



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра инженерной гидрологии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(бакалаврская работа)

На тему «Системное математическое моделирование уровней воды
озера Лача»

Исполнитель Арустамян Александра Григорьевна
(фамилия, имя, отчество)

Руководитель К.Т.Н., доцент
(ученая степень, ученое звание)

Хаустов Виталий Александрович
(фамилия, имя, отчество)

«К защите допускаю»
Заведующий кафедрой

(подпись)

К.Т.Н., доцент
(ученая степень, ученое звание)

Гайдукова Екатерина Владимировна
(фамилия, имя, отчество)

«1» июня 2026г.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

Введение.....	2
1 Физико-географическое описание района исследований	5
1.1 Климатические характеристики	7
1.2 Гидрологический режим притока в оз. Лача.....	8
1.3 Уровенный режим озера Лача.....	13
1.4 Исходные данные для расчетов и прогнозов притока воды в озеро ...	13
2 Математический аппарат.....	15
2.1 Модель формирования запасов воды в снеге и водоотдача из него	15
2.2 Математическая модель формирования стока	19
2.3 Математическая модель водоема.....	20
3 Математическое моделирование притока в оз. Лача	24
3.1 Моделирование и прогнозирование снегозапасов и водоотдачи из снега на водосборе оз. Лача (на примере р. Ухта).....	24
3.2 Моделирование и прогнозирование стока рек на водосборе оз. Лача ...	31
4 Моделирование и прогнозирование уровней оз. Лача	41
4.1 Разработка алгоритма прогноза	41
4.2 Апробация прогностической методики и оценка прогноза на независимом материале	43
Заключение.....	47
Список использованных источников.....	49

Введение

Озера играют ключевую роль в формировании гидрологического режима речных бассейнов, регулировании поверхностного стока, поддержании биоразнообразия и обеспечении хозяйственной деятельности человека. В условиях современных климатических изменений и усиления антропогенного воздействия на водные объекты возрастает потребность в точных и оперативных прогнозах их уровня и режима.

Особую научную и прикладную сложность представляют мелководные озёра, для которых характерны нелинейные взаимодействия между притоком, оттоком, испарением, инфильтрацией и морфометрией водоёма.

Озеро Лача – крупнейший пресноводный водоём Архангельской области, узловое место бассейна р. Онеги, обладающая уникальными ледниковыми формами рельефа и сложной структурой водосбора. Его территория характеризуется высокой степенью заболоченности, наличием множества малых озёр, разнородным лесным покровом и антропогенно преобразованными участками. Средняя глубина озера не превышает 1,6 м, что обуславливает его высокую чувствительность к колебаниям приходно-расходной части водного баланса и быструю реакцию на изменения климатических и гидрологических условий.

Актуальность темы исследования

Существующие математические модели уровней водоёмов часто опираются на усреднённые региональные или глобальные параметры (коэффициенты стока, испаряемости, инфильтрации), которые не учитывают локальную специфику гетерогенных бассейнов. Для озера Лача применение стандартных настроек приводит к значительным прогностическим ошибкам, особенно в периоды весеннего половодья и летней межени, когда доминирующую роль играет снеговое питание и

регулирующее воздействие основных притоков (в частности, р. Свидь, дренирующей более 56 % площади водосбора и формирующей почти половину общего поверхностного притока).

Недостаточная параметризация морфометрического коэффициента и неучет зависимости площади зеркала от уровня воды снижают достоверность расчётов. В этой связи разработка и адаптация системной модели уровней воды с решением обратной задачи по подбору оптимальных параметров на основе многолетних наблюдений (2008–2021 гг.) приобретает высокую научную и практическую значимость. Точное моделирование позволит не только улучшить гидрологические прогнозы, но и обеспечить корректное планирование навигации, мониторинг экологического состояния и заблаговременную организацию защитных мероприятий в условиях климатической неустойчивости.

Объектом исследования является гидрологическая система бассейна озера Лача, предмет исследования – динамика уровней воды озера Лача и параметры математической модели водоёма, описывающей баланс притока и оттока.

Целью работы является создание и параметризация системной модели уровней воды озера Лача на основе решения обратной задачи, оптимизации морфометрического коэффициента и оценки точности расчётных уровней по сравнению с фактическими данными. Методы исследования включают математическое моделирование гидрологического баланса, метод обратных задач, статистический анализ временных рядов, оптимизационные процедуры (надстройка «Поиск решения» в MS Excel), сравнительный анализ фактических и расчётных гидрологических характеристик.

Научная новизна состоит в системной апробации модели водоёма для озера Лача с ежемесячной оптимизацией морфометрического коэффициента и количественной оценкой точности прогноза по критерию S/σ .

Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанной параметризованной модели для оперативного

прогнозирования уровней воды, корректировки графиков судоходства, оценки рисков экстремальных гидрологических явлений и адаптации классических гидрологических моделей к условиям мелководных озёр с гетерогенным водосбором.

1 Физико-географическое описание района исследований

Озеро Лача относится к бассейну р. Онеги, впадающей в Белое море, и расположено на территории Архангельской области (рисунок 1). Озеро Лача вытянуто с севера на юг на 33 км. Его акватория располагается на высоте 117,7 метров над уровнем моря. Оно занимает площадь 351 км², его объем – 0,549 км³, средняя ширина – 10 км, максимальная – 14 км. Береговая линия имеет плавные очертания, нарушаемые лишь в юго-западной части озера.



Рисунок 1 – Карта-схема расположения озера Лача.

В оз. Лача северная часть тоже более мелководна, чем южная, а наибольшие глубины располагаются вдоль всего восточного побережья и в южной части вдоль западного берега. Подобные закономерности распределения глубин и строения дна характерны для многих крупных озерных котловин и подробно описаны в батиметрических исследованиях [6]. Мелководные участки зарастают макрофитами. Низкие берега характерны для оз. Лача, при этом восточный несколько выше, чем западный, и более подвергнут размыву, в результате чего у мысов Каменный и Ольгский усыпан валунами и галькой. Значительно закарстовано западное побережье оз. Лача, в районе г. Каргополя, верхнее течение р. Онеги.

Вдоль рек, впадающих в оз. Лача, распространены флювиогляциальные отложения [5].

В долине р. Свиди, на берегу оз. Лача, находятся сероводородные источники, а на западном берегу оз. Лача, в окрестностях Каргополя, развиты процессы карста.

Преобладающими ветрами в районе оз. Лача (ст. Каргополь) являются ветры южного и юго-западного направлений. В летний период (май – август) на оз. Лача несколько возрастает повторяемость северных и северо-восточных ветров.

К западу от оз. Лача находятся болота Нешпахта, Ягремское. Заболоченность бассейнов рек восточного побережья оз. Лача составляет 9 % в бассейне р. Кинемы и 17 % в бассейне р. Ковжи.

Озеро представляет собой мелководный водоем, с отчетливо выраженным углублением до 3–4 м, у западного и восточных. Донные его отложения представлены в основном мелкоалевритовыми илами и в меньшей степени каменисто-песчаными осадками. Озеро расположено в области отложений моренного пояса на древнеозерной низменной равнине.

Валунный материал, в незначительных количествах встречаясь в прибрежных участках на всем протяжении восточного берега, наиболее

широко представлен в северной части озера – в районе мыса Ольгский, а на западном берегу в основном сосредоточен в районе впадения рек Шоршмы и Лекшмы.

Песчаные отложения вместе с каменистыми занимают в озере всего лишь 12 %. Илистые отложения, занимающие почти 88 % площади дна, представлены в основном тонким мелкоалевритовым илом.

В центральной открытой части озера распространены серовато-бурые илы с темным наилком, на прибрежных участках и в густых зарослях – темные почти по всему иловому слою, что свидетельствует о существовании там восстановительных условий. Зеленоватый цвет свойствен всей 3-метровой толще уплотненных илов южной половины озера, особенно юго-западной его части, за исключением прибрежных участков. Он указывает на большую роль в их образовании фитопланктона [10].

1.1 Климатические характеристики

Озеро Лача расположено в зоне избыточного увлажнения, где количество атмосферных осадков превышает величину испарения с водной поверхности.

Это означает, что среднегодовое количество выпадающих атмосферных осадков стабильно превышает величину испарения как с водной поверхности, так и с суши. Данная особенность является фундаментальным фактором, предопределяющим высокий уровень грунтовых вод, питание рек и значительную заболоченность всего водосборного бассейна озера.

Климат в бассейне озера Лача умеренно-континентальный, с чертами, переходными к морскому, что выражается в частой смене воздушных масс и значительном количестве осадков.

Для параметризации гидрологических моделей в данном исследовании используются данные метеорологических станций г. Каргополь и г. Вытегра, репрезентативных для данного района. Среднегодовая температура воздуха составляет около $+1,5...+2,0$ °С. Зима продолжительная и умеренно холодная, лето короткое и прохладное. Устойчивый переход среднесуточной температуры воздуха через 0 °С весной, знаменующий начало интенсивного снеготаяния, обычно происходит во второй-третьей декаде апреля.

1.2 Гидрологический режим притока в оз. Лача

Существующие гидрологические посты отражают условия формирования поверхностного притока в оз. Лача – с 70 % площади бассейна озер.

Озеро Лача принимает 19 притоков, из которых 9 имеют длину более 10 км, остальные представляют собой ручьи и временные водотоки. Притоки оз. Лача отличаются значительными водосборами (свыше 470 км²) и длиной, превышающей 50 км. Самый крупный приток – р. Свидь – впадает в южную часть озера, дренирует территорию в 6850 км², занимающую 56,5 % водосборного бассейна озера. Средний годовой расход воды в устье, равный 63 м³/сек, составляет почти половину общего поверхностного притока в оз. Лача.

Характерной особенностью водосборов рек западного побережья оз. Лача является широкое распространение на их территории болот и заболоченных лесов. Начало образования льда на озере Лача, по средним многолетним данным, приходится на конец октября. Продолжительность ледоставного периода составляет 150–180 дней.

В северной части оз. Лача берет начало р. Онега - одна из крупнейших рек Северного края. Водный режим в верховьях Онеги испытывает регулирующее воздействие озера Лача.

Сравнительно хорошая гидрологическая изученность притоков оз. Лача позволяет рассматривать особенности формирования стока рек в условиях водосборов, отличающихся по своим гидрографическим показателям.

Оз. Лача имеет ряд более или менее крупных притоков – реки Свидь, Ковжа, Кинема, Ухта, Тихманьга, Лекшма. Кроме основных притоков оз. Лача питают малые реки и ручьи, влияние которых на гидрохимический режим озера менее значительно. Для исследования использовались 4 притока – реки Ковжа, Лекшма, Ухта и Свидь.

В силу естественной зарегулированности р. Свидь не имеет резких паводков и глубоких меженных периодов, ее гидрограф значительно сглажен. Реки Ухта, Тихманьга, Лекшма - притоки западного берега – близки по характеру питания, что приводит к сходству их гидрохимического режима. Реки Ковжа, Кинема – основные притоки восточного берега озера, причем р. Ковжа второй, после Свиди, по величине приток. В целом можно сказать, что малые притоки по минерализации и ионному составу сходны с основными притоками. В целом вода всех притоков озера Лача средней минерализации, гидрокарбонатного класса, кальциевой группы, богата органическими веществами и бедна биогенными элементами. Озеро Лача является водоемом мезотрофного типа.

Для исследования модели формирования стока был выбран один из притоков озера Лача – река Ухта.

Река Ухта является одним из значимых правых притоков озера Лача, входящего в узловую часть бассейна реки Онеги (рисунок 2). Административно бассейн реки расположен на территории Архангельской области (преимущественно в пределах Каргопольского района). Согласно данным гидрологических наблюдений и расчетам, представленным в

информационной базе исследования, площадь водосбора реки Ухта в замыкающем створе (гидрологический пост д. Еремино) составляет 876 км². Протяженность реки оценивается примерно в 65–75 км, что классифицирует ее как водоток средних размеров в масштабах бассейна озера Лача. Русло реки характеризуется умеренной извилистостью, наличием расширений и сужений, а также значительным количеством стариц, что типично для равнинных рек Северо-Запада России.

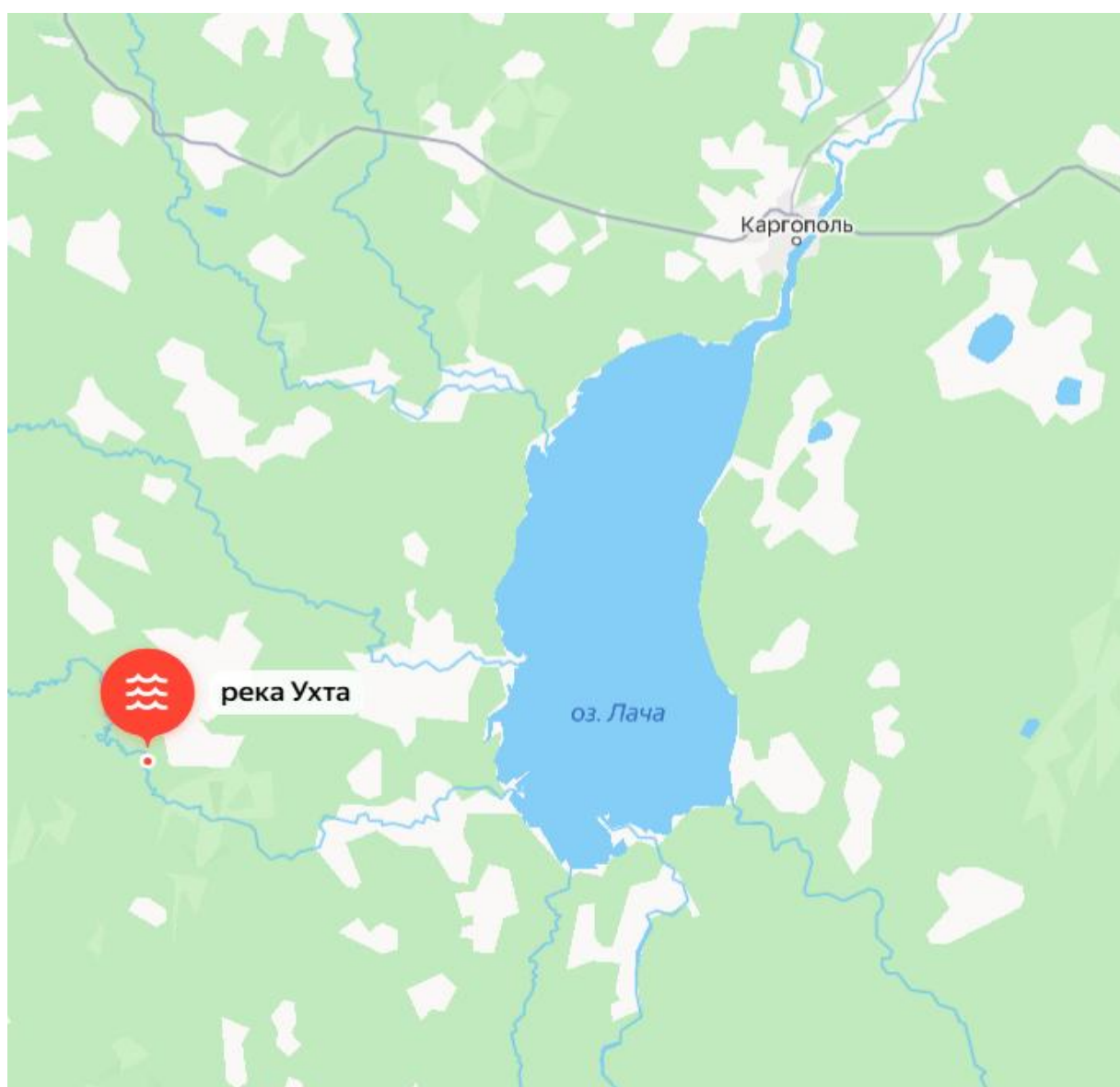


Рисунок 2. Расположение реки Ухта относительно озера Лача.

Территория водосбора р. Ухта расположена в пределах моренно-озерной равнины, сформированной в результате деятельности валдайского оледенения. Рельеф бассейна преимущественно плоский и слабовсхолмленный, с абсолютными отметками высот от 120 до 180 метров над уровнем моря. Уклоны водной поверхности и склонов незначительны, что предопределяет малые скорости течения воды и слабую эрозионную деятельность потока.

В геологическом разрезе преобладают четвертичные отложения: суглинки, супеси, пески и валунные суглинки, перекрытые в понижениях рельефа мощными толщами торфяных и озерно-болотных отложений. Гидрогеологические условия характеризуются наличием неглубоко залегающих грунтовых вод, которые тесно гидравлически связаны с поверхностным стоком, обеспечивая устойчивое питание реки в межень.

Ландшафты бассейна р. Ухта относятся к подзоне средней тайги. Лесистость водосбора составляет около 60–70 %. Коренные леса представлены преимущественно ельниками и сосняками, со значительной примесью березы и осины, образовавшихся на месте вырубок или гарей.

Характерной и определяющей гидрологической особенностью бассейна является высокая степень заболоченности. Значительные площади заняты верховыми и переходными болотами, а также заболоченными лесами. Высокая заболоченность выступает в роли мощного естественного регулятора стока: она увеличивает инфильтрационную способность водосбора, аккумулирует талые и дождевые воды в период максимального увлажнения и обеспечивает их медленную, растянутую отдачу в русло в течение всего года. Это обуславливает отсутствие резких паводочных пиков и относительно высокие меженные расходы воды.

Гидрологический режим реки Ухта формируется под влиянием описанных физико-географических факторов и характеризуется следующими чертами:

Тип питания: Смешанный, с преобладанием снегового (до 55–60 % годового стока). Значительную роль (около 30–35 %) играет грунтовое питание, обусловленное высокой заболоченностью и водопроницаемостью почвогрунтов. Доля дождевого стока невелика (около 10 %).

Водный режим: В годовом ходе уровня озер Лача, обусловленном соотношением приходной и расходной частей водного баланса четко выражена сезонность [11]. Выделяется высокое и продолжительное весеннее половодье, начинающееся в конце апреля – начале мая. Благодаря регулирующему влиянию болот гидрограф половодья имеет сглаженную, пологую форму с растянутым периодом подъема и спада. Летне-осенняя и зимняя межень устойчивая, с плавным графиком изменения расходов, что свидетельствует о стабильной разгрузке подземных горизонтов.

Ледовый режим: Замерзание реки происходит в конце октября – начале ноября, ледостав устанавливается примерно в середине ноября. Толщина льда к концу зимы достигает 50–70 см. Вскрытие реки приходится на вторую половину апреля – начало мая. В связи с равнинным характером рельефа и наличием расширений русла, в период ледохода возможно образование кратковременных заторов льда, вызывающих местные подьёмы уровня воды, однако они не носят катастрофического характера.

Гидрохимический режим: Вода реки Ухта, как и других притоков озера Лача, характеризуется малой минерализацией (менее 50–70 мг/л), относится к гидрокарбонатному классу и кальциевой группе воды. Высокая цветность (до 80–120 градусов) и содержание органических веществ обусловлены поступлением гуминовых соединений с торфяных болот водосбора.

1.3 Уровенный режим озера Лача

В годовом ходе уровня озер Лача, обусловленном соотношением приходной и расходной частей водного баланса четко выражена сезонность. Минимальные уровни на озере Лача чаще всего наблюдаются в марте. Максимальные уровни на озере Лача, как правило, бывают в мае, иногда в июне. Реки, впадающие в озеро, преимущественно снегового питания, с высоким весенним половодьем и низкой зимней меженью, определяют уровенный режим озера. В ходе исследования уровенного режима озера Лача были использованы среднесуточные данные по расходам за 2012 год 4 притоков: р. Ковжа, р. Лекшма, р. Свидь, р. Ухта. Был рассчитан общий приток для создания системы «Приток-Отток». Оттоком выступает река Онега. Также использовались данные по фактическим уровням воды озера Лача и составлена модель водоема. Прогноз уровней воды составлялся на каждый месяц исследуемого года.

1.4 Исходные данные для расчетов и прогнозов притока воды в озеро

В работе использовались среднесуточные данные о расходах притоков (реки Ковжа, Лекшма, Ухта, Свидь) и оттока (река Онега), а также уровнях воды озера Лача за 2012 год. Для расчета модели запасов воды в снеге и прогнозирования стока необходимы данные об атмосферных осадках, высоте снежного покрова и данные снегомерных съемок.

Исследуемый период с 2008 года по 2021 год. Модель формирования стока была рассчитана для реки Ухта по данным 2 метеостанций: г. Каргополь и г. Вытегра, а также по данным гидрологического поста – д. Еремино (рисунок 3).

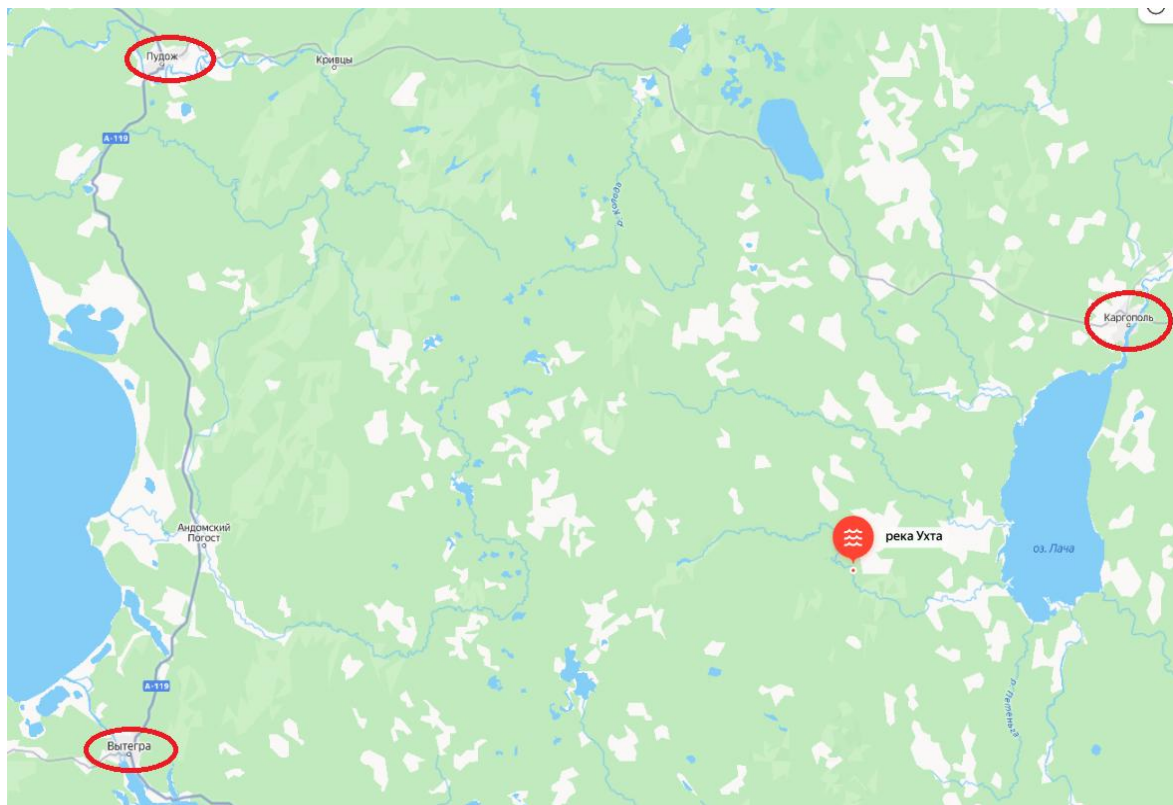


Рисунок 3. Схема расположения метеостанций.

2 Математический аппарат

Комплексное моделирование уровня режима мелководного озера Лача требует последовательного и взаимосвязанного описания всех этапов формирования водного баланса: от накопления и таяния снега на водосборе, через трансформацию склонового и руслового стока, до аккумуляирования и регулирования воды самим озером. Специфика бассейна озера Лача, характеризующегося высокой заболоченностью, преобладанием снегового питания и сложной морфометрией, диктует необходимость применения каскадной системы динамических моделей с сосредоточенными параметрами.

В главе последовательно изложены физические и математические основы моделирования снеготаяния, формирования склонового и руслового стока, а также водного баланса самого водоема. Особое внимание уделено численным методам решения дифференциальных уравнений и процедуре калибровки модели через решение обратной задачи. Формулы и расчетные зависимости представлены в виде, удобном для их численной реализации и программной аппроксимации.

2.1 Модель формирования запасов воды в снеге и водоотдача из него

Процесс весеннего половодья в бассейне озера Лача, расположенного в зоне избыточного увлажнения, определяется преимущественно снеговым питанием. Формирование стока в этот период невозможно без учета аккумуляции твердых осадков в зимний период и их последующей водоотдачи при весеннем снеготаянии. Снежный покров в гидрологическом моделировании рассматривается как специфический природный резервуар, обладающий емкостью, теплоемкостью и способностью задерживать талые воды.

Согласно физическим представлениям, изложенным в фундаментальных курсах гидрологических прогнозов, процесс снеготаяния и водоотдачи делится на две основные фазы:

1. Фаза прогрева снежной толщи (влагонакопление и прогрев до 0°C). В этот период поступающее тепло расходуется на повышение температуры снега и его уплотнение. Поверхностный сток талых вод практически отсутствует, так как вся вода задерживается в порах снега, на его поверхности, а также впитывается в мерзлый или талый почвогрунт.

2. Фаза интенсивного снеготаяния (водоотдача). Начинается в момент, когда снежная толща прогрета до 0°C по всей глубине, а ее влагоемкость исчерпана. Избыток талой воды начинает поступать на поверхность водосбора и формировать склоновый сток.

Математически запасы воды в снеге (S , мм вод. ст.) в течение зимнего периода накапливаются и описываются балансовым уравнением:

$$S = \Sigma(X_{\text{сн}} - E_{\text{зим}}),$$

где $X_{\text{сн}}$ – сумма твердых осадков за период;

$E_{\text{зим}}$ – потери на испарение со снежной поверхности.

В зимний период потерями на испарение в силу их малости часто пренебрегают, принимая $S \approx \Sigma X_{\text{сн}}$.

Водоотдача со снежного покрова (M , мм/сут) в период весеннего снеготаяния определяется теплообменом снежной поверхности с атмосферой. Упрощенная концептуальная модель водоотдачи базируется на уравнении теплового баланса и принципе температурного индекса. Интенсивность таяния M выражается через сумму среднесуточных положительных температур воздуха:

$$M = \alpha \cdot (t_{\text{возд}} - t_0),$$

где α – коэффициент снеготаяния (мм/°С в сутки), зависящий от экспозиции, наличия леса и болот на водосборе;

$t_{\text{возд}}$ – среднесуточная температура воздуха;

t_0 – температура начала интенсивного таяния (принимается равной 0°С).

Для бассейна озера Лача значение коэффициента α имеет значительную пространственную неоднородность. Заболоченные территории (заболоченность бассейнов рек Ковжа и Кинема достигает 9–17 %, а реки Свидь дренирует обширные лесные и болотные массивы) обладают собственной теплоемкостью и альбедо, что требует дополнительной параметризации коэффициента снеготаяния для разных типов подстилающей поверхности.

Однако не вся образовавшаяся талая вода поступает в русловую сеть. Часть влаги ($W_{\text{задерж}}$) аккумулируется в микропонижениях рельефа, заболоченных участках и порах оттаивающего грунта.

Таким образом, объем водоотдачи, формирующий поверхностный сток ($q_{\text{пов}}$), рассчитывается с учетом коэффициента водоотдачи η :

$$q_{\text{пов}} = \eta \cdot M,$$

где η – коэффициент, учитывающий потери талых вод на заполнение депрессий, инфильтрацию и испарение. Для заболоченных бассейнов рек восточного и западного побережья озера Лача (р. Свидь, р. Ковжа, р. Ухта) значение η варьируется в широких пределах и является одним из ключевых параметров, подлежащих оптимизации при калибровке модели.

Представленная модель позволяет перейти от метеорологических данных (температура, осадки) к гидродинамическому входному воздействию – объему воды, поступающему на склоны водосбора, который далее используется в модели формирования стока.

Математическая постановка. Динамика изменения запаса воды в снеге S (в мм водного эквивалента) для каждого i -го дня описывается линейным уравнением водного баланса:

$$S_i = \sum_{i=1}^m (k_f \cdot X_i) - k_t \cdot t_i^+,$$

где:

S_i – запас воды в снежном покрове на i -й день (мм);

X_i – количество твердых осадков, выпавших в i -й день (мм водного эквивалента);

t_i^+ – положительная среднесуточная температура воздуха в i -й день ($t_i^+ = t_i$ при $t_i > 0$, и 0 при $t_i \leq 0$), °C;

k_f – безразмерный коэффициент, учитывающий потери при снегонакоплении (учитывает испарение, выдувание, сублимацию; $0 < k_f \leq 1$);

k_t – температурный коэффициент снеготаяния (водоотдачи), мм/°C (показывает, сколько миллиметров водного эквивалента тает при повышении температуры на 1°C за сутки).

Физический смысл уравнения заключается в следующем: текущий снегозапас представляет собой разность между суммарным объемом твердых осадков, выпавших за холодный период (скорректированным на коэффициент потерь), и суммарным объемом водоотдачи, сформировавшимся в результате оттепелей.

Численная аппроксимация (дискретная форма для расчетов). При суточном шаге моделирования, необходимом для пошагового отслеживания динамики снегозапасов, уравнение целесообразно представить в рекуррентной (итерационной) форме. S_{i-1} – запас воды в снеге на конец предыдущего ($i - 1$) дня. В этом случае расчетное значение снегозапаса для

ii-го дня определяется путем добавления к предыдущему значению выпавших твердых осадков (с учетом коэффициента потерь) и вычитания объема талых вод (при условии положительной температуры):

$$S_i = S_{i-1} + k_f \cdot X_i - k_t \cdot t_i^+$$

2.2 Математическая модель формирования стока

Формирование речного стока на водосборах, дренирующих бассейн озера Лача, представляет собой сложный процесс трансформации осадков и талых вод в русловой сети. Для описания этого процесса в рамках системного моделирования применяются модели с сосредоточенными параметрами, рассматривающие водосбор как систему взаимосвязанных резервуаров.

Типовые задачи и схемы расчета трансформации стока в емкостных моделях изложены в [7]. Базовой является односторонняя модель склонового стока. Водосбор рассматривается как единый резервуар (емкость), в который поступает влага (осадки и водоотдача со снега X), часть которой теряется (инфильтрация, испарение), а оставшаяся часть формирует расход воды Q в замыкающем створе с определенным временем запаздывания (добегания) τ .

Дифференциальное уравнение водного баланса для такой емкости имеет вид:

$$dW/dt = X - Q,$$

где W – объем воды в емкости.

Если предположить, что расход воды пропорционален запасу воды, где k – коэффициент стока, а τ – время релаксации (добегания), то уравнение принимает вид линейного формирующего фильтра:

$$\tau \cdot (dQ/dt) + (1/k) \cdot Q = X,$$

или в стандартной форме:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau} + \frac{k\dot{X}}{\tau},$$

Физический смысл параметров:

k (коэффициент стока) – безразмерная величина, показывающая, какая доля осадков и талых вод превращается в поверхностный сток. Для заболоченных лесных бассейнов рек Ковжа и Ухта k имеет низкие значения, тогда как для более дренированных участков бассейна р. Свидь он выше.

τ (время добегания) – характеризует инерционность водосбора, скорость стекания воды от наиболее удаленных точек до замыкающего створа.

Таким образом, математическая модель формирования стока позволяет рассчитать объем и динамику притока ($Q_{\text{приток}}$) непосредственно в чашу озера Лача от всех рек водосбора (реки Свидь, Ковжа, Ухта, Лекшма), что служит граничным условием для модели водоема.

2.3 Математическая модель водоема

Озеро Лача является мелководным водоемом (средняя глубина $\sim 1,6$ м, максимальная 3–4 м), что обуславливает его высокую чувствительность к изменениям прихода-расходной части водного баланса. Площадь зеркала

озера F существенно зависит от уровня воды H , а процессы испарения и инфильтрации играют значимую роль.

Математическая модель водоема базируется на уравнении водного баланса, записанном в дифференциальной форме:

$$dW/dt = Q_{\text{вх}} - Q_{\text{вых}} - E - I,$$

где W – объем воды в озере;

$Q_{\text{вх}}$ – суммарный приток (поверхностный сток с водосбора, рассчитанный по модели из раздела 2.2);

$Q_{\text{вых}}$ – отток из озера (расход в р. Онега);

E – потери на испарение с водной поверхности;

I – потери на инфильтрацию в донные отложения.

Объем водоема W связан с его площадью F и уровнем H морфометрической зависимостью. Для мелководных озер с пологими берегами зависимость $F(H)$ нелинейна. Чтобы избежать сложной интеграции морфометрических кривых на каждом шаге моделирования, в гидрологии применяется понятие морфометрического коэффициента $K_{\text{морф}}$.

Коэффициент $K_{\text{морф}}$ (размерность 1/сут) комплексно учитывает влияние испарения, инфильтрации и изменения площади зеркала от уровня. Он определяется как отношение потерь к объему водоема при заданном уровне.

С учетом $K_{\text{морф}}$ дифференциальное уравнение динамики уровня озера принимает вид:

$$dH/dt + K_{\text{морф}} \cdot H = (Q_{\text{вх}} - Q_{\text{вых}}) / F,$$

где F – средняя площадь водного зеркала на расчетном интервале.

Отток из озера $Q_{\text{вых}}$ (река Онега) также является функцией уровня воды в озере, так как озеро является истоком и регулирует сток реки. Зависимость расхода оттока от уровня описывается кривой расходов:

$$Q_{\text{вых}} = f(H).$$

Для практической реализации модель переводится в конечно-разностную форму (шаг по времени Δt , равный 1 месяцу или 1 суткам в зависимости от решаемой задачи). Алгоритмизация, численные схемы интегрирования и программная реализация таких динамических моделей подробно описаны в практикуме [9]:

$$H\{t + 1\} = Ht + \Delta t \cdot [(Q_{\text{вх},t} - Q_{\text{вых},t}) / Ft - K_{\text{морф}} \cdot Ht].$$

Решение обратной задачи и оценка точности модели

Ключевой проблемой моделирования озера Лача является точное определение морфометрического коэффициента $K_{\text{морф}}$ и параметров кривой оттока $f(H)$, которые могут меняться из-за зарастания макрофитами мелководных участков и заиления дна.

В рамках данной работы предусмотрена оптимизация $K_{\text{морф}}$ путем решения обратной задачи. Суть оптимизации заключается в минимизации невязки между фактическими уровнями воды озера ($H_{\text{факт}}$) за период наблюдений (2008–2021 гг.) и уровнями, рассчитанными по модели ($H_{\text{расч}}$).

В качестве критерия эффективности и точности методики моделирования принимается отношение средней квадратической погрешности поверочных расчетов (S) к среднему квадратическому отклонению изменения уровня воды от нормы (S/σ).

Средняя квадратическая погрешность S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{[\sum (H_{\text{факт}} - H_{\text{расч}})^2 / (n - m)]},$$

где n – число членов ряда;

m – число параметров в модели.

Методика моделирования и подобранные параметры $K_{\text{морф}}$ считаются эффективными и достоверными, если выполняется условие:

$$S / \sigma_{\Delta} \leq 0,80, \quad (\text{при } n > 25)$$

Поиск оптимального значения $K_{\text{морф}}$ осуществляется с использованием итерационных алгоритмов (или надстройки «Поиск решения» в *MS Excel*), позволяющих найти такое значение коэффициента, при котором модель адекватно воспроизводит как высокие уровни в период весеннего половодья (когда доминирует фактор $Q_{\text{вх}}$), так и низкие уровни летне-зимней межени (когда определяющую роль играют $K_{\text{морф}}$, испарение и подземное питание).

Таким образом, описанный математический аппарат представляет собой законченную системную модель каскадного типа «Атмосфера -> Снег -> Водосбор -> Озеро», позволяющую не только ретроспективно анализировать уровенный режим озера Лача, но и осуществлять оперативное прогнозирование его состояния, оценку рисков экстремальных явлений и корректировку хозяйственной деятельности в условиях климатической изменчивости [8].

3 Математическое моделирование притока в оз. Лача

3.1 Моделирование и прогнозирование снегозапасов и водоотдачи из снега на водосборе оз. Лача (на примере р. Ухта)

Река Ухта является одним из значимых притоков озера Лача, формирующим существенную долю его поверхностного притока в период весеннего половодья. Бассейн реки характеризуется высокой степенью заболоченности и залесенности, что оказывает определяющее влияние на процессы аккумуляции твердых осадков в зимний период и их последующей трансформации в поверхностный сток. Как указано в первой главе данной работы, для моделирования стока р. Ухта использовались данные метеостанций г. Каргополь и г. Вытегра, а также гидрологического поста д. Еремино за исследуемый период (в частности, за 2012 год, как репрезентативный для калибровки модели).

Исходными данными для построения модели снегонакопления и водоотдачи послужили:

1. Ряды среднесуточных температур воздуха, определяющие интенсивность таяния [2].
2. Ряды суточных осадков, идентифицированных как твердые (при $t_{\text{возд}} < 0^{\circ}\text{C}$ или с учетом синоптических условий) [2].
3. Ряды фактических средних суточных расходов воды ($Q_{\text{факт}}$) на гидропосту, необходимые для верификации модели и решения обратной задачи по подбору параметров [1].

В основе моделирования лежит концепция снежного покрова как природного резервуара с конечной влагоемкостью [12], процесс формирования стока от таяния снега разделяется на фазу влагонакопления и фазу водоотдачи [3].

Важным этапом является учет влагоудерживающей способности снежной толщи и подстилающей поверхности. Не вся растаявшая вода сразу

поступает в русло. Часть ее идет на восполнение дефицита влажности снега и заполнение микропонижений рельефа (депрессий). Водоотдача, формирующая поверхностный сток, начинается только после достижения снегом предельной влагоемкости. Необходимо определить устойчивый переход температуры воздуха через 0 °С к отрицательным температурам. Именно с этого момента выпадающие осадки формируют снежный покров. Начало периода водоотдачи и снеготаяния характеризуется переходом к положительным температурам. Также была проведена оценка согласия расчетных и фактических значений снегозапаса за 2010 год. Пример расчета водоотдачи представлен в таблице 1 и на рисунке 4.

Таблица 1 – Часть расчета водоотдачи по 2012 году по станции Каргополь
в приложении *MS Excel*

Дата	Месяц	День	t , °С	X , мм	h , см	S_f , мм	S_p , мм	W , мм
01.01.2012	1	1	–2,1	0,2	23		63,4	0
02.01.2012	1	2	–6,4	0,8	23		64,1	0
03.01.2012	1	3	–4,2	0,5	25		64,5	0
04.01.2012	1	4	–4,5	2,5	26		66,7	0
05.01.2012	1	5	–1,1	3	28		69,4	0
06.01.2012	1	6	0	2,2	27		71,3	0
07.01.2012	1	7	0,4	2,1	29		72,4	0
08.01.2012	1	8	–2	0,8	29		73,1	0
09.01.2012	1	9	–5,1	0	29		73,1	0
10.01.2012	1	10	–5,8	3,4	31	68	76,1	0

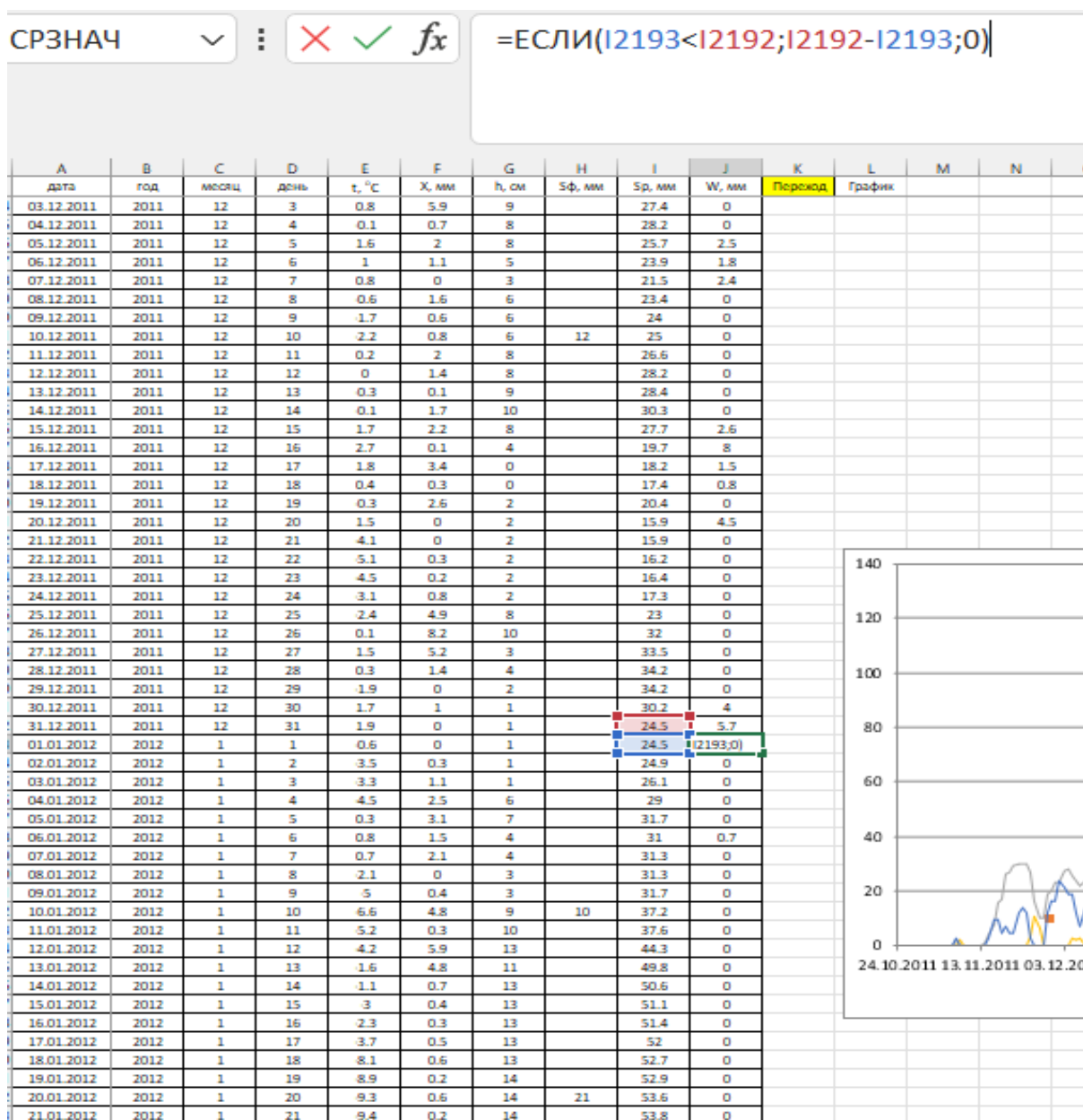


Рисунок 4. Определение водоотдачи на ст. Вытегра за 2012 год с помощью функции «ЕСЛИ» в приложении MS Excel.

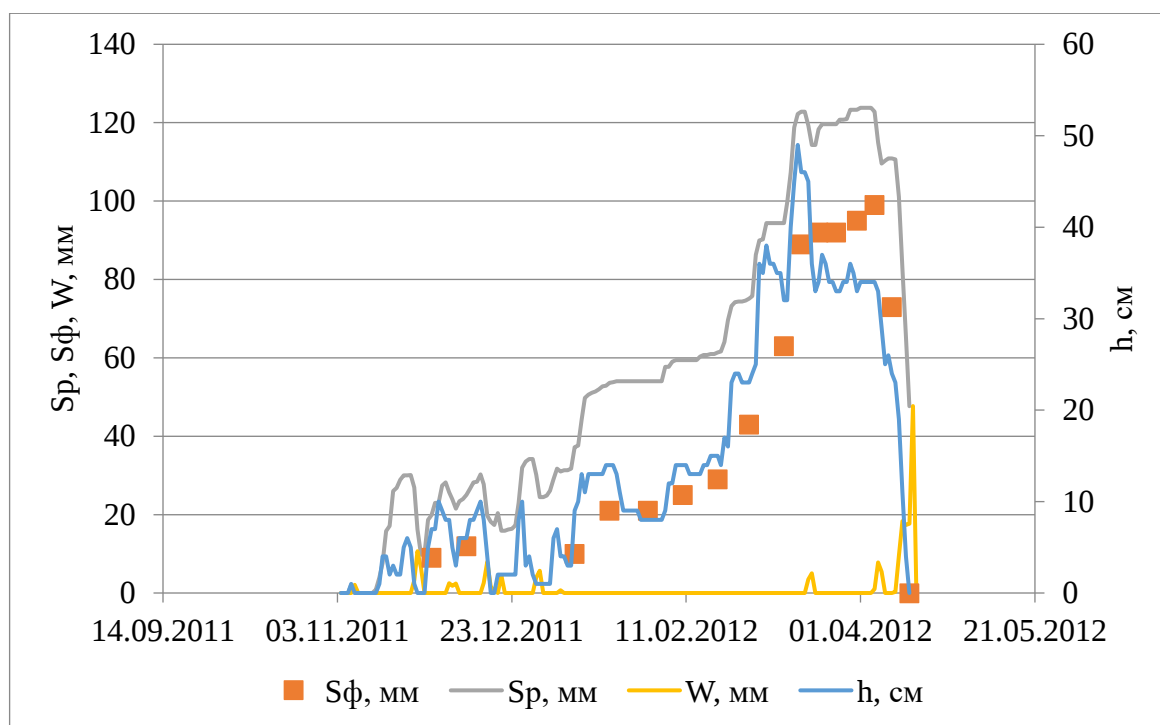


Рисунок 5. График фактических и расчетных снеговзапасов по ст. Вытегра за 2012 год.

На рисунке 5 представлены фактические снеговзапасы в миллиметрах, расчетные снеговзапасы, высота снежного покрова в сантиметрах и количество выпавших осадков. Процесс снегонакопления начался осенью 2011 года, с увеличением количества твердых осадков растет кривая снежного покрова, также происходит ступенчатое увеличение фактических снеговзапасов. Расчетная кривая снеговзапасов плавно растет, описывая тренд накопления снега в течение зимнего периода.

Пик снегонакопления приходится на конец зимы и начало весны 2012 года, конкретно на март и первую половину апреля. В этот период высота снежного покрова достигает своих максимальных значений около 50–55 сантиметров. При этом расчетные снеговзапасы достигают пика в 120 миллиметров, тогда как фактические значения оказываются несколько ниже, составляя порядка 110 миллиметров. Это небольшое расхождение указывает на то, что используемая математическая модель незначительно завышает максимальный объем накопленной влаги по сравнению с реальными замерами.

Начиная со второй половины апреля на графике наблюдается фаза интенсивного весеннего снеготаяния. К концу апреля – началу мая показатели практически обнуляются, что свидетельствует о полном сходе снежного покрова. В этот же период фиксируются весенние осадки, которые выпадают в условиях активного таяния.

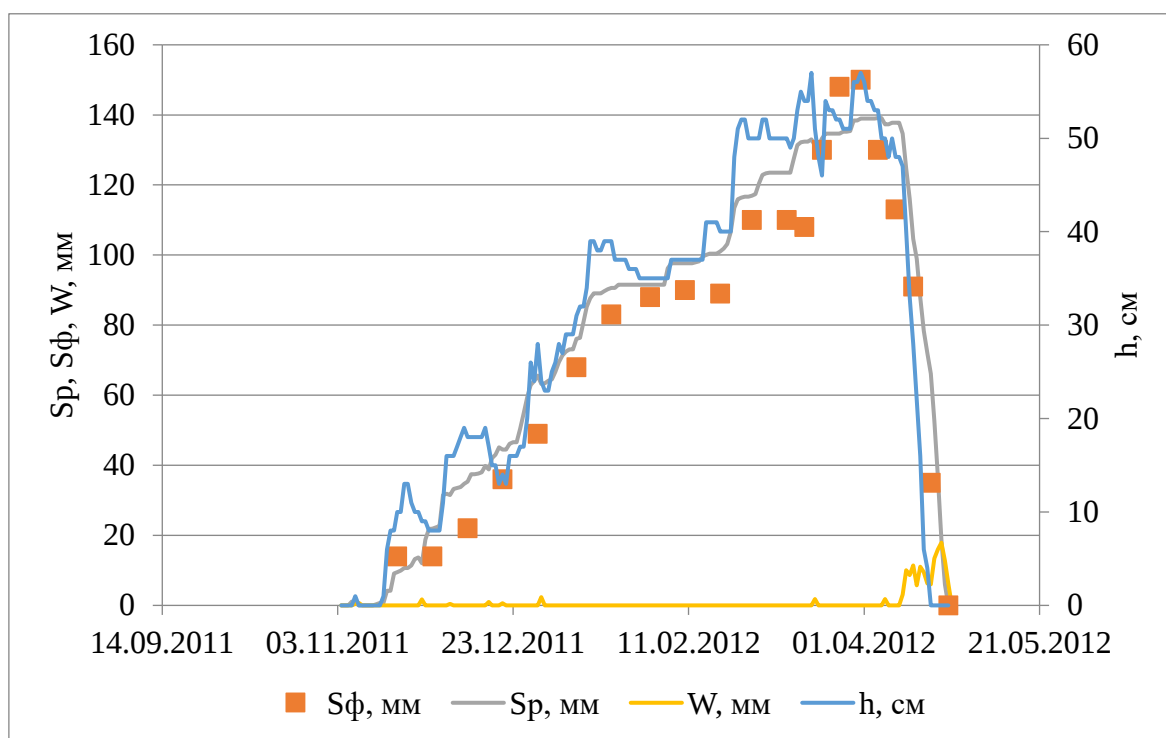


Рисунок 6. График фактических и расчетных снеготаяний по ст. Каргополь за 2012 год.

График (рисунок 6) демонстрирует динамику снеготаяния и снеготаяния по станции Каргополь за зимний сезон 2011–2012 годов.

На графике отображены четыре параметра: фактические снеготаяния (S_f , оранжевые квадраты), расчетные снеготаяния (S_p , серая линия), высота снежного покрова (h , синяя линия, правая шкала) и осадки (W , желтая линия).

Наблюдается та же тенденция роста и уменьшения показателей, как и в предыдущем графике.

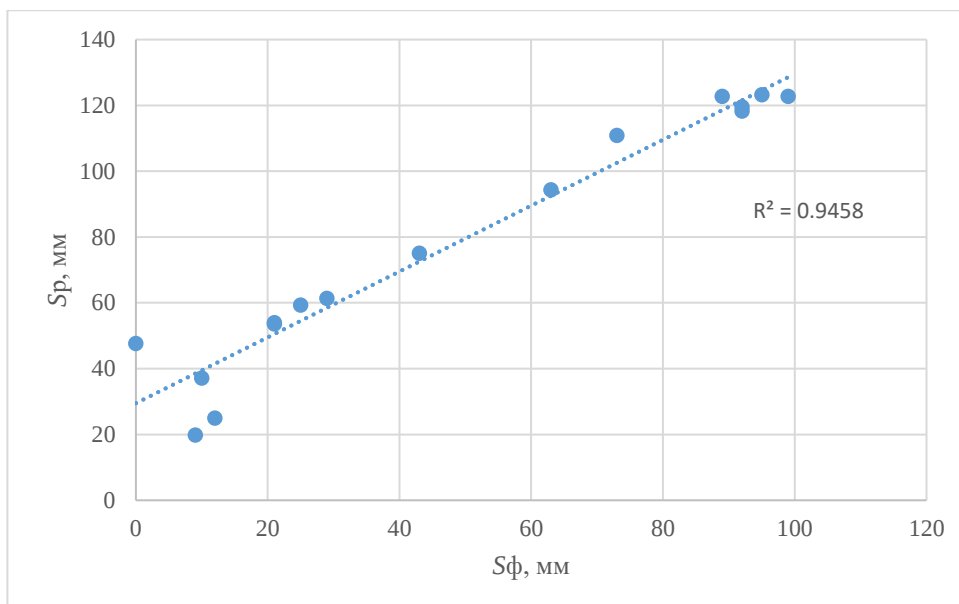


Рисунок 7. Статистическая оценка согласия фактических и расчетных снегозапасов за период 2011–2012

Модель для расчетного 2012 года, согласно статистической оценке, работает удовлетворительно (рисунок 7). Значения на графике группируются вокруг линии тренда. Коэффициент корреляции равен 0,95. На графике видно, что расчетные значения завышены относительно фактических, так как линия тренда проходит выше биссектрисы. Например, 10.01.2012 равен 68, в то время как расчетное значение несколько больше – 76,1 (таблица 1).

Для прогнозной оценки согласия использовался метод ГМЦ (Гидрометцентра России). В данном методе происходит сравнение средней квадратической погрешности с изменчивостью прогнозируемой величины за период заблаговременности [4].

Средняя квадратическая погрешность поверочных прогнозов S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\phi,i} - Y_{\text{пр},i})^2}{n - m}},$$

где:

$Y_{ф,i}$ и $Y_{пр,i}$ – фактическое и предсказанное значения;

n – число членов ряда (прогнозов);

m – число параметров в прогностическом уравнении. При линейной зависимости $m = 2$.

В качестве меры изменчивости прогнозируемой величины используется среднее квадратическое отклонение ее изменений за период заблаговременности (σ_{Δ}):

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta H_i - \bar{\Delta H})^2}{n - 2}},$$

где:

ΔH_i – изменение уровня за период заблаговременности (например, суточное),

$\bar{\Delta H}$ – среднее значение этих изменений.

Основным критерием эффективности методики по ГМЦ служит отношение S/σ_{Δ} . Чем меньше это отношение, тем более точной является методика. Также данный критерий позволяет сопоставить полученные результаты с нормативными требованиями РФ.

Критерий эффективности методики по ГМЦ:

$$\frac{S}{\sigma_{\Delta}} \leq \text{пороговое значение.}$$

Пороговые значения зависят от объема выборки:

при $n \leq 15$: $S/\sigma_{\Delta} \leq 0,70$;

при $15 < n \leq 25$: $S/\sigma_{\Delta} \leq 0,75$;

при $n > 25$: $S/\sigma_{\Delta} \leq 0,80$.

Допустимая погрешность отдельного прогноза по методу ГМЦ определяется через среднеквадратическое отклонение изменений прогнозируемой величины:

$$\delta_{\text{доп}} = \pm 0,674 \sigma_{\Delta}.$$

Коэффициент 0,674 соответствует вероятности 50% при нормальном распределении погрешностей.

Таблица 2 – Оценка согласия фактических и расчетных снегозапасов по методике Гидрометцентра России

Характеристики	Метеорологический пост	
	Вытегра	Каргополь
$S_{\text{ф ср, мм}}$	57.85	103.3
σ	39.08	50.33
S	33.76	13.37
n	13.00	18.00
S/σ	0.86	0.27
Оценка точности	$S/\sigma_{\Delta} \geq 0,70$	$S/\sigma_{\Delta} \leq 0,75$

Для станции Вытегра методика не совсем эффективна и лучше описывает ситуацию на станции Каргополь. На это мог повлиять разный объем выборки, а также фактические снегозапасы.

3.2 Моделирование и прогнозирование стока рек на водосборе оз. Лача

Ключевым гидрологическим событием, с которого начинается активная фаза расчетов, является момент устойчивого перехода среднесуточной температуры воздуха через 0°C. Весной этот переход знаменует собой начало снеготаяния и формирование весеннего половодья, осенью – начало ледообразования и установление зимней межени.

В рассматриваемом расчетном периоде 2012 года по данным метеорологических станций Вытегра и Каргополь весенний переход температуры через нулевую отметку зафиксирован в первой декаде апреля. Именно с этой даты в таблице ежедневных расчетов начинают заполняться графы расчетных расходов воды ($Q_{расч}$), поскольку до этого момента водосбор находился в промерзшем состоянии, а сток формировался исключительно за счет подземного питания, характеризующегося незначительной и стабильной величиной. Осенний обратный переход через 0°C , отмеченный в первой декаде ноября, служит сигналом к прекращению активного снеготаяния и переходу к зимнему периоду, когда расчетные значения расходов вновь определяются преимущественно грунтовым питанием.

Таким образом, весь расчетный год условно делится на три характерные фазы: зимнюю межень (январь – начало апреля), период весеннего половодья и летне-осеннюю межень (апрель — ноябрь), а также заключительную зимнюю фазу (ноябрь – декабрь). Каждая из этих фаз требует применения собственных расчетных зависимостей, учитывающих преобладающие источники питания водотоков.

Расчетные расходы воды ($Q_{расч}$) определяются на основе ежедневного учета снегозапасов (S), слоя жидких осадков (W) и предшествующего увлажнения водосбора (таблицы 3 и 4). В расчетной таблице графа $X+W$ отражает суммарный объем водоотдачи, формирующийся из таяния снега (X) и выпавших осадков (W), пересчитанный в расход воды в кубических метрах в секунду с учетом площади водосборного бассейна ($F = 876 \text{ км}^2$). Коэффициент стока, характеризующий долю осадков и талых вод, поступающих в речную сеть, варьируется в течение года: в период весеннего половодья, когда почвы насыщены влагой и промерзший слой препятствует инфильтрацией, он достигает максимальных значений, тогда как в летний период значительная часть осадков расходуется на испарение и восполнение почвенной влаги.

В рассматриваемых расчетах применяются данные станций Вытегра и Каргополь, которые служат репрезентативными пунктами для оценки термического режима и осадков на водосборах. Среднесуточные температуры воздуха, фиксируемые в расчетной таблице, используются для определения интенсивности снеготаяния и испарения.

Снегозапасы (S), выраженные в миллиметрах, являются ключевой переменной в прогнозе весеннего половодья. Их накопление начинается с момента установления устойчивого снежного покрова и продолжается до достижения максимума, который в рассматриваемом году пришелся на начало апреля. Динамика снегозапасов отражена в соответствующих графах расчетной таблицы 3, где прослеживается ступенчатый характер их нарастания, связанный с эпизодическим выпадением снежных осадков в зимний период.

Максимальные снегозапасы перед началом весеннего снеготаяния составили по станциям Вытегра и Каргополь величины порядка 100–150 мм. С момента перехода температуры через 0°C в сторону повышения начинается интенсивное понижение снегозапасов, которое на графике ежедневных расчетов проявляется резким снижением значений S и одновременным возрастанием расчетных расходов воды. Пик половодья, зафиксированный в третьей декаде апреля, совпал с периодом наиболее интенсивного снеготаяния, когда суточный слой талых вод достигал максимальных значений, а расчетные расходы превышали $30 \text{ м}^3/\text{с}$.

В материалах исследований озера Лача указывается, что заболоченность и залесенность территории существенно влияют на условия снегонакопления и снеготаяния: на открытых пространствах снег сходит быстрее, тогда как в лесных массивах и на болотах процесс растянут во времени. Данный фактор обуславливает некоторое сглаживание пика половодья по сравнению с теоретически возможным при одновременном таянии снега по всей площади водосбора.

Оценка качества прогнозных расчетов осуществляется путем сопоставления расчетных расходов воды ($Q_{расч}$) с фактическими данными наблюдений ($Q_{ф}$). В расчетной таблице 3 для каждого дня приведена абсолютная погрешность $|\delta|$, определяемая как разность между расчетным и фактическим значениями расхода и которая используется для определения суммарной погрешности за расчетный период ($\Sigma|\delta|$). Данный показатель характеризует общую величину отклонений без учета их знака и позволяет судить о стабильности расчетной методики.

Для сравнения точности расчетов в расчетные периоды года вычисляются средние расходы воды ($Q_{ср}$) за характерные фазы водного режима. Отношение средней погрешности к среднему расходу дает представление об относительной точности прогноза: в периоды межени, когда абсолютные значения расходов невелики, даже небольшие абсолютные погрешности приводят к значительным относительным отклонениям, тогда как в период половодья при высоких расходах те же абсолютные погрешности соответствуют малым относительным величинам.

В таблице также приводятся параметры S/σ , характеризующие отношение снегозапасов к их погрешности. Данный показатель позволяет оценить достоверность исходных данных о снегозапасах.

Дополнительно в расчетах фигурируют параметры k и τ , которые представляют собой коэффициент стока и время добегания талых вод до створа наблюдений соответственно. Эти параметры варьируются по фазам водного режима: в период весеннего половодья коэффициент стока максимален, как и время добегания вследствие насыщенности почв и развития речной сети, тогда как в летне-осенний период коэффициент стока снижается, а время добегания увеличивается.

Представленная методика прогнозирования внутригодового стока, основанная на ежедневном учете снегозапасов, атмосферных осадков и термического режима водосбора, позволяет с приемлемой точностью

воспроизводить основные фазы водного режима реки Ухта, дренирующей озеро Лача. Привязка начала активных расчетов к моменту перехода температуры через 0°C обеспечивает корректное разделение расчетного года на характерные фазы и применение адекватных для каждой из них расчетных зависимостей.

Расчет погрешностей, включающий определение абсолютных и относительных отклонений, суммарных погрешностей за периоды и оценку достоверности исходных данных о снегозапасах, дает всестороннюю характеристику качества прогнозов

Таблица 3 – Сводная таблица температуры воздуха и водоотдачи за июль 2012 года

$t_{ср}, ^\circ\text{C}$	Температура		W	
	Вытегра	Каргополь	Вытегра	Каргополь
13,8	14,3	13,3	0	0
19,5	20	18,9	0	0
19,4	18,9	19,9	3,7	0,5
18,2	17,5	18,8	0	0
16,6	17	16,1	0	0
16,0	16,3	15,7	0	0
17,2	17	17,4	0	0
19,8	20,9	18,7	0	0
21,5	22,6	20,4	4	15,9
19,4	20,7	18,1	0	0,4
19,7	19,8	19,5	6,5	12,8
19,8	19,8	19,8	3,8	0
20,6	20	21,1	3,5	2
18,6	18,4	18,7	16,3	25,6
17,4	17	17,8	8,4	0,8
17,9	17,6	18,2	1,8	7
16,7	16,3	17,1	0	0
16,3	15,9	16,7	4,7	0

$t_{cp}, ^\circ C$	Температура		W	
	Вытегра	Каргополь	Вытегра	Каргополь
13,7	13,7	13,7	0,7	0
15,0	15,2	14,7	6,7	9,7
16,4	17	15,8	0	0
15,5	15,4	15,5	4,1	1,2
15,3	14,8	15,7	2,3	0,5
14,8	15	14,6	4,9	2,1
17,0	17,4	16,5	1,2	7,9
16,5	17	15,9	7,1	3,4
16,7	16,9	16,4	0	0,5
17,0	17,3	16,7	0	3,6
20,0	21,1	18,9	4,3	0
23,1	25,3	20,8	0	1,2
24,5	25,2	23,8	0	0

Таблица 4 – Расчет $Q_{расч}$, погрешностей и среднеквадратичного отклонения за июль 2012 года

Дата	День	X, мм	X+W, м ³ /с	Qф, м ³ /с	Qрасч, м ³ /с	$ \delta $	S	σ
01.07.2012	183	0,0	0,0	6,92	6,9			30
02.07.2012	184	0,0	0,0	5,61	5,5	0,2	0	2
03.07.2012	185	2,1	21,3	4,79	4,3	0,5	0	5
04.07.2012	186	0,0	0,0	3,69	4,5	0,8	1	12
05.07.2012	187	0,0	0,0	3,15	3,5	0,4	0	16
06.07.2012	188	0,0	0,0	2,63	2,8	0,2	0	20
07.07.2012	189	0,0	0,0	2,15	2,2	0,0	0	25
08.07.2012	190	0,0	0,0	1,77	1,7	0,0	0	29
09.07.2012	191	10,0	100,9	1,77	1,4	0,4	0	29
10.07.2012	192	0,2	2,0	1,8	6,3	4,5	20	28
11.07.2012	193	9,7	97,8	2,41	5,0	2,6	7	22
12.07.2012	194	1,9	19,3	2,92	9,0	6,1	37	18

Дата	День	X , мм	$X+W$, м ³ /с	$Q_{\text{ф}}$, м ³ /с	$Q_{\text{расч}}$, м ³ /с	$ \delta $	S	σ
13.07.2012	195	2,8	27,9	3,74	8,1	4,4	19	11
14.07.2012	196	21,0	212,4	8,16	7,8	0,3	0	1
15.07.2012	197	4,6	46,6	17,1	17,1	0,0	0	99
16.07.2012	198	4,4	44,6	21,6	15,9	5,7	33	209
17.07.2012	199	0,0	0,0	19,8	14,8	5,0	25	161
18.07.2012	200	2,4	23,8	15,5	11,7	3,8	15	70
19.07.2012	201	0,4	3,5	11,1	10,4	0,7	0	16
20.07.2012	202	8,2	83,1	10,1	8,4	1,7	3	9
21.07.2012	203	0,0	0,0	10,1	10,9	0,8	1	9
22.07.2012	204	2,7	26,9	10,1	8,6	1,5	2	9
23.07.2012	205	1,4	14,2	9,32	8,2	1,2	1	5
24.07.2012	206	3,5	35,5	8,06	7,2	0,9	1	1
25.07.2012	207	4,6	46,1	6,92	7,5	0,5	0	0
26.07.2012	208	5,3	53,2	6,16	8,3	2,1	4	1
27.07.2012	209	0,3	2,5	5,81	9,2	3,4	12	2
28.07.2012	210	1,8	18,3	5,2	7,4	2,2	5	4
29.07.2012	211	2,2	21,8	4,67	6,8	2,1	4	6
30.07.2012	212	0,6	6,1	4,13	6,5	2,3	5	9
31.07.2012	213	0,0	0,0	3,6	5,4	1,8	3	12

Таблица 5 – Параметризация за июль 2012 года

$k =$	0,24
$\tau =$	5
$\Sigma \delta =$	56,3
$Q_{\text{ср}} =$	7,1
$S/\sigma =$	0,50

Параметры k и τ были определены с помощью функции «Поиск решения» в приложении *MS Excel*. Целевой функцией являлась суммарная погрешность. Критерий S/σ выполняется.

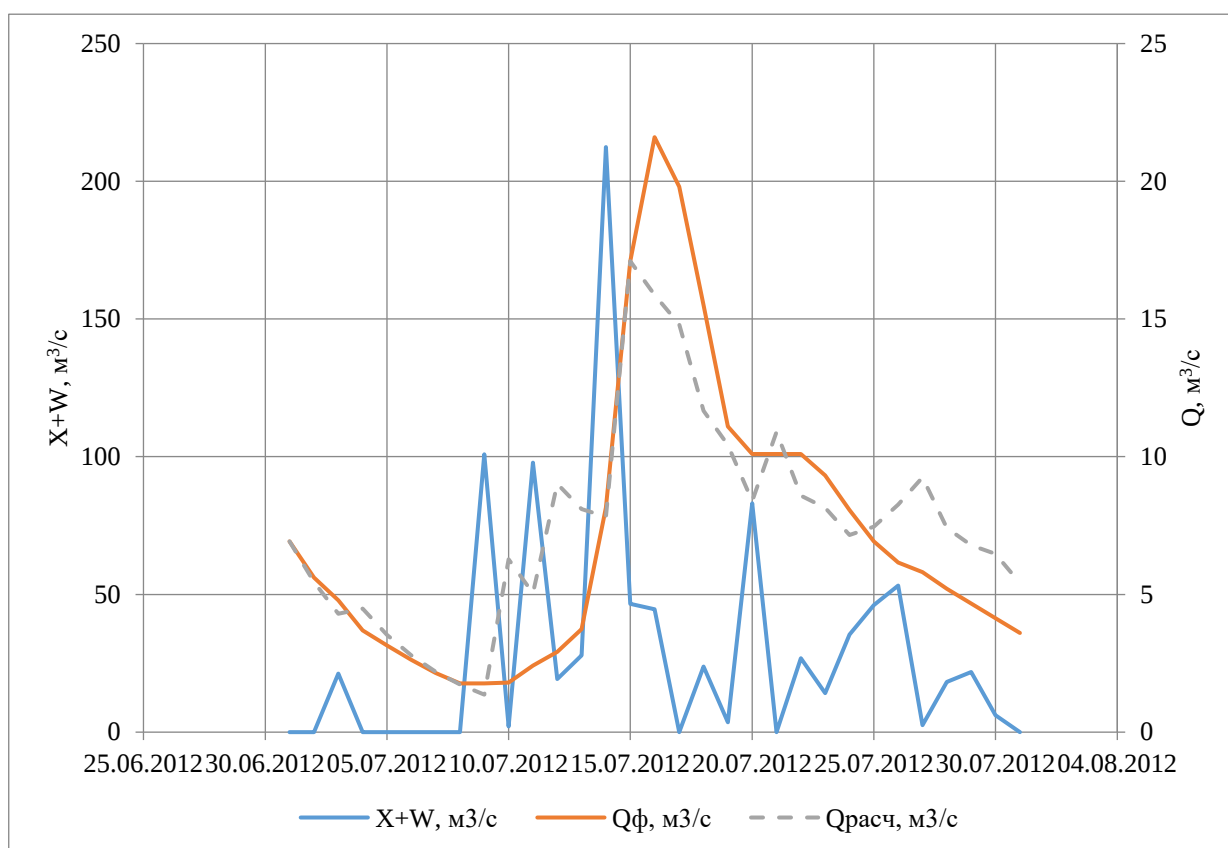


Рисунок 8. Хронологический график фактических и расчетных расходов, и атмосферных осадков и водоотдачи за июль 2012 года

На графике показана динамика формирования дождевого паводка за июль 2012 года на р. Ухта. На нем одновременно отображены три ключевых параметра: суммарный приток, складывающийся из талых вод и жидких осадков ($X+W$, синяя сплошная линия, левая шкала), фактические расходы воды в створе (Q_f , оранжевая сплошная линия, правая шкала) и расчетные значения расходов ($Q_{расч}$, серая пунктирная линия, правая шкала). В левой части графика виден спад кривых, характеризующий летнюю межень. Фактические расходы падают с 7 до 1,5 м³/с, а расчетные значения следуют за ними с небольшим запаздыванием, опускаясь до 1,4 м³/с. В этот период сток формируется преимущественно за счет грунтового питания и летних осадков. За увеличением количества осадков, пик которых достигает 14.07.2012 с небольшим запаздыванием, повышаются фактические расходы.

Пик расчетных расходов наступил на сутки раньше фактических, что свидетельствует о том, что модель немного завышает расчетные показания. Далее кривые, по тенденции, идут на спад, несмотря на небольшой пик, образовавшийся из-за увеличения количества осадков.

Анализ графика позволяет сделать вывод, что применяемая методика прогнозирования адекватно воспроизводит общую тенденцию формирования летнего стока, однако модель может занижать значения.

Таблица 6 – Выполнение условия S/σ за расчетный период 2012 года

Номер периода	Месяц	S/σ
1	апрель	0,91
2	май	0,36
3	июнь	0,83
4	июль	0,50
5	август	0,57
6	сентябрь	0,69
7	октябрь	0,12
среднее		0,57

Критерий S/σ удовлетворителен для 5 периодов (месяцев) из 7.

Анализ графиков фактических и расчетных снегозапасов по метеорологическим станциям Вытегра и Каргополь продемонстрировал, что математическая модель в целом адекватно воспроизводит общую динамику процесса снеготаяния. Расчетная кривая хорошо описывает тренд накопления, хотя и демонстрирует незначительное завышение пиковых значений перед началом интенсивного таяния. Оценка точности расчетов в период весеннего половодья выявила, что, несмотря на высокие значения суммы абсолютных погрешностей, относительная точность прогноза остается на приемлемом уровне, а высокое отношение снегозапасов к

погрешности их измерения подтверждает достоверность исходных данных, используемых в модели.

Однако при моделировании экстремальных летних дождевых паводков, в частности интенсивного ливня середины июля 2012 года, выявлены систематические недостатки применяемого подхода. Расчетные значения расходов воды в пик паводка оказались заниженными по сравнению с фактическими, а сама кривая расчетного стока имела сглаженный характер с временным запаздыванием. Данная особенность объясняется тем, что методика опирается на осредненные по площади водосбора показатели осадков с опорных метеостанций, тогда как летние ливни в регионе носят ярко выраженный конвективный характер и выпадают крайне неравномерно.

4 Моделирование и прогнозирование уровней оз. Лача

В работе использовались среднесуточные данные о расходах притоков (реки Ковжа, Лекшма, Ухта, Свидь) и оттока (река Онега), а также уровнях воды озера Лача за 2012 год.

4.1 Разработка алгоритма прогноза

На первом этапе рассчитывался общий приток путем увеличения расходов по имеющимся постам в соответствии с их площадями водосборов и общей площадью водосбора озера. Далее из суммарного притока вычитался отток из озера р. Онеги. В качестве примера на рисунке 9 представлены хронологические графики уровней, притока и оттока за 2012 г.

Использовалась модель водоема в общем виде:

$$\frac{dH}{dt} + k_{\text{морф}} * H = \frac{\Sigma Q}{F(H)}$$

где H – уровни воды озера Лача;

$k_{\text{морф}}$ – морфометрический коэффициент;

ΣQ – суммарный расход воды (приток и отток);

$F(H)$ – площадь зеркала озера [6, 8].

Далее выполнялась параметризация модели водоема, т. е. для каждого месяца определялись оптимальные численные значения параметра $k_{\text{морф}}$, при которых получено наилучшее согласие фактических и расчетных уровней воды в озере. Для этого использовалась надстройка *Excel* «Поиск решения», в установках которой на данном этапе работ не было ограничений на знак параметра. Результаты параметризации ($k_{\text{морф}}$) при

постоянной площади зеркала озера и оценка согласия расчетных и фактических уровней по критерию S/σ [3] представлены в таблице 6.

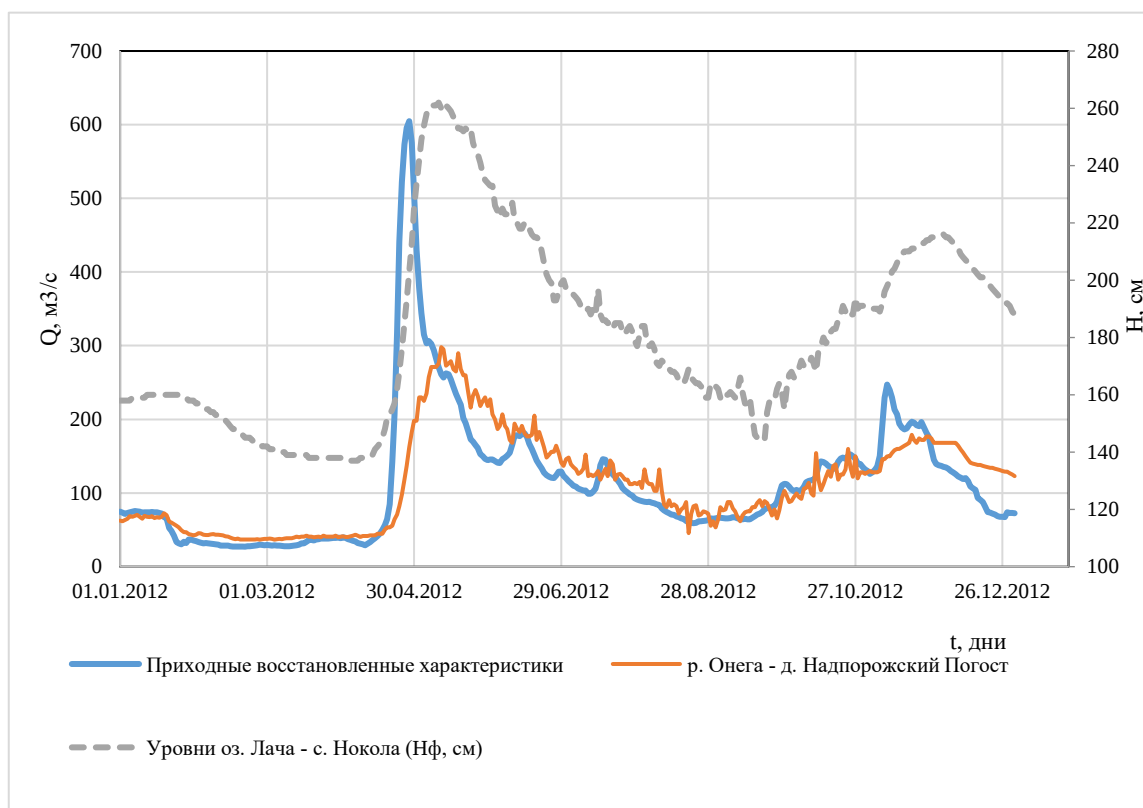


Рисунок 9. Хронологические графики уровней оз. Лача, общего притока и оттока

В качестве примера на рисунке 10 представлен хронологический график фактических и расчетных уровней озера Лача за август 2012 года. На графике наблюдается снижение уровней вследствие отрицательного баланса притока и оттока из озера.

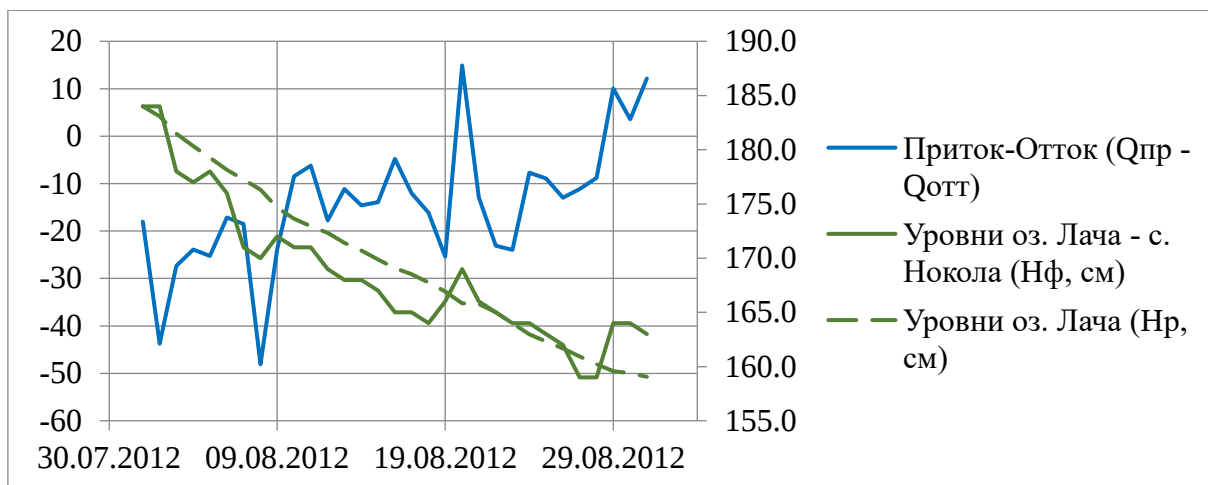


Рисунок 10. Хронологический график фактических и расчетных уровней озера Лача за август 2012 года при постоянной площади зеркала

Собраны исходные данные по притоку и уровенному режиму озера Лача за многолетний период. Рассчитан общий приток в озеро и его баланс с оттоком. Выполнена параметризация модели водоема для каждого отдельного месяца на примере 2012 года при постоянной площади озера и без ограничения на знак коэффициента. По критерию S/σ расчеты уровней водоема удовлетворительные для 9 месяцев из 12.

4.2 Апробация прогностической методики и оценка прогноза на независимом материале

Апробация разработанной модели водоема проводилась путем сопоставления фактических среднесуточных уровней воды озера Лача (по данным гидропоста с. Нокола) с уровнями, рассчитанными по дифференциальному уравнению водного баланса. Оценка точности моделирования осуществлялась с использованием критерия S/σ , где S – средняя квадратическая погрешность расчетных уровней, а σ – среднее квадратическое отклонение фактических уровней от нормы. Данный критерий широко применяется в оперативной практике гидрологического

прогнозирования [13]. Результаты параметризации морфометрического коэффициента ($k_{\text{морф}}$) и оценки точности для каждого месяца 2012 года представлены в таблицах 6 и 7.

Анализ полученных результатов показал, что предложенная математическая модель при постоянной площади в случае отсутствия ограничений на знак коэффициента морфоствора адекватно воспроизводит основные тенденции сезонных колебаний уровня озера Лача. По критерию S/σ расчеты признаны удовлетворительными для 9 месяцев из 12, что подтверждает надежность выбранного алгоритма. Модель верно отражает зимнюю сработку уровня, обусловленную преобладанием оттока из озера (река Онега) над притоком в условиях ледостава, а также весенний подъем уровня, связанный с поступлением талых вод от рек Свидь, Ковжа, Ухта и Лекшма.

Наибольшие расхождения между фактическими и расчетными уровнями наблюдаются в феврале, апреле и декабре, когда критерий S/σ опускается ниже порога удовлетворительности. Это связано с тем, что в переходные периоды (ледостав и ледоход) физика процессов усложняется: изменение пропускной способности русла реки Онеги из-за образования заторов и зажоров льда, а также нелинейная зависимость площади зеркала озера от уровня не могут быть полностью скомпенсированы единым усредненным коэффициентом $k_{\text{морф}}$.

Тем не менее, в целом модель водоема показала высокую устойчивость и способность описывать интегральный водный баланс озера Лача, что позволяет рекомендовать ее для использования в оперативных гидрологических расчетах и прогнозах уровня режима.

Таблица 7 – Оптимальные параметры модели ($k_{\text{морф}}$)

Месяц	$k_{\text{морф}}$	S/σ
1	0,0000988	0,85
2	0,00180	0,13
3	-0,000178	0,63
4	-0,00371	0,17
5	-0,00135	0,54
6	0,0754	1,29
7	0,000935	0,48
8	0,00268	0,54
9	-0,000280	1,03
10	-0,00304	0,31
11	-0,00116739	0,15
12	-0,00060072	0,20

Также были выполнены расчеты с учетом коэффициентов притока и оттока по связи: $F=f(a \cdot H + b)$.

Таблица 8 – Оптимальные параметры модели с учетом $k_{\text{приток}}$ и $k_{\text{отток}}$

Месяц	$k_{\text{морф}}$	a	b	S/σ
1	0	3,12	5,01	0,59
2	0,00218	2,95	5,00	0,12
3	0	0,00	396	0,64
4	0	1,64	4,96	0,38
5	0	0,93	4,97	0,39
6	0,00318	2,23	4,70	0,39
7	0,00206	3,94	4,75	0,41
8	0	0,93	4,75	0,43

Месяц	$k_{\text{морф}}$	a	b	S/σ
9	0	2,15	4,95	1,00
10	0	0,64	4,95	0,31
11	0	1,32	5,14	0,14
12	0	1,95	5,20	0,20
среднее				0,42

В данном случае модель показывает более высокую устойчивость, по сравнению с расчетами модели, не учитывающей ограничения. Из 12 периодов лишь один показывает неудовлетворительный результат по критерию S/σ .

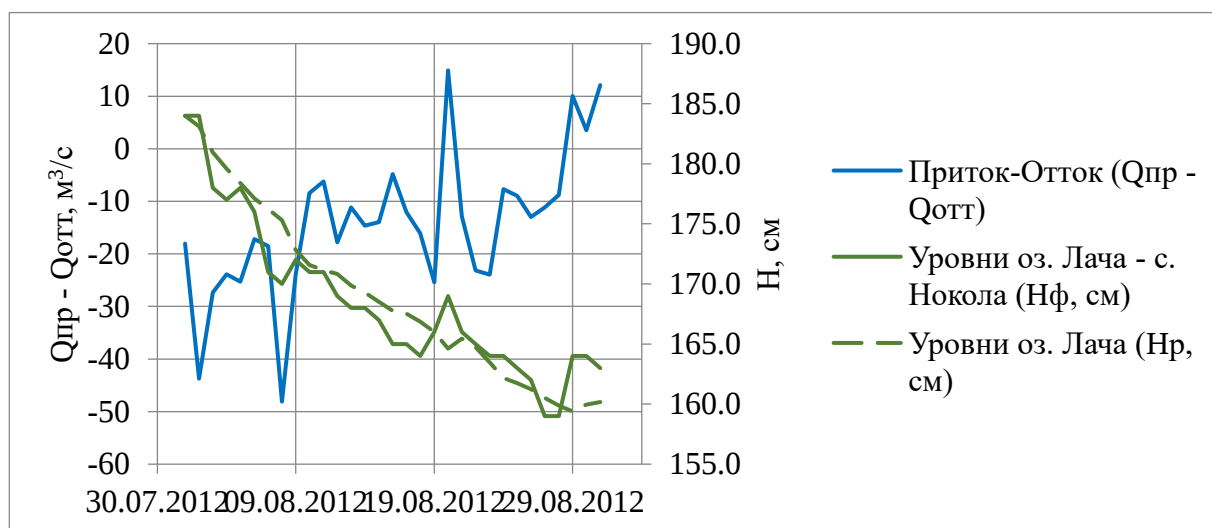


Рисунок 11. Хронологический график фактических и расчетных уровней озера Лача за август 2012 года с учетом ограничений.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы была решена задача прогнозирования внутригодового распределения стока в бассейне озера Лача с применением водно-балансовой методики моделирования гидрологических процессов, а также прогнозирования уровней воды озера. На основе комплексного анализа физико-географических условий водосбора, материалов многолетних исследований Института озераедения Академии наук СССР и фактических гидрометеорологических данных за 2012 год, разработан и апробирован алгоритм расчета прогнозных суточных уровней воды.

Моделирование формирования запасов воды в снеге и водоотдачи из него на примере реки Ухта показало высокую надежность применяемого подхода. Ключевым гидрологическим признаком, разделяющим фазы накопления и активного таяния, выступает момент устойчивого перехода среднесуточной температуры воздуха через 0°C . Анализ графиков фактических и расчетных снеговых запасов по метеостанциям: Вытегра и Каргополь продемонстрировал, что модель адекватно воспроизводит общий тренд накопления снега в зимний период и динамику весеннего снеготаяния. Расчетная кривая незначительно завышает пиковые значения снегового запаса в конце марта, однако верно отражает начало интенсивной водоотдачи в первой декаде апреля, что обеспечивает корректное моделирование фазы подъема весеннего половодья.

Математическая модель формирования речного стока, базирующаяся на концепции сосредоточенной емкости с параметрами коэффициента стока (k) и времени добегания (τ), успешно описывает базовый гидрограф реки Ухта бассейна озера Лача. Апробация на данных 2012 года подтвердила, что модель стабильно работает в периоды зимней и летней межени, а также при моделировании растянутого весеннего половодья, где доминирует грунтовое питание и талые воды. В то же время, при моделировании

экстремальных летних дождевых паводков (например, в середине июля 2012 года) выявлено временное запаздывание и сглаживание пиков расчетных расходов. Данная особенность обусловлена использованием осредненных метеоданных и линейным характером модели, не в полной мере учитывающим конвективный характер ливней.

Разработанная модель водоема, описывающая динамику уровней озера Лача через дифференциальное уравнение водного баланса с введением морфометрического коэффициента ($k_{\text{морф}}$), продемонстрировала высокую эффективность. Параметризация модели методом решения обратной задачи с использованием надстройки «Поиск решения» позволила найти оптимальные значения $k_{\text{морф}}$ для каждого месяца. Апробация модели на независимом материале показала, что по критерию S/σ расчеты уровней водоема с постоянной площадью зеркала являются удовлетворительными для 9 месяцев из 12. Для расчета модели с учетом коэффициентов стока и притока результаты точнее – для 11 месяцев из 12. Модель корректно воспроизводит зимнюю сработку уровня, весенний подъем, обусловленный притоком рек Свидь, Ковжа, Ухта и Лекшма, и последующий летне-осенний спад. Выявленные погрешности в переходные периоды объясняются допущением о постоянстве площади зеркала озера и сложными ледовыми процессами на истоке реки Онеги, что указывает на резервы для дальнейшего усовершенствования модели.

Таким образом, проведенное исследование подтверждает, что созданная системная модель «Атмосфера – Снег – Водосбор – Озеро» обладает достаточной точностью и надежностью для оперативного прогнозирования гидрологического режима бассейна озера Лача. Результаты работы имеют практическую значимость для корректировки графиков судоходства, оценки рисков экстремальных гидрологических явлений и адаптации классических гидрологических моделей к условиям мелководных озер с гетерогенным, сильно заболоченным водосбором.

Список использованных источников

- 1 Автоматизированная информационная система государственного мониторинга водных объектов (АИС ГМВО): [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [<http://gmvo.skniivh.ru>] 13.03.2026.
- 2 Всероссийский научно-исследовательский институт гидрометеорологической информации – Мировой центр данных: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [<http://meteo.ru>], 04.02.2026.
- 3 Георгиевский, Ю. М. Краткосрочные гидрологические прогнозы / Ю. М. Георгиевский. – Л., 1982. – 100 с.
- 4 Георгиевский, Ю. М. Гидрологические прогнозы: учебник / Ю. М. Георгиевский, В. А. Шаночкин. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2007. – 436 с.
- 5 Гидрология озер Воже и Лача (в связи с переброской северных вод в бассейн р. Волги) / под ред. Т. И. Малининой. – Л.: Наука, 1979. – 282 с.
- 6 Догановский, А. М. Исследование закономерностей распределения и строения батиметрически изученных озер больших территорий / А. М. Догановский, Н. В. Мякишева // Ученые записки РГГМУ. – 2019. – № 41. – С. 63–75.
- 7 Коваленко, В. В. Задачи по моделированию гидрологических процессов / В. В. Коваленко, А. В. Лубяной, В. А. Хаустов. – СПб., 1998. – 29 с.
- 8 Коваленко, В. В. Моделирование гидрологических процессов / В. В. Коваленко, Н. В. Викторова, Е. В. Гайдукова. – СПб., 2006. – 559 с.
- 9 Коваленко, В. В. Практикум по дисциплине «Моделирование гидрологических процессов». Ч. 1. Динамические модели (на базе языка C++) / В. В. Коваленко, Е. В. Гайдукова. – СПб., 2010. – 150 с.
- 10 Озера Лача и Воже: материалы комплексных исследований / АН СССР, Ин-т озераведения. – Л.: Наука, 1975. – 35 с.

11 Сумачев, А. В. Совершенствование методов прогнозирования характеристик водного режима озер (на примере озера Лача): дис. канд. техн. наук / А. В. Сумачев. – М., 2015. – 142 с.

12 Калинин, В. Г. Математико-геоинформационное моделирование процесса снеготаяния на речных водосборах Прикамья / В. Г. Калинин, А. А. Шайдулина, В. С. Русаков, М. А. Фасахов // Лед и Снег. – 2020. – Т. 60, № 3. – С. 425–438.

13 Георгиевский, Ю. М. Краткосрочное прогнозирование уровней воды на реках: методы и модели / Ю. М. Георгиевский, Т. И. Simon // Метеорология и гидрология. – 2019. – № 5. – С. 78–89.