меток продолжать до выполнения одного из следующих трех условий:

(1) Помечен сток.

(2) Некоторая вершина получает две несовпадающие метки.

(3) Нельзя окрасить ни одной новой дуги и пометить ни одной новой вершины.

Если имеет место условие (3), перейти к шагу 3.

Если имеет место условие (1) (а это значит, что найдена единственная цепь из окрашенных дуг, соединяющая источник и сток), следует отправить по данной цепи максимально возможное количество единиц потока. Затем вернуться к началу шага 2.

Если имеет место условие (2), т.е. некоторая вершина x получила две различные метки $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (не ограничивая общности, будем считать, что $f_1(x) < f_2(x)$), необходимо рассмотреть два случая: первый - $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют разные знаки; второй - $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют один и тот же знак (в обоих случаях метки соответствуют двум различным цепям, соединяющим вершины S и x, причем эти цепи могут частично совпадать).

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют разные знаки (в этом случае единица потока, посланная из S по цепи, генерирующей метку $f_1(x)$, вызывает необходимость накопления в вершине x $|f_1(x)|$ единиц потока, а та же единица потока, посланная из S по цепи, генерирующей метку $f_2(x)$, "превращается" в $f_2(x)$ единиц потока в вершине x), необходимо послать по соответствующим цепям максимально возможное количество единиц потока, подобрав их в каждой из цепей так, чтобы необходимость накопления в вершине x, вызванная одним из них, удовлетворясь потоком, приходящим по другой. После этого вернуться к началу шага 2.

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют один и тот же знак (в этом случае уже нельзя гарантировать, что найден поглощающий цикл, который может принять поток, посланный из источника S), следует снова рассмотреть два различных случая: первый - метка $f_2(x)$ порождена меткой $f_1(x)$ (т.е. при вычислении $f_2(x)$ на определенном этапе использовалась метка $f_1(x)$); второй - метка $f_2(x)$ не порождена меткой $f_1(x)$ (в обоих случаях, не ограничивая общности, можно считать, что $|f_1(x)| < |f_2(x)|$).

Если метка $f_2(x)$ порождена меткой $f_1(x)$ (в этом случае из вершины x был помечен цикл C, включающий x, который в силу $k_c = f_1(x_1)/f_2(x) < 1$, что следует из соотношения $|f_1(x)| < |f_2(x)|$, является поглощающим циклом), следует направить из вершины x в соответствующий поглощающий цикл максимально возможное количество единиц потока. После этого перейти к началу шага 2.

Если метка $f_2(x)$ не порождена меткой $f_1(x)$ (в этом случае были найдены две различные цепи, соединяющей вершины S и x, но не был найден какой-либо поглощающий цикл), следует убрать метку $f_2(x)$ и все метки, ею порожденные, а также снять окраску с соответствующих дуг. Затем следует продолжить процедуру окрашивания и формирования меток.

Шаг 3. (Изменение двойственных переменных). На данном шаге определяются новые значения $P^{'}(x)$ для соответствующих двойственных переменных: при этих значениях выполняются условия дополняющей нежесткости. После вычисления новых значений двойственных переменных, детально описываемого ниже, осуществляется переход к шагу 2 в попытке увеличить количество единиц потока, отправляемых из источника.

Для каждой вершины x необходимо следующим образом определить величину $q(x)$:

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & \text{если } x \in L, \\ 0, & \text{если } x \notin L, \end{cases} \tag{51}$$

где L — множество вершин, помеченных на последней итерации шага 2.

Далее определить

$$\delta = min\left\{ \frac{\zeta(x,y)}{[q(x)-k(x,y)q(y)]} \right\}. \tag{52}$$

где минимизация проводится по всем дугам, для которых числитель и знаменатель в приведенном выражении имеют один и тот же знак. Если знаменатель соответствующей дроби для всех дуг равен нулю, то следует закончить выполнение алгоритма: решаемая задача не имеет допустимого решения. В противном случае необходимо следующим образом определить для всех вершин x новые значения $p^{'}(x)$ двойственных переменных:

$$p^{'}(x) = p(x) + \delta q(x).$$

Затем возвратиться к шагу 2.

Обоснование алгоритма поиска потока с усилениями. Мы должны показать, что по окончании выполнения рассматриваемого алгоритма формируется либо оптимальное решение либо такое двойственное решение, которое показывает, что соответствующая задача не имеет допустимого решения.

На шаге 1 рассматриваемого алгоритма задача о потоке минимальной стоимости для исходной сети с усилением преобразуется в аналогичную задачу для новой сети, в которой искомый поток должен насыщать каждую дугу, инцидентную стоку. Поток минимальной стоимости в новой сети, для которого каждая дуга, инцидентная источнику, является насыщенной, определяет оптимальное решение задачи о потоке минимальной стоимости для исходной сети. Следовательно, мы должны только показать, что:

(а) алгоритм находит оптимальное решение задачи о потоке минимальной стоимости для новой сети (при этом максимальный поток насыщает все дуги, инцидентные стоку) или что:

(б) указанная задача не имеет допустимых решений.

(а) Чтобы показать, что выполнение алгоритма заканчивается определением оптимального решения соответствующей задачи для новой сети, необходимо убедиться в выполнении условий дополняющей нежесткости на протяжении всей процедуры алгоритма, пока не будет насыщена каждая дуга, инцидентная источнику (если насытить указанные дуги не удается, то задача не имеет допустимого решения).

Выполнение алгоритма на шаге 1 начинается с решения, для которого выполняются все условия дополняющей нежесткости.

Более того, условия дополняющей нежесткости не нарушаются при всех изменениях потока на шаге 2, поскольку здесь ни в одной дуге не допускается изменение потока, которое может привести к нарушению соответствующего условия дополняющей нежесткости.

Но не нарушаются ли условия дополняющей нежесткости на шаге 3 алгоритма? Рассмотрим любую дугу $(x, y) \in A$. После изменения на шаге

3 вершинных чисел величины $\zeta(x,y)$ меняются на $\zeta^{'}(x,y)$, совпадающие с

$$a(x,y) - p^{'}(x) + k(x,y) = a(x,y) - p(x) - \delta q(x) + k(x,y)[p(y) + \delta q(y)] = \\ = \zeta(x,y) + \delta[-q(x) + k(x,y)q(y)]. \tag{53}$$

Возможны следующие случаи:

Случай 1. Если дуга $(x,y) \in T$, где T - часть наращиваемого в алгоритме дерева, построенная в последней итерации шага 2, то $q(x,y) = k(x,y)q(y)$ и $\zeta^{'}(x,y) = \zeta(x,y) + \delta[-q(x) + q(x)] = \zeta(x,y)$. Поскольку изменение на шаге 3 двойственных переменных не вызывает изменения величины $\zeta(x,y)$, то условия дополняющей нежесткости для дуги (x,y) остаются выполненными.

Случай 2. Если дуга $(x,y) \notin T, x \notin L, y \notin L$, то $q(x) = q(y) = 0$ и $\zeta^{'}(x,y) = \zeta(x,y) + 0,\ \delta = \zeta(x,y)$. Поскольку изменение на шаге 3 двойственных переменных не вызывает изменения величины $\zeta(x,y)$, то условия дополняющей нежесткости для дуги (x,y) остаются выполненными. Возможны еще три случая:

$(x,y) \notin T,\ \ x \in L,\ \ y \notin L$

$(x,y) \notin T,\ \ x \notin L,\ \ y \in L$

$(x,y) \notin T,\ \ x \in L,\ \ y \in L$

Мы представляем читателю возможность убедиться в том, что в каждом из этих случаев изменение значений двойственных переменных не нарушает выполнимости условий дополняющей нежесткости для дуги (x,y). Читатель может сделать это точно так же, как в рассмотренных выше случаях 1 и 2.

(б) Предположим, что алгоритм завершает свою работу на шаге 3 в результате невозможности определения конечного значения для δ. Мы покажем, что в данном случае не существует допустимого потока.

Дополнительный поток из источника при требовании выполнимости условий дополняющей нежесткости для текущих значений двойственных переменных $p(x)$ может достичь только вершин из множества L. Можно ли изменить значения двойственных переменных так, чтобы ко множеству L добавился хотя бы один новый элемент и чтобы тем самым увеличилась вероятность пометки стока или окрашивания некоторого поглощающего цикла ?

Если не учитывать условий дополняющей нежесткости, то можно указать пять возможных случаев, в которых допустимо окрашивание дуги (x,y):

1. $x \in L, \;\; y \notin L \quad f(x) > 0 \quad f(x,y) < c(x,y)$
2. $x \in L, \;\; y \notin L \quad f(x) < 0 \quad f(x,y) > l(x,y)$
3. $x \notin L, \;\; y \in L \quad f(y) > 0 \quad f(x,y) < l(x,y)$
4. $x \notin L, \;\; y \in L \quad f(y) < 0 \quad f(x,y) < c(x,y)$
5. $x \in L, \;\; y \in L \quad (x,y) \notin T$ и дуга (x,y)

образует поглощающий цикл с уже окрашенными дугами.

Тщательный анализ каждого из этих случаев показывает, что в них величина $\zeta(x,y)$ и величина $q(x) - k(x,y)q(y)$ должны быть одного знака. Если же δ определить нельзя, то это означает, что не существует неокрашенной дуги (x,y), для которой указанные величины имеют имеют один и тот же знак. Следовательно, в этом случае ни одна из дуг не может быть окрашена и поток из источника не может распространиться за пределы построенного дерева. Итак, в случае невозможности определить величину δ допустимого потока не существует. Это завершает рассмотрение случая (б) и обоснование алгоритма.

6 Решение сетевых игр

Введение

Рассмотрена задача нахождения решений для различных принципов оптимальности в сетевой игре. Сетевые игры — раздел теории игр, изучающий закономерности формировании устойчивых связей между агентами в условиях конфликта. Сетевые игры — это обобщение игр в нормальной форме на случай взаимодействия игроков, распределенных в пространстве.

Построены алгоритмы, позволяющие находить как оптимальные решения в бескоалиционных сетевых играх: равновесия по Нэшу, максиминные (осторожные) стратегии, попарные и гибридные равновесия, так и оптимальные решения в коалиционных сетевых играх: сильные равновесия, коалиционные равновесия (с произвольной структурой коалиций), C-ядро и компромиссную точку. Задача нахождения коалиционного равновесия рассматривается в самом общем случае — для произвольной структуры коалиций.

Рассматривается частный класс сетевых игр — игры без принуждения, характеризующиеся тем, что игрок может не соглашаться на образование связи произвольным игроком. Доказаны утверждения, согласно которым в играх без принуждения максиминные стратегии как для игроков, так и

[0]Данный раздел написан совместно с Парфеновым А.П.

для коалиций изолируют этих игроков (коалиции) от остальных игроков, в результате чего сеть распадается на компоненты связности.

Показано, что в общем случае равновесия и компромиссные решения в сетевой игре можно найти только с помощью неэффективных переборных алгоритмов. В то же время, в частных случаях, связанных, например, с функциями выигрыша, зависящими от локальных свойств сети, от возможных потоков в сети, от путей, проходящих через вершину игрока, возможны аналитические решения.

6.1 Модель сетевой игры

Рассмотрим граф (N, M), вершинами N которого являются игроки, а дуга интерпретируется как наличие направленной связи между игроками. Далее графы, вершинами которых являются игроки, часто будут называться *сетями* или , а дуги M такого графа — *связями*.

Считается, что игроки могут каким-либо образом воздействовать на формирование определенных связей сети. Во многих сетевых играх для образования связи необходимо согласие обоих игроков.

Желание i-го игрока образовать связь (i, j) можно описать переменной x_{ij}^{out}, которая равна единице, если игрок i хочет образовать связь (i, j) и нулю в противном случае. Индекс “out” при переменной показывает, что связь (i, j) по отношению к игроку i является исходящей. Если x_{ij}^{out} равна единице, будем говорить, что игрок i имеет предложение к игроку j.

Аналогично можно определить переменную x_{ij}^{in}, говорящую о том, что игрок i согласен на образование дуги (j, i) от игрокаj. Индекс “in” говорит о том, что дуга (j, i) является входящей по отношению к игроку i. Если x_{ij}^{in} равно единице, будем говорить, что игрок i принимает предложение игрока j.

Действие x_i игрока в сетевой игре — это то же, что стратегия в игре в нормальной форме, то есть, пара $x_i = (x^{\text{out}}, x^{\text{in}})$ векторов $x^{\text{out}} = (x_{i1}^{\text{out}}, \ldots, x_{in}^{\text{out}})$, $x^{\text{in}} = (x_{i1}^{\text{in}}, \ldots, x_{in}^{\text{in}})$. Множество всевозможных пар этих векторов обозначим через X_i^0. Таким образом, действие игрока определяет, по сути, множество его оппонентов, к которым игрок хочет образовать исходящую связь, и множество оппонентом, на образование входящей связи от которых игрок согласен. Количество всех возможных действий игрока — $2^{2(n-1)}$, где $n = |N|$ — число игроков. Тогда в каждой конкретной игре множество X_i допустимых действий i-го игрока будет подмножеством множества X_i^0.

В сетевой игре *профиль действий* — это то же самое, что ситуация с игре в нормальной форме, то есть, набор действий игроков. В случае, когда нет ограничений на действия игроков, имеется всего $2^{2n(n-1)} = 4^{n(n-1)}$ различных профилей действий. *Обстановка* x_{-i} для i-го игрока есть пара $x_{-i} == (x_{-i}^{\text{out}}, x_{-i}^{\text{in}})$ матриц размера $n \times (n-1)$, элементами которых являются компоненты $(x_{jk}^{\text{out}}, x_{jk}^{\text{in}})$ допустимых действий всех игроков, кроме i-го. Профиль действий x складывается из действия игрока x_i и его обстановки x_{-i}, в этом случае будем писать, что $x = (x_i, x_{-i})$.

Пусть реализовался некоторый профиль действий $x = (x^{\text{out}}, x^{\text{in}})$. Тогда, если мы считаем, что для образования связи (i, j) необходимо и достаточно согласия обоих игроков, результирующая сеть g определяется поэлементным умножением матрицы x^{out} на транспонированную матрицу x^{in}, т.е. $g = x^{\text{out}} \otimes x^{\text{in}^T}$. Множество сетей, достижимых при заданном множестве профилей действий X, обозначим через $G(X)$.

Ясно, что $|G(X)| \leq |X| = \prod_{i=1}^{n} |X_i|$. В общем случае, имеется $2^{n(n-1)}$ различных сетей, что гораздо меньше количества профилей действий.

Подытоживая сказанное, можно определить стратегическую модель сетевой игры как совокупность $N, (f_i, X_i)_{i \in N}$ множества игроков N, их функций выигрыша $(f_i(\cdot))_{i \in N}$ и множеств допустимых действий $(X_i \subseteq X_i^0)_{i \in N}$.

Пример. Пусть игроки не могут препятствовать образованию входящих связей. Тогда множество действий i-го игрока состоит только из действий, в которых он согласен на образование любых входящих связей:

$$X_i = \{x_i \in X_i^0 \mid \forall j \in N, j \neq i \quad x_{ij}^{\text{in}} = 1\}.$$

При этом результирующая сеть $g = x^{\text{out}}$. Обозначим такое множество действий через X_i^S.

Определение. Пусть множества действий игроков таковы, что из того, что i-й игрок может иметь или не иметь предложение к j-му игроку, следует, что j-й игрок может принять, а может и не принять это предложение. Тогда будем говорить, что в сетевой игре для образования связи требуется согласие обоих игроков. Если же $X_i \subseteq X_i^S$, то будем говорить, что для образования связи достаточно желания одного игрока. Игры, в которых для образования связи требуется согласие обоих игроков, для краткости будем называть [151].

Поскольку результирующая сеть в играх, в которых для образования связи требуется желание только одного игрока, взаимно однозначно определяется вектором действий, $g = x^{\text{out}}$ то для произвольной игры в нормальной форме, в которой каждый из игроков имеет не более 2^{n-1} возможных действий, существует сетевая игра с такими же функциями выигрыша и множествами действий $X_i \subseteq X_i^S$. Это значит, что никаких предсказаний о решениях в таких сетевых играх, более общих, чем для некооперативных игр, сделать невозможно. Поэтому далее рассматриваются только игры согласия.

Легко видеть, что сформулированная выше стратегическая модель сетевой игры совпадает с определением игры в нормальной форме, которая также определяется множеством игроков, их множествами действий и функциями выигрыша. Сетевую игру можно рассматривать как обычную некооперативную игру в нормальной форме, если игроки полностью информированы о параметрах игры и выбирают свои действия одновременно и независимо.

6.2 Стратегические концепции решения сетевых игр

Легко видеть, что сформулированная выше стратегическая модель сетевой игры совпадает с определением игры в нормальной форме, которая также определяется множеством игроков, их множествами действий и функциями выигрыша. Сетевую игру можно рассматривать как обычную некооперативную игру в нормальной форме, если игроки полностью информированы о параметрах игры и выбирают свои действия одновременно и независимо.

Равновесие.

Определение. Профиль действий игроков $x \in X$ игры в нормальной форме (N, f_i, X_i) называется , если для любого игрока $i \in N$ и любого его действия $x_i' \in X_i$ $f_i(x_i', x_{-i}) \leq f_i(x)$.

Иначе говоря, ни один из игроков не выигрывает, в одиночку отклоняясь от равновесного по Нэшу профиля действий.

Спецификой сетевых игр является то, что исследователя в основном интересует то, какие сети будут образовываться при рациональном поведении игроков, а не то, какие действия игроков привели к данной сети.

Определение. Сеть g называется *стабильной по Нэшу*, если существует равновесный по Нэшу профиль действий игроков, приводящий к данной сети.

Легко проверить, что если множествами действий игроков являются X_i^0 или X_i^D, то пустая сеть всегда стабильна по Нэшу.

Действительно, в этом случае ни один из игроков не может в одиночку изменить результирующую сеть (и, соответственно, свой выигрыш), если действия остальных игроков не содержат ни предложений, ни согласий на принятие предложений.

С одной стороны, этот факт решает проблему существования равновесия — в отличие от общих некооперативных игр, в которых не гарантируется существование равновесия Нэша (в чистых стратегиях), в сетевых играх как минимум одно равновесие имеется.

Однако, с другой стороны, равновесие Нэша в применении к сетевым играм оказывается довольно слабой концепцией решения, по крайней мере когда для образования связи требуется согласие обоих игроков[1].

Действительно, пустая сеть стабильна по Нэшу независимо от того, какие выигрыши игроки получают в других сетях, даже если выигрыши всех игроков в любой из непустых сетей существенно выше их выигрышей в пустой сети.

Ситуация меняется при переходе к моделям, в которых для образования связи требуется желание только одного игрока. Здесь пустая сеть уже не всегда будет стабильной по Нэшу и более того, как уже сказано выше, возможны любые варианты.

Вкратце коснемся свойств равновесия Нэша в играх согласия.

Лемма 6.0.1. *Если в игре согласия профиль действий x является равновесием Нэша и приводит к результирующей сети g, то профиль действий x', в котором $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = g$, также будет равновесием Нэша (в профиле действий x' отсутствуют "безответные" предложения).*

Следствие 6.0.1. *В игре согласия сеть $g \in G(X)$ стабильна по Нэшу тогда и только тогда, когда профиль действий, в котором $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = g$, является равновесием Нэша.*

Следствие 6.0.2. *В игре согласия сеть $g \in G(X)$ стабильна по Нэшу тогда и только тогда, когда любой из игроков не может выиграть от одностороннего разрыва любого количества своих входящих или исходящих связей (в пределах, дозволенных множествами действий X_i игроков).*

Действительно, добавление одностороннего предложения или одностороннего приема предложения при профиле действий $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = g$ не приводят к изменению результирующей сети.

Можно отметить, что равновесия Нэша в сетевых играх неравнозначны по силе. Есть "правильные" равновесия, в которых добавление предложения в равновесный профиль действий также приводит к равновесному

[1] Например, если множества действий равны X_i^0 или X_i^D.

профилю. А есть "неправильные" равновесия, когда добавление предложения одним игроком приводит к обоюдной выгоде в случае принятия этого предложения другим игроком.

В общем случае, единственный возможный алгоритм нахождения равновесий по Нэшу — полный перебор. Для этого, как доказано выше, достаточно перебрать сети и проверить каждую из них на стабильность по Нэшу. Проверку сети на стабильность по Нэшу можно производить двумя способами. Первый способ — проверка возможных отклонений каждого игрока — занимает $O(|X_1|+\cdots+|X_n|)$ времени. Второй способ — проверка всех сетей на предмет увеличения функции выигрыша какого-либо игрока и его отклонения — занимает $O(n^2|G(X)|)$. Поскольку $|X_1|+\cdots+|X_n| \leq n\max_i |X_i| < n^2|G(X)|$, первый способ всегда выгоднее второго. Итого алгоритм нахождения равновесий по Нэшу требует $O(|G(X)|(|X_1|+\cdots+|X_n|)) \leq O(2^{n^2}n)$ времени.

Пример 1. Пусть $n = 3$ (имеется 3 игрока), а функция выигрыша $f_i(I, M) = 1$, если количество входящих в i дуг равно количеству исходящих дуг, и $f_i(I, M) = 0$ в противном случае. Тогда любая сеть, в которой имеется игрок с количеством входящих дуг, не равным количеству исходящих, не является стабильной по Нэшу, поскольку игроку выгодно отказаться от образования "лишних" дуг. Таким образом, из 64 возможных сетей стабильными по Нэшу являются 4 сети, в которых количества входящих и исходящих дуг у каждого игрока равны: пустая сеть, цикл $(1, 2, 3, 1)$, цикл $(1, 3, 2, 1)$ и полная сеть.

Пример 2. Пусть $n = 8$ (то есть, имеется всего лишь 8 игроков), а множество стратегий ограничено условием $i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow x_{ij}^{\text{out}} = x_{ji}^{\text{out}} = x_{ij}^{\text{in}} = x_{ji}^{\text{in}} = 0$. То есть, рассматриваются только двудольные графы с долями $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{5, 6, 7, 8\}$ (это очень сильное ограничение). В этом случае $|X_i| = 2^8 = 512$, $|G(X)| = 2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$. Тогда нахождение равновесия по Нэшу требует перебора $2^{32} \cdot 8 \cdot 512 = 2^{44} \approx 2 \cdot 10^{13}$ вариантов. Даже на мощном компьютере это займет несколько дней.

Максиминные стратегии.

Максиминная стратегия i-го игрока — это, как известно, стратегия $x_i \in X_i$, на которой достигается $\max_{x_i \in X_i} \min_{(x_j \in X_j)_{j \neq i}} f_i(x_1, \ldots x_n)$. То есть, гарантированный выигрыш i-го игрока. В общем случае, максиминная стратегия находится перебором. Нужно перебрать все возможные сети при каждой стратегии $x_i \in X_i$ игрока i и найти минимум. Затем найти ту стратегию x_i, при которой достигается максимум из этих минимумов. Сложность данного алгоритма — $O(|X_i||G(X)|)$.

Будем называть игру, в которой из $x_i \in X_i$ ($x_i \subseteq (N \setminus \{i\})$) и $x'_i \subseteq x_i$ следует $x'_i \in X_i$. То есть, если игрок i может предложить игроку j образовать связь, то может и не предлагать это сделать. Игры без принуждения — это всегда игры согласия, поскольку в играх с односторонним образованием связей каждый игрок принуждается к ответному согласию.

Утверждение 6.1. *В игре без принуждения существует такая максиминная ситуация для i-го игрока, что для любой дуги (i, j) $(i, j) \notin M$.*

Доказательство. Пусть наша максиминная стратегия — (x_i, x_{-i}). Предположим, что при ее применении получается сеть, в которой имеется непустой набор игроков $J \subseteq N \setminus \{i\}$ такой, что $\forall j \in J \quad (i, j) \in M$. Если при удалении некоторого набора дуг (i, j) выигрыш игрока i уменьшится, ситуацию нельзя считать максиминной, поскольку тогда соответствующие игроки j могут одновременно отказаться от образования этих дуг (что возможно, поскольку рассматривается игра без принуждения), так что дуг не будет, и выигрыш игрока i уменьшится.

Предположим теперь, что при удалении игроком i некоторого набора дуг $(i, j), j \in J'$ получится ситуация (x'_i, x_{-i}) такая, что выигрыш игрока i увеличится: $f_i(x'_i, x_{-i}) > f_i(x_i, x_{-i})$. Поскольку исходная ситуация была максиминной, это значит, что ситуация (x'_i, x_{-i}) не доставляет минимум f_i по стратегиям остальных игроков x_{-i} (если бы она доставляла минимум, возникло бы противоречие с максиминностью отличной от нее ситуации (x_i, x_{-i})). Рассмотрим тогда набор стратегий $x'_{-i} \neq x_{-i}$, который доставляет соответствующий минимум $f_i(x'_i, x'_{-i}) < f_i(x'_i, x_{-i})$. Не умаляя общности, можно считать, что в этом наборе не участвуют предложения остальных игроков образовать дуги из J'. Тогда, даже если первый игрок применяет стратегию x_i, получаем $f_i(x_i, x'_{-i}) = f_i(x'_i, x'_{-i})$. Отсюда следуют соотношения:

$$f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(x_i, x'_{-i}) = f_i(x'_i, x'_{-i}) < f_i(x'_i, x_{-i}).$$

Но (x_i, x_{-i}) и (x'_i, x'_{-i}) — ситуации, в которых достигается минимум. Это значит, что можно перейти к ситуации (x'_i, x'_{-i}), в которой будет меньше дуг (i, j), и она также будет максиминной.

Итак, выигрыш игрока i при удалении некоторых дуг (i, j) не может уменьшиться, а если он может увеличиться, то можно перейти к новой максиминной ситуации, в которой дуг (i, j) оказывается меньше. Повторяя этот процесс до упора, получаем ситуацию, в которой, какие бы мы дуги не удаляли, выигрыш останется неизменным. Это значит, что, поскольку это игра без принуждения, можно удалить все дуги (i, j) и, рассуждая как выше, получим некую максиминную ситуацию $(\emptyset, x'_{-i})$. $\square$

Аналогично доказывается, что существует максиминная ситуация, в которой нет дуг (j, i) — то есть, i-й игрок "оставлен в изоляции".

Это значит, что в играх без принуждения можно найти максиминный выигрыш i-го игрока, используя более простой алгоритм. А именно: рассматриваем все возможные сети из $G(\emptyset, X_{-i})$ и выбираем из них ту, которая минимизирует f_i. Сложность алгоритма — $O(|G(X)|)$.

Пример 1. Пусть $n = 3$, а функция выигрыша $f_i(I, M) = h_1^i(k_i) + h_2^i(k_{||i})$, где k_i — количество дуг в сети, инцидентных i-му игроку, $k_{||i}$ — количество дуг в сети, не инцидентных i-му игроку, h_1^i, h_2^i — некоторые вещественные функции. Тогда максиминный выигрыш каждого игрока равен минимуму функции h_2^i на множестве $\{0, 1, 2\}$.

Пример 2. Пусть $n = 8$, а множество стратегий ограничено условием $i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow x_{ij}^{\text{out}} = x_{ji}^{\text{out}} = x_{ij}^{\text{in}} = x_{ji}^{\text{in}} = 0$. В этом случае $|X_i| = 2^8 = 512$, $|G(X)| = 2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$. Тогда для нахождения максиминного выигрыша каждого игрока требуется перебрать порядка $4 \cdot 10^9$ вариантов. На мощном компьютере это займет несколько минут.

Попарная стабильность.

Определение. В играх согласия будем говорить, что сеть $g' \in G(X)$ *попарно стабильна* тогда, когда:

1. если для любой пары игроков $i, j \in N$ сеть $g' := g \setminus \{ij\} \in G(X)$ (т.е. сеть g' реализуема некоторым профилем действий), то $f_i(g') \leq f_i(g), \quad f_j(g') \leq f_j(g)$.
2. если сеть $g'' = g \cup \{ij\} \in G(X)$ реализуема некоторым профилем действий и в этой сети один из игроков строго выигрывает ($f_i(g'') > f_i(g)$ или $f_j(g'') > f_j(g)$) то второй строго проигрывает.

Данная концепция решения допускает согласованное удаление связи игроками, если это им выгодно, а также (в отличие от равновесия Нэша) согласованное добавление связи. На первый взгляд, этот принцип оптимальности является коалиционным, поскольку предполагает согласованное поведение игроков. Но следует учесть, что в сетевых играх невозможно препятствовать соглашению между игроками i, j относительно дуг $(i, j), (j, i)$, такое соглашение неизбежно. В этом смысле, данный принцип является "бескоалиционным".

Попарно стабильные сети можно найти перебором — это требует $O(|G(X)|n(n-1))$ времени.

Однако попарно стабильная сеть может не быть стабильной но Нэшу, что, несомненно, является недостатком попарной стабильности. Данный недостаток можно преодолеть, требуя от сети не только попарной стабильности, но и стабильности по Нэшу. Такую сеть назовем *гибридно-стабильной*.

Гибридно-стабильные сети также можно найти перебором — это требует $O(|G(X)|(n(n-1)+|X_1|+\cdots+|X_n|))$ времени.

Пример 1. Пусть $n=3$, а функция выигрыша $f_i(I,M)$ равна длине максимальной цепи, начинающейся в i. Тогда сети, в которых у какого-то игрока нет выходящей из него дуги, не являются гибридно-стабильными (ведь каждому игроку тогда выгодно добавить исходящую дугу к другому игроку, а другому игроку это безразлично). Сети, в которых для каждого игрока есть исходящая дуга, делятся на 2 класса:

1. Сети, в которых есть цикл $(1,2,3,1)$ или $(1,3,2,1)$. Они попарно-стабильны, поскольку все игроки получают максимальный выигрыш 2.

2. Сети, в которых такого цикла нет. Не умаляя общности, заметим, что все они изоморфны петле $(1,2,3,2)$. Но в этому случае 3-му игроку выгодно добавить дугу $(3,1)$, чтобы увеличить выигрыш с 1 до 2, а 1-му игроку это безразлично. Тогда в сети появится цикл $(1,2,3,1)$.

Таким образом, попарно-стабильными являются только сети, в которых имеется цикл. К нему могут быть добавлены произвольные дуги. Заметим, что стабильной по Нэшу в данном случае является любая сеть.

Пример 2. Пусть $n=8$, а множество стратегий ограничено условием $i\in\{1,2,3,4\}, j\in\{5,6,7,8\}\Rightarrow x_{ij}^{\text{out}}=x_{ji}^{\text{out}}=x_{ij}^{\text{in}}=x_{ji}^{\text{in}}=0$. В этом случае $|X_i|=2^8=512$, $|G(X)|=2^{32}\approx 4\cdot 10^9$. Для нахождения попарно стабильного равновесия нужно перебрать $7\cdot 8\cdot 2^{32}\approx 2\cdot 10^{11}$ вариантов. На мощном компьютере это займет несколько часов.

6.3 Кооперативные концепции решения сетевых игр

Сильное равновесие.

Определение. Профиль действий x называется , если для любой коалиции $S\subseteq N$ и любого вектора ее действий $x'_S=(x'_i)_{i\in S}\prod_{i\in S}X_i$ из того, что кто-то из участников коалиции строго выигрывает при профиле действий $x'_S, x_{N\setminus S}$, следует, что другой участник коалиции строго проигрывает.

Иначе говоря, для любой коалиции $S \subseteq N$ и любого игрока $i \in S$ из $f_i(g(x'_S, x_{N\setminus S})) > f_i(g(x))$ следует, что найдется такой игрок $j \in S$, что $f_j(g(x'_S, x_{N\setminus S})) < f_j(g(x))$.

Для сильного равновесия Нэша можно сформулировать аналог леммы 6.0.1, который позволяет охарактеризовать сильные равновесия непосредственно в терминах результирующих сетей.

Лемма 6.1.1. *Если в игре, согласия профиль действий x является сильным равновесием Нэша и приводит к результирующей сети g, то профиль действий x', в котором $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = g$, также будет сильным равновесием Нэша.*

Определение. В играх согласия сеть $g' \in G(X)$ называется *достижимой* из сети $g \in G(X)$ отклонениями коалиции $S \subseteq N$, если из того, что $(i, j) \in g', (i, j) \notin g$ следует, что $(i, j) \in S$, а из того, что $(i, j) \in g, (i, j) \notin g'$, следует, что либо $i \in S$, либо $j \in S$.

Определение. В парах согласия сеть $g \in G(X)$ называется тогда и только тогда, когда для любой коалиции S и любой сети g', достижимой из сети g отклонениями коалиции S, из того, что найдется такой участник коалиции $i \in S$, что $f_i(g') > f_i(g)$, следует, что найдется и такой участник коалиции $j \in S$, что $f_j(g') < f_i(g)$.

Таким образом, понятие сильной стабильности вводится только для игр согласия, в которых для образования связи требуется согласие обоих игроков.

Лемма 6.1.2. *В игре согласия сеть $g \in G(X)$ сильно стабильна тогда и только тогда, когда существует сильно равновесный по Нэшу профиль действий, приводящий к сети g.*

Следствие 6.1.1. *Сеть $g \in G(X)$ сильно стабильна тогда и только тогда, когда профиль действий, в котором $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = g$, является сильным равновесием Нэша.*

Можно воспользоваться алгоритмом нахождения сильного равновесия, аналогичным алгоритму нахождения равновесия Нэша. Применение первого способа требует

$$O(|G(X)|n2^n|X_1||X_2|\dots|X_n|) \geq O(|G(X)|^2 n2^n)$$

времени, второго способа — $O(|G(X)|^2 n^2)$ времени. Таким образом, здесь второй способ всегда экономичнее первого. При применении второго способа нужно сравнить все пары сетей, для каждой пары определить минимальную коалицию, которая должна быть задействована, чтобы сделать из первой сети вторую, и проверить, не уменьшился ли выигрыш какого-либо игрока при переходе от первой сети ко второй. Если выигрыш ни одного игрока не уменьшился, а хоть одного — увеличился, то первая сеть не является сильно равновесной по Нэшу.

Сильное равновесие (и сильная стабильность) существенно расширяет возможности игроков по их воздействию на формирование сети. Кроме того, сильно равновесные сети обладают многими привлекательными свойствами, в частности, они всегда оптимальны по Парето.

Однако применение концепции сильного равновесия существенно ограничивается тем, что во многих играх сильные равновесия отсутствуют. Другой проблемой сильной стабильности являются высокие требования к коммуникативным возможностям игроков, их способностям к образованию коалиций, что ограничивает область применения этой концепции лишь играми с небольшим количеством участников. В связи с этим, существует необходимость в концепциях, "промежуточных" между равновесием Нэша и сильным равновесием.

Пример 1. Пусть $n = 3$, а функция выигрыша $f_i(I, M) = h_1^i(k_i) + h_2^i(k_{||i})$, где, как и в примере с максимином, k_i — количество дуг в сети, инцидентных i-му игроку, $k_{||i}$ — количество дуг в сети, не инцидентных i-му игроку, h_1^i — строго возрастающая вещественная функция, h_2^i — строго убывающая вещественная функция (то есть, каждому игроку выгодно общаться с другими игроками, но невыгодно, когда они общаются между собой).

Тогда один игрок может повлиять только на инцидентные дуги, уменьшив их количество, а значит, только уменьшить значение h_1^i. Следовательно, все сети являются равновесными по Нэшу, а на определение сильного равновесия отклонения отдельных игроков не влияют.

Коалиция из двух игроков (допустим, 1 и 2) может увеличить выигрыш одного из игроков (допустим, игрока 1), как добавив инцидентные ему дуги, так и уменьшив количество неинцидентных ему дуг (то есть, дуг между 2 и 3). Добавление дуг между 1 и 2 в любом случае увеличит выигрыш обоих игроков. Это значит, что сильно стабильной является только сеть, в которой нельзя добавить дуги между парами игроков. То есть, полная сеть. Выясним теперь необходимые и достаточные условия сильной стабильности полной сети.

Чтобы уменьшение количества дуг между 2 и 3 не уменьшило выигрыш второго игрока, следует также уменьшить) количество дуг между 1 и 3. Таким образом, у обоих игроков уменьшится и k_i, и $k_{||i}$.

Коалиция из 3 игроков может увеличить выигрыш игрока 1, уменьшая количество дуг между 2 и 3. Опять же, это можно компенсировать для

2-го и 3-го угрока уменьшением количества остальных дуг. Таким образом, получаем необходимые и достаточные условия сильной стабильности полной сети g:

1. для каждой пары (i, j) не существует таких пар чисел k_i, k_j, что выполняются 2 неравенства:

$$\begin{array}{c} h_1^i(4) - h_1^i(4 - k_i) \le h_2^i(4 - k_j) - h_2^i(4) \\ h_1^j(4) - h_1^j(4 - k_j) \le h_2^j(4 - k_i) - h_2^j(4) \end{array}$$

   причем хотя бы одно из неравенств строгое.

2. не существует такой тройки чисел k_{12}, k_{23}, k_{31}, что выполняются 3 неравенства:

$$\begin{array}{c} h_1^1(4) - h_1^1(4 - k_{12} - k_{31}) \le h_2^1(4 - k_{23}) - h_2^1(4) \\ h_1^2(4) - h_1^2(4 - k_{23} - k_{12}) \le h_2^2(4 - k_{31}) - h_2^2(4) \\ h_1^3(4) - h_1^3(4 - k_{31} - k_{23}) \le h_2^3(4 - k_{12}) - h_2^3(4) \end{array}$$

   причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Эти условия можно характеризовать следующим образом: функции h_1^i должны расти быстрее, чем функции h_2^i убывают.

Пример 2. Пусть $n = 8$, а множество стратегий ограничено условием $i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow x_{ij}^{\text{out}} = x_{ji}^{\text{out}} = x_{ij}^{\text{in}} = x_{ji}^{\text{in}} = 0$. В этом случае $|X_i| = 2^8 = 512$, $|G(X)| = 2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$. Тогда для нахождения сильного равновесия нужно перебрать порядка $2^{32^2} \cdot 8^2 = 2^{70} \approx 10^{21}$ вариантов. На самом мощном компьютере это займет много тысячелетий.

Коалиционное равновесие.

Пусть на множестве игроков N введена некая “коалиционная структура”, то есть, множество возможных коалиций $C \subseteq 2^N$ такое, что $\forall i \in N \quad \{i\} \in C$ (то есть, коалиция из одного игрока всегда возможна). Игроки могут объединиться в коалицию D, только если $D \in C$. В бескоалиционных играх коалиционная структура тривиальна: $C = \{\{1\}, \{2\}, \dots \{n\}\}$.

Определение. В играх согласия сеть $g \in G(X)$ называется , если для любой коалиции $S \in C$ и любого вектора ее действий $x'_S = (x'_i)_{i \in S} \in \prod_{i \in S} X_i$ из того, что кто-то из участников коалиции строго выигрывает при $i \in S$ профиле действий $(x'_S, x_{N \setminus S})$, следует, что другой участник коалиции строго проигрывает.

Данное определение выделяет параметрический класс решений игры, представляющих собой, по сути, сильные равновесия Нэша с ограничением на максимальный множество коалиций.

В частности, коалиционное равновесие совпадает с сильным равновесием, если $C = 2^N$. Оно совпадает с равновесием Нэша, если $C = \{\{1\}, \{2\}, \ldots \{n\}\}$ (игра). Оно называется , если $C = \{S \mid |S| \leq k\}$, то есть, возможны только коалиции размера не больше k. Очевидно, что с ростом параметра к множество k-равновесных векторов действий не расширяется. 1-равновесия являются обычными равновесиями Нэша, n-равновесия — сильными равновесиями Нэша. Переход от 1-равновесий к 2-равновесиям в большой степени решает проблему "лишних" равновесий Нэша.

Тогда для игр согласия можно обобщить сильную стабильность до коалиционной стабильности.

Определение. В играх согласия будем говорить, что сеть $g' \in G(X)$ *коалиционно достижима* из сети $g \in G(X)$ отклонением коалиции S, если она достижима (в соответствии с определением достижимости) и $S \in C$.

Определение. Сеть $g \in G(X)$ *коалиционно стабильна*, если для любой сети $g' \in G(X)$, коалиционно достижимой из сети g отклонениями некоторой коалиции S, из того, что кто-то из участников коалиции строго выигрывает от отклонения, следует, что найдется другой участник коалиции, который строго проигрывает.

Также можно доказать и аналоги леммы 6.0.1.

Лемма 6.1.3. *Если в игре согласия профиль действий x является коалиционным равновесием и приводит к результирующей сети g, то профиль действий x', в котором $x'^{\text{in}} = x'^{\text{out}} = gx'^{\text{in}} = g$ также будет коалиционным равновесием.*

Лемма 6.1.4. *Сеть $g \in G(X)$ коалиционно стабильна тогда и только тогда, когда существует коалиционно равновесный профиль действий, приводящий к сети g.*

Как и для сильного равновесия Нэша, для коалиционных равновесий при можно ввести понятие нестрогого коалиционного равновесия. В нем для отклонения коалиции от некоторого профиля действий необходимо строгое увеличение выигрыша всех участников коалиции. В "обычном" же коалиционном равновесии коалиции выгодны отклонения, при которых выигрывают лишь некоторые из ее участников.

Коалиционные равновесия можно найти, пользуясь теми же двумя переборными алгоритмами, что и для нахождения равновесия Нэша и сильно равновесия. В обоих алгоритмах перебираются все возможные сети, но в первом алгоритме рассматриваются все возможные отклонения коалиций в сети, а во втором — все другие сети. При нахождении равновесия Нэша всегда более эффективен первый алгоритм, при нахождении сильного равновесия — второй. В общем случае, может быть более эффективен как первый, так и второй алгоритм.

Сложность первого алгоритма — $O(|G(X)|\sum_{S\in C}(|S|\prod_{i\in S}|X_i|))$. Сложность второго алгоритма — $O(|G(X)|^2(n^2+h))$, где $O(h)$ — сложность проверки того, включает ли в себя данное множество какую-либо коалицию. Например, для равновесий по Нэшу, сильных равновесий и k-равновесий $h=1$. В общем случае, $h=n|C|=O(n2^n)$. Второй алгоритм работает так: берутся все пары сетей и для каждой пары проверяется, отклонения каких игроков необходимы для того, чтобы из первой сети получить вторую. Эти игроки делятся на 3 группы: выигрывающих, проигрывающих и не меняющих свой выигрыш. Рассматриваются все коалиции, не включающие в себя проигрывающих игроков. Если какая-то из этих коалиций имеет хоть одного выигрывающего игрока, первая сеть не является коалиционно равновесной.

Пример 1. Пусть $n=3$, а функция выигрыша $f_i(I,M)=k^i_{\text{out}}-k^i_{\text{in}}$, где k^i_{in} — количество дуг, входящих в i, а k^i_{out} — количество дуг, выходящих из i. Пусть множество возможных коалиций — $C=\{\{1\},\{2,3\}\}$. Тогда в коалиционно равновесной сети нет дуг, входящих в 1, а также дуг, входящих в 2 и в 3 из 1. Таким образом, вершина 1 изолирована. Что касается дуг между 2 и 3, они могут как быть, так и не быть — все 4 равновесные ситуации оптимальны по Парето для игров 2, 3.

Пример 2. Пусть $n=8$, а множество стратегий ограничено условием $i\in\{1,2,3,4\}, j\in\{5,6,7,8\}\Rightarrow x^{\text{out}}_{ij}=x^{\text{out}}_{ji}=x^{\text{in}}_{ij}=x^{\text{in}}_{ji}=0$. В этом случае $|X_i|=2^8=512$, $|G(X)|=2^{32}\approx 4\cdot 10^9$. Для нахождения k-равновесий по первому алгоритму (то, что по второму алгоритму для этого понадобятся сотни тысяч лет, мы уже выяснили) нужно перебрать $2^{32}\cdot C_8^k\cdot k\cdot 64^k$ вариантов. Например, для $k=4$ это будет $2^32\cdot 70\cdot 4\cdot 2^{24}=70\cdot 2^{58}\approx 3\cdot 10^{19}$ вариантов. Для их перебора потребуется мощный компьютер и много столетий.

C-ядро.

Пусть введена некая структура коалиций C. Пусть полезность является трансферабельной. Тогда для каждой коалиции $S\in C$ можно определить гарантированный выигрыш, определяемый максиминной ситуацией для этой коалиции.

Максиминная стратегия коалиции S — это, как известно, набор стратегий $x_S = (x_i \in X_i)_{i \in S}$, на которой достигается $\max_{x_S \in \prod_{i \in S} X_i} \min_{(x_j \in X_j)_{j \notin S}} f_S(x_1, \dots x_n)$, где $f_S(x_1, \dots x_n) = \sum_{i \in S} f_i(x_1, \dots x_n)$. В общем случае, максиминная стратегия коалиции находится перебором. Нужно перебрать все возможные сети при каждой стратегии $x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ коалиции S и найти минимум. Затем найти ту стратегию x_S, при которой достигается максимум из этих минимумов. Сложность данного алгоритма — $O(\prod_{i \in S} |X_i||G(X)|)$.

Утверждение 6.2. *В игре без принуждения существует такая максиминная ситуация для коалиции S, что для любой дуги* $(i, j), i \in S, j \notin S$ $(i, j) \notin M$.

Доказательство. Рассмотрим, для простоты, максимин при фиксированном внутреннем состоянии коалиции S. Максимин по всем стратегиям коалиции S равен, очевидно, максимальному из максиминов по каждому внутреннему состоянию. Поэтому, если окажется, что для максимина при каждом состоянии выполняется утверждение, то оно выполняется и для "общего" максимина.

Пусть наша максиминная стратегия — (x_S, x_{-S}). Предлоложим, что при ее применении получается сеть, в которой имеется непустой набор игроков $J \subseteq N \setminus \{i\}$ такой, что $\forall j \in J \quad \exists i \in S \quad (i, j) \in M$. Если при удалении некоторого набора дуг (i, j) суммарный выигрыш коалиции уменьшится, ситуацию нельзя считать максиминной, поскольку тогда соответствующие игроки j могут одновременно отказаться от образования этих дуг (что возможно, поскольку рассматривается игра без принуждения), так что дуг не будет, и суммарный выигрыш коалиции уменьшится.

Предположим теперь, что при удалении игроками из коалиции S некоторого набора дуг $(i, j), j \in J'$ получится ситуация (x'_S, x_{-S}) такая, что выигрыш коалиции увеличится: $f_S(x'_S, x_{-S}) > f_S(x_S, x_{-S})$. Поскольку исходная ситуация была максиминной, это значит, что ситуация (x'_S, x_{-S}) не доставляет минимум f_S по стратегиям остальных игроков x_{-S} (если бы она доставляла минимум, возникло бы противоречие с максиминностью отличной от нее ситуации (x_S, x_{-S})). Рассмотрим тогда стратегию $x'_{-S} \neq x_{-S}$, которая доставляет соответствующий минимум $f_S(x'_S, x'_{-S}) < f_S(x'_S, x_{-S})$. Не умаляя общности, можно считать, что в этой стратегии не участвуют предложения остальных игроков образовать дуги из J'. Тогда, даже если коалиция применяет стратегию x_S, получаем $f_S(x_S, x'_{-S}) = f_S(x'_S, x'_{-S})$. Отсюда следуют соотношения:

$$f_S(x_S, x_{-S}) \leq f_S(x_S, x'_{-S}) = f_S(x'_S, x'_{-S}) < f_S(x'_S, x_{-S}).$$

Но (x_S, x_{-S}) и (x'_S, x'_{-S}) — ситуации, в которых достигается минимум. Это значит, что можно перейти к ситуации (x'_S, x'_{-S}), в которой будет меньше дуг (i,j), и она также будет максиминной.

Итак, выигрыш колалиции при удалении некоторых дуг (i,j) не может уменьшиться, а если он может увеличиться, то можно перейти к новой максиминной ситуации, в которой дуг (i,j) оказывается меньше. Повторяя этот процесс до упора, получаем ситуацию, в которой, какие бы мы дуги не удаляли, выигрыш останется неизменным. Это значит, что, поскольку это игра без принуждения, можно удалить все дуги (i,j) и, рассуждая как выше, получим некую максиминную ситуацию (x_S, x'_{-S}), в которой нет дуг между S и $N \setminus S$. $\square$

Аналогично доказывается, что существует максиминная ситуация, в которой нет дуг (j,i) — то есть, i-я коалиция "оставлена в изоляции".

Это значит, что в играх без принуждения можно найти максиминный выигрыш коалиции S, используя более простой алгоритм. А именно: рассматриваем все возможные сети из $G(X_S, X_{-S})$, не имеющие дуг между S и $N \setminus S$, и выбираем из них ту, которая минимизирует f_S. Сложность алгоритма — $O(|G(X)|)$.

Мы можем, пользуясь приведенным выше алгоритмом, найти для каждой коалиции $c \in C$ ее гарантированный выигрыш $v(c)$ — всего это займет $O(|G(X)||C|)$ времени. Напомним, что *C-ядром* называется такой дележ $(x_1, \dots x_n)$ полезности $v(N)$, что от него невыгодно отказываться ни одной коалиции. Иначе говоря, выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{i\in N} x_i \le v(N) \\ \vdots \\ \sum_{i \in c} x_i \ge v(c) \\ \vdots \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Итого имеем $|C| + n$ линейных неравенств относительно n переменных. Для этой системы можно решать различные задачи линейного программирования. Если использовать метод Кармаркара, это займет $O(|C|^{3.5})$ времени. Итого можно считать, что сложность алгоритма нахождения C-ядра — $O(|C|(|G(X)| + |C|^{2.5}))$.

Пример 1. Пусть $n = 3$, а функция выигрыша $f_i(I, M)$, как и в примере с попарной стабильностью, равна длине максимальной цепи, начинающейся в i. Тогда 1 игрок может гарантировать себе выигрыш 0, коалиция из 2 игроков — выигрыш $1 + 1 = 2$, а коалиция из всех 3 игроков — выигрыш

$2+2+2=6$. Отклонения одиночных игроков можно не рассматривать, а дележи, предотвращающие отклонения коалиций из 2 и 3 игроков, удовлетворяют системе неравенств:

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3=6\\
&x_1+x_2\geq 2\\
&x_2+x_3\geq 2\\
&x_1+x_3\geq 2\\
&x_1,x_2,x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

Все неравенства активны, так что получаем двумерный шестиугольник. Для него можно ставить дальнейшие оптимизационные задачи. Например, задача лексикографической оптимизации выигрышей игроков 1, 2, 3 имеет решение $(4,2,0)$.

Если структура коалиций, как и в примере с коалиционным равновесием, имеет вид $C=\{\{1\},\{2,3\}\}$, должна выполняться более скромная система неравенств:

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3\leq 6\\
&x_2+x_3\geq 2\\
&x_1,x_2,x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

Здесь уже суммарный выигрыш коалиции не строго равен 6, а лишь ограничивается сверху числом 6 — ведь коалиция $\{1,2,3\}$ не входит в C, а значит, мы уже не требуем оптимальности по Парето. Эта система определяет пятигранник, грани которого — 2 трапеции, 2 треугольника и прямоугольник.

Пример 2. Пусть $n=8$, а множество стратегий ограничено условием $i\in\{1,2,3,4\},j\in\{5,6,7,8\}\Rightarrow x_{ij}^{\text{out}}=x_{ji}^{\text{out}}=x_{ij}^{\text{in}}=x_{ji}^{\text{in}}=0$. В этом случае $|X_i|=2^8=512,\ |G(X)|=2^{32}\approx 4\cdot 10^9$. Тогда для построения характеристической функции потребуется перебрать $2^8\cdot 2^{32}=2^{40}\approx 10^{12}$ вариантов — это займет всего лишь несколько часов на мощном компьютере. Ну а, решение системы неравенств займет гораздо меньше времени (несколько минут).

Компромиссное решение.

Напомним определение компромиссного решения. *Компромиссное решение* [78] — это такое решение $x\in X$, для которого отклонение критерия, наиболее далекого от оптимума, минимально. Формально, это точка $x^*\in X$, в которой достигается:

$$\min_{x^* \in X} \max_{i=1,\dots n} (\max_{x \in X} f_i(x) - f_i(x^*))$$

Искомый минимум — компромиссное отклонение, которое всегда положительно и показывает, насколько мы далеки от оптимизации всех критериев.

Нахождение компромиссного решения можно разбить на 2 шага. На первом шаге для каждого $i = 1, \dots n$ находится $C_i = \max_{x \in X} f_i(x)$. В общем случае, первый шаг выполняется с помощью перебора и имеет временную сложность $O(n|G(X)|)$.

На втором шаге находим значение выражения:

$$\min_{x \in X} \max_{i=1,\dots n} (C_i - f_i(x^*)) = \max_{x \in X} \min_{i=1,\dots n} (f_i(x) - C_i)$$

Обобщенное компромиссное решение — это такое решение, для которого достигается:

$$\max_{x \in X} \min_{i=1,\dots n} (c_i f_i(x) + b_i)$$

где $c_i > 0, b_i$ — произвольные вещественные константы.

Таким образом, задача нахождения компромиссного решения сведена к свертке:

$$h(f_1(x), \dots f_n(x)) = \min_{i=1,\dots n} (c_i f_i(x) + b_i)$$

Далее будем говорить об обобщенном компромиссном решении, поскольку обычное компромиссное решение — это частный случай. В общем случае, обобщенное компромиссное решение находится перебором. Соответствующий алгоритм требует $O(n|G(X)|)$ времени и $O(n)$ памяти. Или, если считать выигрыши для каждой сети только один раз и затем хранить — $O(n|G(X)|)$ времени и $O(n|G(X)|)$ памяти.

Пример 1. Пусть $n = 3$, а функция выигрыша такая же, как и в примере для коалиционного равновесия: $f_i(I, M) = k^i_{\text{out}} - k^i_{\text{in}}$. Несложно видеть, что это игра с нулевой суммой, а значит, компромиссное решение достигается там, где выигрыши всех игроков равны. Иначе говоря, либо на пустой сети, либо на цикле $(1, 2, 3, 1)$, либо на цикле $(1, 3, 2, 1)$, либо на полной сети.

Пример 2. Пусть $n = 8$, а множество стратегий ограничено условием $i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow x^{\text{out}}_{ij} = x^{\text{out}}_{ji} = x^{\text{in}}_{ij} = x^{\text{in}}_{ji} = 0$. В этом случае $|X_i| = 2^8 = 512$, $|G(X)| = 2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$. Нахождение компромиссного решения, так же, как и нахождение максимина, потребует перебора $2^{32} \cdot 8 \approx 3 \cdot 10^{10}$ вариантов, что на мощном компьютере займет порядка часа.

7 Равновесие по Нэшу и компромиссная точка в многокритериальной задаче о назначениях

Введение

В данной заметке построена теоретико-игровая модель, связанная с задачей об оптимальных назначениях [31]. Рассмотрен ряд примеров, в которых найдена компромиссная точка, равновесные по Нэшу ситуации и решение арбитражной схемы Нэша.

Постановка задачи

Для случая шести игроков построены три модели, для которых находятся решения задачи о назначениях на основе разных принципов оптимальности. Рассмотрим множество предприятий $H = \{h_1, ..., h_m\}$, которые предлагают рабочие места и множество работников $S = \{s_1, ..., s_n\}$, желающих устроиться на работу на то или иное предприятие. Считаем, что каждое предприятие h_i имеет одну вакантную должность, на которую оно желает принять сотрудника, и сотрудник может быть принят только на одно предприятие. Правило игры таково, что любой работник может занять вакансию только в том случае, если есть взаимное согласие его и предприятия. Результатом игры является назначение работника на должность на предприятии.

Модель 1

Рассмотрим игру в нормальной форме [101].

$$\Gamma =< I, \{X\}_{i=1}^{6}, \{H\}_{i=1}^{6} >,$$

где

- $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — множество игроков, причем игроки с номерами $1, 2, 3$ из подмножества S множества I, а игроки $4, 5, 6$ из подмножества H.
- X_i — множество стратегий игрока i, $X = \prod\limits_{i=1}^{6} X_i$ — множество всевозможных ситуаций в игре.
- $H_i : X = \prod\limits_{i=1}^{6} X_i \to R_1$ — функция выигрыша игрока i.

Каждый игрок имеет три стратегии: игрок из множества S может выбрать только одного игрока из множества H, а игрок из множества H может выбрать только одного из S.

Далее, для удобства переобозначим игроков из подмножества H следующим образом: $H = \{h_1, h_2, h_3\}$, подразумевая, что h_1 — игрок под номером 1(в множестве H), h_2 — игрок под номером 2 и h_3 — игрок под номером 3. Формально каждое назначение работника на работу можно представить подстановкой вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_k & h_l & h_m \end{pmatrix},$$

где первая строка неизменна и соответствует номерам работников, а вторая — работам. В нашей задаче таких подстановок шесть: $P = \{p_1, p_2, ..., p_6\}$.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_1 & h_3 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix},$$

$$\cdots$$

$$p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_3 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично составляем шесть подстановок из множества $Q = \{q_1, ..., q_6\}$, соответствующих распределению работ по работникам, имея ввиду, что первая строка соответствует номерам работ в множестве H, а вторая строка подстановки отвечает работникам под номерами $1, 2$ и 3 соответственно. Это будут подстановки вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ s_k & s_l & s_m \end{pmatrix}.$$

Ситуацией в игре будем считать подстановку. Заметим, что таким образом мы не исчерпаем множество всех ситуаций в игре, но выделим лишь те из них, которые дают возможность произвести назначения.
Необходимо найти полное компромиссное множество C_H и множество равновесных по Нэшу ситуаций N.

Введем матрицы полезности A, B для игроков из подмножеств S и H:

Матрица A (номера строк соответсвуют номерам игроков из подмножества S, а столбцы отвечают набору h_1, h_2, h_3 соответственно):

$$A = \begin{pmatrix} 75 & 22 & 94 \\ 33 & 41 & 86 \\ 45 & 13 & 54 \end{pmatrix}$$

Матрица B (номера строк отвечают набору h_1, h_2, h_3 соответственно,а номера столбцов — порядковым номерам игроков из S):

$$B = \begin{pmatrix} 94 & 71 & 17 \\ 30 & 32 & 18 \\ 59 & 85 & 38 \end{pmatrix}.$$

Функции выигрыша игроков зададим на множестве подстановок P следующим образом:

$$\begin{aligned} H_1(p_1) &= \alpha_{1h_1} = 76, \\ H_2(p_1) &= \alpha_{2h_2} = 41, \\ H_3(p_1) &= \alpha_{3h_3} = 54, \\ H_4(p_1) &= \beta_{h_1 1} = 94, \\ H_5(p_1) &= \beta_{h_2 2} = 32, \\ H_6(p_1) &= \beta_{h_3 3} = 38, \\ &\dots \end{aligned}$$

где α_{lh_k} - элемент матрицы A, стоящий на пересечении l-ой строки и h_k-го столбца, а $\beta_{h_k l}$ - элемент матрицы B, стоящий на пересечении h_k-ой строки и l-го столбца. На множестве подстановок Q функции выигрыша задаим аналогичным образом, причем на подстановках из множеств P и Q с одинаковыми номерами они будут совпадать.

Действительно, подстановки с одинаковыми номерами соответствуют одной и той же ситуации в игре. Поэтому число различных ситуаций в игре в два раза меньне, чем общее число подстановок и равно шести (учтем это при составлении матрицы выигрышей). Матрица выигрышей имеет вид (строки соответствуют подстановкам $p_1, ..., p_6$, образующим множество ситуаций X, столбцы - номерам игроков из множества I):

$$\begin{pmatrix} 76 & 41 & 54 & 94 & 32 & 38 \\ 22 & 33 & 54 & 30 & 71 & 38 \\ 94 & 41 & 45 & 59 & 32 & 17 \\ 94 & 33 & 13 & 94 & 71 & 18 \\ 76 & 86 & 13 & 94 & 85 & 18 \\ 22 & 86 & 45 & 30 & 85 & 17 \end{pmatrix}$$

Вычислим идеальный вектор $M = (M_1, ..., M_6)$ по формуле

$$M_i = \max_{x \in X} H_i(x)$$

Получили следующий результат:

$$M = (94, 86, 54, 94, 85, 38).$$

Вычислим компромиссное множество C_H по формуле:

$$C_H = \{x \in X : \max_i (M_i - H_i(x)) \leq \max_i (M_i - H_i(x')), \forall x' \in X\}$$

Получаем:

$$C_H = \{p_5\}.$$

Ситуация p_5 дает назначения: первый работник распределен на первое предприятие (соответсвенно первое предприятие получило первого работника), второй - на третье и третий - на второе. Заметим, что полное компромиссное множество обладает тем свойством, что наименее удовлетворенному игроку дает его гарантированный выигрыш. В соответствии с заданием функций выигрыша третий игрок удовлетворен менее остальных в этой ситуации и получает свой гарантированный выигрыш равный 13, то есть $H_3(p_5) = 13$.

Множество ситуаций равновесия по Нэшу находим следующим образом:

$$\{x^* \in X : H_i(x^* \parallel x) \leq H_i(x), \forall i \in I\},$$

$$\text{где} (x^* \parallel x) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, ..., x_6).$$

В нашей задаче, если какой-либо из шести игроков изменит свой выбор, при том что другие игроки его не изменят, нам просто не удастся произвести его назначение. Другими словами, его функция выигрыша будет равна нулю. Поэтому все имеющиеся в игре ситуации являются равновесными по нэшу.

Модель 2

Пусть $H = (h_1, h_2, h_3)$— множество работ,
$S = (s_1, s_2, s_3)$— множество работников. Заданы матрицы эффективности A и B для работников и работ соответственно. Решим две задачи об оптимальных назначениях: назначим работников на работы и распределим работы среди работников так, чтобы максимизировать общую полезность для тех и других.

1. Задача о назначении для работников.
Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 15 & 12 & 8 \\ 32 & 30 & 18 \end{pmatrix}$$

где $a_{ij}(i = 1..3, j = 1..3)$ — эффективность назначения работника i на работу j. Решаем задачу венгерским алгоритмом и получаем матрицу назначений

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда эффективность назначений будет

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} * x_{ij} = 40 + 8 + 30 = 78$$

2. Задача о распределении работ среди работников.
Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 21 \\ 11 & 7 & 5 \\ 8 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

где $b_{ij}(i = 1..3, j = 1..3)$— эффективность распределения работы i на работника j. Решая задачу аналогичным способом, получаем матрицу назначений

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда эффективность распределения

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij} * y_{ij} = 21 + 11 + 16 = 48.$$

Из первой и второй задачи видно, что два из трех назначений не совпали. Таким образом, если назначать работников на работы и распределять работы среди работников независимо друг от друга, максимизируя только собственную эффективность, то возможно приемлемых назначений сделать не удастся. Один из вариантов решения этой проблемы состоит в создании профсоюза работников и профсоюза работодателей, которые, заботясь об интересах своих членов, стремятся найти взаимовыгодное решение путем переговоров.

Модель 3

Задача, которую решает эта модель, заключается в том, как прийти к соглашению разумным игрокам при совместном выборе решения в ходе переговоров. Зададим биматричную игру для двух игроков — профсоюза работников S и профсоюза работодателей H матрицей выигрышей:

$$\begin{pmatrix} (6,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,6) \end{pmatrix}$$

На плоскости (K_1,K_2) (K_1 — функция выигрыша профсоюза работников (игрок 1), K_2 — функция выигрыша профсоюза работодателей (игрок 2)) рассмотрим множество R, соответствуюшее возможным векторам выигрышей в совместных смешанных стратегиях для нашей игры. Действуя совместно, игроки могут реализовать любой выигрыш в смешанных стратегиях в области R (граница области R — треугольник с вершинами $O(0,0), a(2,6), b(6,2)$). Однако это не означает, что они могут договориться о любом исходе игры. Так, для профсоюза S наиболее предпочтительна точка (6,2), а для профсоюза H— точка (2,6). Ни один из игроков не согласиться с результатами переговоров если его выигрыш будет меньше максиминного значения, поскольку этот выигрыш он может получить самостоятельно (независимо от партнера). Максиминные смешанные стратегии находятся следующим образом:

$$\max_x \min\{K_1(x,\beta_1), K_1(x,\beta_2)\} = \min\{K_1(x^0,\beta_1), K_1(x^0,\beta_2)\}$$

где β_1, β_2 — чистые стратегии игрока 2, $x^0 = (\xi^0, 1-\xi^0), 0 \leq \xi \leq 1$ — смешанная стратегия игрока 1, которую он намерен выбрать, чтобы максимально увеличить одну из двух величин $K_1(x,\beta_1), K_1(x,\beta_2)$.
Максиминные смешанные стратегии игроков имеют вид $x^0 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$,
$y^0 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ соответственно, а вектор выигрышей в максиминных стратегиях $(v_1^0, v_2^0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Поэтому множество S, возможное для переговоров, ограничено точками $a(2,6), b(6,2), c, d(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), e$ (c, e — точки пересечения лучей, выходящих из точкиd и параллельных осям, со сторонами треугольника). Это и есть *переговорное множество игры.* Далее, действуя совместно, игроки всегда могут договориться выбирать точки на отрезке $\overline{ab}$, поскольку это выгодно им обоим (отрезок $\overline{ab}$ соответствует ситуациям, оптимальным по Парето). Надо выбрать точку $(\overline{v_1}, \overline{v_2})$ из множества S, которая получится в результате переговоров. Арбитрижная схема Нэша [166] дает вектор $(\overline{v_1}, \overline{v_2}) = (4,4)$.

8 Конкурентная пространственная модель ценообразования

На хорошо организованном конкурентном рынке в каждый данный момент и в данном месте обычно существует единая цена на товар. Это результат действий спекулянтов, которые внимательно следят за рынком и, как только узнают о различии в ценах, покупают по дешевое цене и продают по более высокой, что приносит им прибыль, и в тоже время, как правило, способствует выравниванию цен. Никто не устанавливает и не навязывает эту систему. Она складывается в результате действий механизма предложения и спроса [1]. Не все колебания цен можно предвидеть с такой же точностью, как, например, сезонность сбора урожая. Но в той мере, в какой спекулянты в состоянии сегодня составить более или менее точное представление о предстоящей нехватке какого либо товара, они уже сейчас могут покупать его, для того чтобы продать в будущем. Тем самым они вызывают, во-первых, сокращение существующего ныне предложения, во-вторых, повышение действующей в настоящее время цены, в-третьих, увеличение запасов, в-четвертых, рост будущего предложения, в-пятых, снижение будущих цен — или, короче говоря, относительную стабилизацию цены и потребления во времени.

В модели фигурируют а) производители товаров; б) перекупщики, или спекулянты, которые покупая товар в одном месте у производителей, продают его в другом, по более высокой цене.

Имеется рынок, включающий в себя несколько городов: $M_1 \ldots M_n$, несколько типов товара: $1 \ldots K$.

Пусть $N_1 \ldots N_m$ — пункты производства товаров. Перекупщики, скупая товары у производителей в этих пунктах, развозят его по городам $M_1 \ldots M_n$. Пусть в каждом пункте производства N_i имеется n_i производителей, т.е. в пункте N_1 — n_1 производителей, N_2 — n_2 $\ldots$ N_m — n_m. Производители выпускают продукцию К типов. Пусть $X^k_{i_{N_j}}$ — это предложение (производство) i-тым ппроизводителем в пункте N_j товара типа k. Тогда общее производство в пункте N_j k-того типа товара это:

$$\bar{x}^k_{N_j} = X^k_{1_{N_j}} + X^k_{2_{N_j}} + \ldots + X^k_{n_{j_{N_j}}} = \sum_{i=1}^{n_j} X^k_{i_{N_j}}.$$

Введем функцию затрат $C^k_{i_{N_j}}(y)$ на производство y единиц k-того типа товара производителем i, $i = 1 \ldots n_j$, в каждом пункте производства N_j. Цена, по которой производители продают свой товар типа k перекупщикам в пункте N_j, есть некоторая функция $P^k_{N_j}(\bar{x}^k_{N_j})$. Тогда общий доход каждого из производителей в пункте N_j определяется величиной:

$$U_{i_{N_j}} = \sum_{k=1}^{K} P^k_{N_j}(\bar{x}^k_{N_j}) X^k_{i\ N_j} - \sum_{k=1}^{K} C^k_{i_{N_j}}(X^k_{N_j}) \quad i = 1 \dots n_i$$

Пусть имеется T перевозчиков (спекулянтов), которые, скупая товар у производителей, развозят его по пунктам потребления $M_1 \dots M_n$. Пусть γ^k_{ji} - стоимость перевозки единицы k-того типа товара из пункта производства N_j в пункт потребления M_i. Решая для каждого из перевозчиков так называемую задачу "коммивояжера", которая состоит в том, чтобы объехать пункты потребления и производства таким образом, чтобы транспортные издержки оказались минимальными, можно найти тот маршрут, который будет миминизировать транспортные расходы.

Пусть $Y^k_{t_{ji}}$ — это то количество товара типа k, которое перевозщик t привез в пункт M_i из пункта N_j, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$. Тогда общее количество товара типа k, которое привезли все перекупщики в пункт M_i определяется таким образом: $\bar{y}^k_{M_i} = \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{j=1}^{m} Y^k_{t_{ji}}$. Эта величина будет определять цену на товар типа k в пункте M_i: $R^k_{M_i} = R^k_{M_i}(\bar{y}^k_{M_i})$, $i = 1 \dots n$. Пусть общие расходы, связанные с перевозкой из пункта производства N_j в пункт потребления M_i единицы k-того типа товара, его страхованием, хранением определяется величиной $\xi^k_{(ji)}$. Тогда совокупный доход перекупщика t будет определяться величиной:

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} Y^k_{t_{ji}} R^k_{M_i} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} \left(\xi^k_{(ji)}(Y^k_{t_{(ji)}}) + P^k_{N_j} Y^k_{t_{(ji)}} \right)$$

В качестве примера оптимальности рассмотрим равновесие Нэша. Теорема Нэша позволяет утверждать, что множество равновесных по Нэшу исходов непусто. Для того чтобы его вычислить требуется решить следующую систему уравнений:

$$u_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i,$$

а это эквивалентно условиям:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x^*) = 0,$$

для всех i.

Рассмотрим условия нахождения равновесных по Нэшу исходов для производителей. Функция дохода для производителей определяется следующим образом:

$$U_{i_{N_j}} = \sum_{k=1}^{K} P^k_{N_j}(\bar{x}^k_{N_j}) X^k_{i\ N_j} - \sum_{k=1}^{K} C^k_{i_{N_j}}(X^k_{i\ N_j}) \quad i = 1 \ldots n_i$$

Рассмотрим относительно затрат на производство два случая: а)нулевые затраты; б)затраты, зависящие от объема производства. В предположении нулевых затрат получим что исход, равновесный по Нэшу, удовлетворяет равенству:

$$X^{k^*}_{N_j} P^{k'}_{N_j}(\bar{x}^*) + P^k(\bar{x}^*) = 0$$

$$X^{k^*}_{N_j} = -\frac{P^k_{N_j}(\bar{x}^*)}{P^{k'}_{N_j}(\bar{x}^*)}$$

В предположении затрат, зависящих от объема производства получаем, что равновесный по Нэшу исход удовлетворяет равенству:

$$P^k_{N_j}(\bar{x}^{k*}_{N_j}) + X^{k^*}_{i\ N_j} \frac{\partial P^k_{N_j}}{\partial X^k_{i\ N_j}} - \frac{\partial C^k_{i\ N_j}}{\partial X^k_{i\ N_j}} = 0,$$

где $C^k_{i\ N_j}$ — затраты на производство товара k в объеме $X^k_{i\ N_j}$.

$$X^{k^*}_{N_j} = \left(\frac{\partial C^k_{i\ N_j}}{\partial X^k_{i\ N_j}} - P^k_{N_j}(\bar{x}^{k*}_{N_j}) \right) / \frac{\partial P^k{}_{N_j}}{\partial X^k_{i\ N_j}}(\bar{x}^{k*}_{N_j})$$

С перекупщиками аналогичная ситуация:

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} Y^k_{t_{ji}} R^k_{M_i} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} \left(\xi^k_{(ji)}(Y^k_{t_{(ji)}}) + P^k_{N_j} Y^k_{t_{(ji)}} \right)$$

Ситуация равновесия по Нэшу удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_i}(y^*) = 0,$$

или

$$R^k_{M_i} + Y^{k\,*}_{t_{ji}} \frac{\partial R^k_{M_i}}{\partial Y^k_{t_{ji}}} - \frac{\partial \xi^k_{t_{ji}}}{\partial Y^k_{t_{ji}}} + P^k_{N_i} = 0.$$

Пример.

а)Производители.

Пусть цена на товар — некоторая убывающая вогнутая функция (т.е. с увеличением предложения товара на рынке цена на этот товар падает.) Пусть $P^k_{N_j} = P^k_{0N_j} - \bar{x}^k_{N_j}$, где $P^k_{0N_j}$ - некоторая const, причем $P^k_{0N_j} > \bar{x}^k_{N_j}, P^k_{N_j}(0) > 0, P' > 0, P'' < 0$.

Предположим, что функция затрат линейна относительно количества произведенного товара:

$$C^k_{i_{N_j}} = C^k_{0i_{N_j}} X^k_{i_{N_j}},$$

где $C^k_{0i_{N_j}}$ — некоторая константа, $C^k_{0i_{N_j}} > 0$.

Пусть имеется два пункта производства, в каждом из них по одному производителю, каждый из которых выпускает разные типы товаров. Количество произведенного товара будем определять в условных единицах (например, в тоннах). Определим необходимые константы:

$$P^1_{0N_1} = 3, P^2_{0N_2} = 4,$$
$$C^1_{0N_1} = 0,2, C^2_{0N_2} = 0,25.$$

При таких условиях получим:

$${X^1}^*_{N_1} = 1,246$$

$${X^2}^*_{N_2} = 2,25$$

б)Перекупщики.

Аналогично, пусть цена на товар в пункте реализации — некоторая убывающая функция (чем больше предложение, тем меньше цена). Пусть

$$R^k_{M_i} = R^k_{0M_i} - \bar{y}^k_{M_i},$$

где $R^k_{0M_i}$ - некоторая константа, причем

$$R^k_{0M_i} > \bar{y}^k_{M_i}, R^k_{M_i}(0) > 0, R' > 0, R'' < 0.$$

Пусть функция затрат — линейная функция:

$$\xi^k_{(ji)} = \xi^k_{{(ji)}_0} Y^k_{t_{ji}},$$

где $\xi^k_{{(ji)}_0}$ - некоторая константа, $\xi^k_{{(ji)}_0} > 0$. Подсчитаем цены, по которым производители продают свой товар типа k в пункте производства N_j:

$$P^k_{N_j} = P^k_{0N_j} - \bar{x}^k_{N_j}.$$

Отсюда при уже полученных результатах имеем:

$$P^1_{N_1} = 1,754$$
$$P^2_{N_2} = 1,75$$

Пусть имеется перекупщик, развозящий товары по пунктам потребления M_1 и M_2. Введем необходимые константы для расчета равновесия по Нэшу:

$$R^1_{0M_1} = 3,5, R^2_{0M_1} = 4,7,$$
$$R^1_{0M_2} = 2,8, R^2_{0M_2} = 4.$$
$$\xi^1_{(11)_0} = 0,3, \xi^2_{(12)_0} = 0,4,$$
$$\xi^2_{(21)_0} = 0,29, \xi^2_{(22)_0} = 0,3.$$

При таких условиях получим:

$${Y^1}^*_{11} = 0,802,$$
$${Y^1}^*_{12} = 0,446,$$
$${Y^2}^*_{21} = 1,2058,$$
$${Y^2}^*_{22} = 0,983.$$

9 Многошаговая игра аукциона

9.1 Введение

В данном разделе рассматриваем дискретные игры многих лиц, моделирующие сравнительно узкий класс экономических конфликтных процессов купли-продажи аукционного типа. Впервые для анализа аукционов теорию игр использовал В.Викри в 1961 году. В дальнейшем теоретико-игровые модели аукционов рассматривали в своих работах в 1967—2000 годах Р.Вилсон, П.Милгром, Р.Вебер, П.Клемперьер и другие авторы. В данном разделе построен и исследован аукцион теоретико-игрового типа со многими продавцами. Ранее модель такого типа не рассматривалась. Также впервые найдено оптимальное решение в виде компромиссной точки

[0] Данный раздел написан совместно с Грицаем К.Н.

для указанной модели. В работе формализуется динамическая теоретико-игровая модель аукциона с конечным числом покупателей и конечным числом продавцов. При построении теоретико-игровой модели аукциона со многими продавцами используется типа аукциона закрытой цены: аукцион первой цены. Указанный аукцион проводится по следующим правилам: 1) конечное число продавцов одновременно и независимо друг от друга и от покупателей выставляют на торги каждый свой лот, имея его оценку и указывая цену; 2) конечное число покупателей одновременно и независимо друг от друга и от продавцов называют свои цены по каждому выставляемому на торги лоту, имея по ним свои оценки. После этого арбитр определяет выигравших покупателей и продавших товар продавцов. В соответствии с правилами аукциона, которые подробно описываются ниже, предполагаются выполненными следующие условия: а) число продавцов не превышает числа покупателей; б) каждому участнику аукциона известны функции выигрыша всех игроков. Лот получает покупатель, назвавший максимальную цену за этот лот. В случае, если на один лот претендует несколько покупателей с одинаковой ценой, между ними разыгрывается аукцион с одним продавцом. На втором шаге процесс повторяется с меньшим количеством продавцов и покупателей (удаляются продавцы, реализовавшие лоты, и купившие их покупатели). Процесс заканчивается после того, как все продавцы продадут свои лоты.

9.2 Модель аукционов с ограничением по оценке продаваемых покупателю лотов

В предлагаемой модели продавцы $i = 1, \ldots, n$, составляющие множество $N \neq \emptyset$, одновременно и независимо друг от друга и от покупателей выставляют на торги каждый свой лот. Продавец $i \in N$ имея оценку лота $r_i > 0$, указывает цену за свой лот $y_i > 0$, где $i = 1, \ldots, n$, $y_i \in Y_i$ ($Y_i = [0, 1, \ldots, l_i]$ —множество стратегий продавца i-го лота, где l_i - натуральное число). Также покупатели, составляющие множество $M \neq \emptyset$, одновременно и независимо друг от друга и от продавцов указывают свои цены по каждому выставляемому на торги лоту $x_{ji} > 0$, имея по ним свои оценки $v_{ji} > 0$, где $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$ и $x_{ji} \in X_j$ ($X_j = [0, 1, \ldots, k_j]$ — множество стратегий j-го покупателя, где k_j - натуральное число). Предполагается, что число продавцов не превышает числа покупателей, $n \leq m$. Каждому игроку известны функции выигрыша всех игроков: для покупателя функция выигрыша равна разности между его оценкой лота и ценой, объявляемой им за этот лот, для продавца функция выигрыша равна разности между ценой, объявляемой им за его лот, и его оценкой этого лота.

В модели рассматриваются два случая.

Случай 1. Если на один лот i имеется несколько покупателей с одинаковой ценой $x_{ji} = x_{ki}$, где $k \neq j$, $i = 1, \ldots, n$, и $j, k = 1, \ldots, m$, то между ними разыгрывается аукцион с одним продавцом, рассматриваемый в [156] и [157].

Случай 1. Если на каждый лот i имеется несколько покупателей с разными ценами $x_{ji} \neq x_{ki}$, где $k \neq j$, $i = 1, \ldots, n$, и $j, k = 1, \ldots, m$, то его получает покупатель, назвавший высшую цену.

Будем считать, что если покупатель выигрывает более одного лота, то ему достается только один лот, оценка которого была самой высокой среди всех остальных его оценок лотов: $v_{j_k i_p} = \max\{v_{j_k s} \,|s \in S_{j_k}\}$, где $j_k \in M_k$ - множеству игроков, купивших лоты, S_{j_k} — множество лотов, назначенные цены за которые j_k-ым покупателем суть самые высокие среди всех назначенных цен остальными покупателями за эти лоты: $x_{j_k s} > \max\{x_{ls} \,|1 \leq l \leq m,\ l \neq j_k\}$, $i_p \in N_p$—множество игроков, продавших лоты. Остальные лоты из множества S_{j_k} достаются покупателям, имеющим максимальную оценку по указанным лотам и назначившим вторую по величине цену за эти лоты, которая удовлетворяет условиям игры описанной ниже.

Рассмотрим многошаговую теоретико-игровую модель аукциона первой цены. На первом шаге игры в результате выбора покупателями и продавцами своих стратегий $x_{ji}^1 \in X_j^1$ и $y_i^1 \in Y_i^1$, где $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$, реализуется ситуация

$$z^1 = \Big(x_{11}^1, x_{12}^1, \ldots, x_{m(n-1)}^1, x_{mn}^1; y_1^1, \ldots, y_n^1), \tag{54}$$

после чего, соответственно, определяются выигрыши покупателей и продавцов: $H_{j_k^1}(z^1) = v_{j_k^1 i_p^1} - x_{j_k^1 i_p^1}$— для игрока, купившего лот на первом шаге игры, где $j_k^1 \in M_k^1$ — множеству покупателей, купивших лот на первом шаге игры и $K_{i_p^1}(z^1) = x_{j_k^1 i_p^1} - r_{i_p^1}$ — для игрока, продавшего лот на первом шаге игры, где $i_p^1 \in N_p^1$— множеству продавцов, продавших лот на первом шаге игры. Покупатели, купившие лот, и продавцы, реализовавшие свой лот, покидают аукцион.

На первом шаге игры для любой реализовавшейся ситуации $z^1 \in X_1^1 \times \ldots \times X_m^1 \times Y_1^1 \times \ldots \times Y_n^1 = Z^1$ получаем подыгру

$$\Gamma_f^1 = \left\langle \begin{array}{l} M^1 = \{1, ..., m\}, \\ N^1 = \{1, ..., n\}, \{X_j^1\}_{j=1}^{j=m}, \\ \{Y_i^1\}_{i=1}^{i=n}, \{H_j^1\}_{j=1}^{j=m}, \{K_i^1\}_{i=1}^{i=n} \end{array} \right\rangle$$

аукциона первой цены Γ_f в нормальной форме.

Здесь

$$H_j^1(z^1) = \begin{cases} v_{ji} - x_{ji}^1, \\ \textit{если} \quad v_{ji} = \max\left\{v_{js^1} \left| s^1 \in S_j^1 \right.\right\}, \quad S_j^1 \neq \emptyset \quad \textit{и} \quad x_{ji}^1 \geq y_i^1, \\ \textit{где} \quad j = 1, \ldots, m \quad \textit{и} \quad i = 1, \ldots, n, \\ 0, \\ \textit{если} \quad S_j^1 = \emptyset, \quad x_{ji}^1 < y_i^1, \\ \textit{где} \quad j = 1, \ldots, m \quad \textit{и} \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{55}$$

$$K_i^1(z^1) = \begin{cases} x_{ji}^1 - r_i, \\ \textit{если существует } j \textit{ такое, что} \quad x_{ji}^1 \geq y_i^1, \\ v_{ji} = \max\left\{v_{js^1} \left| s^1 \in S_j^1 \right.\right\}, \\ \textit{где} \quad j = 1, \ldots, m \quad \textit{и} \quad i = 1, \ldots, n, \\ 0, \\ \textit{если для любого } j \quad x_{ji}^1 < y_i^1, \\ v_{ji} \neq \max\left\{v_{js^1} \left| s^1 \in S_j^1 \right.\right\}, \\ \textit{где} \quad j = 1, \ldots, m \quad \textit{и} \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{56}$$

Пусть после $(r-1)$-ого шага игры продавцами было продано покупателям d лотов . На r-ом шаге игры в результате выбора покупателями и продавцами своих стратегий $x_{ji}^r \in X_j^r$ и $y_i^r \in Y_i^r$, где $i = 1, \ldots, (n-d)$ и $j = 1, \ldots, (m-d)$, реализуется ситуация

$$z^r = \left(x_{11}^r, x_{12}^r, \ldots, x_{(m-d)(n-1-d)}^r, x_{(m-d)(n-d)}^r; y_1, \ldots, y_{(n-d)}{}^r\right), \tag{57}$$

после чего, соответственно, определяются выигрыши покупателей и продавцов: $H_{j_k^r}(z^r) = v_{j_k^r i_p^r} - x_{j_k^r i_p^r}$ — для игрока, купившего лот на r-ом шаге игры, где $j_k^r \in M_k^r$ — множеству покупателей, купивших лот на r-ом шаге игры и $K_{i_p^r}(z^r) = x_{j_k^r i_p^r} - r_{i_p^r}$ — для игрока, продавшего лот на r-ом шаге игры, где $i_p^r \in N_p^r$ — множеству продавцов, продавших лот на r-ом шаге игры. Покупатели, купившие лот, и продавцы, реализовавшие свой лот, покидают аукцион.

На r-ом шаге игры для любой реализовавшейся ситуации $z^r \in X_1^r \times \ldots \times X_{(m-d)}^r \times Y_1^r \times \ldots \times Y_{(n-d)}^r = Z^r$ получаем подыгру

$$\Gamma_f^r = \left\langle \begin{array}{c} M^r = \{1, ..., (m-d)\}, \\ N^r = \{1, ..., (n-d)\}, \\ \left\{X_j^r\right\}_{j=1}^{j=m-d}, \left\{Y_i^r\right\}_{i=1}^{i=n-d}, \\ \left\{H_j^r\right\}_{j=1}^{j=m-d}, \left\{K_i^r\right\}_{i=1}^{i=n-d} \end{array} \right\rangle,$$

аукциона первой цены Γ_f в нормальной форме.

Здесь

$$H_j^r(z^r) = \begin{cases} v_{ji} - x_{ji}^r, \\ \textit{если} \quad v_{ji} = \max\left\{v_{js^r} \,\middle|\, s^r \in S_j^r\right\}, \quad S_j^r \neq \emptyset \quad \textit{и} \quad x_{ji}^r \geq y_i^r, \\ \textit{где} \quad j = 1, \dots, (m-d) \quad \textit{и} \quad i = 1, \dots, (n-d), \\ 0, \\ \textit{если} \quad S_j^r = \emptyset, \quad x_{ji}^r < y_i^r, \\ \textit{где} \quad j = 1, \dots, (m-d) \quad \textit{и} \quad i = 1, \dots, (n-d), \end{cases} \tag{58}$$

$$K_i^r(z^r) = \begin{cases} x_{ji}^r - r_i, \\ \textit{если существует } j \textit{ такое, что} \quad x_{ji}^r \geq y_i^r, \\ v_{ji} = \max\left\{v_{js^r} \,\middle|\, s^r \in S_j^r\right\}, \\ \textit{где} \quad j = 1, \dots, (m-d) \quad \textit{и} \quad i = 1, \dots, (n-d), \\ 0, \\ \textit{если для любого } j \quad x_{ji}^r < y_i^r, \\ v_{ji} \neq \max\left\{v_{js^r} \,\middle|\, s^r \in S_j^r\right\}, \\ \textit{где} \quad j = 1, \dots, (m-d) \quad \textit{и} \quad i = 1, \dots, (n-d). \end{cases} \tag{59}$$

Из (58) и (59) следует, что в соответствии с правилами игры в аукционе Γ_f^r j-ый покупатель выигрывает лот i-го продавца в ситуации z^r, если его назначенная цена за лот, является самой высокой среди всех цен, назначенных другими покупателями за этот лот и не меньше цены, назначенной продавцом за лот. В случае, если покупатель выигрывает более одного лота, то он получает только один лот, оценка которого оказалась самой высокой среди всех его оценок по другим выигранным им лотам.

В аукционе Γ_f^r i-ый продавец реализует свой лот в ситуации z^r, если назначенная им цена за лот не выше хотя бы одной из объявленных цен за этот лот покупателями. В случае, если покупатель, объявивший максимальную цену по этому лоту, получает другой лот, то продавец продает этот лот покупателю, цена которого за этот лот была второй по величине и не меньше цены продавца, а оценка покупателя этого лота оказалась самой высокой среди всех его оценок по выигранным им лотам.

9.3 Компромиссное решение в игре Γ_f

Допустим, что Γ_f^r — аукцион с абсолютно полной информацией.

Опишем алгоритм нахождения компромиссного решения для аукциона Γ_f^r.

Шаг 1. Строим идеальный вектор $M^r = [M_1^r \dots M_m^r, M_{m+1}^r \dots M_{m+n}^r]$, где $M_j^r = \max\{H_j^r(z^r)\,|z^r \in Z^r\}$, $j = 1 \dots (m-d)$ (M_j^r — максимальное значение функции выигрыша j-го покупателя в подыгре Γ_f^r) и
$M_i^r = \max\{K_i(z^r)\,|z^r \in Z^r\}$, $i = (m+1) \dots (m+n)$ (M_i — максимальное значение функции выигрыша i-го продавца в подыгре Γ_f^r).

Шаг 2. Находим в каждой точке z^r для всех игроков отклонение от максимума (M_j^r и M_i^r) для остальных значений функции выигрыша игроков $(M_j^r - H_j^r(z^r))$ и $(M_i - K_i^r(z^r))$.

Шаг 3. Из найденных отклонений $(M_j^r - H_j^r(z^r))$ и $(M_i^r - K_i^r(z^r))$ для каждой точки z^r выбираем максимальное
$\max\limits_{\substack{j\in M\\ i\in N}} \left(\left(M_j^r - H_j^r\left(z^r\right)\right), \left(M_i^r - K_i^r\left(z^r\right)\right)\right)$.

Шаг 4. Выбираем минимальное из этих максимальных отклонений

$$\min_{z^r\in Z^r}\left(\max_{\substack{j\in M\\ i\in N}} \left(\left(M_j^r - H_j^r\left(z^r\right)\right), \left(M_i^r - K_i^r\left(z^r\right)\right)\right)\right)$$

и ситуация $z^{r'}$, в которой достигается минимум и является компромиссным решением аукциона Γ_f^r.

10 Многопериодная модель вхождения в рынок

10.1 Введение

Рассматривается обобщение двухпериодной модели Диксита вхождения в рынок двух фирм [139, 118]. В модели Диксита функции предельных затрат предполагались постоянными, а функция ценообразования - линейной от количества товара, поставляемого на рынок двумя фирмами.

Данная модель обобщается на случай нескольких периодов и нескольких игроков, кроме того, функции предельных затрат предполагаются функциями количества товара, они убывают и выпуклы вниз, а функция ценообразовования считается нелинейной. Такое обобщение более точно описывает экономические процессы, оно учитывает возрастающую отдачу от производства и нелинейность ценообразования.

10.2 Двухпериодная модель вхождения в рынок Курно n фирм

В данном разделе рассматривается обобщение модели Диксита на случай нескольких фирм, функции предельных затрат предполагаются функциями количества товара, они убывают и выпуклы вниз, а функция ценообразования считается нелинейной.

Эта модель является двухпериодной. В первом периоде некоторые фирмы выбирают объемы производства, а во втором - все фирмы одновременно выбирают количества товара, поставляемого на рынок. Фирмы выпускают одинаковый товар, неразличимый с точки зрения покупателя. В результате совместного выбора на рынке устанавливается цена. Далее можно рассчитать функции прибыли фирм во втором периоде.

Первый период.

В первом периоде m фирм, $m \leq n$, выбирают объемы производства — $K_1, \ldots, K_m$, неся при этом долгосрочные затраты (затраты на вход) $c_1^0(K_1)$, ..., $c_m^0(K_m)$, где c_1^0, ..., c_m^0 — убывающие, выпуклые вниз функции,

$$\begin{cases} (c_1^0)\,' < 0, \ldots, (c_m^0)\,' < 0, \\ (c_1^0)\,'' \geq 0, \ldots, (c_m^0)\,'' \geq 0. \end{cases} \tag{60}$$

Второй период.

Все фирмы одновременно выбирают количества товара,$q_1, \ldots, q_n$, поставляемого на рынок.

Кроме того, оставшиеся $n-m$ фирм выбирают объемы производства K_{n-m}, ..., K_n. Объемы производства берутся такими, что $K_{n-m} = q_{n-m}$, ..., $K_n = q_n$ (в противном случае, когда $K_{n-m} \leq q_{n-m}$, ..., $K_n \leq q_n$, фирмы несут неокупаемые долгосрочные затраты). Долгосрочные затраты на производство $n-m$ фирм суть соответственно $c_{n-m}^0(q_{n-m}), \ldots, c_n^0(q_n)$.

Предельные затраты на производство для n фирм обозначим через $c_1(q), \ldots, c_n(q)$. Будем полагать выполненным неравенство $c_i(q) < c_j(q), i = 1, \ldots, m;\ \ j = n-m, \ldots, n$, отражающее преимущество первых фирм за счет более раннего освоения производственных мощностей . Кроме того, полагаем $c\,'_1(q) < 0, \ldots, c\,'_n(q) < 0, \quad c\,''_1(q) \geq 0, \ldots, c\,''_n(q) \geq 0$.

Предельные затраты фирм, выбирающих объемы производства во втором периоде, складываются из краткосрочных и долгосрочных затрат: $c_j^0(K_j) + c_j(q_j), j = n-m, \ldots, n$. Для первых фирм справедливо следующее: если $q_i < K_i, i = 1, \ldots, m$, то фирма i несет краткосрочные предельные затраты, равные $c_i(q)$, каждая же единица продукции сверх K_i сопряжена с долгосрочными предельными затратами в количестве $c_i^0(q_i) + c_i(q_i)$.

В зависимости от количества товара на рынке складывается цена $p = p\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)$, — убывающая, выпуклая вниз функция $p\,' < 0, p\,'' > 0$.

Прибыль во втором периоде будет находиться по формулам:

$$D_i = \begin{cases} q_i p - c_i K_i, & q_i \le K_i \\ q_i p - (c_i + c_i^0) q_i, & q_i > K_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, m \tag{61}$$

$$D_i = q_i p - (c_i + c_i^0) q_i, \qquad i = n - m, \dots, n. \tag{62}$$

10.3 Многопериодная модель вхождения в рынок Курно n фирм

В данном разделе рассматривается обобщение модели Диксита на случай нескольких фирм и нескольких периодов, функции предельных затрат предполагаются функциями количества товара, они убывают и выпуклы вниз, а функция ценообразовования считается нелинейной.

Эта модель является многопериодной. Фирма обладает начальным капиталом и, в один из периодов, вкладывает его в производство. Через несколько периодов фирма выбирает количество товара, поставляемого на рынок. В результате совместного выбора нескольких фирм на рынке устанавливается цена, и фирмы могут получить прибыль, за счет которой в следующем периоде фирма может увеличить объем производства. Фирмы выпускают одинаковый товар, неразличимый с точки зрения покупателя.

Пусть имеется m периодов и n фирм.

Первый период.

Пусть $n_1 < n$ фирм обладают начальным капиталом — $K_1, \dots, K_{n_1}$, который вкладывают в производство. При этом фирмы несут предельные долгосрочные затраты, соответственно $c_1^0, \dots, c_{n_1}^0$, затраты являются функциями $K_1, \dots, K_{n_1}$. Эти функции убывают и выпуклы вниз. [2]

$$\begin{cases} (c_1^0)\,' < 0, \dots, (c_{n_1}^0)\,' < 0 \\ (c_1^0)\,'' > 0, \dots, (c_{n_1}^0)\,'' > 0. \end{cases} \tag{63}$$

Долгосрочные затраты — это затраты на освоение производства, например, закупка оборудования, обучение персонала, аренда помещения и т.п.. В данной задаче предполагается, что эти затраты необратимы, то есть нельзя продать оборудование за ту же цену, что оно покупалось, нельзя вернуть деньги, вложенные в обучение персонала и т.п..

Фирмы, которые выбрали объемы производства в данный момент, имеют разную скорость освоения производства, $k_1, \dots, k_{n_1}$. [3] Соответственно, через $k_1, \dots, k_{n_1}$ периодов фирмы выберут количества товаров, которые они

---

[2] В дальнейшем, функции предельных долгосрочных затрат всех фирм предполагаются удовлетворяющими этим условиям.

[3] Так как фирма осваивает производство за несколько периодов, то долгосрочные затраты в эти периоды

поставят на рынок, тогда же они получат прибыль и уже в следующем периоде, смогут расширить объем производства (если фирма понесет убытки, большие или равные начальному капиталу минус затраты на производство $(K_j - c_j^0(K_j)K_j)$, то ей придется свернуть производство).

Промежуточный, s-ый период.

Пусть n_s фирм входят в рынок в период s. Обозначим множество таким фирм через N_s. Они выбирают объемы производства - $K_i, i \in N_s$, неся при этом предельные долгосрочные затраты c_i^0. Все, сказанное про первые n_1 фирм в первом периоде также применимо и к n_s фирмам в s-ом периоде, также они осваивают производство с разными скоростями и прибыль смогут получить только через несколько периодов (см. предыдущий пункт).

Вместе с тем существуют фирмы, которые к данному моменту только освоили производство и те, которые уже освоили производство и теперь его расширяют. Обозначим множества таких фирм через N_o и N_r соответственно. Эти фирмы выбирают количество товара, поставляемого на рынок q_i, где $i \in N_o \cup N_r$. В результате совместного выбора на рынке складывается цена

$$p = p(\sum_{i=1}^{i=|N_o \cup N_r|} q_i)$$

При выпуске товара фирмы несут предельные краткосрочные затраты на производство $c_i(q_i)$, где $i \in N_o \cup N_r$, эти функции так же, как и функции долгосрочных затрат, убывают и выпуклы вниз. [4] Далее рассматривается прибыль этих фирм.

Прибыль фирмы i, которая только к этому периоду освоила производство (т.е. $i \in N_o$):

$$D_i = q_i p - c_i^0(K_i)K_i - c_i(q_i)q_i, \tag{64}$$

где q_i удовлетворяет условию: $K_i - c_i^0(K_i)K_i - c_i(q_i)q_i > 0$.

Прибыль фирмы i, которая расширяет производство (т.е. $i \in N_r$):

$$D_i = q_i p - c_i(q_i)q_i, \tag{65}$$

где q_i удовлетворяет условию: $M_{i,s-1} - c_i(q_i)q_i > 0$. Здесь $M_{i,s-1}$ — свободный капитал i-ой фирмы в $s-1$ периоде.

могут быть разными, например, k — на установку станка, m — на обучение. Но в этой модели рассматриваются общие долгосрочные затраты, которые будут являться суммой долгосрочных затрат в каждом периоде, то есть $k + m$.

[4]Предположение относительно вида функций предельных затрат (убывающие и выпуклые вниз функции), как долгосрочных так и краткосрочных, характеризует возрастающую отдачу от объемов производства.

Его можно найти следующим образом: до того момента, когда фирма впервые выбирает количество товара, поставляемого на рынок $M_{i,1} = K_i - c_i^0(K_i)K_i$. [5] Если фирма не выпускает продукцию, то свободный капитал не меняется от периода к периоду. После выпуска товара в s периоде $M_{i,s} = M_{i,s-1} + D_i$.

Последний период.

Все фирмы выбирают количества товара, поставляемые на рынок $q_1, \ldots, q_n$. Фирмы при этом несут краткосрочные затраты на производство $c_1, \ldots, c_n$.

Кроме того, оставшиеся n_m фирм выбирают объемы производства — K_i, неся при этом долгосрочные затраты c_i^0 . Они выбирают объемы производства такими, что $K_i = q_i$ (в противном случае, когда $K_i \leq q_i$, фирмы несут неокупаемые долгосрочные затраты).

Если оставшиеся фирмы не могут сразу же освоить производство, то они в рынок не входят т.е. $K_i = 0$. Прибыль находится аналогично предыдущему пункту.

11 Модели инспектирования

Матричная игра инспектирования

Игрок I (нарушитель) хочет совершить некоторое запрещенное действие; имеется N периодов времени, в которые это действие может быть осуществлено. Игрок II (инспектор), желающий предотвратить это действие, может провести только одну инспекцию в любой из этих периодов времени. Выигрыш равен 1, если запрещенное действие проводится и остается необнаруженным; он равен -1, если нарушитель пойман (это будет в том случае, когда для совершения действия он выбирает тот же самый период времени, что и инспектор для проверки); выигрыш равен нулю если нарушитель не действует вовсе.

В первом периоде (на первом шаге) игры каждый игрок имеет две альтернативы. Игрок I может предпринимать действие или не предпринимать его; игрок II может инспектировать или не инспектировать. Если игрок I действует и игрок II инспектирует, то игра заканчивается и выигрыш равен -1. Если игрок I действует, а игрок II не инспектирует, то игра заканчивается и выигрыш равен 1. Если игрок I не действует, а игрок II инспектирует, то игрок I может предпринять действие в следующий период времени (в предположении, что $N > 1$ и выигрыш также равен 1. Если

[5] Ограничение, накладываемое на количество, q для фирм, только что выпустивших продукцию, можно переписать в виде $M_{i,1} - c_i(q_i)q_i > 0$.

игрок I не действует и игрок II не инспектирует, то мы переходим к следующему шагу игры, который отличается от предыдущего только тем, что до конца игры остается меньшее число периодов времени. Следовательно, матрица для первого шага игры выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{pmatrix} \tag{66}$$

Где Γ_{N-1} представляет собой обязательство разыграть эту же игру еще раз. Если значения игр Γ_i равны соответственно v_i, то в смысле математических ожиданий перспектива играть в эти игры эквивалентна их значениям. Поэтому матрицу (66) мы можем заменить матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix} \tag{67}$$

Это дает нам следующее рекурсивное соотношение (через $\mathrm{Val}\, A$ обозначим значение игры с матрицей A):

$$v_N = \mathrm{Val} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{N-1} \end{pmatrix}$$

Решая, получаем разностное уравнение:

$$v_N = \frac{v_{N-1} + 1}{3 - v_{N-1}},$$

которое вместе с начальным условием $v_1 = 0$ определяет v_N.

Решая это разностное уравнение, мы получаем:

$$v_N = \frac{N-1}{N+1}$$

Таким образом мы получаем значение игры на каждом шаге. После этого мы можем вычислить равновесные стратегии каждого игрока на каждом шаге. Действительно, матрица игры теперь принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \text{(N-2)/N} \end{pmatrix}$$

равновесными стратегиями в которой будут:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^N = (\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}) \\ y^N = (\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}) \end{array} \right\}$$

для $N \geq 2$.

Биматричные игры инспектирования

Игра как и в случае, рассмотренном выше проходит между нарушителем (игрок I) и инспектором (игрок II). Игра проходит в n-периодов. Игра с пресечением отличается от игры без пресечения тем, что игра с пресечением после обнаружения инспектором нарушения заканчивается, а игра без пресечения продолжается.

Биматричные игры инспектирования с пресечением

Игрок I имеет 2 чистых стратегии: нарушать (Н) и воздержаться от нарушения (В). Игрок II имеет также 2 чистых стратегии: проверять игрока I на предмет нарушения (П) и отдыхать (О). Если игрок I выбирает (В) он получает легальный доход $r > 0$. Если он выбирает (Н) он может получить вдобавок к легальному доходу доход за нарушение $s > 0$. Если его нарушение обнаружено игроком II, с игрока I взимается штраф $f > 0$ и игра заканчивается.

Если игрок II выбирает (П) он затрачивает на проверку $c > 0$ и может обнаружить нарушение с вероятностью $p(\overline{p} = 1 - p)$. Если он выбирает (О), а игрок I совершает нарушение, то он теряет $l > 0$.

Таким образом отдельный шаг игры можно рассматривать как биматричную игру:

$$\begin{pmatrix} -pf + \overline{p}(r+s), -(c+\overline{p}l) & r+s, -l \\ r, -c & r, 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

Положим $c < pl$.

Мы рассматриваем n-периодическую игру, где игрок I может нарушить максимум k раз за n периодов, а игрок II может попытаться обнаружить нарушение не более m раз. После окончания каждого периода выигрыш в этом периоде становится известен обоим игрокам. Общий выигрыш в течении n периодов равен сумме выигрышей в каждом периоде. Подразумевается, что вся выше приведенная информация известна обоим игрокам.

Обозначим описанную выше игру как $\Gamma_{k,m}(n)$. Пусть $(u_{k,m}(n), v_{k,m}(n))$-равновесные значения этой игры. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &(u_{k,m}(n), v_{k,m}(n)) = \\ &= \mathrm{Val}\begin{pmatrix} -pf + \overline{p}(r+s+u_{k-1,m-1}(n-1)), & r+s+u_{k-1,m}(n-1), \\ -(c+\overline{p}l) + \overline{p}v_{k-1,m-1}(n-1) & -l + v_{k-1,m}(n-1) \\ r + u_{k,m-1}(n-1), -c + v_{k,m-1}(n-1) & r + u_{k,m}(n-1), v_{k,m}(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{69}$$

(если равновесное значения существуют и единственны), со следующими граничными условиями:

$$(u_{0,m}(n), v_{0,m}(n)) = (nr, 0); 1 \leq m \leq n \tag{70}$$

$$(u_{k,0}(n), v_{k,0}(n)) = (nr + ks, -kl); 1 \leq k \leq n \tag{71}$$

$$(u_{0,0}(n), v_{0,0}(n)) = (nr, 0); n \geq 1 \tag{72}$$

$$(u_{k,m}(0), v_{k,m}(0)) = (0, 0); \forall k, m \geq 0 \tag{73}$$

и

$$(u_{k,m}(n), v_{k,m}(n)) = (u_{k',m'}(n), v_{k',m'}(n)); k' = k \bigwedge n, m' = m \bigwedge n \tag{74}$$

Условия (70)–(74) подразумевают следующее:

(70). Если игрок II может пытаться обнаружить нарушение m, а его оппонент не может нарушать, тогда пара решений В-О будет повторяться всю игру.

(71). Если игрок I может нарушать k, а его оппонент не может пытаться предотвратить нарушения, тогда игрок I выбирает Н и В k и $n-k$ раз соответственно в течении n периодов.

(72). Если оба игрока не могут предпринимать никаких активных действий, тогда пара решений В-О будет повторяться всю игру.

(74). Когда $n = 1$, игра превращается в биматричную игру (68).

Рассмотрим игру $\Gamma_{n,n}(n)$. Возьмем для простоты $U_n = u_{n,n}(n)$ и $V_n = v_{n,n}(n)$. Тогда (69) предстанет в виде:

$$\begin{aligned}
&(U_n, V_n) = \\
&= \mathrm{Val} \begin{pmatrix} -pf + \overline{p}(r + s + U_{n-1}), -(c + \overline{p}l) + \overline{p}V_{n-1} & r + s + U_{n-1}, -l + V_{n-1} \\ r + U_{n-1}, -c + V_{n-1} & r + U_{n-1}, V_{n-1} \end{pmatrix} = \\
&= (U_{n-1}, V_{n-1}) + \mathrm{Val}\, M_n,
\end{aligned} \tag{75}$$

где

$$M_n = \begin{pmatrix} \overline{p}(r+s) - p(f + U_{n-1}), -(c + \overline{p}l + pV_{n-1}) & r + s, -l \\ r, -c & r, 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$(n \geq 0; U_0 = V_0 = 0)$$

При $n = 1$ игра становится идентичной игре (68).

Найдем решение для игры $\Gamma_{1,1}(1)$:

$$A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -p(s+f+r) < 0$$

$$B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = pl > 0$$

$$a = a_{22} - a_{12} = -s < 0$$

$$b = b_{22} - b_{21} = c > 0$$

$$\alpha = \frac{a}{A} = \frac{s}{p(f+r+s)} > 0$$

$$\beta = \frac{b}{B} = \frac{c}{pl} < 1$$

$$\alpha = 1 : s_1 = \frac{p}{\overline{p}}(f+r)$$

1)$0 < s < s_1 : x_1^* - y_1^*$, где $x = \frac{c}{pl}, y = \frac{s}{p(f+r+s)}$; $U_1 = r, V_1 = -\frac{c}{p}$
2)$s = s_1$:(zН+$\overline{z}$В)-П , $\forall z \in [0,1]$; $U_1 = r, V_1 = -(c + \overline{p}lz)$
3)$s > s_1$: Н-П ; $U_1 = -pf + \overline{p}(r+s), V_1 = -(c+\overline{p}l)$
где $x_1^* = (x, \overline{x})$ и $y_1^* = (y, \overline{y})$.
Теперь найдем решение для игры $\Gamma_{2,2}(2)$:
Подставляя значения U_1 и V_1 в M_2 мы получим:

$$M_2 = \begin{pmatrix} \overline{p}(r+s) - p(f+r), -\overline{p}l & r+s, -l \\ r, -c & r, 0 \end{pmatrix}, 0 < s < s_1;$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \overline{p}(-pf + \overline{p}(r+s)), -\overline{p}(c+\overline{p}l) & r+s, -l \\ r, -c & r, 0 \end{pmatrix}, s > s_1;$$

$$s_2 = \frac{p}{\overline{p}}(f+r) + \frac{p}{\overline{p}^2}r$$

1)$0 < s < s_1 : x_2^* - y_2^*$, где

$$x = \frac{c}{pl+c}, y = \frac{s}{p(f+2r+s)}; U_2 = 2r, V_2 = -\frac{c(2pl+c)}{p(pl+c)}$$

2)$s_1 < s < s_2 : x_2^* - y_2^*$, где

$$x = \frac{c}{p(c+(1+\overline{p})l)}, y = \frac{s}{p(\overline{p}f + (1+\overline{p})(r+s))};$$

$$U_2 = -pf + \overline{p}(r+s), V_2 = -(\frac{cl}{p(c+(1+\overline{p})l)} + c + \overline{p}l)$$

3)$s > s_2$: Н-П ;

$$U_2 = (1+\overline{p})(-pf + \overline{p}(r+s)), V_2 = -(1+\overline{p})(c+\overline{p}l)$$

где $x_1^* = (x, \overline{x})$ и $y_1^* = (y, \overline{y})$.

Игра “Налогоплательщик против налоговой полиции”

Эта игра проходит между налогоплательщиком (далее игрок I) и налоговой полицией (игрок II). Игрок I имеет 2 чистых стратегии: скрыть часть налогов (С) и заплатить полностью все налоги (З). Игрок II имеет также 2 чистых стратегии: проверять игрока I на предмет уклонения от налогов (П) и не проверять (Н). Игрок I получает доход r при выплате всех налогов. Если игрок I выбирает (С), то вдобавок к r получает доход l - сумма скрытых налогов. Если при этом его ловит игрок II, то он должен уплатить штраф f.

Если игрок II выбирает (П), то с вероятностью $p(\overline{p} = 1 - p)$ он обнаруживает, что игрок I уклоняется от налогов, если тот выбирает стратегию (С); p также будем называть эффективностью налоговой полиции. Также игрок II при выборе (П) затрачивает на проведение проверки c.

Примечание: $l, r, f, c > 0$.

Таким образом мы получаем биматричную игру с матрицами выигрышей игроков:

$$\begin{pmatrix} r + \overline{p}l - pf, -c + pf - \overline{p}l & r + l, -l \\ r, -c & r, 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Найдем в этой игре ситуации равновесия:

$$A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -p(l + f) < 0$$

$$B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = p(l + f) > 0$$

$$a = a_{22} - a_{12} = -l < 0$$

$$b = b_{22} - b_{21} = c > 0$$

$$\alpha = \frac{a}{A} = \frac{l}{p(l + f)} > 0$$

$$\beta = \frac{b}{B} = \frac{c}{p(l + f)} > 0$$

Посмотрим как меняются ситуации равновесия в смешанных стратегиях с изменением штрафа f:

$$\alpha = 1 : f_1 = \frac{\overline{p}}{p}l$$

$$\beta = 1 : f_2 = \frac{c - pl}{p}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $l > c$

а)$f > f_1$: $\beta^* - \alpha^*$, где $\beta^* = (\beta, \overline{\beta}), \alpha^* = (\alpha, \overline{\alpha})$ - устойчивая ситуация равновесия.

б)$f = f_1$: β'^*-П , где $\beta'^* = (\beta', \overline{\beta'}), \beta' > \beta$ - неустойчивая ситуация равновесия.

в)$f_2 < f < f_1$: С-П - устойчивая ситуация равновесия.

г)$f = f_2$: С-$\forall$, где $\forall$ - любая смешанная стратегия - неустойчивая ситуация равновесия.

д)$f < f_2$: С-Н - устойчивая ситуация равновесия.

Таким образом при штрафе $f < \frac{\overline{p}l}{p}$ налогоплательщику всегда выгодно укрываться от налогов.

При штрафе $f \in [\frac{\overline{p}l}{p}; \frac{c-pl}{p}]$ налоговой полиции выгодно проверять в любом случае, а при штрафе $f < \frac{c-pl}{p}$ - невыгодно проверять в любом случае.

2) $c > l$

а)$f > f_2$: $\beta^* - \alpha^*$, где $\beta^* = (\beta, \overline{\beta}), \alpha^* = (\alpha, \overline{\alpha})$ - устойчивая ситуация равновесия.

б)$f = f_2$: С-α'^* , где $\alpha'^* = (\alpha', \overline{\alpha'}), \alpha' < \alpha$ - неустойчивая ситуация равновесия.

в)$f_1 < f < f_2$: С-Н - устойчивая ситуация равновесия.

г)$f = f_1$: С-Н - устойчивая ситуация равновесия.

д)$f < f_1$: С-Н - устойчивая ситуация равновесия.

Таким образом при штрафе $f < \frac{c-pl}{p}$ - налогоплательщику всегда выгодно уклоняться от налогов, а налоговой полиции невыгодно его проверять.

Также можно рассмотреть и случай $c = l$, но он не представляет собой никакого практического интереса.

Похоже, ситуация равновесия в смешанных стратегиях меняется и при изменении эффективности работы налоговой полиции p.

$$\alpha = 1 : p_1 = \frac{l}{l+f}$$

$$\beta = 1 : p_2 = \frac{c}{l+f}$$

1) $l > c$

а)$p > p_1$: $\beta^* - \alpha^*$, где $\beta^* = (\beta, \overline{\beta}), \alpha^* = (\alpha, \overline{\alpha})$ - устойчивая ситуация равновесия.

б)$p = p_1$: β'^*-П , где $\beta'^* = (\beta', \overline{\beta'}), \beta' > \beta$ - неустойчивая ситуация равновесия.

в)$p_2 < p < p_1$: С-П - устойчивая ситуация равновесия.

г)$p = p_2$: С-$\forall$, где $\forall$ - любая смешанная стратегия - неустойчивая ситуация равновесия.

д)$p < p_2$: С-Н - устойчивая ситуация равновесия.

Таким образом при вероятности обнаружения $p < \frac{l}{l+f}$ налогоплательщику всегда выгодно укрываться от налогов.

При эффективности работы $p \in [\frac{l}{l+f}; \frac{c}{l+f}]$ налоговой полиции выгодно проверять в любом случае, а при эффективности $p < \frac{c}{l+f}$ - невыгодно проверять в любом случае.

2) $c > l$

а)$p > p_2$: $\beta^* - \alpha^*$, где $\beta^* = (\beta, \overline{\beta}), \alpha^* = (\alpha, \overline{\alpha})$ - устойчивая ситуация равновесия.

б)$p = p_2$: С-$\alpha^{'*}$, где $\alpha^{'*} = (\alpha^{'}, \overline{\alpha^{'}}), \alpha' < \alpha$ - неустойчивая ситуация равновесия.

в)$p_1 < p < p_2$: С-Н — устойчивая ситуация равновесия.

г)$p = p_1$: С-Н — устойчивая ситуация равновесия.

д)$p < p_1$: С-Н — устойчивая ситуация равновесия.

Таким образом, при вероятности обнаружения $p < \frac{c}{l+f}$ - налогоплательщику всегда выгодно уклоняться от налогов, а налоговой полиции невыгодно его проверять.

Теперь попробуем расширить пространство стратегий игрока I, позволив ему самому выбирать l, то есть сумму на которую он будет уклоняться от налогов.

$l \in [0, l_M]$, где l_M - полная сумма налогов игрока I.

Пусть f линейно зависит от $l : (f(l) = nl)$. Например в нашем налоговом законодательстве $n = 0.4$

$$\alpha = \frac{1}{p(n+1)}$$
$$\beta = \frac{c}{l}\frac{1}{p(n+1)}$$

Опять рассмотрим 2 случая:

1) $p < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \alpha > 1$

$$\beta = 1 : l_1 = \frac{c}{p(n+1)} > c$$

а)$l > l_1$: С-П — устойчивая ситуация равновесия.

б)$l = l_1$: С-$\forall$, где $\forall$ — любая смешанная стратегия — неустойчивая ситуация равновесия.

в)$l < l_1$: С-Н — устойчивая ситуация равновесия.

Обозначим выигрыш игрока I как функцию $H_I(l)$.

$$H_I(l < l_1) = r + l < r + l_1$$

$$H_I(l > l_1) = r + \overline{p}l - pf$$

$$H_I(l > l_1) > H_I(l < l_1) \Rightarrow \overline{p}l - pf \geq l_1$$

$$\overline{p}l - pf = \overline{p}l - pnl = (1-p)l - pnl = l(1-p(n+1)) > 0$$

То есть $H_I(l > l_1) > H_I(l < l_1)$ при $l \geq \frac{l_1}{1-p(n+1)}$.

Таким образом если $\frac{l_1}{1-p(n+1)} \leq l_M$ тогда равновесной стратегией для игрока I ,будет $l = l_M$, в противном случае $l = l_1$.

2) $p > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \alpha < 1$

$$\beta = 1 : l_1 = \frac{c}{p(n+1)} < c$$

а)$l > l_1 : \beta^* - \alpha^*$, где $\beta^* = (\beta, \overline{\beta}), \alpha^* = (\alpha, \overline{\alpha})$ — устойчивая ситуация равновесия.

б)$l = l_1$: С-$\alpha^{'*}$, где $\alpha^{'*} = (\alpha^{'}, \overline{\alpha^{'}}), \alpha' < \alpha$ — неустойчивая ситуация равновесия.

в)$l < l_1$: С-Н — устойчивая ситуация равновесия.

$$H_I(l < l_1) = r + l < r + l_1$$

$$H_I(l > l_1) = \beta\alpha(r + \overline{p}l - pf) + \beta\overline{\alpha}(r + l) + \overline{\beta}\alpha r + \overline{\beta}\overline{\alpha}r = r + \beta\alpha\overline{p}l - \beta\overline{\alpha}l$$

То есть $H_I(l > l_1) > H_I(l < l_1)$ при $\beta\alpha\overline{p}l - \beta\overline{\alpha}l \geq l_1$

$$\beta((\alpha\overline{p} + \overline{\alpha})l - \alpha pf) = \frac{c}{l}\frac{1}{p(n+1)}((\frac{1}{p(n+1)}\overline{p} + 1 - \frac{1}{p(n+1)})l - \frac{1}{p(n+1)}pnl) =$$

$$\frac{c}{p(n+1)}(\frac{\overline{p} + p(n+1) - 1}{p(n+1)} - \frac{n}{n+1}) = \frac{c}{p(n+1)}(\frac{pn}{p(n+1)} - \frac{n}{n+1}) = 0.$$

Таким образом мы получили, что $H_I(l > l_1) < H_I(l < l_1)$. Значит игрок I будет уклоняться от налогов на сумму $l = l_1$.

То есть на сумму l_1 как в первом так и во втором случае игроку I уклоняться выгодно, но при увеличении эффективности работы налоговой полиции игроку I становится невыгодно уклоняться от налогов на большую сумму.

Вернемся теперь к первому случаю и посмотрим при каких условиях выполняется неравенство $\frac{l_1}{1-p(n+1)} \leq l_M$, то есть сумма, на которую обманет государство игрок I, будет l_M.

$$\frac{c}{p(n+1)(1-p(n+1)} \leq l_M$$

Возьмем $x = p(n+1) < 1$

$$\frac{c}{x - x^2} \le l_M$$

$$x^2 - x + \frac{c}{l_M} \le 0 \tag{78}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c}{l_M}}}{2}$$

То есть при $c > \frac{l_M}{4}$ неравенство $\frac{l_1}{1-p(n+1)} \le l_M$ не будет выполняться ни при каких x.

При $c \le \frac{l_M}{4}$

$$x \in [\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{l_M}}}{2}; \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4c}{l_M}}}{2}]$$

То есть при

$$(c \le \frac{l_M}{4}) \bigwedge (p \in [\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{l_M}}}{2(n+1)}; \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4c}{l_M}}}{2(n+1)}] \tag{79}$$

игроку I выгодно уклоняться от налогов на l_M.

Рассмотрим для примера нашу налоговую систему $(n = 0.4)$.

Возьмем $c = 1000$ рублей, $l_M = 100000$ рублей

$$\frac{1}{n+1} = 0.714$$

1) $p < 0.714$

Проверим условие $c \le \frac{l_M}{4}$: условие выполняется, т.к. 1000<25000.

Значит, при $p \in [0.007; 0.707]$ налогоплательщику выгодно уклоняться на всю сумму налогов, то есть на 100000 рублей.

2) $p > 0.714$ — игроку I выгодно уклоняться от налогов на сумму $l_1 = 714.29/p$.

Таким образом при эффективности работы налоговой полиции $p < 0.707$ налогоплательщику выгодно уклоняться на всю сумму налогов — 100000 рублей, а при эффективности $p > 0.707$ не более чем на 1010 рублей.

12 Теоретико-игровая модель управления качеством лазерного излучения

В данном параграфе рассматривается задача управления лазерным пучком. Важность задач такого типа обусловлена тем, что в реальных установках на оптические параметры лазерного пучка оказывают влияние многообразные возмущения. Эти возмущения увеличивают расходимость луча, уменьшая тем самым поверхностную концентрацию энергии при облучении мишени и ухудшая точность наведения в оптических навигационных системах. Одним из подходов к решению проблемы частичной компенсации влияния возмущений является применение так называемых адаптивных управляемых оптических систем. В этом случае можно сформулировать задачу управления элементами лазерной оптической системы. В данной работе предлагается рассматривать поставленную задачу как дифференциальную антагонистическую игру, для решения которой могут быть применены известные аналитические и численные методы.

12.1 Постановка задачи

Будем считать, что состояние системы описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)\right), \tag{80}$$

где t – время, $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}(t)$ – состояние системы в момент времени t, $\mathbf{w}(\mathbf{t}), \mathbf{v}(\mathbf{t})$ – управляющие параметры. Линеаризованная модель рассматривалась в [81] для системы фазового сопряжения. Можно считать, например, что состояние системы описывается двухкомпонентным вектором $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, где x_1 – точность наведения (угловое расстояние между опорной точкой на поверхности объекта и центральным максимумом интенсивности пучка), а x_2 – угловая расходимость излучения. Задается начальное значение $\mathbf{x}_0 = (x_1(0), x_2(0))$.

Изменением состояния системы можно управлять тем или иным способом. Воздействие оператора на систему описывается посредством управляющего параметра $\mathbf{w}$ из некоторого множества управлений W.

На процесс изменения состояния системы также оказывают воздействие факторы, связанные с внешней средой, внутренним состоянием системы и движением сопровождаемого объекта. Это воздействие можно рассматривать как управление $\mathbf{v}$, которое принадлежит некоторому множеству допустимых управлений V.

Вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ в правой части уравнения (80) удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathbf{f}$ непрерывна по $(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \in R^m \times W \times V$;
2. $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$ с постоянной K_1, т.е. для

любых $\mathbf{w} \in W$, $v \in V$ и $\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}} \in R^m$ справедливо неравенство:

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq K_1 \left|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\right|, \tag{81}$$

3. Для любых $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{x} \in R^m$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq B, \quad (B > 0); \tag{82}$$

4. Для любых $\mathbf{x} \in R^m$ множество

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \mid \ \mathbf{w} \in W, \ \mathbf{v} \in V\}$$

выпукло.

Допустимым управлением игрока $P(E)$ называется измеримая на отрезке $[0, T]$ вектор-функция $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ $(\mathbf{v} = \mathbf{v}(t))$, удовлетворяющая условиям $\mathbf{w}(t) \in W$ $(\mathbf{v}(t) \in V)$ при любых $t \in [0, T]$.

Известно, что при любой паре допустимых управлений $\mathbf{w}(t), \ t \in [0, T]$ и $\mathbf{v}(t), \ t \in [0, T]$ условия 1–3 гарантируют существование и единственность продолжимого на отрезок $[0, T]$ решения системы (80), удовлетворяющего заданному начальному условию.

Качество управления работой оптической лазерной системы оценивается некоторым показателем $H = (H_1, \ldots, H_n)$. Из соображений простоты будем считать его скалярным. Это может быть, например, норма вектора $\mathbf{x}(t)$, заданная в каким-то образом выбранной метрике.

Ставится задача о выборе такой управляющей функции $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$, $t \in [0, T]$, со значениями во множестве управлений W, которая при любых возможных возмущающих воздействиях, описываемых управляющим параметром $\mathbf{v}$, гарантировала бы оптимальное (максиминное или минимаксное) значение показателя качества H.

Можно рассматривать следующие задачи:

1. Выбором управляющей функции $\mathbf{w}(t)$ привести вектор состояния системы из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в заданное состояние $\mathbf{x}_T$ в момент времени T при любых возможных внешних условиях.

2. Выбором управляющей функции $\mathbf{w}(t)$ привести вектор состояния системы к заданному значению за минимальное время при любых возможных внешних воздействиях.

Рассматриваемую задачу можно формализовать как дифференциальную антагонистическую игру
$\Gamma(\mathbf{x}_0, T)$, динамика которой описывается дифференциальным уравнением вида (80).

12.2 Определение дифференциальной антагонистической игры, описывающей процесс управления лазерным пучком.

Пусть C – пространство непрерывных функций $\mathbf{x}(t)$, определенных на замкнутом ограниченном интервале $[0, T]$. Пространство C является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{t \in [0,T]} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|,$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$.

Рассмотрим дифференциальную антагонистическую игру, протекающую в пространстве C, с начальной позицией $(\mathbf{x}_0, t_0 = 0)$ – $\Gamma(\mathbf{x}_0, T)$.

Динамика игры описывается уравнением (80), в котором, напомним, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ – управляющие параметры игроков P (оператора, управляющего лазерной системой) и E (вторым игроком формально считаем совокупное действие возмущающих факторов) соответственно; $\mathbf{w} \in W \subset R^p$, $\mathbf{v} \in V \subset R^q$; W и V – компактные множества из евклидовых пространств R^p и R^q соответственно.

Непрерывная функция $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$, удовлетворяющая условиям $\mathbf{w}(t) \in W$ при любых $t \in [0, T]$ называется допустимым управлением игрока P; непрерывная функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, удовлетворяющая условиям $\mathbf{v} \in V$ при любых $t \in [0, T]$ называется допустимым управлением игрока E.

Точка $\mathbf{x}$ перемещается в пространстве C под воздействием управлений $\mathbf{w} \in W$ и $\mathbf{v} \in V$, выбираемых в каждый момент времени игроками P и E соответственно в зависимости от их цели и информации, доступной в каждом текущем состоянии игры. Состояния информации игроков P и E в игре следующие. В каждый момент времени игрокам известна позиция игры $\mathbf{x}(t)$, момент $t_0 = 0$ начала и T – окончания игры и динамика игры.

В рассматриваемой задаче критерием качества наведения лазерного луча и точности сопровождения объекта может быть норма вектора $\mathbf{x}(t)$ – чем меньше ее значение, тем выше точность наведения и поверхностная плотность энергии луча на объекте. Будем рассматривать задачу минимизации углового отклонения луча и угловой расхоимости в целом за время работы системы на временном интервале $[0, T]$.

В момент T – окончания игры игрок E, распоряжающийся выбором управления v, получает от игрока P выигрыш равный

$$H(\mathbf{x}(\cdot)) = \int_0^T \|\mathbf{x}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t), t)\|\, dt, \tag{83}$$

где $\mathbf{x}(\cdot)$ – траектория процесса, соответствующая допустимым управлениям $\mathbf{w}(\cdot)$ и $\mathbf{v}(\cdot)$ на интервале $[0,T]$ и $\|\cdot\|$ – норма вектора.

Цель игрока P – минимизировать $H(\cdot)$, цель игрока E противоположна.

Теперь определим стратегии игроков P и E, а также функцию выигрыша в игре $\Gamma(\mathbf{x}_0,T)$.

Определение. Стратегией $\varphi(\psi)$ игрока $P(E)$ в игре $\Gamma(\mathbf{x}_0,T)$ называется пара $(\sigma_1,K_{\sigma_1})((\sigma_2,K_{\sigma_2}))$, где $\sigma_1(\sigma_2)$ – произвольное конечное разбиение интервала времени $[0,T]$, а $K_{\sigma_1}(K_{\sigma_2})$ – отображение, ставящее в соответствие состоянию информации игрока $P(E)$ в момент времени $t_i\in\sigma_1$, $i=0,\ldots,N_{\sigma_1}-1$ $(t_j\in\sigma_2,\ j=0,\ldots,N_{\sigma_2}-1)$ допустимое управление $\mathbf{w}_i(t)$, $\tau\in[t_i,t_{i+1})$ $(\mathbf{v}_j(\tau),\ \tau\in[t_j,t_{j+1}))$.

Множество стратегий игрока $P(E)$ в игре $\Gamma(\mathbf{x}_0,T)$ обозначается $\Phi(\Psi)$.

По паре стратегий $(\varphi,\psi)\in\Phi\times\Psi$ при начальной позиции $\mathbf{x}_0$ однозначно определяется траектория игры $\chi(\varphi,\psi)$ следующим образом.

Пусть $\sigma=\{t_0<t_1<\ldots<t_{N_\sigma}=T\}$, $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$ – произвольное разбиение отрезка времени $[0,T]$; $\varphi=(\sigma_1,K_{\sigma_1})$ и $\psi=\sigma_2,K_{\sigma_2}$ – стратегии игроков P и E соответственно. На каждом отрезке $[t_k,t_{k+1}),\ k=0,\ldots,N_\sigma-1$ образы отображений K_{σ_1} и K_{σ_2} представляют собой непрерывные программные управления $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, поэтому на отрезке $[t_0,t_1)$, задача (80) при соответствущих предположениях о свойствах функции $\mathbf{f}$ имеет единственное решение $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,t,\mathbf{w}(t),\mathbf{v}(t))$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ и $t\in[t_0,t_1)$. На отрезке $[t_1,t_2)$, беря в качестве начальных условий $\mathbf{x}(t_1)$, строим решение задачи (80). Продолжая процесс, получаем единственную траекторию игры, соответствующую ситуации (φ,ψ), которую обозначим $\chi(\varphi,\psi)(\cdot)$.

Функция выигрыша игрока E в каждой ситуации (φ,ψ) определяется следующим образом:

$$K(\mathbf{x}_0,\varphi,\psi)=H(\chi(\varphi,\psi)(\cdot)), \tag{84}$$

где $\chi(\varphi,\psi)(\cdot)$ – траектория игры $\Gamma(\mathbf{x}_0,T)$, соответствующая ситуации $(\varphi,\psi)\in\Phi\times\Psi$.

Поскольку игра $\Gamma(\mathbf{x}_0,T)$ антагонистическая, выигрыш игрока P равен $-K(\mathbf{x}_0,\varphi,\psi)$.

В [69] показано существование ситуаций ε-равновесия в играх, протекающих в полных метрических пространствах, когда динамика игры задается посредством обобщенной динамической системы.

Рассматриваемая нами игра примером таких игр.

Определение. Множество $F(\mathbf{x}_0,t_0,t)$ элементов, $\mathbf{x}\in C$, для которых существуют допустимые управления $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, переводящие $\mathbf{x}_0$ точку в точку $\mathbf{x}$ на отрезке времени $[t_0, t]$, называется множеством достижимости системы (80).

Можно считать, что система (80) такова, что множество достижимости $F(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $F(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ определено для всех $\mathbf{x} \in C,\ t_0,\ t \in [0, T](t \leq t)$ и является ограниченным множеством пространства C.

2. $F(\mathbf{x}_0, t_0, t) = \mathbf{x}_0$ для всех $\mathbf{x} \in C,\ t \in [0, T]$.

3. Функция $F(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ непрерывна в псевдометрике Хаусдорфа по t, то есть при данных $\mathbf{x}$, $t_0 \leq t$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\rho^*(F(\mathbf{x}, t_0, t_1), F(\mathbf{x}, t_0, t)) \leq \varepsilon,$$

если $|t - t_1| < \delta$.

ρ^* – псевдометрика Хаусдорфа на множествах пространства $C \times C$ определяется следующим образом:

$$\rho^*(A, B) = \rho^*(B, A) = \max\{\rho'(A, B), \rho'(B, A)\}$$

где

$$\rho'(A, B) = \max_{a \in A}\{\rho(a, B)\}$$

и

$$\rho(B, a) = \rho(a, B) = \min_{b \in B}\{\rho(a, b)\},$$

(здесь ρ – метрика исходного пространства C).

4. Функция $F(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ непрерывна по t_0, $\mathbf{x}$ равномернов любом конечном интервале $t \in [t_1, t_2]$, то есть при данных $\mathbf{x}$, t_0, t_1, t_2 и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\rho^*(F(\mathbf{x}', t_0', t)F(\mathbf{x}, t_0, t)) < \varepsilon$$

при всяких $\mathbf{x}'$, t_0', t, таких, что $\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}) < \delta, \|t_0 - t_0'\| < \delta,\ t_1 \leq t \leq t_2,\ t_0 \leq t,\ t_0' \leq t$.

Для игры $\Gamma(\mathbf{x}_0, T)$ определяются две вспомогательные игры с дискриминацией $\overline{\Gamma}(\mathbf{x}_0, T)$ – верхняя и $\underline{\Gamma}(\mathbf{x}_0, T)$ – нижняя.

Верхняя и нижняя игры аппроксимируются последовательностями многошаговых игр $\overline{\Gamma}^{\sigma_n}(\mathbf{x}_0, T)$ и $\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(\mathbf{x}_0, T)$ соответственно.

Определим игру $\underline{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{x}_0, T)$. Игра $\underline{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{x}_0, T)$ определяется двойственным образом.

Определение. Стратегией $\underline{\varphi}^{\sigma}(\underline{\psi}^{\sigma})$ игрока $P(E)$ в игре $\underline{\Gamma}^{\sigma}(\mathbf{x}_0, T)$ называется отображение, ставящее в соответствие состоянию информации игрока $P(E)$ в момент времени $t_i \in \sigma$, где σ – некоторое фиксированное разбиение отрезка времени $[0, T]$, допустимое управление $w_i(\tau)$, $\tau \in [t_i, t_{i+1}$ $(v_i(\tau),\ \tau \in [t_i, t_{i+1})$.

Множество стратегий игроков P и E в игре $\underline{\Gamma}^\sigma(\mathbf{x}_0, T)$ обозначается через $\underline{\Phi}^\sigma$, $\underline{\Psi}^\sigma$ соответственно.

Таким образом, определив множества стратегий и функции выигрыша игроков P и E, мы определили дифференциальную антагонистическую игру в нормальной форме.

Напомним, что ситуация (φ^*, ψ^*) называется ситуацией равновесия в игре $\Gamma(x_0, T)$, если для всех $\varphi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$ имеет место неравенство

$$K(x_0, \varphi, \psi^*) \geq K(x_0, \varphi^*, \psi^*) \geq K(x_0, \varphi^*, \psi). \tag{85}$$

Стратегии $\varphi^* \in \Phi$, $\psi^* \in \Psi$ называются оптимальными стратегиями игроков P и E.

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Ситуация (φ^*, ψ^*) называется ситуацией ε-равновесия в игре $\Gamma(x_0, T)$, если для всех $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ имеет место неравенство

$$K(x_0, \varphi, \psi^*) + \varepsilon \geq K(x_0, \varphi^*, \psi^*) \geq K(x_0, \varphi^*, \psi) - \varepsilon. \tag{86}$$

Стратегии $\varphi^* \in \Phi$, $\psi^* \in \Psi$ называются ε-оптимальными стратегиями игроков P и E соответственно.

Функции выигрыша в играх $\overline{\Gamma}(u_0, T)$ $(\underline{\Gamma}(u_0, T))$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{H}(x_0, \varphi_2, \psi_2) &= H(\overline{\chi}(\varphi_2, \psi_2)(T)), \\ \underline{H}(x_0, \varphi_1, \psi_1) &= H(\underline{\chi}(\varphi_1, \psi_1)(T)). \end{aligned} \tag{87}$$

Здесь

$$\overline{\chi}(\varphi_2, \psi_2)(T) = \overline{\chi}(\varphi_2, \psi_2)(t)\,|_{t=T}$$

$$(\underline{\chi}(\varphi_1, \psi_1)(T) = \underline{\chi}(\varphi_1, \psi_1)(t)\,|_{t=T})$$

где $\overline{\chi}(\varphi_2, \psi_2)(t)(\underline{\chi}(\varphi_1, \psi_1)(t))$ – траектория игры $\overline{\Gamma}(u_0, T)$ $(\underline{\Gamma}(u_0, T))$ в ситуации $(\varphi_2, \psi_2) \in \Phi_2 \times \Psi_2$. $((\varphi_1, \psi_1) \in \Phi_1 \times \Psi_1$.

Для упомянутых выше вспомогательных игр справедливы следующие утверждения.

Лемма. Для всякой измельчающейся последовательности $\{\sigma\}_{n=1}^\infty$ разбиений интервала $[0, T]$ такой, что $\gamma(\sigma_n) = \max\limits_{1 \leq i \leq N_{\sigma_n}} |t_i - t_{i-1}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ существуют пределы функций значения игр $\overline{\Gamma}^{\sigma_n}(\cdot)$, $\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} Val(\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(x_0, T)) = \underline{V}(\{\sigma_n\}) \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} Val(\overline{\Gamma}^{\sigma_n}(x_0, T)) = \overline{V}(\{\sigma_n\}). \end{aligned} \tag{88}$$

Теорема. При всяких x_0, T в играх $\overline{\Gamma}(u_0, T)$ ($\underline{\Gamma}(u_0, T)$) для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют ситуации ε-равновесия. При этом

$$\begin{aligned} Val(\overline{\Gamma}(x_0, T)) &= \overline{V}(\{\sigma_n\}), \\ Val(\underline{\Gamma}(x_0, T)) &= \underline{V}(\{\sigma_n\}), \end{aligned} \tag{89}$$

где $\{\sigma\}_{n=1}^{\infty}$ – любая последовательность разбиений интервала $[0, T]$ такая, что $\gamma(\sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

12.3 Разностная схема для уравнения Гамильтона-Якоби

Введем в пространстве позиций игры R^m равномерную сетку с шагами $h_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ по всем пространственным переменным

$$\begin{aligned} \omega_h = \big\{ & x^j = (x_{1_{j_1}}, x_{2_{j_2}}, \ldots, x_{m_{j_m}}), \quad x_{\alpha_{j_\alpha}} = j_\alpha h_\alpha, \\ & j_\alpha = 0, \pm1, \pm2, \ldots;\ h_\alpha = 1/M_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, m \big\} \end{aligned}$$

где $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $j = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, M_α – целые положительные числа.

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку с шагом $\delta > 0$

$$\overline{\omega}_\delta = \{t_n = n\delta,\ t_0 = 0,\ t_{N_\sigma} = T,\ n = 0, 1, \ldots, N_\sigma\}$$

совпадающую с разбиением σ.

Сеточную функцию, определенную в узлах сетки $\omega_{h\delta}$ обозначаем $\overline{V}^n_{j_1, j_2, \ldots, j_m}$, где

$$\omega_{h\delta} = \omega_h \times \overline{\omega}_\delta = \left\{ (x^j, t_n) |\ x^j \in \overline{\omega}_\delta \right\}.$$

Для сеточных функций, заданных на ω_h и ω_δ введем нормы следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\| \overline{V}^n \right\|_h &= \max_{\omega_h} \left| \overline{V}^n_{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right|, \\ \left\| \overline{V}^n \right\|_{h\delta} &= \max_{\omega_\delta} \left\| \overline{V}^n \right\|_h. \end{aligned}$$

Заметим, что меняя параметр h , получаем последовательность сеток $\{\omega_h\}$, которая исчерпывает счетное всюду плотное множество в R^m. Обозначим это множество $X = \{\omega_h\}$.

Дальнейшее рассмотрение проведем для случая игры $\overline{\Gamma}(\mathbf{x}_0, T)$, для игры $\underline{\Gamma}(\mathbf{x}_0, T)$ оно проводится аналогично. Напишем формальным образом уравнение Гамильтона-Якоби (Беллмана-Айзекса) для верхней игры $\overline{\Gamma}(\mathbf{x}_0, T)$ относительно функции значения $\overline{V}(\cdot)$:

$$\Pr \overline{V} \tau = \min_{\{\mathbf{w}\}} \max_{\{\mathbf{v}\}} \left[\sum_{i=1}^{m} \Pr \overline{V} x_i \cdot \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right] \tag{90}$$

с начальным условием

$$\overline{V}(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = H(x(T)), \tag{91}$$

где $\tau = T - t$, $\tau \in [0, T]$.

Задаче (90)–(91) поставим в соответствие следующую разностную схему на сетке $\omega_{h\delta}$:

$$\begin{gathered}
\overline{V}^{n}_{j_1,j_2,\dots,j_m} = \overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m} + \delta \min_{\{u\}} \max_{\{v\}} \left[\frac{\overline{V}^{n-1}_{j_1+1,j_2,\dots,j_m} - \overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m}}{h_1} \cdot f_1(x^j,u,v) + \dots \right. \\
\left. \dots + \frac{\overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m+1} - \overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m}}{h_m} \cdot f_m(x^j,u,v) \right], \\
j_i \in Z,\ i = \overline{1,m};\ n = 1,\dots,N_\sigma, \\
\overline{V}^{0}_{j_1,j_2,\dots,j_m} = H_{j_1,\dots,j_m},\ j_i \in Z,\ i = \overline{1,m};\ n = 0.
\end{gathered} \tag{92}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $f(x,u,v)$ – вектор-функция, удовлетворяющая условиям (81)–(82). Предположим, что

1. $f_i(x^j,u,v)$ положительны, $i = \overline{1,m}$;

2. минимакс в (92) достигается при некоторых $\overline{u}(t_n) \in U$, $\overline{v}(t_n) \in V$ при любых $x^j \in \omega_h$ и $t_n \in \omega_\delta$.

Тогда разностная схема (92) устойчива при условии

$$\delta \le \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x^j,\overline{u},\overline{v})}{h_i} \right)^{-1}.$$

и для ее решения справедлива оценка:

$$\left\| \overline{V}^{n} \right\|_h \le \left\| \overline{V}^{0} \right\|_h. \tag{93}$$

Замечание. В случае, когда $f_i(x^j,\overline{u},\overline{v})$, $i = \overline{1,m}$ отрицательны, аналогично доказательству устойчивости разностной схемы (92), можно показать устойчивость следующей разностной схемы:

$$\begin{gathered}
\overline{V}^{n}_{j_1,j_2,\dots,j_m} = \overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m} + \delta \min_{\{u\}} \max_{\{v\}} \left[\frac{\overline{V}^{n-1}_{j_1+1,j_2,\dots,j_m} - \overline{V}^{n-1}_{j_1-1,j_2,\dots,j_m}}{h_1} \cdot f_1(x^j,u,v) + \dots \right. \\
\left. \dots + \frac{\overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m+1} - \overline{V}^{n-1}_{j_1,j_2,\dots,j_m-1}}{h_m} \cdot f_m(x^j,u,v) \right], \\
j_1,\dots,j_m \in Z,\ n = \overline{1,N_\sigma}, \\
\overline{V}^{0}_{j_1,j_2,\dots,j_m} = H_{j_1,\dots,j_m},\ j_1,\dots,j_m \in Z,\ n = 0.
\end{gathered}$$

при выполнении условия

$$\delta \leq -\left(\sum_{i=1}^{m} \Pr f_i(x^j, \overline{u}, \overline{v}) h_i\right)^{-1}.$$

В случае, когда $f_i(x^j, \overline{u}, \overline{v})$, $i = \overline{1, m}$ могут быть как положительны, так и отрицательны, при построении разностной схемы нужно аппроксимировать частные производные $\overline{V}(\cdot)$ по x_i, $i = 1, \ldots, m$ в зависимости от знака $f_i(x^j, \overline{u}, \overline{v})$:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{V}^{n-1}_{j_1,\ldots,j_i+1,\ldots,j_m} - \overline{V}^{n-1}_{j_1,\ldots,j_m}}{h_1}, & \text{если } f_i(x^j, u, v) \geq 0, \\ \dfrac{\overline{V}^{n-1}_{j_1,\ldots,j_m} - \overline{V}^{n-1}_{j_1,\ldots,j_i-1,\ldots,j_m}}{h_1}, & \text{если } f_i(x^j, u, v) < 0. \end{cases}$$

Можно показать аналогично, что построенная таким образом разностная схема, будет устойчива при выполнении условия

$$\delta \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \Pr \left|f_i(x^j, \overline{u}, \overline{v})\right| h_i\right)^{-1}. \tag{94}$$

Лемма 2. Пусть H – равномерно непрерывная, ограниченная функция, удовлетворяющая условию Липшица, и пусть $\overline{V}^{n}_{j_1,\ldots,j_m}$, $j_1, \ldots, j_m \in Z$, $n = \overline{0, N_\sigma}$ – решение разностной задачи (92). Предположим, что минимакс в (92) достигается при некоторых допустимых управлениях. Тогда функции $\overline{V}^{n}_{j_1,\ldots,j_m}$ также удовлетворяют условию Липшица.

Лемма 3. Существуют положительные постоянные $\overline{\overline{L}}$, $\overline{L}$, такие, что для любого $t_k \in [0, T]$, $k = \overline{0, N_\sigma}$ и любых x, $x' \in R^m$ для функции значения $\overline{V}^{\sigma}(x, T - t_k)$ игры $\overline{\Gamma}^{\sigma}(x, T - t_k)$ с началом в точке x и продолжительностью $T - t_k$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\overline{V}^{\sigma}(x, T - t_k)| &\leq \overline{\overline{L}}, \\ |\overline{V}^{\sigma}(x, T - t_k) - \overline{V}^{\sigma}(x', T - t_k)| &\leq \overline{L} \exp K_1(T - t_k)|x - x'|. \end{aligned} \tag{95}$$

13 Вектор Шепли в конкурентной динамической модели инвестирования

Постановка задачи

Рассматривается конкурентная динамическая модель инвестирования, в которой головная фирма реализует набор инвестиционных проектов по заказу фирм-инвесторов. Каждый проект характеризуются длительностью его реализации, доходностью для фирмы инвестора и функцией ее издержек, зависящей от времени ожидания. Головная фирма в каждый данный момент времени может заниматься реализацией только одного инвестиционного проекта. Предполагается, что задержка между моментом окончания реализации одного проекта и началом реализации следующего проекта нулевая.

Данная модель рассматривается в терминах кооперативной игры лиц. Ситуацией в модели является порядок выполнения инвестиционных проектов. Договариваясь между собой, инвесторы могут составить очередь выполнения проектов, доставляющую наименьшие суммарные издержки. Объединяясь в коалиции, инвесторы могут изменить последовательность реализации проектов, снизив, таким образом, издержки коалиции, например, путем подкупа сотрудников головной фирмы. Чем крупнее взятка, тем ближе к началу очереди сможет обеспечить себе место коалиция. Вычисляется справедливое решение на основе вектора Шепли.

Формализация задачи

Пусть n — количество проектов и инвесторов ($i = 1, \ldots, n$); T_i — время, которое требуется головной фирме для реализации проекта i; I_i — доходность инвестиционного проекта i; $\alpha_i(t)$ — функция издержек инвестора i от времени; σ_j — последовательность реализации инвестиционных проектов, $\sigma_j = \{i_1, \ldots, i_n\}, j = 1, \ldots, n!$; P_S — прибыль коалиции S в результате реализации проектов $i \in S$; b_S — величина взятки, которую коалиция S считает целесообразной дать сотруднику фирмы, в целях сокращения убытков путем изменения порядка очереди.

Полные издержки коалиции N вычисляются суммированием полных издержек каждого инвестора.

Приведем общую формулу для вычисления полных издержек (издержек коалиции N) H_{σ_i} при любой очередности инвесторов $\sigma_i, i = 1, \ldots, n!$

$$\begin{gathered} H_{\sigma_i} = \alpha_{\sigma_i(n)} \left(\sum_{j=1}^{n} T_{\sigma_i(j)} \right) + \alpha_{\sigma_i(n-1)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} T_{\sigma_i(j)} \right) + \\ + \ldots + \alpha_{\sigma_i(1)} \left(T_{\sigma_i(1)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{\sigma_i(n-k+1)} \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} T_{\sigma_i(j)} \right), \end{gathered} \tag{96}$$

где $\sigma_i(j)$ — j-я компонента вектора σ_i, т.е. номер проекта, который стоит j-м в очереди на выполнение.

Пусть издержки H^N коалиции N определяются формулой

$$H^N = \min_{j=1,\ldots,n!} H_{\sigma_j}.$$

Тогда прибыль коалиции N есть разность суммы доходностей инвестиционных проектов $i \in N$ и издержек коалиции N на его выполнение

$$P^N = \sum_{i \in N} I_i - H^N. \tag{97}$$

Прибыль коалиции $S \subset N$ определяется аналогично:

$$P^S = \sum_{i \in S} I_i - H^S.$$

Определим значение характеристической функции для любой коалиции $S \subset N$ как максиминное значение (для S) игры

$$\Gamma_{S,N \backslash S} = \Big\{ \{S, N\backslash S\}, \{b_S\} \times \{b_{N\backslash S}\}, P^{S,N\backslash S}(b_S, b_{N\backslash S}) \Big\} \tag{98}$$

двух лиц между S и $N\backslash S$. Здесь $\{b_S\}$ — множество стратегий игрока S, состоящее из возможных величин взяток b_S, $\{b_{N\backslash S}\}$ — множество стратегий игрока $N\backslash S$, $P^{S,N\backslash S}(b_S, b_{N\backslash S})$ — вектор-функция выигрышей игроков S и $N\backslash S$, т.е. значения прибылей, получаемой игроками, при конкретных размерах взяток и оптимальном порядке очереди внутри каждой из коалиций S и $N\backslash S$. Ограничим величину взятки коалиции S суммарной доходностью инвестиционных проектов инвесторов, членов коалиции S, т.е. $b_S < \sum_{i \in S} I_i$, и дискретизируем значения b_S для упрощения вычислений. Максиминное значение этой игры и будет характеристической функцией $v(S)$.

Таким образом вычисляется значение характеристической функции для всех коалиций $S \subset N$, и рассчитывается вектор Шепли по формуле:

$$\phi_i[v] = \sum_{\{S | i \in S \subset N\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left[v(S) - v(S\backslash\{i\}) \right], \tag{99}$$

где $s = |S|, n = |N|$.

Пример.

Пусть головной фирме необходимо реализовать 4 инвестиционных проекта по заказу четырех фирм-инвесторов, т.е. $n = 4$. При этом заданы следующие начальные данные:

i	Ti	Ii	$\alpha i(t)$
1	2	3,7	0,12(e0,7t-1)
2	1	3,5	4,5ln(0,2t+1)
3	1,5	4,2	e0,3t-1
4	1,2	2,9	ln(3t+1)

Возможны $4! = 24$ варианта очередностей выполнения проектов. Значение характеристической функции для коалиции N равно прибыли этой коалиции.

$$v(N) = P^N = \sum_{i \in N} I_i - H^N = 3,7 + 3,5 + 4,2 + 2,9 - 7,4337 = 6,8663.$$

Вычислим значения характеристической функции для всех коалиций $S \subset N$ как $\min\limits_{b_{N \setminus S}} \max\limits_{b_S} P^S$

Далее по формуле (4) вычисляем вектор Шепли:

$$\phi[v] = \{1,2380, \quad 1,6680, \quad 2,1262, \quad 1,8342\}.$$

Рассмотренный пример реализован на ЭВМ в среде MatLab.

14 Модель конкурентного взаимодействия между продавцами однотипного товара

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами (называемыми, в соответствии с установившейся традицией, игроками) в ситуациях, когда на результат этих решений оказывают влияние действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Модели такого рода называются играми.

В последние три десятилетия наблюдается стремительное повышение интереса к теории игр и значительное возрастание ее роли. Во многом это объясняется тем, что без нее в настоящее время уже немыслима современная экономическая теория, причем область применения теории игр постоянно расширяется.

В литературе по экономическому моделированию рассмотрена модель дуополии по А.Курно и по Бертрану. В данном параграфе рассматривается задача несколько иного рода, в которой продавцы выбирают наиболее удачный момент продажи (сколько денег необходимо вложить продавцам (например) в рекламные акции, перед тем как выставлять товар на продажу), при этом затрачивают ресурс (деньги) или какие-то похожие действия такого рода.

В первой части параграфа рассмотрена модель конкурентного взаимодействия между продавцами однотипного товара, в которой принимают участие конечное число (например, n) продавцов и один покупатель. Каждый продавец обладает одной единицей товара, которую он желает продать покупателю, при этом весь товар однотипный, так что клиенту безразлично, у какого продавца приобрести этот товар. Продавец, у которого товар куплен, считается выигравшим.

Рассмотрены случаи, в которых принимают участие два, три, четыре и n продавцов и один покупатель.

В случае с двумя продавцами A и B и одним покупателем, продавцы-агенты вкладывают ресурс (например, деньги) в рекламные акции для того, чтобы увеличить вероятность продажи своего товара. Функции вероятности совершения сделки (продажи товара) обозначим *a(s)* и *b(s),* где *s*-количество вложенных в рекламные акции денег; обе функции возрастают от *0* до *1*.

Если один из продавцов выставит товар первым и не продаст, то второй продавец предлагает свой товар, когда будет уверен в его продаже. Если выставит и продаст товар, то конкурент победит. По ходу решения задачи возникает вопрос: сколько денег необходимо вложить продавцам в рекламные акции, перед тем как выставлять товар? Плохо выставлять товар на продажу, вложив слишком мало деньг в рекламные акции, но также опасно вкладывать слишком много деньг в рекламные акции.

Предположим, продавец A вложил количество денег в рекламные акции $s{=}x$, а продавец B - $s{=}y$. Тогда вероятность продажи товара агентом A равна $a(x)$,если A предложил товар на продажу первым или *1-b(y),* если B предложил первым. Далее предполагаем, что способность продавца-агента A убедить покупателя приобрести товар решается случаем. Тогда опишем перспективы продавца A:

$$P_A\left(x,y\right)=\begin{cases} a\left(x\right),x<y \\ 1-b\left(y\right),x>y \\ \frac{1}{2}\left[a\left(x\right)+1-b\left(y\right)\right],x=y \end{cases}$$

Вероятность выигрыша продавца-агента B:

$$P_B\left(x,y\right)=1-P_A\left(x,y\right)$$

Теперь предположим, что продавец A допускает, что его решение "x" (то есть, сколько денег он вложит в рекламные акции) будет заранее угадано продавцом B или возможно выведено на теоретических основаниях. Тогда продавец A может надеяться на не лучшую, чем следующую вероятность продажи товара:

$$Q_A(x) = \min\left[a(x), 1 - b(x)\right],$$

так как агент - продавец B может выбирать или ждать до *s=1*, или продать товар перед *s=x*. Выбирая лучшее из этого, A должен пробовать максимизировать свой выигрыш (аналогичным образом поступает продавец B).

Рассмотрен пример.

Далее в параграфе рассмотрен случай, где участвуют три продавца-агента и один покупатель.

Три продавца-агента A, B и C конкурируют за покупателя. Контакты с покупателем происходят в случайном порядке (выбирает природа). В каждом контакте с покупателем агент пытается убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов. Продавцы-агенты имеют различные «коэффициенты эффективности рекламы», которые зависят от количества вложенных в рекламные акции денег, следовательно, чем больше продавец вложил денег в рекламные акции, тем больше коэффициент убеждения. Продавец, у которого товар куплен, считается выигравшим.

Эта игра не является аналогом предыдущей игры. Каждый из продавцов должен решить, какого конкурента ему выгоднее устранить первым. Продавец должен выставлять товар на продажу раньше своих конкурентов с большими коэффициентами убеждения. Также не известно, как долго будет длиться игра.

Аналогично рассматриваются случаи, в которых участвуют четыре продавца и один покупатель, а также конечное число (например, n) продавцов и один покупатель.

Во второй части данной параграфа рассмотрена модель конкурентного взаимодействия между продавцами однотипного товара, в которой принимают участие два продавца и несколько покупателей.

Рассматриваются два продавца A и B, пытающихся продать однотипный товар на рынке. Каждый продавец обладает товаром, который он желает продать. Цена товара равна D. Продавцы вкладывают некоторое количество капитала (денег) (например) в рекламу. Продавец A вкладывает капитал равный X, а продавец B капитал равный Y.

Введем вероятность $P^1(\%, Y)$ при условии, что если продавец A вложил в рекламу количество денег равное *X,* а продавец B количество денег равное *Y,* то с такой вероятностью товар купят у продавца A. Вероятность $P^1(X, Y)$ должна при постоянном X возрастать по *Y*, а при постоянном Y убывать по *X*, то есть, чем больше продавец A вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец B.

Введем вероятность $P^2(X, Y)$ при условии, что если продавец B вложил в рекламу количество денег равное *Y,* а продавец A количество денег равное *X,* то с такой вероятностью товар купят у продавца B. Вероятность $P^2(X, Y)$ должна при постоянном Y возрастать по *X*, а при постоянном X убывать по *Y*, то есть, чем больше продавец B вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец A.

Предполагается, что случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегии.

Математическое ожидание чистого дохода для продавца A с учетом его издержек на рекламу составит $H^1 = P^1(X, Y)\,D - \% + \left(1 - P^1(X, Y)\,X\right)$. Математическое ожидание чистого дохода для продавца B с учетом его издержек на рекламу составит $H^2 = {}^2(X, Y)\,D - Y + \left(1 - P^2(X, Y)\,Y\right)$.

В качестве решения задачи необходимо найти компромиссную точку, то есть такую ситуацию, при реализации которой достигается компромисс между всеми игроками.

Часть 1

1.1. *Модель конкурентного взаимодействия между двумя продавцами однотипного товара и одним покупателем.*

В данной части параграфа рассмотрена модель, в которой участвуют два агента - продавца A и B, продающих однотипную продукцию, и один покупатель. Агент A вкладывает ресурс (деньги) в рекламные акции для того, чтобы увеличить вероятность осуществления продажи своего товара. Аналогичным образом поступает агент B. Покупатель может сделать только одну покупку. Функции вероятности совершения сделки *a(s)* и *b(s),* где *s* – количество вложенных в рекламные акции денег; обе функции возрастают от *0* до *1*. Продавец, у которого товар куплен, считается выигравшим.

Если один из продавцов выставит товар первым и не продаст, то второй продавец предлагает свой товар, когда будет уверен в его продаже. Если выставит и продаст товар, то конкурент победит. По ходу решения задачи возникает вопрос: сколько денег необходимо вложить продавцам в рекламные акции, перед тем как выставлять товар? Плохо выставлять товар на продажу, вложив слишком мало деньг в рекламные акции, но также опасно вкладывать слишком много деньг в рекламные акции.

Предположим, продавец A вложил количество денег в рекламные акции *s=x*, а продавец B - *s=y*. Тогда вероятность продажи товара агентом A равна *a(x)* ,если A предложил товар на продажу первым или *1-b(y),* если B предложил первым. Далее предполагаем, что способность продавца-агента A убедить покупателя приобрести товар решается случаем. Тогда опишем перспективы продавца A:

$$P_A\left(x,y\right)=\begin{cases} a\left(x\right),x<y \\ 1-b\left(y\right),x>y \\ \frac{1}{2}\left[a\left(x\right)+1-b\left(y\right)\right],x=y \end{cases}$$

Вероятность выигрыша продавца-агента B:

$$P_B\left(x,y\right)=1-P_A\left(x,y\right)$$

Теперь предположим, что продавец A допускает, что его решение " *x* " (то есть, сколько денег он вложит в рекламные акции) будет заранее угадано продавцом B или возможно выведено на теоретических основаниях. Тогда продавец A может надеяться на не лучшую, чем следующую вероятность продажи товара:

$$Q_A\left(x\right)=\min\left[a\left(x\right),1-b\left(x\right)\right],$$

так как агент - продавец B может выбирать или ждать до *s=1*, или продать товар перед *s=x*. Выбирая лучшее из этого, A должен пробовать максимизировать $Q_A\left(x\right)$. Это значит вложить такое количество денег $x=S_0$, где S_0 определено уравнением

$a\left(S_0\right)=1-b\left(S_0\right)$, или

$a\left(S_0\right)+b\left(S_0\right)=1.a\left(S_0\right)+b\left(S_0\right)=1.$ (96)

Продавая в этот момент (если B ещё не продал), продавец A может быть уверен в вероятности продажи своего товара, по крайней мере, $a\left(S_0\right)$ независимо от того, что B знает или делает.

В тоже время продавец B, решая то же самое уравнение (96) и выбрав $y=S_0$, может быть уверен в вероятности продажи своего товара, по крайней мере $b\left(S_0\right)$. Но эти две вероятности продажи составляют в целом 1 . Нет никакой возможности для улучшения осторожных стратегий. Поэтому, они – оптимальные стратегии, и игра решена.

Пример.

Предположим, что функция вероятности совершения сделки изменяется $a(s)=s$, $b(s)=s^2$.Из функций $a(s)$ и $b(s)$ можем видеть, что продавец A является лучшим продавцом. Оба игрока выставят свой товар на продажу, когда их вклад достигнет $_{s_0}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$. Вероятность продажи товара продавцом A равна a($_{s_0}$)=0.618, продавца B – b($_{s_0}$)=0.382.

1.2. *Рассмотрим модель конкурентного взаимодействия, где участвуют три агента A, B, C и один покупатель.*

Три продавца-агента A, B и C конкурируют за покупателя. Контакты с покупателем происходят в случайном порядке (выбирает природа). В каждом контакте с покупателем продавец-агент пытается убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов. Агенты имеют различные «коэффициенты эффективности рекламы». Продавец, у которого товар куплен, считается выигравшим.

Эта игра не является аналогом предыдущей игры. Каждый из продавцов должен решить, какого конкурента ему выгоднее устранить первым. Также продавцу не известно, как долго будет длиться игра.

Таким образом, предположим, что продавец-агент C вышел из игры (то есть, продавцу C дважды случайным образом выпал шанс первому отговаривать покупателя не подходить к продавцам A и B (и, следовательно, не покупать у них товар) и случайным образом покупатель не поддался на уговоры продавца C), и что для продавцов A и B функции вероятности совершения сделки будут равны $a(s)$ и $b(s)$, соответственно, где s – количество вложенных в рекламные акции денег. Следующий этап закончится одним из следующих событий: непосредственная продажа товара агентом A (вероятность $a/2$); непосредственная продажа агентом B (вероятность $b/2$); или неудача и повторение статус-кво (вероятность $(1\text{-}a/2\text{-}b/2)$). Написав $P_{A,B}$ для вероятности того, что продавец A в конечном счёте побеждает, когда A был единственным противником B, мы получаем:

$$P_{A,B}=\frac{a}{2}+\left(1-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)P_{A,B}P_{A,B}=\frac{a}{2}+\left(1-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)P_{A,B}$$
(97)

Решение этого уравнения дает $P_{A,B}=\frac{a}{a+b}$. Подобным образом мы находим, что $P_{A,C}=\frac{a}{a+c}$ (*) и $P_{,!}=\frac{b}{b+c}$(**).

Теперь предположим, что продавцы-агенты имеют различные «коэффициенты эффективности рекламы» $a(s)>b(s)>c(s)$, где s – количество вложенных в рекламные акции денег, следовательно, чем больше вложенных в рекламные акции денег, тем больше коэффициент убеждения продавца.

На первом шаге природа бросает вероятностный механизм, то есть случайным образом (например, с помощью рулетки), с вероятностью $1/3$ (будем считать, что вероятность одинаковая), определяется, кто из продавцов *A, B* или *C,* первый будет пытаться убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов.

Допустим, что первому выпал шанс убеждать покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов, выпал продавцу A. Продавец A будет пытаться уговорить покупателя не подходить к продавцу B и не покупать товар у продавца *B,* исходя из коэффициентов эффективности рекламы. Шансы продавца A на непосредственный успех продажи товара одинаковые, но он определенно предпочёл бы предлагать свой товар позже продавца C, а не B, так как $P_{A,C} > P_{A,B}$. Поэтому продавцу A выгоднее устранить первым продавца B.

Исходя из коэффициентов эффективности рекламы $a(s) > b(s) > c(s)$, продавец B будет пытаться первым устранить продавца A. По аналогичным причинам продавец C будет пытаться первым устранить продавца A.

Когда один из продавцов устранен, два другие продавца действуют по выше описанному принципу.

Вычислим вероятность P_A для начального шанса продавца A на продажу своего товара. Рассматривая только первый этап, получаем:

$$P_A = \left(\frac{a}{3}\right) P_{A,C} + \left(1 - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3}\right) P_A$$

Подставим формулу (*) и вычислим .
$P_A = \frac{a^2}{(a+b+c)(a+c)}$ (***);
Так как $P_A + P_B + P_C = 1$, то

$$P_B + P_C = 1 - P_A$$

Подставляем формулу (***) и получаем

$$P_B + P_C = \frac{(b\,a + b\,c) + \left(2\,c\,a + c^2\right)}{(a+b+c)\,(a+c)}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} P_A = \frac{a^2}{(a+b+c)(a+c)} \\ P_B = \frac{b}{a+b+c} \\ P_C = \frac{c(2a+c)}{(a+b+c)(a+c)} \end{cases} \qquad (100)$$

Они составляют в целом 1, так как бесконечно длительные торги имеет вероятность 0.

Игра решена. Мы ввели правило для игры: “Предлагайте товар на продажу раньше вашего наиболее сильного противника”.

1.3.*Рассмотрим модель, где участвуют четыре агента A, B, C и D и один покупатель.*

Четыре агента *A, B, C и D* конкурируют за клиента. Контакты с покупателем происходят в случайном порядке (выбирает природа). В каждом контакте с покупателем агент пытается убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов. Агенты-продавцы имеют различные «коэффициенты эффективности рекламы». Продавец, у которого товар куплен, считается выигравшим.

Агенты - продавцы *A, B, C, D* имеют различные коэффициенты эффективности рекламы $a(s)>b(s)>c(s)>d(s)$, где s – количество вложенных в рекламные акции денег, следовательно, чем больше вложенных в рекламные акции денег, тем больше коэффициент убеждения продавца.

На первом шаге природа бросает вероятностный механизм, то есть случайным образом (например, с помощью рулетки), с вероятностью *1/ 4* (будем считать, что вероятность одинаковая), определяется, кто из продавцов *A, B*, *C* или *D*, первый будет пытаться убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов.

Допустим, что первому выпал шанс убеждать покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов, выпал продавцу A. Продавец A будет пытаться уговорить покупателя не подходить к продавцу B и не покупать товар у продавца *B,* исходя из коэффициентов эффективности рекламы. Шансы продавца A на непосредственный успех продажи товара одинаковые, но он определенно предпочёл бы предлагать свой товар позже продавца D, а не B или A, так как$P_{A,D} > P_{A,C} > P_{A,B}$. Поэтому продавцу A выгоднее пытаться устранить первым продавца B.

Исходя из коэффициентов эффективности рекламы
$a(s) > b(s) > c(s) > d(s)$, продавец B будет пытаться первыми устранить продавца A. По аналогичным причинам продавцы *C,D* будут пытаться первым устранить продавца A.

Когда один из продавцов устранен, три другие продавца действуют по выше описанному принципу.

Вычислим вероятность P_A для начального шанса продавца A на продажу своего товара. Рассматривая только первый этап, мы получаем:

$$P_A = \left(\frac{a}{4}\right) P_{A,D} + \left(1 - \frac{a}{4} - \frac{b}{4} - \frac{c}{4} - \frac{d}{4}\right) P_A$$

Подставим формулу (**) и вычислим P_A:

$P_A = \frac{a^2}{(a+d)(a+b+c+d)}$(****)
Так как $P_A + P_B + P_C + P_D = 1$, то

$$P_B + P_C + P_D = 1 - P_A$$

Подставляем формулу (****) и получаем

$$P_B + P_C + P_D = \frac{(a\,b + d\,b) + \left(a\,c + c\,d\right) + \left(2\,a\,d + d^2\right)}{(a+d)\,(a+b+c+d)}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} P_A = \frac{a^2}{(a+d)(a+b+c+d)} \\ P_B = \frac{b}{a+b+c+d} \\ P_C = \frac{c}{a+b+c+d} \\ P_D = \frac{d(2a+d)}{(a+d)(a+b+c+d)} \end{cases}$$

Они составляют в целом 1, так как бесконечно длительные торги имеют вероятность 0.

Игра решена. Ввели правило для игры: 'Предлагайте товар на продажу раньше вашего наиболее сильного противника'.

1.4.*Рассмотрим модель, где участвуют n (конечное число) продавцов - агентов и один покупатель.*

Обозначим продавцов: *A*-I_1, *B*-I_2, *C*-I_3,. . . , *N*-I_n. Контакты с покупателем происходят в случайном порядке (выбирает природа). В каждом контакте с покупателем агент пытается убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов. Агенты имеют различные «коэффициенты эффективности рекламы». Агент, у которого сделают покупку, выиграл.

Агенты – продавцы I_1,I_2, I_3,...,I_n имеют различные коэффициенты эффективности рекламы, то есть i_1(s)>i_2(s)>i_3(s)>. . . >i_n(s), где s – количество вложенных в рекламные акции денег, следовательно, чем больше вложенных в рекламные акции денег, тем больше коэффициент убеждения продавца.

На первом шаге природа бросает вероятностный механизм, то есть случайным образом (например, с помощью рулетки), с вероятностью *1/n* (будем считать, что вероятность одинаковая), определяется, кто из продавцов первый будет пытаться убедить покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов.

Допустим, что первому выпал шанс убеждать покупателя отклонить продукцию одного из своих конкурентов, выпал продавцу I_1. Продавец I_1 будет пытаться уговорить покупателя не подходить к продавцу I_2 и не покупать товар у продавца I_2, исходя из коэффициентов эффективности рекламы. Шансы продавца I_1 на непосредственный успех продажи товара одинаковые, но он определенно предпочёл бы предлагать свой товар позже продавца I_n, а не I_2 илиI_3,$\ldots I_{n-1}$, так как $P_{I_1 \quad I_n} > P_{I_1 \quad I_{n-1}} >$ .... $> P_{I_1 \quad I_2}$. Поэтому продавцу I_1 выгоднее пытаться устранить первым продавца I_2.

Исходя из коэффициентов эффективности рекламы i_1(s)$>$ i_2(s)$>$ i_3(s)$>$ $\ldots >$ i_n(s), продавец I_2 будет пытаться устранить продавца I_1. По аналогичным причинам продавцы I_3,...,I_nбудут пытаться устранить продавца I_1.

Когда один из продавцов устранен, другие *n-1* продавцы действуют по выше описанному принципу.

Вычислим P_{I_1} для начального шанса продавца I_1 на продажу своего товара. Рассматривая только первый этап, мы получаем:

$$P_{I_1} = \left(\frac{i_1}{n}\right) P_{I_1 \quad I_n} + \left(1 - \frac{i_1}{n} - \frac{i_2}{n} - \frac{i_3}{n} - \ldots - \frac{i_n}{n}\right) P_{I_1}$$

Подставим формулу $P_{I_1 \quad I_n} = \frac{i_1}{i_1 + i_n}$ и вычислим P_{I_1}.

Так как $P_{I_1} + P_{I_2} + P_{I_3} + \ldots + P_{I_n} = 1$, то

$$P_{I_2} + P_{I_3} + \ldots + P_{I_n} = 1 - P_{I_1}$$

И далее вычисляем остальные вероятности.

Игра решена. Мы ввели правило для игры: 'Предлагайте товар на продажу раньше вашего наиболее сильного противника'.

Часть 2

Прежде чем приступить к описанию игры приведем необходимые сведения из теории игр.

Напомним, что полезность - это условная характеристика, отражающая степень удовлетворенности субъекта результатом деятельности. Значение полезности определяется функцией полезности.

Напомним определение компромиссной точки.

Пусть X – пространство ситуаций игры, $H_i : X \to R_i, i \in I$-суть функции выигрыша игроков. Положим $_i = \max\{H_i(x) \mid x \in X\}$. Тогда компромиссная точка C_H в игре Г определяется следующим образом:

$$!_H = \left\{ x \in X : \max_i \left(M_i - H_i\left(x\right) \right) \leq \max_i \left(M_i - H_i\left(x'\right) \right) \forall x' \in X \right\}.$$

Модель конкурентного взаимодействия между двумя продавцами однотипного товара с несколькими покупателями.

2.1. Формальная постановка задачи.

Рассматриваются два продавца A и B, пытающихся продать однотипный товар на рынке. Каждый продавец обладает товаром, который он желает продать. Цена товара равна D. Продавцы вкладывают некоторое количество капитала (денег) (например) в рекламу. Продавец A вкладывает капитал равный X, а продавец B капитал равный Y.

Введем вероятность $P^1\left(\%, Y\right)$ при условии, что если продавец A вложил в рекламу количество денег равное X, а продавец B количество денег равное Y, то с такой вероятностью товар купят у продавца A. Вероятность $P^1\left(X, Y\right)$ должна при постоянном X возрастать по Y, а при постоянном Y убывать по X, то есть, чем больше продавец A вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец B.

Введем вероятность $P^2\left(X, Y\right)$ при условии, что если продавец B вложил в рекламу количество денег равное Y, а продавец A количество денег равное X, то с такой вероятностью товар купят у продавца B. Вероятность $P^2\left(X, Y\right)$ должна при постоянном Y возрастать по X, а при постоянном X убывать по Y, то есть, чем больше продавец B вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец A.

Предполагается, что случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегии.

Математическое ожидание чистого дохода для продавца A с учетом его издержек на рекламу составит $H^1 = P^1\left(X, Y\right) D - \% + \left(1 - P^1\left(X, Y\right) X\right)$. Математическое ожидание чистого дохода для продавца B с учетом его издержек на рекламу составит $H^2 = {}^2\left(X, Y\right) D - Y + \left(1 - P^2\left(X, Y\right) Y\right)$.

В качестве решения задачи необходимо найти компромиссную точку, то есть такую ситуацию, при реализации которой достигается компромисс между всеми игроками.

2.2. Математическая постановка задачи.

Рассмотрим игру в нормальной форме.

$$= \left\langle I, X, Y, H^1, H^2 \right\rangle,$$

где $I = \{1, 2\}$- продавцы *A* и *B,*

$X = \{x_1, ..., x_n\}$- множество стратегий продавца A (количество вложенных в рекламу денег продавцом A),

$Y = \{y_1, ..., y_m\}$- множество стратегий продавца B (количество вложенных в рекламу денег продавцом B),

H^1 и H^2 - матрицы выигрышей продавцов A и B соответственно. Выигрыши выражены в некоторых условных единицах и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегии.

Полезности задаем как функции вида

H^1: $(X, Y) \mapsto R$,

H^2: $(X, Y) \mapsto R$

Каждый продавец обладает товаром, который он желает продать. Цена товара равна *D*. Продавцы вкладывают некоторое количество капитала (денег) (например) в рекламу. Продавец A вкладывает капитал равный *X*, а продавец B капитал равный *Y*.

Множеством ситуаций *S* в игре будет являться множество

$\sum$=$\langle (x_1, y_1)$, (x_1, y_2),..., (x_1, y_m), (x_2, y_1),. . . , (x_n, y_m) $\rangle$.

Вероятность продажи товара продавцом *A,* в зависимости от вкладываемых денег в рекламу, вводим следующим образом: $P^1 (\%, Y)_{n\times m} = \left(@^1_{lk} (x_l, y_k)\right)$ *(l=1,. . . ,n; k=1,. . . ,m)* (индекс l соответствует номеру стратегии из множества *X*, а индекс *k* номеру стратегии из множества *Y*)

$$P^1 (X, Y) = \begin{pmatrix} @^1_{11} (E_1, C_1) & @^1_{12} (E_1, C_2) & \ldots & @^1_{1m} (E_1, C_m) \\ @^1_{21} (x_2, C_1) & @^1_{22} (x_2, C_2) & \ldots & @^1_{2m} (x_2, y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ @^1_{n1} (x_n, y_1) & @^1_{n2} (x_n, y_2) & \cdots & @^1_{nm} (x_n, C_m) \end{pmatrix}$$

Вероятность $P^1 (X, Y)$ должна при постоянном *X* возрастать по *Y*, а при постоянном *Y* убывать по *X*, то есть, чем больше продавец *A* вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец *B*.

Вероятность продажи товара продавцом *B,* в зависимости от вкладываемых денег в рекламу, вводим следующим образом: $P^2 (\%, Y)_{n\times m} = \left(p^2_{lk} (x_l, y_k)\right)$ *(l=1,. . . ,n; k=1,. . . ,m)* (индекс l соответствует номеру стратегии из множества *X*, а индекс *k* номеру стратегии из множества *Y*)

$$P^2(X,Y) = \begin{pmatrix} @_{11}^2(E_1,C_1) & @_{12}^2(E_1,C_2) & \dots & @_{1m}^2(E_1,C_m) \\ @_{21}^2(x_2,C_1) & @_{22}^1(x_2,C_2) & \dots & @_{2m}^2(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ @_{n1}^2(x_n,y_1) & @_{n2}^2(x_n,y_2) & \cdots & @_{nm}^2(x_n,C_m) \end{pmatrix}$$

Вероятность $P^2(X,Y)$ должна при постоянном Y возрастать по X, а при постоянном X убывать по Y, то есть чем больше продавец B вложил денег в рекламу, тем меньше вероятность того, что продаст товар продавец A.

Математическое ожидание чистого дохода продавца A с учетом его издержек на рекламу составит: $\{\left(H^1\right)_{n\times m} = \left(h_{ij}^1\right)$ *(i=1,...,n;j=1,...,m),*

где $h_{ij}^1 = p_{ij}^1(x_i,y_j)D - x_i + \left(1 - p_{ij}^1(x_i,y_j)x_i\right)\}$

$$H^1 = \begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & \dots & h_{1m}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & \dots & h_{2m}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}^1 & h_{n2}^1 & \cdots & h_{nm}^1 \end{pmatrix},$$

где $h_{11}^1 = @_{11}^1(x_1,C_1)D - x_1 + \left(1 - p_{11}^1(x_1,y_1)x_1\right)$

$$h_{12}^1 = @_{12}^1(x_1,C_2)D - x_1 + \left(1 - p_{12}^1(x_1,y_2)x_1\right)$$

$$h_{21}^1 = @_{21}^1(x_2,C_1)D - x_2 + \left(1 - p_{21}^1(x_2,y_1)x_2\right)$$

. . . .

$$h_{nm}^1 = @_{nm}^1(x_n,C_m)D - x_n + \left(1 - p_{nm}^1(x_n,y_m)x_n\right),$$

$\{x_1,...,x_n\}$- множество стратегий продавца A (количество вложенных в рекламу денег продавцом A),

D -цена товара,

$\left(p_{ij}^1(x_i,y_j)\right)$ - вероятности продажи товара продавцом A в соответствующей ситуации (E_i,C_j) игры *Г*, где *i=1,. . . ,n; j=1,. . . ,m.*

Математическое ожидание чистого дохода продавца B с учетом его издержек на рекламу составит: $\{\left(H^2\right)_{n\times m} = \left(h_{ij}^2\right)$ *(i=1,...,n;j=1,...,m),*

где $h_{ij}^2 = p_{ij}^2(x_i,y_j)D - y_j + \left(1 - p_{ij}^2(x_i,y_j)y_j\right)\}$

$$H^2 = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 & \dots & h_{1m}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 & \dots & h_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}^2 & h_{n2}^2 & \cdots & h_{nm}^2 \end{pmatrix},$$

где $h_{11}^2 = @_{11}^2 (x_1, C_1) D - y_1 + \left(1 - p_{11}^2 (x_1, y_1) y_1\right)$

$$h_{12}^2 = @_{12}^2 (x_1, C_2) D - y_2 + \left(1 - p_{12}^2 (x_1, y_2) y_2\right)$$

$$h_{21}^2 = @_{21}^2 (x_2, C_1) D - y_1 + \left(1 - p_{21}^2 (x_2, y_1) y_1\right)$$

. . . .

$$h_{nm}^2 = @_{nm}^2 (x_n, C_m) D - y_m + \left(1 - p_{nm}^2 (x_n, y_m) y_m\right),$$

$\{y_1, ..., y_m\}$- множество стратегий продавца *B* (количество вложенных в рекламу денег продавцом *B*),

D -цена товара,

$p_{ij}^2 (x_i, y_j)$ - вероятности продажи товара продавцом *B* в соответствующей ситуации (E_i, C_j) игры *Г*, где *i=1, . . . ,n; j=1,. . . ,m.*

В каждой матрице H^1 и H^2 строка соответствует стратегии продавца *A*, столбец стратегии продавца *B*, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш продавца *A*, во второй матрице выигрыш продавца *B*.

В качестве решения задачи необходимо найти компромиссную точку, то есть такую ситуацию, при реализации которой достигается компромисс между всеми игроками.

2.3.Алгоритм решения.

Напомним определение компромиссной точки.

Определение:

Пусть X – пространство ситуаций игры, $H_i : X \to R_i, i \in I$-суть функции выигрыша игроков. Положим $_i = \max \{H_i (x) \mid x \in X\}$. Тогда компромиссная точка C_H в игре Г определяется следующим образом:

$$!_H = \left\{ x \in X : \max_i (M_i - H_i (x)) \le \max_i (M_i - H_i (x')) \, \forall x' \in X \right\}.$$

Опишем алгоритм нахождения компромиссной точки.

Шаг 1. Для каждого игрока вычисляются величины:

$$M_i = \max_{\Sigma_k \in S} H_i(\Sigma_k), \forall k = 1, 2, ...\bar{k},$$

где $\bar{k}$- количество ситуаций в игре Г

и составляется «идеальный вектор» $= (_1, ..., _n)$.

Шаг 2. Для каждого игрока и для каждой ситуации игры $\Sigma_: \in S, k = 1, 2, ...\bar{k}$ игры Г вычисляются следующие величины отклонений от максимума M_i:

$$\Delta_i(\Sigma_k) = M_i - H_i(\Sigma_k).$$

Шаг 3. Находятся максимальные отклонения для всех игроков при каждой перестановке (ситуации игры) $\Sigma_: \in S$,

$$\lambda(\Sigma_:) = \max_{i \in I} \Delta_i(\Sigma_k),$$

где $k = 1, 2, ..., \bar{k}$, $\bar{k}$- количество ситуации в игре Г, I - множество игроков игры Г.

Шаг 4. Выбирается минимальное из этих максимальных отклонений, то есть находится $\min\limits_{\Sigma_k \in S} \lambda(\Sigma_:)$, где $k = 1, 2, ..., \bar{k}$.

Ситуация, в которой достигается этот минимум и является компромиссной точкой для всех игроков.

2.4.Пример.

Рассмотрим пример, в котором принимают участие два продавца A и B.Стоимость однотипного товара, который они желают продать, равна D=1000.

Пусть заданы вероятности продажи товара продавцом A следующим образом:

$$P^1(x, C) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 100 & 200 \end{array} \\ \begin{array}{c} 100 \\ 200 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Вероятности продажи товара продавцом B:

$$P^2(x, C) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 100 & 200 \end{array} \\ \begin{array}{c} 100 \\ 200 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Математическое ожидание чистого дохода для продавца A составит:

$(H^1)_{n \times m} = (h^1_{ij})$ *(i=1,...,n;j=1,...,m)*,

где $h^1_{ij} = p^1_{ij}(x_i, y_j)D - x_i + \left(1 - p^1_{ij}(x_i, y_j)x_i\right)$

$$H^1 = \begin{pmatrix} 450 & 640 \\ 180 & 400 \end{pmatrix}$$

для продавца B:
$\left(H^2\right)_{n\times m} = \left(h_{ij}^2\right)$ *(i=1,...,n;j=1,...,m),*
где $h_{ij}^2 = p_{ij}^2\left(x_i, y_j\right) D - y_j + \left(1 - p_{ij}^2\left(x_i, y_j\right) y_j\right)$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 450 & 480 \\ 360 & 400 \end{pmatrix}$$

В качестве решения задачи необходимо найти компромиссную точку, то есть такую ситуацию, при реализации которой достигается компромисс между всеми игроками.

Компромиссную точку находим по описанному выше алгоритму.

*Шаг 1.*Составим идеальный вектор.

Рассмотрим четыре ситуации в игре:

1:$H_1 = (450; 450)$

2:$H_2 = (640; 480)$

3:$H_3 = (180; 360)$

4:$H_4 = (400; 400)$

Идеальный вектор *M=(640;480)*.

Шаг 2. Для каждого игрока и для каждой ситуации игры игры Г вычисляются следующие величины отклонений от максимума

$$R_1 = (190; 30)$$

$$R_2 = (0; 0)$$

$$R_3 = (460; 120)$$

$$R_4 = (240; 80)$$

Шаг 3. Находятся максимальные отклонения для всех игроков при каждой перестановке (ситуации игры)

$$P_1 = 190$$

$$P_1 = 0$$

$$P_1 = 460$$

$$P_1 = 240$$

Шаг 4. Выбирается минимальное из этих максимальных отклонений $\min_i P_i = 0$. Ситуация $H_2 = (640; 480)$, в которой достигается этот минимум и является компромиссной точкой для всех игроков.

3.Заключение

В первой части параграфа предложена модель конкурентного взаимодействия между продавцами однотипного товара и одним покупателем. Продавцы выбирают наиболее удачный момент продажи (сколько денег необходимо вложить продавцам (например) в рекламные акции, перед тем как выставлять товар на продажу), при этом затрачивают ресурс (деньги) или какие-то похожие действия такого рода.

Во второй части параграфа составлена модель конкурентного взаимодействия между продавцами однотипного товара с несколькими покупателями. Формализована игра в нормальной форме. Описан алгоритм нахождения компромиссного дохода игроков. Приведен пример.

15 Модель аукциона первой цены с многоагентным взаимодействием

Впервые для анализа аукционов теорию игр использовал В.Викри в 1961 году. В дальнейшем теоретико-игровые модели аукционов рассматривали в своих работах в 1967—2000 годах Р.Вилсон, П.Милгром, Р.Вебер, П.Клемперьер и другие авторы. В данной работе рассматривается задача конкурентного управления со многими участниками, моделирующая сравнительно узкий класс экономических конфликтных процессов купли-продажи аукционного типа. В данной работе построена модель конкурентного управления со многими продавцами. Найдено решение в виде компромиссной точки для указанной модели.

Модель аукциона Γ_f, ограниченная количеством выигранных лотов.

В конструируемой модели Γ_f продавцы $i = 1, \ldots, n$, составляющие множество $N \neq \emptyset$, одновременно и независимо друг от друга и от покупателей выставляют на торги каждый свой лот. Продавец $i \in N$, имея оценку лота $r_i > 0$, указывает цену за свой лот $y_i > 0$, где $i = 1, \ldots, n$, $y_i \in Y_i$

($Y_i = [0, 1, \dots, l_i]$ —множество стратегий продавца i-го лота, где l_i - натуральное число). Также покупатели, составляющие множество $M \neq \emptyset$, одновременно и независимо друг от друга и от продавцов указывают свои цены по каждому выставляемому на торги лоту $x_{ji} > 0$, имея по ним свои оценки $v_{ji} > 0$, где $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ и $x_{ji} \in X_j$ ($X_j = [0, 1, \dots, k_j]$ — множество стратегий j-го покупателя, где k_j - натуральное число). Предполагается, что число продавцов не превышает числа покупателей, $n \leq m$. Каждому игроку известны функции выигрыша всех игроков: для покупателя функция выигрыша равна разности между его оценкой лота и ценой, объявляемой им за этот лот, для продавца функция выигрыша равна разности между ценой, объявляемой им за его лот, и его оценкой этого лота.

Будем считать, что если покупатель выигрывает более одного лота, то ему достается только тот лот, оценка которого была самой высокой среди всех остальных его оценок лотов: $v_{j_k i_p} = \max\{v_{j_k s} | s \in S_{j_k}\}$, где $j_k \in M_k$ - множеству игроков, купивших лоты, S_{j_k} — множество лотов, назначенные цены за которые j_k-ым покупателем суть самые высокие среди всех назначенных цен остальными покупателями за эти лоты: $x_{j_k s} > \max\{x_{ls} | 1 \leq l \leq m,\ l \neq j_k\}$, $i_p \in N_p$—множество игроков, продавших лоты. Остальные лоты из множества S_{j_k} достаются покупателям, имеющим максимальную оценку по указанным лотам и назначившим вторую по величине цену за эти лоты, которая удовлетворяет условиям модели Γ_f .

В соответствии с правилами аукциона в аукционе j-ый покупатель выигрывает лот i-го продавца в ситуации, если его назначенная цена за лот, является самой высокой среди всех цен, назначенных другими покупателями за этот лот, и не меньше цены, назначенной продавцом за лот. В случае, если покупатель выигрывает более одного лота, то он получает только один лот, оценка которого оказалась самой высокой среди всех его оценок по другим выигранным им лотам.

В процессе управления аукционом i-ый продавец реализует свой лот в ситуации, если назначенная им цена за лот не выше хотя бы одной из объявленных цен за этот лот покупателями. В случае если покупатель, объявивший максимальную цену по этому лоту, получает другой лот, то продавец продает этот лот покупателю, предложенная цена которого за этот лот оказалась второй по величине и не меньше цены продавца, а оценка покупателем этого лота оказалась самой высокой среди всех его оценок по выигранным им лотам.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть дана модель конкурентного управления закрытого аукциона первой цены Γ_f с фиксированным шагом увеличения це-*

ны j-го покупателя d_{ji} за лот i и с фиксированным шагом увеличения цены продавца k_i i-го лота , где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда, максимальная продолжительность аукциона Γ_f определяется по формуле $\tau\left(x_{ji},\, y_i,\, v_{ji},\, r_i,\, d_{ji},\, k_i\right) = 1 + \min\left[\max\limits_j \left(\frac{v_{ji}-x_{ji}}{d_{ji}}\right),\, \max\limits_i \left(\frac{y_i-r_i}{k_i}\right)\right]$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $r_i > 0$ — оценка i-ым продавцом своего лота, $v_{ji} > 0$ — оценка j-ым покупателем i-го лота, $y_i > 0$ — цена, назначенная i-ым продавцом за свой лот на первом шаге аукциона Γ_f, $x_{ji} > 0$ — цена, назначенная j-ым покупателем за i-ый лот на первом шаге аукциона Γ_f.

Литература

[1] *Аллен Р.* Математическая экономия. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

[2] *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. — М.: издательство “Мир”, 1971.

[3] *Альсевич В.В.* Математическая экономика // Минск: Дизайн-ПРО, 1998. — 240 с.

[4] *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М., 1984

[5] *Балахнин П.А., Малафеев О.А.* Конкурентная значимость стратегий фирмы и устойчивость равновесия Курно-Нэша // Международная конференция по проблемам управления: Тез. докл., Москва, 29 июня — 2 июля 1999 г. — Институт проблем управления РАН. — М.: Фонд "Проблемы управления 1999. — Т.2. — 186-188 с.

[6] *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. — М.: “Наука”, 1984.

[7] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Мир. 1967. 223 с.

[8] *Барбашин Е.А.* К теории обощенных динамических систем. — Учен. зап. МГУ, 1949, N 135.

[9] *Беллман Р.* Динамическое программирование // Пер. с англ. И.М. Андреева, А.А. Корбут И. В. Романовский, И. Н. Соколова, под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 399 с.

[10] *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования // Пер. с англ. Н.М. Митрофанова, А.А. Первозванский, А.П. Хусу, О.П. Шалавского, под ред. А.А. Первозванского. — М.: Издательство "Наука 1965. — 457 с.

[11] *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления // Пер. с англ. Е.Я. Ройтенберга, под ред. Б.С. Разумихина. — М.: Наука, 1969. — 118 с.

[12] *Бергстром А.* Построение и применение экономических моделей. — М.: Прогресс, 1970.

[13] *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц // Пер. с франц. И.В. Соловьёва,под ред. В.Ф. Колчина. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 128 с.

[14] *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. 351 с.

[15] *Бишоп Р.Л., Криттенден Р.Дж.* Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967. 335 с.

[16] *Бланк И.А.* Финансовый менеджмент // Киев, 1999. — 527 с.

[17] *Бланчард К., Вэгхорн Т.* Миссия возможного, или Как стать компанией мирового класса: Пер. с англ. — Челябинск: “УралLTD”, 1998. — 292 с.

[18] *Богданофф Дж., Козин Ф.* Вероятностные модели накопления повреждений: Пер. с англ. и предисл. С.А. Тимашева. -— М., Мир, 1989. — 341 с.: граф.

[19] *Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.* К теории оптимальных процессов // Докл. АН СССР, 1956. — Т.110, j1 — 7-10 с.

[20] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления // М.: Наука, 1969. — 408 с.

[21] *Браверман Э.М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах // М.: Наука, 1976. — 368 с.

[22] *Варга Дж.* Опртимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями — М.: Наука, 1977. — 624 с.

[23] *Вилкас Э.Й.* Оптимальность в играх и решениях // М: Наука, 1990.

[24] *Вилкас Э.Й.* Понятие оптимальности в теории игр // Современные направления теории игр. — Вильнюс: Минтис, 1976.

[25] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: “Наука”, 1976.

[26] *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М., “Наука”, 1984.

[27] *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985.

[28] *Воробьев Н.Н.* Приложения теории игр// Вильнюс, 1971. — 118 с.

[29] *Воробьев Н.Н.* Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков // Ленинград: Издательство ЛГУ, 1974. — 160 с.

[30] *Габасова О.Р.* Об оптимальной политике фирмы, использующей в производстве два технических способа // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл., Минск, 19-24 июня 2000 г. — Институт математики НАНБ, 2000. — Ч.4. 60-61 с.

[31] *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: ИЛ,1963.

[32] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.- Киев, 1968.

[33] *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. — 384 с.

[34] *Гликсберг И.* Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша // Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 497–503.

[35] *Данилов Н.Н.* Связь между методом динамического программирования и принципом динамической устойчивости в кооперативных играх // Многошаговые, иерархические, дифференциальные и кооперативные игры: Сб. науч. тр. Калинин, 1986.

[36] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1, М.: ИЛ, 1959. 859 с.

[37] *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр // М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 336 с.

[38] *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения // Под ред. В.С. Молоствова. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 336 с.

[39] *Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. — М., “Советское радио”, 1973. 312 с.

[40] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М., 1975. 494 с.

[41] *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Машиностроение, Л., 1974.

[42] *Зубов В.И.* Теория оптимального управления. Судостроение, Л., 1966.

[43] *Зубов В.И.* Функции Ляпунова и их приложения. — Изд. ЛГУ, 1957.

[44] *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория // М.: Прогресс, 1975. — 607 с.

[45] *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства // Л.: Издательство ЛГУ, 1939. — 67 с.

[46] *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов // М.: Издательство Академии наук, 1959. — 343 с.

[47] *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 840 с.

[48] *Карманов В.Г.* Математическое программирование: учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.

[49] *Качурин Г.А.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. — Л., Гидрометеоиздат, 1990.

[50] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, в 2х томах: Пер. с англ. — М.: Наука. 1981. — 344 с., 416 с.

[51] *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М.: “Советское радио”, 1967.

[52] *Колесников В.И., Кролевецкая Л.П. и др.* Банковское дело // М.: Финансы и статистика, 2001. — 460 с.

[53] *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количесва вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ. Серия А. 1937. №6.

[54] *Колокольцов В.Н., Малафеев О.А.* Магистрали в конфликтно управляемых процессах бесконченой длительности // Междунар. семинар "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации"NODROC'91, Владивосток, сентебрь 1991 / Тезисы докладов. — Минск, 1991. — С. 58-59.

[55] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М., 1968. 450 с., 475 с.

[56] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 518 с.;

[57] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.;

[58] *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.

[59] *Кун В.В.* Математические основы теории надежности. — Л., 1977.

[60] *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1969. Т. 1. 594 с.

[61] *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1969. Т. 2. 624 с.

[62] *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 664 с.

[63] *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. — М.: Наука, 1977. — 176 с.

[64] *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. — М.: Мир, 1981.

[65] *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр // М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. — 420 с.

[66] *Малафеев О.А.* Конечность множества равновесных ситуаций в бескоалиционных играх // Вопросы механики и процессов управления. Управление динамическими системами. — Ленинград: Издательство ЛГУ, 1978. — 135-143 с.

[67] *Малафеев О.А.* Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах // СПб: Издательство СПбГУЭиФ, 1998. — 317 с.

[68] *Малафеев О.А., Дроздов Г.Д.* Моделирование процессов в системе управления городским строительством // СПб: Издательство СПб Архитектурно-строительный университет, 2000. — 2 тома, 415 с.

[69] *Малафеев О.А.* Ситуация равновесия в динамических играх // Кибернетика-N 3, 1974. — 111-118 с.

[70] *Малафеев О.А.* Ситуация равновесия в смешанных стратегиях в дифференциальных играх n лиц с зависимыми приращеними. // "Дифференциальные уравнения", вып. 3, 1979.

[71] *Малафеев О.А.* Существование ситуаций равновесия в бескоалиционных дифференциальных играх двух лиц // Вестник ЛГУ. Вып.4, 1980. — 12-14 с.

[72] *Малафеев О.А.* Существование ситуаций равновесия в дифференциальных играх n лиц // Всесоюзная конференция по динамическому управлению (тезисы) — Свердловск, 1979.

[73] *Малафеев О.А.* Существование ситуаций равновесия в дифференциальных играх n лиц с независимыми приращениями// Труды международной конференции по оптимизации. — Берлин: Университет Гумбольдта, 1980.

[74] *Малафеев О.А.* Управление в конфликтных динамических системах // Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 1993. — 95 с.

[75] *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы // СПб: Издательство СПбГУ, 2000. — 275 с.

[76] *Малафеев О.А.* Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемые динамические роцессы // Ленинград: Издательство ЛГУ, 1990. — 113 с.

[77] *Малафеев О. А., Троева М.С.* Устойчивость и некоторые численные методы в конфликтно управляемых системах. — Якутский гос. университет. Якутск, 1998.

[78] *Малафеев О.А., Муравьев А.И.* Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2000.

[79] *Мартин Н., Инглснд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.

[80] *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: ФИМЛ, 1994. — 144 с.

[81] *Машкевич В.С.* Кинетическая теория лазеров. — М.: "Наука 1971. — 472 с.

[82] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Динамика конкурентного взаимодействия банков // International Scientific School "Modeling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems-— Спб.: Изд-во IPME RAS, 2001. — 104-106 с.

[83] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Динамическая модель функционирования банка // Математические модели конфликтных ситуации и их разрешения, Том II. — СПб.: Изд-во СПбГУЭиФ, 2001. — 272-280 с.

[84] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Динамическая модель распределения электроэнергии // Тезисы межвузовской научно-теоретической конференции ВМИИ. — СПб.: Изд-во ВМИИ, 1999. — 87-89 с.

[85] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Динамическая оптимизация портфеля ценных бумаг // Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. — СПб.: Изд-во СПбГУЭиФ, 1988. — 269-276 с.

[86] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Оптимизация работы банка методом динамического программирования // "Понтрягинские чтения X Современные методы в теории краевых задач. — Воронеж: Изд-во Воронежский гос. университет, 1999. — 158-159 с.

[87] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Управление финансами в процессе инвестирования проектов // Моделирование процессов в системе управления городским строительством. — СПб.: Изд-во СПб. Гос. архитектурно-строительный университет, 2002. — 302-304 с.

[88] *Медведева Т.Ф., Малафеев О.А.* Управление энергоресурсами в условиях конкуренции // Труды международного симпозиума по водородной энергетике и технологии HYPOTHESIS-III в Санкт-Петербурге. — СПб: Изд-во СПбГУЭиФ, 1999. — 40-50 с.

[89] *Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф.* Основы менеджмента: Пер. с англ.– М.: “Дело”, 1992.– 702 с.

[90] *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. - М.: Наука, 1974. - 256 с.

[91] *Митягин Б.С.* Заметки по математической экономике // Успехи математической науки, 1972. — T.XXVII. вып.3 май-июнь. — 3-19 с.

[92] *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики // Пер. с франц. — М.: Мир, 1985. — 200 с.

[93] *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение // Пер. с англ., под ред. и с доб. Н.Н. Воробьёва. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. — 708 с.

[94] *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517 с.

[95] *Никайдо Х., Исода К.* Заметка о бескоалиционных выпуклых играх // Бескоалиционные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 449–458.

[96] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М: “Мир”, 1979.

[97] *Оуэн Г.* Теория игр.- М: Мир, 1971.

[98] *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск // М.: Инфра-М, 1994. — 190 с.

[99] *Петров Ю.П.* Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. - СПб: 1998.

[100] *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. ЛГУ., 1977.

[101] *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр: Учебное пособие для университетов // М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет> 1998. — 304 с.

[102] *Петросян Л.А., Кузютин Д.В.* Игры в развёрнутой форме: оптимальность и устойчивость // Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2000. — 292 с.

[103] *Петросян Л.А.* Принципы оптимальности в многошаговых играх // Соросовский образовательный журнал, № 10, 1996. — с. 120 – 125.

[104] *Печерский С.Л., Соболев А.И.* Проблема оптимального распределения в социально-экономических задачах и кооперативные игры // Ленинград: Наука, 1983.

[105] *Понтрягин Л.С.* Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1976. 136 с.

[106] *Поспелов Г.С., Подузов А.А.* Проблемы управления в экономико-математических моделях // Известия АН. Сер. Техническая кибернетика, 1967.

[107] *Пригожин И.* От существующего к возникающему (время и сложность в физических науках). М., 1980.

[108] *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, М., 1960.

[109] *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами. Кибрнетика, 1976, N 3, 145-146

[110] *Робертс С.* Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления // Пер. с англ. В.В. Кафаров, под ред. В.В. Кафаров. — М.: Мир, 1965. — 480 с.

[111] *Розенмюллер И.* Коопертивные игры и рынки // М.: Мир, 1974.

[112] *Савицкая Т.В.* Анализ хозяйственной деятельности предприятия // Минск, 1998. — 527 с.

[113] *Семененко А.И., Сергеев В.И.* Логистика. Основы теории. С-Пб: "Союз", 2001.

[114] *Соболев А.И.* Характеризация принципов оптимальности кооперативных игр посредством функциональных уравнений // Математические методы в социальных науках, под ред. Н.Н. Воробьева. — Вильнюс, 1975.

[115] *Танаев В.С., Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. — М., "Наука", 1975.

[116] *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.

[117] *Тер-Крикоров А.М.* Оптимальное управление и математическая экономика // М.: Наука, 1977. — 216 с.

[118] *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть. СПб: изд-во СПбГУ, 2000.

[119] *Фань Цзы.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 31–39.

[120] *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: “Мир”, 1978.

[121] *Фостер Р.* Обновление производства: атакующие выигрывают: Пер. с англ. / Общ. ред. и вступ. ст. В.И. Данилова-Данильяна. – М., Прогресс, 1987.–270 с.: с ил.

[122] *Хачиян Л. Г.* Сложность задач линейного программирования. М.: Знание, 1987, N 10.

[123] *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.

[124] *Akin E.* The General Topology of Dynamical Systems. // Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339; v.1, 1991.

[125] *Anbarci N., Bigelow J.* The Area Monotonic Solution to the Cooperative Bargaining Problem // Mathematical Social Sciences, No. 28, 1994. — pp. 133 – 142.

[126] *Ando A.K., Modigliani F., Rashe R., Turnovsky S.J.* On the role of exceptations of price changes and technological change in an investment function, 1971.

[127] *Aumann R.J., Maschler M.* Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud // Journal of Economic Theory, No. 36, 1985. — pp. 195 – 213.

[128] *F.Baccelli, G.Cohen, G.J.Olsder, J.-P.Quadrat* Synchronization and Linearity: an algebra for discrete event systems. — New-York: John Wiley & Sons, 1992;

[129] *Barron E., Evans L., Jensen R.* Viscosity solutions of Isaac equations and differential games with Lipschitz controls. Journal of differential equations. v. 53, 1984, p. 213-233.

[130] Binmore K, A. Rubinstein and A. Wolinski The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling. Rand journal of Economics 17(2), 176-188.

[131] *Chatterjee K., Samuelson L.* Bargaining with Two-Sided Incomplete Information: An Infinite Horizon Model with Alternating Offers // Review of Economic Studies, No. 54, 1987. — pp. 175 – 192.

[132] *Chatterjee K., Samuelson L.* Bargaining under Incomplete Information: The Unrestricted Offers Case // Operations Research, No. 36, 1988. — pp. 605 – 618.

[133] *Cramton P.C.* Bargaining with Incomplete Information: An Infinite-Horizon Model with Two-Sided Uncertainty // Review of Economic Studies, LI, 1984. — pp. 579 – 593.

[134] *Crandall M., Lions P.L., Evans L.* Some properties of viscosity solutions of Hamilton Jacobi equations. Trans. AMS, v.282, N 2, 1984.

[135] *Chun Y.* Equivalence of Axioms for Bankruptcy Problems // International Journal of Game Theory, No. 28, 1999. — pp. 511 – 520.

[136] *Dagan N., Volij O.* The Bancruptcy Problem: A Cooperative Bargaining Approach. // Math. Social Sciences, No. 26, 1993. — pp. 287 – 297.

[137] *Dagan N.* New Characterizations of Old Bankruptcy Rules // Social Choice and Welfare, No. 13, 1996. — pp. 51 – 59.

[138] *Davis M., Maschler M.* The Kernel of a Cooperative Game // Naval Resarch Logistics Quarterly, No. 12, 1965. — pp. 223 – 259.

[139] *Dixit A.* A Model of Duopoly Suggesting Theory of Entry Barriers. // Bell Journ. Econ., 1979, Vol. 10, pp. 20–32.

[140] *Dresher M.* A Sampling Inspection Problem in Arms Control Agreements: A Game-Theoretic Analysis: Memorandum RM-2972-ARPA // The RAND Corporation: Santa Monica, California, 1962.

[141] *Driessen T.S.H.* Relations Between Bancruptcy Games and Minimum Cost Spanning Tree Games, Essays in Game Theory in Honor of M. Mashler, N. Megiddo, ed // Springer-Verlag, New York, 1994. — pp. 51 – 64.

[142] *Eggert D., Varaija P.* Representation of differential system. // J. diff. equations, 1968, №4, pp. 280–299.

[143] *Fleming W.* The convergence problem for differential games // J. math. anal. appl., N 1, 1961, p. 102–116.

[144] *Fleming W.* The convergence problem for differential games, 2. Adv. in game theory, 1964.

[145] *Fort M.K.* Points of continuity of semi-continuous finctions // Publ. Math. 1951. №2. P. 100–102.

[146] *Fort M.K.* Essential and non-essential fixed points // Am. J. Math. 1950. P. 315–322.

[147] *Fudenberg D., Tirole I.* Sequential Bargaining with Incomplete Information // Review of Economic Studies, No. 50. — pp. 221 – 247.

[148] *Gabasova O.R.* Synthesis of Optimal Policy of the Firm Using Two Production Activities // 11-th IFAC Workshop "Control Applications of Opyimization": Book of Abstracts — Saint Petersburg, 2000. — pp. 79-80.

[149] *Gibson C.G., Wirtmüller K., du Plessiss A.A., Looijenga E.* Topological stability // Lecture Notes in Math. 1976. Vol. 552. Berlin: Springer Verlag. 267 p.

[150] *Gould J.R.* Adjustment costs in the theory of investment of the firm // Review of Econ. Stud. 1968. — Vol.35, pp. 47 – 55.

[151] *Jackson M.O., Wolinsky A.* A Strategic Model of Social and Economics Networks.//J. Econom. Theory, 1996. №71 P.44–74.

[152] *Jorgensen S., Kort P.M.* Optimal investment and finance in renewable resource harvesting // Journal of Econ. Dynamics and Control, 1997. — Vol.21. pp. 603-630

[153] *Jorgenson D.W.* The theory of investment behaviour // Determinants of investment behaviour. R. Feber (ed.) — N.Y.: columbia Univ. Press, 1967.

[154] *Kalai E., Samet D.* On Weighted Shapley Values // International Journal of Game Theory, No. 16, 1987. — pp. 205 – 222.

[155] *Kalai E., Smorodinsky M.* Other Solutions to Nash's Bargaining Problem // Econometrica, Vol. 43, 1975. — pp. 513 – 518.

[156] *Klemperer Paul* Auction Theory: A Guide to the Literature, http://www.paulklemperer.org.

[157] *Milgrom Paul R., Weber Robert J.* Econometrica, vol. 50, issue 5 (sep., 1982), 1089-1123.

[158] *Lambert-Mogiliansky A.* Essays on Corruption. St.: Stockholms Universitet. 1996. 138 p.

[159] *Lambert-Mogiliansky A.* ; T. Verdier. Corruption and Competition in Procurement Auctions.O. Compte; The RAND Journal of Economics, Vol. 36, No. 1. (Spring, 2005), pp. 1-15.

[160] *Leitmann G.* Cooperative and Noncooperative Many Players Differential Games. — Wien: Springer, 1974. — 77 p.

[161] *Lehrer E.* An Axiomatization of the Banzhaf Value. International Journal of Game Theory, No. 17, 1988. — pp. 89 – 99.

[162] *Markovitz H.M.* Portfolio selection - J. of Business, v.34, pp.411 - 433, 1961.

[163] *Marston R.* International financial integration // Cambridge: University press, 1998.

[164] *Nash J.F.* Equilibrium points in n-person games.- “Proc. Nat. Acad. Sci. USA”, 1950, vol. 36, N1, p. 48-49.

[165] *Nash J. F.* Non-cooperative games // Ann. Math. 1951. Vol. 54, № 2. P. 286–295.

[166] *Nash J.F.* Tne bargaining problem.-“Econometrica”, 1950, vol. 18, N2, p. 155-162.

[167] *Nowak A.S.* On the Axiomatization of the Banzhaf Value without the Additivity Axiom // International Journal of Game Theory, No. 26, 1997. — pp. 137 – 141.

[168] *Oldham J.D.* Combinatorial Approximation Algorithms for Generalized Flow Problems. - Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, 1998.

[169] *Perles M., Maschler M.* A Superadditive Solution to Nash Bargaining Games // International Journal of Game Theory, No. 10, 1981. — pp. 163 – 193.

[170] *Roth A.E.* Axiomatic Models of Bargaining // Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[171] *Roxin E.* General Dynamical Systems // J. of Diff. Eqs, N I, 1965.

[172] *Rubinstein A.* A Bargaining Model with Incomplete Information about Preferences // Econometrica, Vol. 50, 1985. — pp. 1151 – 1172.

[173] *Sakaguchi M.* A non-zero sum repeated game: “Criminal vs. policy”. // Math. Japonica, 1998.

[174] *Shapley L.S.* A Value for n-Person Games // Contributions to the Theory of Games, Vol. II, Annals of Mathematics Studies, Vol. 28, H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds. — Princeton: Princeton University Press, 1953. — pp. 307 – 317.

[175] *Siegel D.R., Siegel D.T.* The Futures Market. McGrow Hill, L., 1990.

[176] *Sloth B.* Topics in non-cooperative game theory: fictious play and majority voting. Copenghagen, Denmark, 1992.

[177] *Sobel I., Takahashi L.* A Multi-Stage Model of Bargaining // Review of Economic Studies, No. 50, 1983. — pp. 411 – 426.

[178] *Tobin D.* Liquidity preference as behavior toward risk. — Rev. of Econ. Studies, v.25, N 1, pp. 65-86, 1958.

[179] *Truemper K.* On max flows with gains and pure min-cost flows. SIAM J. Appl. Math., 32:450-456, 1977.

[180] *Varaija P., Lin J.* Existance of saddle points in differential games. SIAM J. Control. 1969, N I

[181] *Wayne K.D.* Generalized Maximum Flow Algorithms. - A Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School of Cornell University, 1999.

[182] *Wayne K.D.* A Polynomial Combinatorial Algorithm for Generalized Minimum Cost Flow. - Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium of Theory of Computing, 1999.

[183] *Zermelo E.* Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie der Schachcpiels // Proc. 5 Intern. Congr. Math., 1912, p. 501–504.

Учебное издание

Зайцева Ирина Владимировна
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
высшей математики и
теоретической механики ФГБОУ ВО
«Российский государственный гидрометеорологический университет»

Малафеев Олег Алексеевич
д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой
моделирования социально-экономических систем ФГБОУ ВО
«Санкт-Петербургский государственный университет»

ТЕОРИЯ ИГР

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 16.08.2021. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 10,875. Тираж 25 экз. Заказ № 1109.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.