О.Г. АНИСКИНА, Р.П.РЕПИНСКАЯ

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В АТМОСФЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург 2019

УДК 551.509.313

Рецензент:
кандидат физико-математический наук Светлана Игоревна Кузьмина

Анискина О.Г., Р.П.Репинская
Проекционные методы в атмосферных моделях. [Текст]: учебное пособие/Анискина О.Г., Репинская Р.П.– Спб: ______, 2019. – 114 с.

В учебном пособии описываются современные методы представления полей метеорологических величин по базисным функциям. Приводятся сведения о математических функциях, используемых в качестве базиса. Описана методика получения определяющей системы уравнения для баротропной геостофической и негеострофической моделей атмосферы.

Учебное пособие предназначено для метеорологов, специализирующихся в области численных прогнозов погоды и математического моделирования атмосферных процессов.

ISBN 978-5-907127-49-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Прогноз погоды приближенными (численными) методами на основе фундаментальных общефизических законов сохранения, выраженных в форме уравнений гидротермодинамики применительно к сплошной среде, был теоретически обоснован И.А.Кибелем [38], разработавшим методику суточного прогноза температуры и давления воздуха. Последующие достижения в этой области (а именно:

- углубление знаний о сути физических процессов, управляющих атмосферными течениями различных пространственно-временных масштабов;
- разработка физически более полных детерминистических моделей и интенсивное развитие методов их численного интегрирования;
- усовершенствование вычислительной техники, обеспечившей возможности проведения большого количества модельных экспериментов, основу которых составляет триада "модель - алгоритм - программа", а также визуализацию эмпирических данных и результатов, получаемых на выходе моделей, с помощью изображений, обладающих цветом, интенсивностью и текстурой и передающих огромный объем информации за короткий период времени;
- использование передовой технологии программного обеспечения)

позволили значительно повысить сложность гидродинамических моделей и приблизить их к реальности. Неуклонное повышение качества результатов моделирования и необходимость обеспечения прогностической информацией различных потребителей стали причиной широкого оперативного применения гидродинамических прогнозов погоды с различной заблаговременностью. В настоящее время гидродинамические прогнозы разрабатываются и используются во многих странах мира.

При гидродинамическом прогнозировании метеорологических величин приходится оперировать скалярными, векторными или тензорными случайными полями. Способы аналитической аппроксимации динамических "точечных" переменных и их полей могут быть различными, и от типа аппроксимации зависит выбор методики численного решения уравнений модели единой физической системы атмосфера-океан-суша.

Существует два основных подхода к представлению пространственно-временного распределения динамических переменных. Первый подход основан на задании значений атмосферных функций, фигурирующих в моделях, в дискретных узлах расчетной сетки (например, квадратной регулярной, расшатанной или нерасшатанной по пространству и по времени, широтно-долготной, треугольной и др.), охватывающей область прогноза. Когда точные производные по времени и пространству в уравнениях аппроксимируются конечно-разностными (сеточными) аналогами (соотношениями). При втором подходе, именуемом спектральным, используют проекционные методы, когда отыскание приближенных решений уравнений модели в заданном пространстве осуществляют на основе

- проецирования уравнений на некоторое другое (нефизическое) подпространство;
- атмосферные поля представляют с помощью рядов по детерминированным (неслучайным, фиксированным) ортогональным или ортонормированным базисным (координатным, опорным) функциям, зависящим от горизонтальных координат этого подпространства;
- решение ищется для случайных функций времени – коэффициентов разложения полей метеорологических величин.

Выбор того или иного подхода определяется:

- характером дифференциальной задачи;
- конфигурацией и размерами области интегрирования (решения);

- особенностями каждого физического поля, влияющими на точность разностной или спектральной аппроксимации;
- кругом параметризуемых подсеточных физических процессов (т.е. неразрешимых на выбранной вычислительной сетке) и т.д.

Спектральный метод был предложен Е.Н.Блиновой [14] как метод решения уравнений гидротермодинамики для долгосрочного прогноза полей метеовеличин, а затем развивался Зильберманом, Кобатом, Робером, Элиасеном, Махенхауером, Орзагом, Ефимовым, Машковичем, Курбаткиным, Юдиным, Шнееровым, Мелешко [32, 42, 43, 49, 50, 72, 74, 80, 88, 92, 93, 103, 104] и другими исследователями с целью

- разработки способов замыкания системы спектральных уравнений (особенно в нелинейной части) и простых методов их интегрирования;
- повышения порядка аппроксимации производных по горизонтальным координатам и уменьшения фазовых ошибок;
- стабилизации вычислительных эффектов, связанных с быстро распространяющимися волновыми возмущениями (модами);
- правильного описания основных физических механизмов преобразования энергии в области процессов, доминирующих на синоптическом масштабе изменчивости атмосферы;
- однозначного введения в расчет как векторных, так и тензорных характеристик движения;
- учета систематических ошибок прогнозов и пр.

При таком подходе двумерное распределение метеорологических величин представляется в виде ряда по базисным функциям. После подстановки усеченных каким-либо образом рядов (см. параграф 4) в исходную систему дифференциальных уравнений модели в частных производных получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений для величин, зависящих от времени, но независящих от горизонтальных координат, в которых искомыми характеристиками служат коэффициенты разложения в ряды. Прогностические модели, в которых уравнения решаются указанным методом называются спектральными.

В 40-х годах XX века спектральный метод применялся при решении линеаризованных аналогов нелинейных эволюционных (прогностических) уравнений. Однако при переходе к нелинейным моделям конечно-разностные методы нашли более широкое применение из-за сложностей расчета нелинейных членов в спектральной форме и отсутствия ЭВМ требуемого быстродействия. Затем, в связи с созданием новых спектральных методов решения уравнений динамики атмосферы и эффективных ЭВМ, интерес к спектральным моделям резко возрос. Это связано с тем, что разработка устойчивых конечно-разностных схем интегрирования нелинейных уравнений сопряжена с серьёзными трудностями, обусловленными

- ошибками ложного представления волновых возмущений;
- вычислительной дисперсией;
- искажением фазовых и групповых скоростей волновых мод и переноса энергии по спектру волновых чисел и др.

Указанные особенности конечно-разностных схем приводят к тому, что в моделях не сохраняются адиабатические интегральные инварианты континуальной модели, такие, например, как полная механическая энергия, вихрь вектора скорости (завихренность), энстрофия и др.

Сеточные методы обеспечивают простоту реализации гидродинамической модели, возможность прогноза погоды на ограниченной территории любой конфигурации и т.д.

Спектральные модели не только успешно конкурируют с конечно-разностными и по точности, и по вычислительной эффективности, но в некоторых отношениях превосходят их.

Подчеркнем, что спектральный метод используют обычно для дискретизации континуальных уравнений по горизонтали. Спектральное представление по вертикали сдерживается трудностью удовлетворения краевым условиям на верхней и нижней границах атмосферы. Для аппроксимации производных по вертикали более универсален конечно-разностный метод, поэтому имеет место его широкое сочетание со спектральным методом по горизонтали.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Рассмотрим суть проекционных методов.

Пусть имеется эволюционное дифференциальное уравнение в частных производных

$$L\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right) = P_i\left(f_i\right) \tag{1.1}$$

где

t	-	время;
L	-	тождественный или нетождественный линейный дифференциальный оператор по пространственным независимым переменным, действующий на зависимые переменные в области построения решения;
f_i	-	любая физическая функция (например, давление, температура, плотность воздуха, функция тока и т.д.), $i = 1,...,I$;
P_i	-	линейный или нелинейный оператор (например, комбинация производных по пространственным переменным).

Если атмосферная модель разрабатывается на основе полных (нефильтрованных, "примитивных") уравнений динамики, то L - тождественный оператор: $L(f_i) \equiv f_i$. В баротропной негеострофической модели (модель "мелкой воды") фигурируют три зависимые переменные (U, V, Φ) и I = 3; в баротропной квазигеострофической (или квазисоленоидальной) модели I = 1, так как зависимой переменной является геопотенциал Φ (или функция тока Ψ), а L - двумерный эллиптический оператор.

Пусть некоторая скалярная функция f зависят от времени t и координаты x: $f = f(x,t)$, L - дифференциальный оператор, тождественный одномерному уравнению переноса (адвекции) функции f в направлении оси x. Тогда в декартовой системе координат уравнение (1.1) запишется в виде одномерного уравнения адвекции

- линейного

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad U = const, \tag{1.2а}$$

- нелинейного

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad U \neq const. \tag{1.2б}$$

Функцию f в (1.1) можно представить в виде ряда

$$f(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) E_m(x), \tag{1.3}$$

содержащего бесконечное число слагаемых. Здесь $E_m(x)$ – базисные линейно независимые функции подпространства, в которое проецируется исходное уравнение, зависящие от координаты x; $C_m(t)$ - коэффициенты разложения (случайные функции времени); $m = 0, 1, \ldots, \infty$ - номер члена аппроксимирующего ряда (номер члена разложения).

Если ограничить каким-либо способом число членов разложения (см. параграф 4) в (1.3), то можно записать:

$$f(t,x) = \sum_{m=0}^{M} C_m(t) E_m(x). \tag{1.4}$$

Подставив усеченный ряд (1.4) в соотношение (1.2), получим выражение для невязки ε, обусловленной использованием (1.4) вместо (1.3):

- для линейного аналога уравнения переноса (1.2а) имеем

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x) \frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + U \sum_{m=0}^{M} C_m(t) \frac{d\,E_m(x)}{d\,x} = \varepsilon\,, \tag{1.5}$$

- для нелинейного уравнения переноса (1.2б) необходимо разложить в ряд и составляющую скорости $U(x,t)$

$$U(t,x) = \sum_{m=0}^{M} U_m(t) E_m(x)\,. \tag{1.6}$$

После подстановки (1.4) и (1.5) в (1.2б) получаем

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x) \frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{m=0}^{M} C_m(t) E_m(x) \sum_{m=0}^{M} C_m(t) \frac{d\,E_m(x)}{d\,x} = \varepsilon \tag{1.7а}$$

или

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x) \frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{n=0}^{M} \; \sum_{m=0}^{M} C_m(t) C_n(t) E_n(x) \frac{d\,E_m(x)}{d\,x} = \varepsilon \tag{1.7б}$$

В зависимости от способа минимизации невязки ε различают системы определяющих уравнений, с помощью которых находят $\frac{d\,C_m(t)}{d\,t}$ - индивидуальные производные по времени от m-ных коэффициентов разложения. Для минимизации невязки ε используют ряд способов.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, когда на невязку ε, выражаемую формулой (1.5) или (1.6), налагают требование

$$J = \int_{\mathrm{X}} \varepsilon^{2} dx = \min\,, \tag{1.8}$$

где X - область определения решения задачи. Систему определяющих уравнения для вычисления коэффициентов $\frac{d\,C_m(t)}{d\,t}$ строят из условия экстремума (1.8):

$$\frac{\partial J}{\partial\left({d\,C_m(t)}/{d\,t}\right)} = 0, \quad m = 0,\cdots,M\ . \tag{1.9}$$

Система определяющих уравнений содержит $M+1$ уравнение, каждое из которых позволяет определить один коэффициент разложения.
Возводя (1.6) в квадрат и дифференцируя согласно равенству (1.9), для нелинейного уравнения адвекции получим

$$2\int_{X}\left\{\sum_{m=0}^{M} E_m(x)\frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{M} C_m(t)C_n(t)E_m(x)\frac{d\,E_n(x)}{d\,x}\right\}E_k(x)dx = 0\ , \tag{1.10}$$

где k - фиксирован для каждого уравнения системы.

МЕТОД ГАЛЁРКИНА (иначе, метод ортогональных проекций), предусматривает использование условия ортогональности невязки ε базисным функциям подпространства:

$$\int_{X}\varepsilon\ E_k(x)dx = 0, \quad k = 1,\cdots,K\ . \tag{1.11}$$

Следовательно, можно записать

$$2\int_{X}\left\{\sum_{m=0}^{M} E_m(x)\frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{M} C_m(t)C_n(t)E_m(x)\frac{d\,E_n(x)}{d\,x}\right\}E_k(x)dx = 0\ . \tag{1.12}$$

Видно, что определяющие системы уравнений, синтезируемые методом наименьших квадратов (1.10) и методом ортогональных проекций (1.12), идентичны.

Если для минимизации невязки используется метод Галёркина или наименьших квадратов, то модели называют спектральными, так как совокупность коэффициентов разложения метеорологических величин в ряды рассматривают в качестве спектра этих функций.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ, основанный на построении системы определяющих уравнений с помощью условия $\varepsilon = 0$, задаваемого в N точках коллокации ($q = 0,\cdots,N$), произвольно размещенных в области решения X. В этом случае в (1.5) или (1.7) полагается $\varepsilon = 0$ и, значит,

- в линейном случае

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x)\frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + U\sum_{m=0}^{M} C_m(t)\frac{d\,E_m(x)}{d\,x} = 0 \tag{1.13a}$$

- в нелинейном случае

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x)\frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{n=0}^{M}\ \sum_{m=0}^{M} U_m(t) C_n(t) E_n(x) \frac{d\,E_m(x)}{d\,x} = 0\,. \qquad (1.13б)$$

Число точек коллокации должно быть равно числу членов ряда разложения (1.4), т.е. $N=M+1$. Тогда, записывая выражение (1.13б) для каждой точки коллокации x_q в виде

$$\sum_{m=0}^{M} E_m(x_q)\frac{d\,C_m(t)}{d\,t} + \sum_{n=0}^{M}\ \sum_{m=0}^{M} U_m(t) C_n(t) E_n(x_q) \frac{d\,E_m(x_q)}{d\,x} = 0\,, \qquad (1.14)$$

получим спектральную модель, содержащую систему из N уравнений для нахождения производных по времени от коэффициентов разложения. По сути, такие модели являются спектрально-сеточными. В них приходится выполнять обращение матриц высокого порядка, что весьма трудоёмко.

Построение систем определяющих уравнений осуществляют и в моделях, использующих в качестве базисных финитные функции (т.е. функции с конечными носителями). В таких моделях область решения разбивают на конечное число подобластей (элементов), для каждой из которых строят простые функции, аппроксимирующие метеорологические величины в пределах подобласти так, чтобы для всей области прогноза аппроксимация была непрерывной. Такой метод аппроксимации называется методом конечных элементов. Построение определяющей системы уравнений в этом случае может выполняться любым из вышеназванных методов. В результате применения метода конечных элементов получают системы уравнений с небольшим числом элементов матриц этих систем, отличных от нуля.

Таким образом, в проекционных методах при решении прогностических уравнений исходные поля зависимых переменных (гидрометеорологических величин) представляют в виде рядов по системам детерминированных (априори фиксированных) координатных (базисных) функций. Зависимость от времени сохраняется в коэффициентах разложения $C_m(t)$, а зависимость по пространству - в системе базисных функций $E_m(x)$. После подстановки аппроксимирующих рядов в дифференциальные уравнения модели вместо непрерывных уравнений в частных производных получают системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно производных по времени от коэффициентов разложения. Число таких уравнений и число неизвестных функций будет равно числу членов разложения.

Итак, и в спектральном и в конечно-разностном методах применяют ту или иную аппроксимацию точных производных. В методе сеток аппроксимируют производные по пространству конечно-разностными аналогами. Ошибки такой аппроксимации приводят (при интегрировании прогностических уравнений модели шагами по времени с помощью различных схем) к ошибкам в определении производных по времени (т.е. тенденций физических величин). При разложении функций в ряды тоже применяют аппроксимацию. Разложение содержит конечное число членов, т.е. аппроксимация всегда приводит к конечному числу уравнений для определения производных по времени. Поэтому такие уравнения и в конечно-разностных, и в проекционных методах называют пространственно-усеченными уравнениями. Они позволяют определить искомые величины, но с некоторой ошибкой.

Спектральный метод обладает рядом важных преимуществ по сравнению с конечно-разностным методом, и это стимулировало его широкое использование для теоретических исследований, разработки и оперативного использования результатов прогностических моделей. Оказалось, что спектральные модели не только успешно конкурируют с разностными, но и в некоторых отношениях превосходят их.

Рассмотрим наиболее существенные различия спектрального и конечно-разностного методов при интегрировании нефильтрованных уравнений гидротермодинамики в сферической системе координат.

НЕЛИНЕЙНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

При моделировании воздушных течений на сетке возникают ошибки ложного представления мелкомасштабных составляющих движения. В конечно-разностных моделях, не использующих специальных схем аппроксимации, они приводят к потере точности решения вследствие нелинейной вычислительной неустойчивости (иначе, неустойчивости по Филлипсу, впервые обнаружившему это явление [1, 2, 58, 102]). Устранение ошибок ложного представления устраняет и причину нелинейной вычислительной неустойчивости [1, 2 12, 69]. В спектральных моделях, основанных на методе Галёркина, вследствие условия ортогональности невязки глобальным базисным функциям, проекции ошибок на базисные функции равны нулю.

Итак, в спектральных методах минимизируется ошибка ложного представления, возникающая из-за ограниченности пространственного разрешения, когда короткие волновые возмущения воспринимаются как более длинные. Такие ошибки велики только в спектральном методе, использующем при построении определяющей системы уравнений метод коллокации.

Другой тип ошибок характерен как для конечно-разностных так и для спектральных моделей, связан с ошибками представления начальных полей. Происхождение таких ошибок можно легко проследить на примере с орографией. Поле рельефа земной поверхности обладает непрерывным спектром. Введение рельефа в модель приводит к усреднению фактических высот гор и других орографических неровностей земной поверхности в пределах каждой сеточной ячейки, которое трансформирует гармоники всех масштабов. Компоненты Фурье невозможно вычислить точно с помощью квадратурных формул от полиномов бесконечной степени. Однако увеличением числа точек, привлекаемых в квадратурах, и проецированием компонентов Фурье на расчетную сетку можно уменьшить эти ошибки, как в конечно-разностных, так и в спектральных моделях, сводя их к ошибкам разностного приближения (т.е. к трункационным ошибкам) [43].

ФАЗОВЫЕ ОШИБКИ

В результате дисперсии начальных возмущений появляются линейные фазовые ошибки, которые тесно связаны с порядком аппроксимации пространственных производных и шагом сетки. В конечно-разностных моделях с увеличением пространственного разрешения фазовые ошибки уменьшаются, однако их уровень все же довольно высок. Решение спектральных уравнений быстро сходится к решению непрерывных уравнений при увеличении числа членов разложения в рядах Фурье. Так, разложение по сферическим гармоникам достаточно гладких полей сходится быстрее, чем последовательность $\frac{1}{n}(n \to \infty)$ в любой степени. Поэтому спектральные методы дают разрешение, по крайней мере, в два раза большее, чем конечно-разностные [99, 100], обеспечивая более высокий порядок точности аппроксимации производных по горизонтальным координатам и, соответственно, значительно меньшие значения фазовых ошибок [43, 69].

Таким образом, в спектральных моделях численное дифференцирование оказывается более точным; точнее описываются фазовые и групповые скорости перемещения волновых возмущений, в результате чего улучшаются дисперсионные свойства моделей.

ПРОБЛЕМА ПОЛЮСОВ

Использование сферических функций даёт однородное представление полей метеовеличин на всей земной сфере, включая окрестности полюсов. Это позволяет частично избежать проблемы полюсов, характерной для конечно-разностных схем, а именно: уменьшение разрешения сетки за счет сходимости меридианов к полюсам уменьшает шаг интегрирования по времени, вследствие чего нарушается условие Куранта-Фридрихса-Леви [49] и возможен чрезмерный рост трункационных ошибок. Чтобы избежать этого, в конечно-разностных моделях принимают специальные меры (например, проводят фильтрацию вычисленных полей с помощью рядов Фурье, а также используют специальные пространственные и временные фильтры, специальные сетки [1]). В спектральных моделях с треугольным усечением рядов по сферическим гармоникам проблема полюсов не возникает вовсе, так как пространственное разрешение оказывается изотропным на всей сфере. При другом типе усечения рядов или выборе других базисных функций изотропность нарушается. Это ведет к трудностям, аналогичным проблеме полюсов в конечно-разностных моделях.

При прогнозе погоды с помощью приближенных методов важно вычислять достаточно гладкие поля метеорологических величин. Поэтому при выборе формы уравнений модели необходимо стремиться к тому, чтобы уравнения не содержали переменных, для которых имеются точки разрыва. В сферических координатах такими точками разрыва являются полюса, в которых составляющие вектора скорости ветра u (зональная компонента) и v (меридиональная компонента) терпят разрыв. Для преодоления этой трудности используют два приема.

Первый прием состоит в том, что полные уравнения используют в преобразованном виде: в форме уравнения для вертикальной проекции вихря вектора скорости Ω (относительного вихря скорости) и для двумерной (плоской) дивергенции D, переход к которым в сферической системе координат осуществляется с помощью соотношений:

$$\Omega = \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial(U\cos\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)$$

$$D = \frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial\lambda} + \frac{\partial(V\cos\varphi)}{\partial\varphi}\right) \tag{1.15}$$

где

$a = 6371$ км	-	радиус Земли;
φ	-	географическая широта места;
λ	-	долгота, отсчитываемая от меридиана Гринвича к востоку.

При этом в ходе вычислительного процесса прогноз составляется для коэффициентов разложения скалярных величин функции тока Ψ и потенциала скорости χ, которые связаны с вихрем скорости Ω и дивергенцией D уравнениями Пуассона:

$$\Omega = \nabla^2 \Psi ,$$
$$D = \nabla^2 \chi . \tag{1.16}$$

Если нужно рассматривать уравнения движения в непреобразованном виде, используют второй приём, предложенный Робером [103]: в исходные уравнения движения вводят новые функции

$$u = U \cos\varphi ,$$
$$v = V \cos\varphi , \tag{1.17}$$

поля которых оказываются уже непрерывными.

В современных спектральных моделях возможно использование двух подходов одновременно.

ПРЕИМУЩЕСТВА В РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

В конечно-разностных моделях неявное представление градиентов геопотенциала (давления) и дивергенции в схемах интегрирования шагами по времени увеличивает временной шаг примерно в четыре раза по сравнению с явными схемами, но приводит к необходимости решать уравнения Пуассона и Гельмгольца. Так как методы обращения сферического оператора Лапласа на сетке трудоемки, то это уменьшает эффективность применения полунеявных схем в таких моделях. В спектральных моделях, благодаря представлению полей метеовеличин рядами по сферическим функциям (т.е. по собственными функциям оператора Лапласа на сфере), уравнения Пуассона и Гельмгольца типа (1.16) решаются аналитически. При этом требуется небольшой объём вычислений [49], что весьма важно.

В качестве преимуществ спектрального метода отметим также простоту реализации полунеявных схем интегрирования, позволяющих использовать большие временные шаги по сравнению с явными схемами. Кроме того, в таких моделях

- проще удовлетворять интегральным свойствам инерционных моделей в терминах непрерывных уравнений [3];
- удается провести спектральный анализ результатов прогноза, т. е. можно получить прогноз, представленный коэффициентами разложения, построить предвычисленное поле и исследовать свойства решений, увеличивая (уменьшая) число членов разложения;
- можно изучать механизм взаимодействия процессов различных масштабов, т.е. рассматривать задачу с учетом множественности пространственных масштабов атмосферных процессов. Сумма всех волновых мод позволяет описать рассматриваемый процесс в целом;
- оценку качества гидродинамических прогнозов можно производить как для отдельных волновых чисел, так и для спектральных участков, т.е. для процессов определенных масштабов, что позволяет лучше понять источники систематических ошибок модели и выполнить адекватную коррекцию решений.

Перечисленные свойства свидетельствуют о существенных достоинствах спектральных методов. Вместе с тем следует отметить и их недостатки. К ним можно отнести

- трудности, связанные с учетом физических процессов, включения в модель дополнительных нелинейных эффектов, описания полей векторных функций в окрестностях особых точек;
- сложность локальной оценки метеорологических параметров (так как прогноз осуществляется для коэффициентов разложения);
- необходимость при вычислениях постоянно хранить в оперативной памяти ЭВМ большое число информации, например о коэффициентах взаимодействия и др.

В связи со сказанным целесообразно применять иной способ решения спектральных уравнений, в какой-то мере свободный от указанных недостатков, - метод спектрально-сеточного преобразования. В этом случае решение также представляется в виде рядов по координатным функциям, но нелинейные члены вычисляются в узлах регулярной сетки.

.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

2.1. Постановка задачи об аналитическом представлении метеорологических процессов и полей, сжатии и восстановлении информации

С позиций современной нелинейной механики и теории динамических систем [29] климатическая система Земли (атмосфера-океан-суша - АОС) представляет собой сложную нелинейную открытую диссипативную физическую систему, в которой

- протекающие процессы имеют в большинстве своём детерминированную природу, а распределение их реализаций в пространстве и во времени описывается вероятностными законами;
- разграничить действие погодообразующих факторов различной физической природы не удаётся, а число степеней свободы системы АОС стремится к бесконечности. Так, по некоторым оценкам [63] число активных степеней свободы в крупномасштабной трехмерной гидродинамической модели атмосферы, учитывающей лишь взаимные связи геопотенциала, ветра и температуры (что на порядок меньше числа зависимых переменных в современных прогностических моделях) превышает 10000;
- изменения погоды определяются большим числом характеристик циркуляции атмосферы, её термического режима и механизмов взаимодействия с подстилающей поверхностью, причем большинство из этих характеристик образуют сложную цепочку прямых и обратных связей.

Поэтому создание адекватной математической модели системы АОС возможно лишь в случае применения некоторых физических упрощений и корректной параметризации процессов подсеточного масштаба, а также различных способов преобразования и аналитической аппроксимации случайных процессов и полей с целью фильтрации метеорологических шумов и экономного представления результатов наблюдений и продукции, получаемой на выходе модели.

Проблема сжатия (уплотнения, сосредоточения, компрессии) информации для метеорологии чрезвычайно важна, так как с её эффективным решением связаны

- хранение в памяти ЭВМ больших банков эмпирических данных (гидрометеорологических архивов, а также результатов прогностических моделей и реанализа);
- объективный анализ результатов наблюдений;
- физико-географическая интерпретация процессов, развивающихся на пространствах, сравнимых с размерами материков, океанов, полушарий и планеты в целом.

Указанные проблемы возникают при создании гидродинамических и динамико-статистических прогностических моделей и моделей общей циркуляции атмосферы (ОЦА) и океана, теории климата и антропогенного воздействия на окружающую среду.

Информационный аспект проблемы сжатия формулируется как задача компактного аналитического описания наиболее важной части результатов наблюдений за случайным процессом $f(t)$ или полем $f(x,y)$ небольшим числом трансформированных параметров $C_1, C_2, \ldots, C_K$ ($K \geq 0$) (коэффициентов разложения или коэффициентов аппроксимирующего полинома; в последнем случае K - порядок полинома), с помощью которых можно восстановить исходный случайный процесс (поле) с априори заданной точностью. Такое квазиобратимое сжатие данных требует специального выбора оператора представления (П) и оператора восстановления или обработки (В) процессов и полей.

Следуя [53], запишем в обобщённой форме операцию представления непрерывной случайной функции $f(t)$ (поля $f(x,y)$) на временном интервале [0,T] (на пространственном отрезке [a,b]) совокупностью чисел $C_1, C_k : C = \Pi_{f(h)}$. Здесь символ h означает либо время t либо координаты x, y; П оператор представления; вектор $C = [C_1, C_2, \ldots, C_k]^T$; верхний символ "т" - знак транспонирования.

Операция получения точечных оценок восстановленной функции $f_k(h)$ по значениям коэффициентов разложения C_1, C_k записывается в виде: $f_k(h) = BC = B(C_1, C_k)$.

Если функция $f(h)$ является элементом некоторого метрического пространства P ($f(h) \in \mathrm{P}$), то обычно $f_k(h)$ вычисляют на том же временном интервале [0,T] (на отрезке [a,b]). В общем случае она принадлежит метрическому $\Im$-пространству ($f_k(h) \in \Im$), являющемуся метрическим расширением P-пространства ($\Im \supset \mathrm{P}$).

Близость восстановленной функции $f_k(h)$ к исходной функции $f(h)$ характеризуют расстоянием $\rho(f, f_k)$ в метрике пространства P. Так, для пространства С, которое охватывает совокупность всех непрерывных и равновероятных функций $f(h)$, определенных на ограниченном замкнутом множестве евклидова пространства, метрику

$$\rho(f, f_k) = \max_{h \in [0,T]} |f(h) - f_k(h)|, \quad f(h), f_k(h) \in C \tag{2.1a}$$

или

$$\rho(f, f_k) = \max_{h \in [a,b]} |f(h) - f_k(h)|, \quad f(h), f_k(h) \in C \tag{2.1б}$$

называют показателем равномерного приближения или чебышевским уклонением аппроксимирующего многочлена $f_k(h)$ от истинной функции $f(h)$ [22]. Метрику С-пространства используют, если известны априорные оценки пределов изменения функции $f(h)$ и одной, двух или более её производных.

Для гильбертовых Н-пространств [47], элементами которых являются $f(h)$ реализации (т.е. пространство реализаций) и множество $\Im(h)$ реализаций (т.е. пространство случайных функций), показателем близости является среднеквадратическая ошибка на [0,T] (на [a,b]). В пространстве реализаций такой показатель можно описать формулами:

$$\rho(f, f_k) = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [f(h) - f_k(h)]^2 \, dh \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad h \in [0, T]; \tag{2.2}$$

$$\rho(f, f_k) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(h) - f_k(h)]^2 \, dh \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad h \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Гильбертовы Н-пространства с такими метриками называют пространствами L^2. Метрику гильбертовых пространств можно использовать, когда априори известна вторая моментная функция процесса $f(h)$. В пространстве множеств $\Im(h)$ показатель близости

$\rho(f, f_k)$ вычисляют как математическое ожидание в пространстве реализаций. При решении задач в C и H пространствах и при названных составах априорных данных операторы представления и восстановления могут отыскиваться лишь в классе линейных, так как для их нахождения в более широком нелинейном классе указанных априорных данных недостаточно.

Итак, задача выбора оптимальных операторов представления и восстановления может решаться лишь при наличии априорных сведений о функции $f(h)$, помогающих выбрать метрику пространства P и класс операторов представления и восстановления. В контексте задач, излагаемых в данном учебном пособии, будем рассматривать главным образом первую часть проблемы сжатия информации: выбор оператора преобразования (или, точнее, координатных (базисных) функций), который обеспечивал бы оптимальное приближение функций. В дальнейшем оптимальность будем понимать в смысле достижения максимального уплотнения информации с целью описания её основных свойств минимальным числом параметров (коэффициентов разложения полей в ряды по базисным функциям).

Рассмотрим ниже методы сжатия эмпирических данных с использованием линейных операторов преобразования в линейных пространствах C и L^2, вытекающие из теории приближения функций по Чебышеву [4, 9, 27, 34, 70].

2.2. Постановка задачи о приближении физических функций

Согласно П.Л. Чебышеву [65, 70], задача о приближении функций ставится следующим образом: данную функцию $f(h_n)$ требуется представить обобщённым полиномом

$$f_k(h) = C_0 E_0(h_n) + C_1 E_1(h_n) + \ldots + C_k E_k(h_n) \tag{2.4}$$

так, чтобы отклонение $f_k(h_n)$ от $f(h_n)$ на некотором множестве H, заполненном совокупностью дискретных точек $\{h_n\},\ n = 1,\ldots,N$, образующих регулярную сетку, было наименьшим. Здесь $\{E_k\}$ - система достаточно гладких (например, непрерывно дифференцируемых) линейно независимых базисных функций, заданных на множестве H; $\{C_k\}$ - семейство постоянных коэффициентов, являющихся при фиксированной системе функций $\{E_k\}$ трансформированными характеристиками функции $f(h_n)$.

Для аппроксимации случайных полей в качестве базисных функций можно взять алгебраические полиномы $(1, h, h^2, \ldots)$, показательные функции $(1, \exp(\nu_1 h), \exp(\nu_2 h), \ldots)$,..., где ν - некоторая числовая последовательность, сплайны, тригонометрические полиномы и классические ортогональные многочлены, к которым можно отнести специальный класс функций, встречающихся при интегрировании уравнений математической физики. Существует большое число специальных функций - сферические функции, в том числе полиномы Лежандра, функции Бесселя, полиномы Эрмита и Лагерра, эллиптические функции Якоби, полиномы Чебышева и др.

Если система базисных функций $\{E_k\}$ априори не фиксирована, задача выбора операторов представления и восстановления данных сводится к выбору такого семейства $\{E_k\}$ на [a,b], которые удовлетворяют требованию, чтобы отклонение $f_k(h)$ от $f(h)$ было меньше некоторой величины $\alpha > 0$ при всех возможных выборах линейно независимых элементов $\{E_k\} \in [a,b]$. При этом, если норма $\|\cdot\|$ погрешности аппроксимации

$$\delta = \|f - f_k\| = \max_{h\in[a,b]} |f(h) - f_k(h)| \le \alpha, \qquad f(h), f_k(h) \in C$$

то полином $f_k(h)$ равномерно приближает функцию $f(h)$ с точностью до α. Величину α называют чебышевским уклонением многочлена $f_k(h)$ от функции $f(h)$ или, другими словами, чебышевским приближением функции $f(h)$ полиномом $f_k(h)$.

Пусть степень полинома $f_k(h)$ заранее фиксирована и задача состоит в том, чтобы приблизить (аппроксимировать) непрерывную функцию $f(h)$ этим полиномом наилучшим образом на множестве H. Поскольку чебышевское уклонение полинома $f_k(h)$ от функции $f(h)$ зависит от выбора коэффициентов полинома, то эту зависимость можно представить в виде

$$\alpha_k = \max|f(h) - f_k(h)| = f(C_0, C_1, C_k), \quad h \in H \tag{2.5}$$

и ввести точную нижнюю границу величины (2.5) при варьировании чисел $\{C_k\}$. Так как $\alpha_k \ge 0$, то нижняя граница всегда существует. Введем для неё обозначение

$$e_k(f) = \inf\|f - f_k\|, \quad f_k \in \Im_k, \tag{2.6}$$

где нижняя грань фактически берётся по множеству всех полиномов степени не выше *k* из рассматриваемого семейства $\{f_k\}$ из некоторого класса $\Im_k$. Число $e_k(f)$ называют наилучшим приближением функции $f(h)$ порядка $k, \quad k \ge 0$.

Коэффициенты полинома $\{C_k\}$ подбирают так, чтобы

$$\alpha_k = \min \quad \text{при } f(h), f_k(h) \in C. \tag{2.7}$$

Полином $f_k(h)$, удовлетворяющий условию (2.7), называют полиномом наилучшего равномерного приближения функции $f(h)$ на множестве точек $\{h_n\} \in C$ или полиномом, наименее уклоняющимся от функции $f(h)$ на [a,b].

По теореме Чебышева [65, 70], если функция $f(h)$ непрерывна на отрезке [a,b], то при любом k множество точек максимального уклонения полинома наилучшего приближения $f_k(h)$ от функции $f(h)$ содержит по крайней мере k + 2 точки, которые можно так упорядочить с помощью неравенств

$$a \le h_1 < h_2 < \ \dots \ < h_n < \ \dots \ < h_{k+2} \le b, \tag{2.8}$$

что в любых двух соседних точках уклонения полинома $f_k(h)$ от функции $f(h)$ имеют разные знаки, т.е.

$$[f(h_n) - f_k(h_n)][f(h_{n+1}) - f_k(h_{n+1})] < 0. \tag{2.9}$$

Систему точек (2.8), в которых выполняется условие (2.9), называют чебышевским альтернансом. В наиболее общей постановке задачи приближения функций [23, 24] аппроксимирующий полином рассматривают как рациональную функцию $R = Y_d(h)/Q_m(h)$. В этом случае в полном нормированном векторном пространстве $C_{Z,[a,b]}$ с нормой $\|f(h)\| = \sup\left\{ |f(h)| \big/ z(h) \right\}$, в которой $z(h)$ - положительная гладкая функция, норма погрешности аппроксимации α убывает с ростом степеней полиномов $Y_d(h)$ и $Q_m(h)$.

Пусть R_m^d - множество рациональных функций со степенями $z_1 \le d$, $z_2 \le m$. Согласно теореме Чебышева [57, 66], решение вариационной задачи

$$\|f - R\|_{C_{Z,[a,b]}} \to \min_{R \in R_m^d} \tag{2.10}$$

существует, единственно и достигается на такой функции $R \in R_m^d$, что модуль невязки

$$\alpha(h) = [f(h) - R(h)] \big/ z(h) \tag{2.11}$$

достигает значения $\max|\lambda|$ (λ - параметр или собственное число задачи) не менее, чем в $\{h_j\}$ точках альтернанса на [a,b], причем знак $\alpha(h_j)$ в точках $\{h_j\}$, $j = d + m + 2$, чередуется. Если степени многочленов $Y_d(h)$ и $Q_m(h)$ ниже максимально возможных, то число точек альтернанса уменьшается [4]. Величину λ и коэффициенты многочленов $Y_d(h)$ и $Q_m(h)$ находят из однородной системы уравнений, зависящих от λ:

$$\left[\frac{f(h_j)}{z(h_j)} - (-1)^{j\,\lambda} \right] Q(h_j)\, z(h_j) - Y(h_j) = 0, \quad j = 1, d + m + 2\,. \tag{2.12}$$

Нетривиальное решение системы (2.12) существует, если её определитель равен нулю. При этом из $m+1$ характеристических корней рациональным функциям соответствуют m корней, имеющих полюсы на [a,b] [105]. Следовательно, искомую рациональную функцию R определяет единственный оставшийся корень λ.

Заметим, что если множество Н есть отрезок [a,b], приближение называют интегральным. Если $H = \{h_n\}$, $n = 1, N$, т.е. множество состоит из дискретных точек, приближение называют точечным. Оба способа приближения требуют задания функции $f(h)$ в узлах регулярной сетки точек, так как определение коэффициентов аппроксимирующего полинома на нерегулярной сетке представляет трудно выполнимую задачу. Однако интегральное приближение требует дополнительной интерполяции данных на междуточечные промежутки, что не увеличивает точность.

Таким образом, для любой непрерывной функции существует полином наилучшего равномерного приближения. Однако для всех классов функций $f(h)$ не существует универсальной системы базисных функций $\{E_k\}$. Тем не менее, требования к базисным функциям можно сгруппировать так, чтобы получить практически приемлемое решение задачи: найти оптимальную совокупность $\{E_k\}$, обеспечивающую максимально достижимое уплотнение данных без существенной потери информации.

Свойством, определяющим сжатие данных, является скорость сходимости аппроксимирующего ряда $f_k(h)$. При этом подразумевается, что сходимость ряда $f_k(h)$ гарантирована в силу выполнения достаточных условий, налагаемых на класс функций, к которому относится функция $f(h)$. Наилучшие показатели сходимости рядов называют их экстремальными свойствами. Наиболее универсальным косвенным показателем сходимости является порядок убывания коэффициентов разложения аппроксимирующего полинома $O(k^{-1})$ или $O(k^{-2})$.

Для сравнения различных алгоритмов аппроксимации может служить коэффициент сложности алгоритма, который можно оценить, например, количеством вычислительных операций [54]. Непосредственными числовыми показателями сжатия информации могут быть:

- достигнутая погрешность аппроксимации при фиксированном числе членов разложения;
- число членов в разложении при заданной погрешности аппроксимации. Чем выше сходимость, тем меньше членов ряда требуется для аппроксимации функции при заданной точности.

2.3. Метод наименьших квадратов для независимых и равноточных наблюдений

Независимость и равноточность наблюдений $f_0, f_1, \ \ldots \ , f_N$ полученных в точках $h_0, h_1, \ldots, h_K$, $N \geq K$, означает, что оператор взятия вторых моментов случайной величины

$$D(\mathbf{f}) = \sigma^2 \mathbf{I}, \tag{2.13}$$

где

$\mathbf{f} = \{f\}_{n=0,1,N}$	-	вектор-столбец,
$\mathbf{I}$	-	единичная матрица размером $(N+1)\times(N+1)$,
σ^2	-	неизвестная дисперсия.

Если функция $f_n(h_k)$ аппроксимируется полиномом типа (2.4), то в условии

$$M[f_n(h_k)] = h_{n0}C_0 + h_{n1}C_1 + \ldots + h_{nk}C_k \tag{2.14}$$

символ M означает математическое ожидание; $\mathbf{h} = \{h_{nk}\}$- матрица порядка $(N+1)\times(N+1)$; неизвестный случайный вектор (как линейная функция $f_n(h_k)$) коэффициентов искомого полинома $\mathbf{C} = \{C_k\}$.

Тогда систему условных уравнений можно записать компактно в матричной форме:

$$\mathbf{f} - \mathbf{hC} = 0\,. \tag{2.15}$$

При аппроксимации множества реализаций случайной функции $f_n(h_k)$ наиболее широкое применение нашло квадратичное приближение функций, основанное на методе наименьших квадратов (МНК) [45], благодаря тому, что, если распределение независимых и равноточных отсчетов вектора $\mathbf{f}$ нормальное (гауссовское), то

$$M(\mathbf{f}) = \mathbf{UC}; \tag{2.16}$$

оценки наименьших квадратов $\{C_k\}$ совместно эффективны, а точечные оценки восстановленного вектора $\mathbf{f}$ и оценки параметров $\mathbf{C}$ несмещены [45, 55]. В (2.16) $\mathbf{U} = \mathbf{h}^T\mathbf{h} = \{U_{kk}\}$ детерминированная, априори известная симметричная матрица порядка $(K+1)\times(K+1)$.

Для определения параметров $\{C_k\}$ с помощью МНК требуется минимизировать квадратичную форму

$$(\mathbf{f} - \mathbf{hC})^T(\mathbf{f} - \mathbf{hC}) = \sum_{n=0}^{N}\left(f_n - \sum_{k=0}^{K} h_{nk}C_k\right). \tag{2.17}$$

Дифференцируя (2.17) по параметрам $\{C_k\}$ и приравнивая производные к нулю, получаем систему нормальных уравнений для определения $\{C_k\}$:

$$\mathbf{h}^T\mathbf{hC} = \mathbf{h}^T\mathbf{f}, \qquad \mathbf{h}^T\mathbf{h} = \mathbf{U}. \tag{2.18}$$

Если ранг матрицы $\mathbf{h}$ равен $K+1$, то $\mathbf{U}$ - неособенная матрица и система (2.18) имеет единственное решение [45]:

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{h}^\mathbf{T}\mathbf{h}\right)^{-1}\mathbf{h}^\mathbf{T}\mathbf{f}. \tag{2.19}$$

Оценка дисперсии в (2.13) даётся формулой [45]

$$\sigma^2 = (\mathbf{f} - \mathbf{hC})^T(\mathbf{f} - \mathbf{hC})/(N-K). \tag{2.20}$$

Мерой отклонения полинома $f_k(h_m)$ от функции $f_n(h_m)$, $m = 0,1,\ldots,K$, в случае квадратического приближения функций служит среднеквадратическое отклонение σ.

Заметим, что при полиномиальной аппроксимации можно достичь выполнения условия (2.14), повышая степень полинома и выполняя расчёты с одними и теми же эмпирическими данными. Мерой сходимости при использовании МНК для каждого пробного полинома также служат σ и σ^2. Подбор минимальной степени полинома, при которой математическое ожидание $M(\mathbf{f})$ определяется формулой (2.14), является основой правильного истолкования результатов аппроксимации [55]. Для каждого полинома f_{k1} и f_{k2} оценивают σ^2 и статистический критерий значимости различия σ_{k1}^2 и σ_{k2}^2 с учетом того, что величина

$$\left[(N-k_1)\sigma_{k1}^2 - (N-k_2)\sigma_{k2}^2\right] \Big/ (k_2 - k_1)\sigma_{k2}^2 \tag{2.20a}$$

имеет распределение Фишера с числом степеней свободы $k_2 - k_1$ и $N - k_2$.

Удобный способ подбора степени полинома заключается в сравнении дисперсий $\sigma_k^2 V_{0,0}^k$ и $\sigma_{k+1}^2 V_{0,0}^{k+1}$, вычисленных в центральной точке участка аппроксимации. Здесь $V_{n,k}$ - элементы обратных матриц систем нормальных уравнений, соответствующих многочленам степени *k* и *k+1*. Степень полинома считается найденной, если $\sigma_k^2 V_{0,0}^k \approx \sigma_{k+1}^2 V_{0,0}^{k+1}$ [55].

С точки зрения физики случайного процесса (поля), представленного эмпирическими данными, оптимальная степень аппроксимирующего полинома равна порядку производной, которую можно считать приближенно постоянной на рассматриваемом интервале изменений аргумента.

Итак, мерой сходимости аппроксимирующего ряда при использовании МНК могут служить: среднеквадратическое отклонение, определяемое для каждого пробного полинома $f_k(h_m)$, где k - степень полинома, необходимая для обеспечения допустимой погрешности; оценка дисперсии (2.20).

Если выполняется интегральная аппроксимация, то на интервале [a,b] величину σ определяют формулой (2.20а), являющейся предельным случаем формулы (2.20) при $k \to \infty$. Коэффициенты полинома (2.4) подбирают так, чтобы величина σ была минимальной.

.

2.4. Свойства базисных функций, используемых в гидродинамических моделях атмосферы

При решении задач гидротермодинамики атмосферы и океана на основе проекционных методов система базисных функций $\{E_k\}$

- должна быть линейно независимой (что достигается использованием ортогональных и ортонормированных разложений);
- должна удовлетворять используемым краевым условиям;
- ряды по базисным функциям должны быть сходящимися, т.е.

$$\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K} C_k(t)E_k(x) = f(x,t). \tag{2.21}$$

Ортогональность любых двух полиномов E_k, E_i из последовательности

$$E_0(x), E_1(x), \ldots, E_k(x), \ldots, E_i(x), \ldots \tag{2.22}$$

на интервале (a,b) с весом $W(x)$ означает [65], что их скалярное произведение определяется выражением

$$\left(E_k(x)E_i(x)\right) w = \int_a^b E_k(x)E_i(x)W(x)dx = 0, \quad k \neq i \tag{2.23}$$

При этом интервал (a,b) называют интервалом ортогональности. Если числа a и b конечны, то [a,b] - сегмент (отрезок) ортогональности.

Функцию $W(x)$ называют весовой функцией на интервале [a,b], если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема, ее интеграл положителен (т.е. $W(x) \geq 0$) и выполняются условия

$$0 < \int_a^b W(x)dx < \infty . \qquad (2.24)$$

Различные системы ортогональных функций характеризуются разными весовыми функциями. Функция $W(x)$ определяет соответствие теоретической кривой (поля) эмпирическим данным на разных участках интервала [a,b]. Если интервал (a,b) бесконечен, то должны абсолютно сходиться также степенные моменты функции $W(x)$:

$$W(x) = \int_a^b x^k W(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \qquad (2.25)$$

Систему ортогональных многочленов $\{E_k\}$ называют ортонормированной, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его норма с весом $W(x)$ равна единице, т.е.

$$\left[\int_a^b E_k(x)E_i(x)W(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} = [(E(x), E(x)w)]^{\frac{1}{2}} = 1; \quad i = k . \qquad (2.26)$$

Здесь неотрицательное вещественное число

$$\{(f(x), f(x))w\}^{\frac{1}{2}} = \|f(x)\|w \qquad (2.27)$$

есть норма функции $f(x)$. Веса $W(x)$ подбирают так, чтобы выполнялось условие нормировки (2.26). Для любой функции $W(x)$ существует единственная последовательность полиномов $\{E_k(x)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условиям ортонормированности (2.26) и (2.27).

Таким образом, условие ортонормированности системы полиномов $\{E_k(x)\}$ имеет вид:

$$(E_k(x)E_i(x))w = (E_i^*(x)E_k(x))w = \int_a^b E_i^*(x)E_k(x)W(x)dx = \delta_{ki} . \qquad (2.28)$$

Здесь

δ_{ki} – символ Кронекера $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k \\ 1, \text{ если } i = k \end{cases}$;

(E_k, E_i) – скалярное произведение векторов E_k и E_i;

$E_k^*(x)$ – функция, комплексно-сопряженная функции $E_k(x)$.

Вещественные части комплексно-сопряженных функций равны, а мнимые противоположны по знаку. Хотя в метеорологии обычно имеют дело с вещественными функциями, комплексная запись вещественных переменных более практична в смысле компактности, удобства преобразований и экономичности вычислений.

Если базисные функции $\{E_k(x)\}$ ортогональны, то система определяющих уравнений эволюционной задачи для вычисления коэффициентов разложения оказывается более простой в том смысле, что каждый коэффициент определяется независимо от других.

Если на сегменте [a,b] ввести регулярную систему точек с шагом Δx и задать значения функции $f(x)$ в узлах, то получим ортонормированность на множестве дискретных точек $X = \{x_n\}$, $n = 1, \ldots, N$:

$$(E_k(x), E_i(x))w = \sum_{n=1}^{N} E_k(x_n) E_i(x_n) W(x_n) = \delta_{ki}. \tag{2.29}$$

Рассмотрим стандартные требования, предъявляемые к базисным функциям, используемым в атмосферных моделях.

Базисные функции должны образовывать полную замкнутую ортогональную систему. Это означает, что в ортогональной системе функций $\{E_k\}$ отсутствует непрерывная квадратично суммируемая функция, не равная тождественно нулю и ортогональная ко всем функциям данной системы.

Система базисных функций $\{E_k\}$ должна быть полной на [a,b], иначе, такой, что любую непрерывную достаточно гладкую функцию (т.е. функцию, две первые производные которой непрерывны) можно представить в среднем (скажем, с помощью МНК) с любой заранее заданной точностью при помощи линейной комбинации функций $\{E_k\}$. Тогда можно записать бесконечный ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k E_k(x). \tag{2.30}$$

Базисные функции $\{E_k\}$ не зависят от времени. Поэтому, если $f = f(x_n, t_s)$, $s = 1, \ldots, M$, то случайными функциями времени являются коэффициенты разложения $C_k(t_s)$, несущие информацию об эволюции k-той компоненты поля (процесса) при переходе с *s*-го на (*s+1)*-й временной слой (уровень, момент времени). Из экстремальных свойств ортогональных разложений известно [4], что в гильбертовом пространстве L^2, метрикой которого является среднеквадратическое отклонение, при заданном базисе ортонормированное представление обеспечивает наилучшую сходимость, если параметры C_k вычисляются как коэффициенты Фурье:

$$C_k = (f_k(x), E_k^*(x)) = \int_a^b f_k(x) E_k^*(x) W(x) dx. \tag{2.31}$$

При такой записи (2.31) в формулах (2.23), (2.26), (2.29) необходимо заменить $E_i(x)$ на $E_i^*(x)$.

Представление функции $f(x)$ в виде ряда (2.30) с коэффициентами (2.31) называют обобщенным рядом Фурье по системе функций $\{E_k\}$. Такое представление будет оптимальным для любой функции $f(x)$ из пространства L^2, т.е. обобщенный полином с коэффициентами Фурье обладает наименьшим квадратичным отклонением по сравнению со всеми другими обобщенными полиномами того же порядка. Это позволяет описать функцию f с любой заданной точностью. Однако на практике верхний предел суммирования в разложении (2.30) приходится ограничить числом $K < \infty$, т.е. использовать усеченный ряд:

$$f_k(x) \approx \sum_{k=0}^{K} C_k E_k(x), \quad K < \infty. \tag{2.32}$$

Точность этой оценки существенно зависит от скорости сходимости ряда Фурье (2.30), которая, в свою очередь, зависит от гладкости функции $f(x)$ и от боковых граничных условий $f(x)\big|_{x=a}$ и $f(x)\big|_{x=b}$.

Свойство полноты системы базисных функций можно сформулировать теперь следующим образом: для любого малого числа $\alpha > 0$ существует такая линейная комбинация (2.32), что

$$\int_a^b [f(x) - f_k(x)]^2 dx < \alpha, \quad K < \infty. \tag{2.33}$$

Система функций $\{E_k\}$ должна быть замкнутой. Это свойство системы $\{E_k\}$ есть следствие её полноты.

Учитывая (2.27), левую часть в неравенстве (2.33) можно записать иначе и трактовать число $\|f(x) - f_k(x)\|$ как меру близости функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $f_k(x)$.

Остановимся на некоторых свойствах полной замкнутой системы ортонормированных функций.

Из формулы (2.27) вытекает, что для любой квадратично суммируемой функции справедливо неравенство Бесселя:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \|f(x)\|^2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 .$$

Если система базисных функций полная, то для любой квадратично суммируемой функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 , \tag{2.34}$$

которое называют уравнением замкнутости (соотношением полноты). Кроме этого, скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$

$$(f(x), g(x))w = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^* G_k , \tag{2.35}$$

где G_k - коэффициенты аппроксимации функции $g(x)$ рядом (2.30).

Если скалярное произведение $\left(f(x), E_k^*(x)\right)w = 0$, то, очевидно, функция $f(x) = 0$.

Важным фактором для выбора системы базисных функций $\{E_k\}$ является скорость сходимости ряда Фурье. При быстрой сходимости ряда удается достичь высокой точности представления функции $f(x)$ даже при малых значениях порядкового номера члена ряда k и вычисления оказываются экономичными.

Используя равенство (2.34) и определение нормы, запишем ошибку (точность) представления функции $f(x)$ полиномом $f_K(x)$ в следующем виде:

$$\alpha_K^2 = \left[\left\| f(x) - f_K(x) \right\| w\right]^2 = \left[\left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} C_k E_k \right\| w\right]^2 = \sum_{k=K+1}^{\infty} C_k^2 . \tag{2.36}$$

Скорость уменьшения ошибки α_K^2 с ростом K зависит от скорости уменьшения коэффициентов разложения с увеличением k. Пусть при $k \to \infty$ $C_k = O\left(\frac{1}{k^V}\right)$, где $V > \frac{1}{2}$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{C_k}{k^V}\right) = 0$. Тогда из (2.36) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k^2 = O\left(k^{\frac{1}{2}-V}\right)$.

Итак, если функция $f(x)$ представлена на сегменте [a,b] рядом (2.30), то для достижения

$$\int_a^b \left[f(x) - f_k(x)\right]^2 dx = \min_{[a,b]} \tag{2.37}$$

параметры C_k должны оцениваться как коэффициенты Фурье.

На дискретной равномерной сетке точек условие (2.31) дает соотношения для расчета коэффициентов Фурье аппроксимирующего полинома относительно заданной ортонормированной системы базисных функций:

$$C_k(t_a) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_n, t_a) E_k(x_n). \tag{2.38}$$

Кроме рассмотренных свойств, для множества базисных функций $\{E_k\}$ целесообразно сформулировать дополнительные требования:

- желательно, чтобы система $\{E_k\}$ являлась собственными решениями элементарных дифференциальных операторов, фигурирующих в уравнениях математической модели атмосферы;
- для нелинейных задач система $\{E_k\}$ должна быть мультипликативной, то есть вместе с двумя функциями система должна содержать их произведение и обратные функции;
- используемые базисные функции должны хорошо аппроксимировать поля всех основных метеорологических величин.

При выполнении этих условий объем вычислений при интегрировании атмосферной модели на основе спектрального подхода может быть минимальным. Заметим, что системой таких гладких функций является система тригонометрических функций.

Методика построения систем базисных функций от двух переменных вытекает из следующей теоремы [25]. Пусть $f(x,y)$ - непрерывная физическая функция, заданная на прямоугольнике [a,b]x[c,d], а $e_0(x), e_1(x), \ldots$ и $e_0(y), e_1(y), \ldots$ ортонормированные системы базисных функций соответственно от переменной x на сегменте [a,b] и от переменной y на сегменте [c,d]. Тогда система функций, состоящая из произведений $e_i(x)e_j(y) = E_{i\,j}(x,y), \quad i,j = 0,1,\ldots$ будет системой ортонормированных базисных функций на прямоугольнике [a,b]x[c,d]:

$$\int_a^b\int_c^d E_{i\,j}(x,y)E_{i\,k}(x,y)dxdy = \delta_{jk}\ , \quad i,\ j,\ k = 0,1,2,\ldots\ .$$

Пусть имеется неограниченная прямоугольная таблица системы базисных функций $\{E_{i\,j}\}$, ортогональных на сегменте [a,b]x[c,d]:

$$\begin{matrix} E_{oo}(x,y), & E_{o1}(x,y), & E_{o2}(x,y), & \cdots \\ E_{1o}(x,y), & E_{11}(x,y), & E_{12}(x,y), & \cdots \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ E_{io}(x,y), & E_{i1}(x,y), & E_{i2}(x,y), & \cdots \end{matrix}\ . \tag{2.39}$$

Двойной ряд

$$f(x,y) = \sum_{i,j} C_{i\,j}E_{i\,j}(x,y) \tag{2.40}$$

называют двойным (кратным) рядом Фурье функции $f(x,y)$ по системе базисных функций $\{E(x,y)\}$ (1.39), а параметры ряда

$$C_{i\,j} = \int_a^b\int_c^d E_{i\,j}(x,y)f(x,y)dxdy \tag{2.41}$$

- коэффициентами Фурье функции $f(x,y)$ по системе $\{E(x,y)\}$ (1.39).

Если значения функции $f(x,y)$ заданы на счетном множестве дискретных узлов регулярной сетки $i = 1,2,\ldots,K$, $j = 1,2,\ldots,K$ заполняющих область [a,b]x[c,d], то коэффициенты Фурье вычисляют по формуле:

$$C_{i\,j} = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} f(x,y)E_{i\,j}(x,y)}{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} E_i(x)E_j(y)}\ . \tag{2.42}$$

В заключение данного раздела отметим следующее.

1) При интегральном приближении функций вычисление коэффициентов Фурье по формулам (1.31), (1.41) относительно выбранной системы базисных функций связано с процедурой численного интегрирования. Применяя квадратуры высокого порядка (Ньютона-Котеса, Гаусса, Чебышева и др.), можно обеспечить сколь угодно малую ошибку интегрирования. Однако для реальных атмосферных функций, содержащих сильно выраженную случайную компоненту, при высоком разрешении часто удовлетворительную точность дают более простые квадратуры прямоугольников и трапеций, требующие меньшего объема вычислений;
2) Сходимость ортогонального ряда разложения существенно зависит от выбранной системы базисных функций. Однако не существует базиса, который обеспечивал бы наилучшую сходимость для всех классов функций. Каждый базис оптимален лишь для определенного класса функций;
3) В математике отсутствуют теоремы о лучшей сходимости ортогональных разложений по сравнению с неортогональными. Однако первые предпочтительнее, так как в этом случае каждый член ряда определяется независимо от других и поэтому максимально информативен, а ошибка аппроксимации быстро убывает с ростом числа членов ряда, что позволяет сконцентрировать основную информацию, содержащуюся в эмпирических данных, в небольшом числе параметров разложения;
4) Практических рекомендаций для выбора базисных функций, вообще говоря, не существует. Это делает исследователь, исходя из физической сущности задачи, необходимой точности её решения, размеров и конфигурации области интегрирования, региональных особенностей атмосферных процессов, опыта и интуиции, а также наличия данных наблюдений, сложностей расчетного характера, устойчивости вычислительного алгоритма к входным ошибкам и возможности распараллеливания вычислительного процесса, оперативной памяти ЭВМ и уровня интерфейса.

Таким образом, выбор наилучшего способа сжатия информации (аналитической аппроксимации полей метеорологических величин) является многокритериальной оптимизационной задачей с набором целевых функций указанных параметров.

Как отмечалось выше, в зависимости от характера решаемой задачи могут использоваться базисные функции, заданные на всей области исследования либо финитные функции с локальными носителями, т.е. отличными от нуля на сравнительно небольшом (около шага сетки) топологическом покрытии области.

В эволюционных задачах гидродинамики в качестве базисных функций, заданных на всей области исследования, теоретически наиболее обоснованно использовать собственные функции (решения) тождественного дифференциального оператора, действующего на зависимые переменные. Система собственных функций должна быть ортогональной (или ортонормированной) и полной в рассматриваемой области. Поскольку при разработке гидродинамических прогнозов погоды даже на средние сроки необходимо учитывать процессы, протекающие во всей атмосфере Земли, в деятельном слое почвы и в мировом океане, то базисные функции должны быть собственными функциями дифференциальных операторов, записанных в естественной для геоида сферической системе координат, а решение ограничено на сфере.

Полную ортогональную систему на сфере образуют:

- присоединенные полиномы Чебышева (близкие к полиномам наилучшего равномерного приближения);
- тригонометрические полиномы;
- полиномы Лежандра (собственные решения уравнения Лапласа на сфере);

- обобщённые сферические функции;
- векторные функции Хафа (собственные решения приливного уравнения Лапласа, нормальные моды трехмерной линеаризованной системы полных уравнений динамики атмосферы в адиабатическом приближении).

Последние четыре базиса существенно используют условие периодичности физических функций и это важно, так как метеорологические величины часто можно считать периодическими по долготе λ с условием периодичности вида $f(x) = f(\lambda) = f(\lambda + 2\pi)$. Важно, что тригонометрические полиномы и полиномы Чебышева обладают свойством ортогональности на множестве дискретных точек, что позволяет вместо приближенного вычисления интегралов проводить простое суммирование произведений. Это свойство привело к широкому использованию тригонометрических и чебышевских полиномов.

В качестве базисных функций удобно использовать классические ортогональные многочлены, так как их просто дифференцировать и интегрировать и, кроме того, они точнее тригонометрических функций при одинаковом числе членов ряда.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ПОЛИНОМАМ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

3.1 Представление метеорологических полей однократными рядами Фурье по тригонометрическим полиномам

А.Н.Колмогоров доказал следующую теорему [87]: Если функция $f(x)$ принадлежит к классу 1-периодических (период нормирован к единице) s раз дифференцируемых функций из гильбертова пространства $H(L^2)$, то наилучшее приближение $f(x)$ в метрике L^2 по всем возможным линейно независимым системам неортогональных и ортогональных функций $\{E_k(x)\}$ реализуется базисом тригонометрического ряда Фурье: $1,\ 2^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi\, k\, \Delta x),\ 2^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi\, k\, \Delta x), \ldots\ ; k = 1, 2, \ldots$.

Эта теорема распространяется и на Т-периодические функции, так как, меняя масштаб аргумента, период можно всегда сделать равным единице. Система тригонометрических функций

$$\begin{array}{l} 1,\quad \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(Nx) \\ \qquad \sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(Nx) \end{array}$$

является классической системой ортогональных функций на отрезке $-\pi \le x \le \pi$.

Представим периодическую по долготе функцию $f(x) = f(\lambda) = f(\lambda + 2\pi)$ рядом Фурье по тригонометрическим полиномам, которые линейно независимы, периодичны и образуют полную ортогональную систему [73]. Для этого введем новую переменную $\lambda = \dfrac{2\pi x}{L}$, $0 \le \lambda \le 2\pi$ (где L - длина отрезка [a,b]), и запишем для действительной функции $f(\lambda)$ тригонометрический ряд:

$$f(\lambda) = C_0^{COS} + \sum_{k=1}^{K} \left[C_k^{COS} \cos(k\,\lambda) + C_k^{SIN} \sin(k\,\lambda) \right]. \tag{3.1}$$

Здесь

$k = \dfrac{L}{L_k}$	-	зональное волновое число, характеризующее движущиеся волновые моды (гармоники);
L_k	-	длина k-той моды;
K	-	максимальное волновое число.

Ниже коэффициенты будем обозначать следующим образом: $C_k^{COS} = C_k^{C}$, $C_k^{SIN} = C_k^{S}$.

Так как тригонометрические полиномы обладают свойством ортогональности на системе дискретного множества регулярно расположенных точек $\left(0, \dfrac{\pi}{N}, \ldots, \dfrac{(2N-1)\pi}{N}\right)$ с весом $W(\lambda) = 1$, то на L =[a,b] определим сетку $n = 0, 1, \ldots, N$ точек с $\lambda_n = \dfrac{2\,\pi_n\,\Delta\lambda}{L}$, где $\Delta\lambda$ шаг сетки по долготе. Тогда максимально возможное число членов ряда (3.1) будет равно N=K+1, включая C_0^C. Функция $f(\lambda)$ считается периодической с периодом $(N-1)\Delta\lambda$.

Коэффициенты разложения находятся по формулам:

$$C_0^C = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\lambda_n),$$

$$C_k^C = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\lambda_n)\cdot\cos(k\lambda_n), \tag{3.2}$$

$$C_k^S = \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\lambda_n)\cdot\sin(k\lambda_n).$$

Для ускорения вычислений ряд Фурье (3.1) обычно используют в комплексной форме:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot \exp(ik\lambda), \tag{3.3}$$

где коэффициенты $C_k = C_k^{\mathrm{Re}} + C_k^{\mathrm{Im}}$ определяемые формулой

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\lambda_n)\cdot\exp(-ik\lambda) \tag{3.4}$$

можно выразить через вещественные коэффициенты C_k^C и C_k^S. Так как

$$C_k = \frac{1}{N}\left[f(\lambda_n)\cdot\cos(k\lambda) - i\cdot f(\lambda_n)\cdot\sin(k\lambda)\right], \quad k = 1, \ldots, K, \tag{3.5}$$

то

$$C_0^C = C_0 \ , \ C_k^C = 2C_k^{\mathrm{Re}} = 2C_{N-k}^{\mathrm{Re}} \ , \ C_k^S = -2C_k^{\mathrm{Im}} = 2C_{N-k}^{\mathrm{Im}} . \tag{3.6}$$

Поясним появление формулы (3.3). С этой целью запишем цепочку преобразований:

$$f(\lambda) = C_o^C + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{C_k^C\left[\exp(ik\lambda) + \exp(-ik\lambda)\right] + iC_k^S\left[\exp(ik\lambda) - \exp(-ik\lambda)\right]\right\} =$$

$$= C_0^C + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left(C_k^C - iC_k^S\right)\exp(ik\lambda) + \left(C_k^C + iC_k^S\right)\exp(-ik\lambda)\right\}.$$

Пусть при $k \geq 0$ коэффициент $C_k = \frac{\left(C_k^C - iC_k^S\right)}{2}$, тогда, если $k < 0$, имеем $C_{-k} = C_k^*$. Отсюда

$$f(\lambda) = C_0^C + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left[C_k \exp(ik\lambda) + C_k^* \exp(-ik\lambda)\right]. \qquad (3.7)$$

Для вещественной функции $f(\lambda)$ каждому $|k|$ соответствует пара колмплексно-сопряженных слагаемых $C_k \exp(ik\lambda)$ и $C_k^* \exp(-ik\lambda)$. Положив C_o^C, из (3.7) получаем выражение

$$f(\lambda) = \sum_{k=-K}^{K} C_k \exp(ik\lambda) \qquad (3.8)$$

аналогичное формуле (3.3), поскольку из периодичности следует:

$$\cos(k\lambda) = \frac{\{\exp[i(N-k)\lambda] + \exp[-ik\lambda]\}}{2}, \qquad (3.9а)$$

$$\sin(k\lambda) = \frac{\{\exp[i(N-k)\lambda] - \exp[-ik\lambda]\}}{2}. \qquad (3.9б)$$

Базисные функции $\{\exp(ik\lambda)\}$ ортогональны. Условие ортогональности принято записывать для случая непрерывного аргумента λ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ik\lambda)\exp(il\lambda)d\lambda = \delta_{kl}. \qquad (3.10)$$

Тогда (3.4) примет вид

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)\exp(-ik\lambda)d\lambda.$$

Ортогональность сохраняется и на регулярной сетке точек с произвольным шагом $\Delta\lambda$.

Условие сходимости тригонометрических рядов Фурье определяется теоремой [21, 73], связывающей степень гладкости аппроксимируемой функции и скорости сходимости ее тригонометрического ряда Фурье:

Если значения $f(\lambda), f'(\lambda), f''(\lambda), \ldots, f^{(m)}(\lambda)$, где порядок производной $m \geq 0$, непрерывны, а $f^{(m+1)}(\lambda)$ кусочно-непрерывны на отрезке [a,b], на концах которого $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b), \ldots$, $f^{(m)}(a) = f^{(m)}(b)$, то для коэффициентов Фурье функции $f(\lambda)$

$$C_k^C = \frac{1}{L}\int_a^b f(\lambda)\cos\left(\frac{k\pi\lambda}{L}\right)d\lambda,$$

$$C_k^S = \frac{1}{L}\int_a^b f(\lambda)\sin\left(\frac{k\pi\lambda}{L}\right)d\lambda$$

выполняются соотношения

$$C_k^C = O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ \ C_k^S = O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right) \tag{3.11}$$

и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-V}\left(\left|C_k^C\right| + \left|C_k^S\right|\right),\ V = 0, 1, \ldots, m$ сходятся.

Первая формула в (3.11) означает, что $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{C_k^C}{k^{m+1}}\right) = 0$.

Из теоремы следует, что требованиям гладкости функции $f(\lambda)$ внутри сегмент [a,b] должны удовлетворять и границы между отрезками периодической функции. Разрывы функции или ее производных часто получаются [25], если рядом Фурье аппроксимируют функцию, заданную на любом сегменте [a,b] и приведённую путем замены переменных к функции, заданной на $[-\pi,\pi]$ и периодически продолженной на остальной области изменения аргумента.

Чтобы разложить в ряд Фурье непериодическую функцию $f(\lambda)$, заданную на [a,b], при непериодических граничных условиях $f(a) \neq f(b)$ и не имеющую разрывов внутри [a,b], нужно путем замены переменных определить $f(\lambda)$ на $[-\pi,0]$ и, продолжив ее на $[-\pi,0]$ по чётности (т.е. положив $f(a) = f(b)$, $0 < \lambda < \pi$, разложить в ряд по косинусам. При таком достраивании функции на промежутке $[-\pi,0]$ она не имеет разрывов на границах отрезков, а коэффициенты Фурье убывают как $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. При разложении функции без достраивания или достраивания нечётности сходимость ряда Фурье ухудшается: ряд коэффициентов Фурье будет сходиться с порядком малости $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Достоинства разложений по тригонометрическим функциям таковы:

- доказанная оптимальность для некоторых классов функций,
- наглядный физический смысл коэффициентов разложения и простота их генерации. Действительно, формулу (3.1) можно записать иначе:

$$f(\lambda) = C_0 + \sum_{k=1}^{K} C_k \cos(k\lambda - \Psi_k).$$

Здесь C_0^C - среднее значение функции $f(\lambda)$ в момент времени t на параллели φ; $C_k = 2\left|\sqrt{\left(C_k^C\right)^2 + \left(C_k^S\right)^2}\right|$ - амплитуда k-той Фурье-гармоники, а $\Psi_k = arctg\left(\frac{C_k^S}{C_k^C}\right)$ - соответствующий фазовый угол. Зональный масштаб возмущения $L_k = \frac{2\pi\, r_0 \cos(\varphi)}{k}$, где

r_0 средний радиус Земли, а распределение функции $f(\lambda)$ по долготе таково, что при $\lambda_k = \dfrac{\lambda_k + 2\pi z}{k}$ - это "гребень", при $\lambda_k = \dfrac{\Psi_k + 2\pi(z+1)}{k}$ - "ложбина" $z = 0, 1, \ldots, z-1$.

3.2 Представление метеорологических полей двойными рядами Фурье по тригонометрическим полиномам

В практике широко используют разложения случайных полей метеорологических величин в двойные ряды Фурье

$$f(\theta,\lambda) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{K}\left(C_{nk}^{C}\cos(k\lambda) + C_{nk}^{S}\sin(k\lambda)\right)\cos(n\theta), \tag{3.12}$$

в которых θ - дополнение географической широты φ до 90^0.

Такой метод преобразования атмосферных полей является эффективным средством уменьшения объема вычислений, поскольку позволяет осуществлять процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ) по обеим переменным. Он может применяться в псевдоспектральных моделях атмосферы, в которых для более точной оценки значений пространственных производных в сеточных узлах (по сравнению с конечно-разностными аналогами) осуществляют дифференцирование соответствующих рядов Фурье [92, 93, 94].

Использование тригонометрических полиномов в качестве базисных функций при разработке гидродинамических моделей целесообразно, так как присоединенные полиномы Лежандра P_n^m (где символы n и m означают, соответственно, порядок и степень полинома) могут быть выражены через комбинации синусов и косинусов кратных дуг [49]. Однако, если в полных уравнениях термодинамики представлять составляющие вектора скорости рядами Фурье, то наличие особенностей в окрестностях полюсов приводит к тому, что такие ряды будут сходиться очень медленно. Эти особенности можно исключить с помощью специально конструируемых функций. Так, Робер [103] предлагал использовать функции

$$G_n^m(\theta,\lambda) = \sin^{|m|}(\theta)\cos(n\theta)\exp(im\lambda), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.13}$$

через которые можно выразить любой полином Лежандра P_n^m и, значит, исключить возможность возникновения особенностей у полюсов, а, разумно организовав вычисления, при расчете нелинейных членов уравнений исключить коэффициенты взаимодействия, синтез правил отбора которых в спектральных моделях - далеко нетривиальная задача [31, 49, 59, 92, 93, 94, 103] и т.д.). Функции Робера позволяют вычислять коэффициенты разложения G_n^m через P_n^m с помощью двух последовательных БПФ. Однако процедура расчета обладает существенным недостатком: она оказывается трудоёмкой и плохо обусловленной, а при больших значениях N могут возникать крупные ошибки [49], поскольку при обратном преобразовании Фурье за счет деления сеточных значений якобиана (при интегрировании уравнения вихря) на $\sin^{|m|}(\theta)$ возникает особенность у полюсов ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$). Поэтому использование функций

Робера оправдано лишь для решения уравнений псевдоспектральным методом в моделях с низким разрешением по горизонтали.

По Орзагу [99], если положить $f_m(\theta) = \sin^S(\theta) \sum_{n=0}^{N} C_n^m \cos(\theta)$, то функции $\sin^S(\theta)\cos(n\theta)$ ($S = 0$ при n четном; $S = 1$ при n нечетном) при выполнении дополнительных условий $f_m(0) = f_m(\pi)$ при $|m| \geq 2$, или $\sum_{n=0}^{N} C_{2n}^m = 0$; $\sum_{n=0}^{N} C_{2n+1}^m = 0$ снимают проблему полюсов, а в спектральных уравнениях осесимметричного движения, в уравнении притока тепла и в баротропном уравнении вихря фигурируют лишь свертывающиеся суммы, что позволяет использовать БПФ.

Чтобы избежать уменьшения шага интегрирования по времени за счет влияния увеличения разрешения широтно-долготных сеток у полюсов, необходимо осуществлять дополнительную фильтрацию мелкомасштабных возмущений с помощью специальных пространственных и временных фильтров (формул).

Что касается применения двумерного тригонометрического базиса, то в добавление к сказанному отметим, что такое преобразование полей является эффективным средством уменьшения объема вычислений, поскольку позволяет осуществлять БПФ по переменным λ и θ.

Такой базис может применяться в псевдоспектральных моделях атмосферы, в которых задачу прогноза решают для сеточной области, определяя искомые значения метеорологических величин в узлах сетки, но производные по координатам $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ вычисляют в каждом узле не с помощью конечно-разностных соотношений, а путем дифференцирования соответствующих рядов Фурье [92, 93, 94]. Тем самым достигается большая точность расчета указанных производных.

3.3 Баротропная негеострофическая спектральная модель с базисом тригонометрическими функциями

Рассмотрим в качестве примера баротропную негеострофическую спектральную модель на основе тригонометрического базиса.

Пусть $f(\varphi, \lambda)$ непрерывная периодическая функция, а её аппроксимация рядом Фурье по двум переменным имеет вид:

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} f_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),$$

где

f_{kl} -коэффициенты разложения Фурье, вычисляемые по формуле

$$f_{kl} = \frac{4}{M \cdot N} \sum_{S=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} q_{Sjkl} f(\varphi_j, \lambda_S) \exp(-ik\lambda_S - il\varphi_j);$$

$$
q_{Sjkl} = \begin{cases} 0.5 & \text{при} \quad k = 0,\, k = \dfrac{M}{2}, \\ 0.5 & \text{при} \quad l = 0,\, l = \dfrac{N}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad k > 0, \quad l > 0. \end{cases}
$$

Запишем производные первого и второго порядка от функции $f(\varphi, \lambda)$ по долготе и широте

$$
\frac{\partial f(\varphi,\lambda)}{\partial \lambda} = i\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} k f_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),
$$

$$
\frac{\partial f(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi} = i\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} l f_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),
$$

$$
\frac{\partial^2 f(\varphi,\lambda)}{\partial \lambda^2} = -i\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} k^2 f_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),
$$

$$
\frac{\partial^2 f(\varphi,\lambda)}{\partial \varphi^2} = -\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} l^2 f_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),
$$

а также оператор Лапласа в сферических координатах (φ, λ):

$$
\nabla^2 f = \frac{tg(\varphi)}{a^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2 \cos^2(\varphi)}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \equiv
$$

$$
\equiv \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} G_{kl}(j) f_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j),
$$

где a - средний радиус Земли,

$$
G_{kl}(j) = \frac{il \cdot tg(\varphi_j)}{a^2} - \frac{l^2}{a^2} - \frac{k^2}{a^2 \cos^2(\varphi_j)}.
$$

В качестве системы уравнений рассматриваемой модели используем уравнения «мелкой воды» в изобарической системе координат

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lV,
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lU,
$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U\frac{\partial \Phi}{\partial x} + V\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 .$$

Запишем уравнения модели в векторной форме

$$\frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = -lk \times \vec{\mathbf{V}} - \nabla\Phi = \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla U = lV - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla U = -lU - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi\nabla\vec{\mathbf{V}} ,$$

где

$\vec{\mathbf{V}}$	–	вектор скорости ветра,
k	–	вертикальный единичный вектор,
∇	–	оператор горизонтальной дивергенции,
l	–	параметр Кориолиса.

Из уравнений (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= lV - U\frac{\partial U}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V}{\partial x} , \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -lU - U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + U\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial U}{\partial y} , \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поскольку вертикальная компонента относительного вихря

$$\Omega_Z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \Omega = k\nabla \times \vec{\mathbf{V}} ,$$

то уравнения (3.15) можно записать иначе

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (l + \Omega)V - \frac{\partial\left(\Phi + \dfrac{U^2 + V^2}{2}\right)}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(l + \Omega)U - \frac{\partial\left(\Phi + \dfrac{U^2 + V^2}{2}\right)}{\partial y}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = -(l+\Omega)k \times \vec{\mathbf{V}} - \nabla\left(\Phi + \frac{\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{\mathbf{V}}}{2}\right). \quad (3.16)$$

Применим к уравнению (3.16) оператор вихря $(k \cdot \nabla \times)$ и оператор дивергенции $div \quad (\nabla)$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -k \cdot \nabla \times \left[(\Omega + l)k \times \vec{\mathbf{V}} - k \times \left(\nabla \left(\Phi + \frac{\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{\mathbf{V}}}{2} \right) \right) \right] = -\nabla(\Omega + l)\vec{\mathbf{V}},$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla(\Omega + l)k \times \vec{\mathbf{V}} - \nabla\nabla\left(\Phi + \frac{\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{\mathbf{V}}}{2}\right) = k\nabla \times (\Omega + l)\vec{\mathbf{V}} - \nabla^2\left(\Phi' + \frac{\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{\mathbf{V}}}{2}\right). \quad (3.17)$$

Здесь

$D = \nabla \cdot \vec{\mathbf{V}}$ – горизонтальная дивергенция;

$\Phi' = \Phi - \overline{\Phi}$;

Φ' – отклонение поля геопотенциала от среднего значения,

$\overline{\Phi}$ – среднее значение геопотенциала.

Так как $\nabla\overline{\Phi} = \nabla^2\overline{\Phi} = 0$, то

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla D' \,\vec{\mathbf{V}} - \overline{\Phi}\, D. \quad (3.18)$$

Перейдём к скалярным функциям – функции тока Ψ и потенциалу скорости χ, учитывая при этом теорему Гельмгольца

$$\vec{\mathbf{V}} = k \times \nabla\Psi + \nabla\chi.$$

Тогда

$$U = \frac{1}{a\cos(\varphi)}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \cos(\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right),$$

$$V = \frac{1}{a\cos(\varphi)}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \cos(\varphi)\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right).$$

Введём новые переменные, не имеющие разрыва на полюсах

$$U = u\cos(\varphi) = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \cos(\varphi)\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right),$$

$$V = v\cos(\varphi) = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \cos(\varphi)\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right). \quad (3.19)$$

Тогда $\Omega = \nabla^2 \Psi$, $D = \nabla^2 \chi$, а уравнения (3.17) приобретают вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla \Omega - \vec{\mathbf{V}} \cdot l - D\Omega - l\,D\,,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla_x (\Omega + l) v - \nabla_Y (\Omega + l) u + (\Omega + l)\Omega - \nabla^2 \left(\Phi' + \frac{\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{V}}}{2} \right).$$

Запишем уравнения модели «мелкой воды» в сферической системе координат

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos^2(\varphi)} \left(\frac{\partial \left(U \nabla^2 \Psi \right)}{\partial \lambda} + \cos(\varphi) \frac{\partial \left(V \nabla^2 \Psi \right)}{\partial \varphi} \right) - 2\omega_0 \left(\sin(\varphi) \nabla^2 \chi + V \right),$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos^2(\varphi)} \left(\frac{\partial \left(V \nabla^2 \Psi \right)}{\partial \lambda} - \cos(\varphi) \frac{\partial \left(U \nabla^2 \Psi \right)}{\partial \varphi} \right) + 2\omega_0 \left(\sin(\varphi) \nabla^2 \Psi - U \right) -$$

$$- \nabla^2 \left(\Phi' + \frac{U^2 + V^2}{2 \cos^2(\varphi)} \right), \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos^2(\varphi)} \left(\frac{\partial \left(U \Phi' \right)}{\partial \lambda} + \cos(\varphi) \frac{\partial \left(V \Phi' \right)}{\partial \varphi} \right) - \overline{\Phi} \nabla^2 \chi\,.$$

Ведём обозначения для нелинейных слагаемых

$$A_1 = \frac{1}{a \cos^2(\varphi)} U \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda}\,,$$

$$A_2 = \frac{1}{a \cos(\varphi)} V \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \varphi}\,,$$

$$B = \nabla^2 \Psi \cdot \nabla^2 \chi\,,$$

$$C_1 = \frac{1}{a \cos^2(\varphi)} V \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \lambda}\,,$$

$$C_2 = \frac{1}{a \cos(\varphi)} U \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial \varphi}\,,$$

$$R = \left(\nabla^2 \Psi \right)^2,$$

$$E_1 = \frac{1}{\cos^2(\varphi)}\left(U\nabla^2 U + V\nabla^2 V\right),$$

$$E_2 = \frac{1}{a^2\cos^2(\varphi)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2\right],$$

$$E_3 = \frac{1}{a^2\cos^4(\varphi)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2\right],$$

$$E_4 = \frac{4tg(\varphi)}{a^2\cos^2(\varphi)}\left(U\frac{\partial U}{\partial \varphi} + V\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right),$$

$$E_5 = \frac{1+3\sin^2(\varphi)}{a^2\cos^4(\varphi)}\left(U^2 + V^2\right),$$

$$F_1 = \frac{1}{a\cos^2(\varphi)}U\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda},$$

$$F_2 = \frac{1}{a\cos(\varphi)}V\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$F_3 = \Phi'\nabla^2\chi .$$

Система (320) приобретает теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \nabla^2\Psi}{\partial t} + 2\omega_0\left(\sin(\varphi)\nabla^2\chi + \frac{V}{a}\right) = -A_1 - A_2 - B,$$

$$\frac{\partial \nabla^2\chi}{\partial t} - 2\omega_0\left(\sin(\varphi)\nabla^2\Psi - \frac{U}{a}\right) = C_1 - C_2 + R - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \overline{\Phi}\nabla^2\chi = -F_1 - F_2 - F_3 .$$

Совместно система уравнений (3.21) и соотношения (3.19) замкнуты, так что содержат 5 уравнений с пятью неизвестными функциями: Ψ, χ, Φ', U, V .

Приведём формулы для аппроксимации величин, входящих в систему (3.19)-(3.21), кратными рядами Фурье:

$$\nabla^2\Psi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\nabla^2\Psi_{kl}\exp(ik\lambda + il\varphi),$$

$$\nabla^2 \chi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} \nabla^2 \chi_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),$$

$$\Phi' = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} \Phi'_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),$$

$$U = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} U_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),$$

$$V = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} V_{kl} \exp(ik\lambda + il\varphi),$$

где коэффициентами разложения Фурье даются формулами:

$$\nabla^2 \Psi_{kl} = \frac{4}{M\,N} \sum_{S=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} \nabla^2 \Psi_{S\,j} \exp\left(-ik\lambda_S - il\varphi_j\right),$$

$$\nabla^2 \chi_{kl} = \frac{4}{M\,N} \sum_{S=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} \nabla^2 \chi_{S\,j} \exp\left(-ik\lambda_S - il\varphi_j\right),$$

$$\Phi'_{kl} = \frac{4}{M\,N} \sum_{S=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} \Phi'_{S\,j} \exp\left(-ik\lambda_S - il\varphi_j\right),$$

$$U_{kl} = \frac{4}{M\,N} \sum_{S=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} U_{S\,j} \exp\left(-ik\lambda_S - il\varphi_j\right),$$

$$V_{kl} = \frac{4}{M\,N} \sum_{S=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} V_{S\,j} \exp\left(-ik\lambda_S - il\varphi_j\right).$$

Аналогично для правых частей уравнений:

$$E_1 = \frac{U_{S\,j}}{\cos^2(\varphi_j)} \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} G_{kl}(j) q_{kl} U_{kl} \exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) +$$

$$+ \frac{V_{S\,j}}{\cos^2(\varphi_j)} \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} G_{kl}(j) q_{kl} V_{kl} \exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right),$$

$$E_2 = \frac{1}{a^2 \cos^2(\varphi_j)} \left[i \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l U_{kl} \exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{a^2 \cos^2(\varphi_j)} \left[i \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l V_{kl} \exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) \right]^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{a^2\cos^4(\varphi_j)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, k U_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{a^2\cos^4(\varphi_j)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l V_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right]^2,$$

$$E_4 = \frac{4tg(\varphi_j)}{a^2\cos^2(\varphi_j)}\left[U_{Sj} i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l U_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j) + \right.$$

$$\left. + V_{Sj} i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l V_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right],$$

$$E_5 = \frac{1+3\sin^2(\varphi_j)}{a^2\cos^4(\varphi_j)}\left(U_{Sj}^2 + V_{Sj}^2\right).$$

Теперь модель (3.21) приводится к виду:

$$\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial t} = -2\omega_0\left(\sin(\varphi_j)\nabla^2\chi_{Sj} + \frac{V_{Sj}}{a}\right) - \nabla^2\Psi_{Sj}\,\nabla^2\chi_{Sj} -$$

$$-\frac{U_{Sj}}{a\cos^2(\varphi)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} k\,\nabla^2\Psi_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right] -$$

$$-\frac{V_{Sj}}{a\cos^2(\varphi)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} l\,\nabla^2\Psi_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right],$$

$$\frac{\partial\nabla^2\chi}{\partial t} = 2\omega_0\left(\sin(\varphi_j)\nabla^2\Psi_{Sj} - \frac{U_{Sj}}{a}\right) - \left(\nabla^2\Psi_{Sj}\right)^2 - \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} G_{kl}(j)\Phi'_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j) +$$

$$+\frac{V_{Sj}}{a\cos^2(\varphi)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl\,Sj}\, k\,\nabla^2\Psi_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right] -$$

$$-\frac{U_{Sj}}{a\cos^2(\varphi)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl\,Sj}\, l\,\nabla^2\Psi_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right] - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5,$$

$$\frac{\partial\Phi'_{Sj}}{\partial t} = -\overline{\Phi}_{Sj}\,\nabla^2\chi_{Sj} - \Phi'_{Sj}\nabla^2\chi_{Sj} - \frac{U_{Sj}}{a\cos^2(\varphi_j)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} k\,\Phi'_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right] -$$

$$-\frac{V_{Sj}}{a\cos^2(\varphi_j)}\left[i\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl} l\,\Phi'_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j)\right]. \qquad (3.22)$$

Здесь

$$\Psi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\Psi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right),$$

$$\chi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\chi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right),$$

$$\nabla^2\Psi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} G_{kl}(j)\Psi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right),$$

$$\nabla^2\chi = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} G_{kl}(j)\chi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right).$$

Следовательно,

$$G_{kl}(j)\Psi_{kl} = \nabla^2\Psi_{kl}, \quad G_{kl}(j)\chi_{kl} = \nabla^2\chi_{kl},$$

то есть

$$\Psi_{kl} = \frac{\nabla^2\Psi_{kl}}{G_{kl}(j)}, \quad \chi_{kl} = \frac{\nabla^2\chi_{kl}}{G_{kl}(j)},$$

а компоненты $U_{S\,j}$ и $V_{S\,j}$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} U_{S\,j} &= \frac{i}{a}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}k\,\chi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) - \frac{i}{a}\cos\left(\varphi_j\right)\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}l\,\Psi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right), \\ V_{S\,j} &= \frac{i}{a}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}k\,\Psi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) + \frac{i}{a}\cos\left(\varphi_j\right)\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}l\,\chi_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Начальные условия для модели задаются в каждой точке в виде

$$U(t_0) = U_0,\ V(t_0) = V_0,\ \Phi(t_0) = \Phi_0;$$

$$U_0 = u_0\cos(\varphi),\ V_0 = v_0\cos(\varphi). \tag{3.24}$$

Тогда

$$\nabla^2\Psi_0 = \frac{1}{a\cos^2\left(\varphi_j\right)}\frac{\partial V}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\cos\left(\varphi_j\right)}\frac{\partial U}{\partial\varphi} \equiv$$

$$\equiv \frac{i}{a\cos^2(\varphi)}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\,kV_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right) - \frac{i}{a\cos(\varphi)}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\,lU_{kl}\exp\left(ik\lambda_S + il\varphi_j\right),$$

$$\nabla^2 \chi_0 = \frac{1}{a\cos^2(\varphi_j)}\frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{1}{a\cos(\varphi_j)}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \equiv$$

$$\equiv \frac{i}{a\cos^2(\varphi)}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, k U_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j) + \frac{i}{a\cos(\varphi)}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{l=0}^{L-1} q_{kl}\, l V_{kl} \exp(ik\lambda_S + il\varphi_j).$$

Алгоритм интегрирования уравнений спектральной модели следующий:

1. Задаются начальные условия для функций U, V, Φ на изобарической поверхности 500 гПа;
2. Расчёт по формулам (3.24) значений U^{t_0}, V^{t_0}, по которым вычисляются начальные значения $\nabla^2\Psi^{t_0}$ и $\nabla^2\chi^{t_0}$;
3. С помощью прогностических уравнений (3.22) и по начальным значениям U^{t_0}, V^{t_0}, Φ^{t_0}, $\nabla^2\Psi^{t_0}$, $\nabla^2\chi^{t_0}$ определяются $\nabla^2\Psi^{t_0+\Delta t}$, $\nabla^2\chi^{t_0+\Delta t}$, $\nabla^2\Phi^{t_0+\Delta t}$, где Δt - шаг интегрирования модели по времени. Получаемые значения $\nabla^2\Psi^{t_0+\Delta t}$ и $\nabla^2\chi^{t_0+\Delta t}$ учитывают значения $\Psi^{t_0+\Delta t}$ и $\chi^{t_0+\Delta t}$;
4. По формулам (3.23) определяются величины $U^{t_0+\Delta t}$ и $V^{t_0+\Delta t}$.

Этапы (1-4) повторяется шагами по времени до тех пор, пока не будут получены значения всех метеорологических величин в конце прогностического периода T. Полученные значения U^T и V^T делятся на $\cos(\varphi)$ и получаются прогностические значения компонент скорости ветра u^T и v^T. Прогностические значения геопотенциала получают путём суммирования значений $\overline{\Phi}$ и $(\Phi')^{t_0+\Delta t}$.

На первом шаге по времени используется явная схема Эйлера $f^{t_0+\Delta t} = f^{t_0} + F^{t_0}\Delta t$, а на последующих шагах – схема центральных разностей по времени $f^{t_0+\Delta t} = f^{t_0-\Delta t} + 2F^{t_0}\Delta t$, где F - правая часть эволюционного уравнения.

Для подавления вычислительных мод применяется фильтр Робера-Асселина:

$$\bar{f}^{t}_{Sj} = f_{Sj} + 0.5\nu\left(\bar{f}^{t-1}_{Sj} - 2\bar{f}^{t}_{Sj} + f^{t+1}_{Sj}\right),$$

$\nu = 0.05$ - параметр фильтра.

Решение уравнений модели строится на двумерной широтно-долготной сетке, узлами которой являются точки $\lambda_m = m\Delta\lambda$, $\varphi_j = j\Delta\varphi + \varphi_0$ $(m = 1, 2, \ldots, 2M;\ j = 1, 2, \ldots, N)$, где $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$ - шаги сетки по долготе и широте, соответственно, $\varphi_0 = -\dfrac{\Delta\varphi}{2}$. Вдоль круга широты размещается четное число узлов сетки. При таком выборе сетки удается избежать попадания узлов на полюса.

Для скалярной непрерывной величины при переходе через полюс необходимо лишь учесть изменение долготы λ на $\lambda + \pi$.

Векторные величины (составляющие вектора скорости) на полюсе терпят разрыв. Однако, если использовать вспомогательную функцию F_j, которая обладает свойством изменять знак при переходе через полюс, то с её помощью можно представить составляющие u и v как непрерывные и периодические по φ функции:

$$F_j = \begin{cases} f(\lambda_m, \varphi_j), & \text{если} \quad j = 1, 2, \dots, N \\ -f(\lambda_{m+M}, \varphi_{2m-j+1}), & \text{если} \quad j = N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases}.$$

Дадим ряд рекомендаций, которые целесообразно учесть при составлении программ для ЭВМ, реализующих модель.

Пусть, например, $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 7.5^0$. В этом случае число узлов вдоль широтного круга равно 48 $(M = 48)$, число узлов вдоль меридиана (от экватора до полюса) 12 $(N = 12)$, то есть число точек на расчетной сетке модели равно 576. Оценка шага интегрирования по времени на основе критерия Куранта-Фридрихся-Леви даёт $\Delta t = 20$ минут. В программе необходимо использовать процедуру быстрого преобразования Фурье. Значения тригонометрических гармоник, а также величины $\cos$, $\sin$, tg целесообразно вычислять заранее и сохранять в виде массивов. Таким путём уменьшается число вычислительных операций и, следовательно, время расчёта прогноза.

Необходимо также составить программы

- преобразования двумерных рядов Фурье в одномерные;
- обратного преобразования Фурье;
- преобразования величин в связи с переходом через полюс.

Все величины в программе должны быть представлены в виде комплексных переменных двойной точности. Метеорологические величины представляются рядами Фурье по широте и долготе. Значения метеорологических величин на полюсе необходимо исключить, так как появляется неопределённость связанная с делением на нуль $\left(\cos 90^0 = 0\right)$. С целью повышения качества прогноза фильтр Робера-Асселина лучше применять на каждом шаге по времени кроме первого.

Граничное условие при интегрировании по широте φ используется для получения значения метеорологических величин с помощью коэффициентов Фурье с соседнего широтного круга $(f_1 = f_2; \quad f_{2N} = f_{2N-1})$, т.е. исходя из фиктивных граничных условий $\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right|_{\text{экватор}} = 0$, которое согласуется с наблюдаемым малым изменением метеорологических величин вблизи экватора.

Атмосферная модель реализуется спектральным методом интегрирования. При этом в программе величины геопотенциала Φ, вихря $\nabla^2\Psi$ и дивергенции $\nabla^2\chi$ достаточно сохранять только на трёх последних шагах по времени. Для сохранения коэффициентов Фурье для скоростей (U_{kl}, V_{kl}) и геопотенциала (Φ'_{kl}), вихря $\left(\nabla^2\Psi_{kl}\right)$ и дивергенции $\left(\nabla^2\chi_{kl}\right)$ рационально использовать общие массивы одинаковой размерности. Величины всех производных можно представлять переменными без массива, так как они используются только при обратном преобразовании Фурье.

Нелинейные члены E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $\nabla^2\Phi'$, хотя и рассчитываются в нескольких циклах, но их также можно представлять без массивов. После вычисления на каждом шаге должна находиться сумма и сохраняться в одном массиве.

С помощью этих представлений используемый программой объём памяти ЭВМ значительно уменьшается.

3.4 Представление стационарного периодического и непериодического случайных процессов

3.4.1 Представление стационарного периодического случайного процесса рядом Фурье

Рассмотрим представление рядом Фурье стационарного Т-периодического случайного процесса $f(t)$ [67]:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\omega t)\ ,\ T_1 \le t \le T_2 \tag{3.25}$$

в котором $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ - угловая частота, а случайные величины

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} f(t)\exp(-jn\omega t) \tag{3.26}$$

- коэффициенты Фурье, различные для разных реализаций функции $f(t)$. При рассмотрении некоторого множества выборочных функций $f(t)$ соотношение (3.26) определяет коэффициенты Фурье C_n как случайные величины. Интеграл в (3.26) существует с вероятностью 1, и можно показать, что

$$f(t)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N} C_k \exp(ik\omega t)\right).$$

Выполнение условия периодичности случайного процесса $f(t)$ гарантирует взаимную независимость коэффициентов C_n и C_m при $n \ne m$.

Используя (3.26), получаем формулу для нахождения математического ожидания:

$$M\left(C_n C_m^*\right)=\frac{1}{T^2}M\left(\int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} f(t)f^*(u)\exp(-in\omega t)\exp(im\omega t)du\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2}\rho(t-S)\exp[i\omega(mu-nt)]du\,dt\ . \tag{3.27}$$

где

f^* и C^*	–	величины, комплексно сопряженные f и C соответственно;
$\rho(t-u)=\rho(\tau)=M\{f(t)f(u)\}$	–	корреляционная функция;
$\tau=0,1,\ldots$	–	запаздывание.

Так как функция $\rho(\tau)$ периодическая, то представим её рядом Фурье (с коэффициентами Фурье B_k :

$$\rho(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \exp(ik\omega\tau) \tag{3.28}$$

Из (3.27) и (3.28) вытекает:

$$M\{C_n C_m^*\} = \frac{1}{T^2} \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \exp[ik\omega(t-u)] \exp[i\omega(mu - nt)] du\, dt =$$

$$= \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \int_{T_1}^{T_2} \exp[i\omega(m-k)u] du \int_{T_1}^{T_2} \exp[i\omega(k-n)t] dt = \begin{cases} B_k \text{ при } k = m \\ 0 \text{ при } k \neq m \end{cases}. \tag{3.29}$$

Из (3.29) следует, что коэффициенты C_n и C_m функции $f(t)$ независимы при любых $n \neq m$; коэффициент B_k функции $\rho(\tau)$ равен дисперсии *n*-го случайного коэффициента Фурье функции $f(t)$. В детерминистическом случае имеем аналогичную ситуацию: для периодической функции $f(t)$ коэффициент Фурье B_k функции $\rho(\tau)$ равен квадрату *n*-го коэффициента Фурье функции $f(t)$.

Если случайный процесс $f(t)$ непериодический, то корреляционную функцию $\rho(t,u)$ нельзя рассматривать в виде $\rho(t-u) = \rho(\tau)$ и она не допускает подобного представления такого процесса через дисперсии коэффициентов Фурье.

3.3.2 Представление непериодического случайного процесса в ряд по системе ортогональных функций

Согласно Карунену - Лоэву [84], случайный непериодический процесс $f(t)$ можно аппроксимировать по системе ортогональных функций $E_n(t)$ с взаимно независимыми коэффициентами. Это разложение вводится для непрерывных процессов в интервале $[T_1, T_2]$, а затем распространяется на дискретный случай:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n C_n E_n(t), \quad T_1 \le t \le T_2 . \tag{3.30}$$

Здесь неизвестные коэффициенты W_n - действительные или комплексные числа; E_n и C_n - множества неизвестных базисных функций и случайных переменных, таких, что

$$\int_{T_1}^{T_2} E_n(t) E_m^*(t) dt = \delta_{nm} , \tag{3.31}$$

$$M\{C_n\, C_m^*\} = 0 .$$

Эти выражения дают ортогональное разложение случайного процесса в интервале $[T_1, T_2]$. Если процесс $f(t)$ - стационарный и периодический, то разложение задается при $E_n(t) = \frac{1}{T}\exp(in\omega t)$ и коэффициентах $W_n C_n$, равных соответствующим случайным значениям коэффициентов Фурье. Если условие периодичности не привлекать, то условие (3.31) нарушится.

Функции E_n и числа W_n определяют, исходя из следующих соображений. Если соотношения (3.30)-(3.31) справедливы для некоторых множеств ортогональных функций $E_n(t)$, чисел W_n и случайных переменных C_n, то

$$\int_{T_1}^{T_2} \rho(t,s) E_k(s) ds = \sum_n |W_n|^2 E_n(t) \int_{T_1}^{T_2} E_k(s) E_n^*(s) ds = |W_n|^2 E_k(t), \tag{3.32}$$

в котором $|W_n|^2$ - собственные значения, а E_k – собственные функции оператора Фредгольма с корреляционным ядром.

Для случайного процесса с непрерывной корреляционной функцией можно построить ортогональное разложение в любом интервале, используя в (3.30) - (3.31) в качестве коэффициентов и функций E(t) соответственно положительные значения квадратного корня от собственных значений и собственные функции уравнения Фредгольма с корреляционным ядром.

Аналогичное в идейном и аналитическом аспектах разложение случайного процесса (стационарного/нестационарного, периодического/непериодического, заданного в области произвольной конфигурации) строится на основе подхода, предложенного Хотеллингом [83]. Отметим, что разложение Карунена-Лоэва минимизирует среднеквадратическую ошибку при использовании в разложении конечного числа функций $\{E_k(t)\}$ и функцию энтропии, выраженную через дисперсии коэффициентов разложения, а принцип минимизации энтропии обеспечивает эффекты, типичные для преобразования кластеризации [67].

.

4 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

4.1 Сферические функции

Для решения задач динамики атмосферы и численного прогноза на сфере (или полусфере) спектральным методом в качестве базисных функций чаще всего применяют сферические функции, возникающие при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат (r, θ, λ) и отвечающие естественным краевым условиям: ограниченности у полюсов и периодичности по долготе. Здесь r - вертикальная координата; λ - долгота, отсчитываемая от меридиана Гринвича к востоку, $0 \le \lambda \le 2\pi$; θ - полярное расстояние, отсчитываемое от Северного до Южного полюса, $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $0 \le \theta \le \pi$; φ – географическая широта места.

Запишем трехмерное уравнение Лапласа

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 0$$

(в котором x, y, z - декартовы координаты рассматриваемой точки) в сферических координатах (r, θ, λ). Учитывая, что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$z = r\cos(\theta),\ x = r\sin(\theta)\cos(\lambda),\ y = r\sin(\theta)\sin(\lambda);$$

$$\lambda = arctg\left(\frac{y}{x}\right),\ \theta = arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right);$$

$$f_1(x, y, z) = f[\theta(x, y, z), \lambda(x, y, z), r(x, y, z)];$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}=0 \qquad . \tag{4.1}$$

Здесь $f=f(r,\theta,\lambda)$ - решение уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (4.1) методом разделения переменных, следуя, в основном, книге [39]. Представив решение в форме $f(r,\theta,\lambda)=U(r)\,Y(\theta,\lambda)$ и используя его в (4.1), получим

$$\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda}=0. \tag{4.2}$$

Так как здесь первое слагаемое не зависит от θ, а второе – от r, то уравнение может удовлетворяться при всех (r,θ,λ) лишь тогда, когда каждое слагаемое постоянно, т.е.

$$\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\mu, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{Y\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda}=-\mu. \tag{4.4}$$

Здесь μ - параметр (собственное число) уравнения (4.2);
$Y(\theta,\lambda)=Y(\theta,\lambda+2\pi)$ - неизвестная периодическая функция, ограниченная у полюсов Земли, т.е. при $\theta=0$ и $\theta=\pi$.

Общий интеграл уравнения (4.3) имеет вид

$$U(r)=A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}, \tag{4.5}$$

в котором число n должно удовлетворять условию

$$\mu=n(n+1),\ \ n=0,1,2,\ldots, \tag{4.6}$$

иначе тождественно ненулевые решения уравнения (4.4) не существуют. При n целом и $A_n=0$ решение уравнения (4.2) записывают в виде

$$f=\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}, \tag{4.7}$$

где $Y_n(\theta,\lambda)$ - какое-либо решение уравнения (4.4) при условии (4.6). Очевидно, исчерпываются все функции $Y_n(\theta,\lambda)$, входящие в решение уравнения Лапласа, имеющие вид (4.7). Следовательно, функции $Y_n(\theta,\lambda)$ являются собственными решениями уравнения

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}=-n\,(n+1)\,Y_n\,, \tag{4.8}$$

имеющими непрерывные первую и вторую производные. Эти решения называют сферическими функциями $Y_n(\theta,\lambda)$, а (4.6б) – уравнением сферических функций.

Решения уравнения (4.6б) также находят методом разделения переменных. Подстановкой соотношения

$$Y_n(\theta,\lambda)=P(\theta)\,Q(\lambda), \tag{4.9}$$

в уравнение (4.6б) оно приводится к системе двух уравнений:

$$\frac{d^2Q_m}{d\,\lambda^2}+m^2\,Q_m=0\,, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\,P_n^m}{d\theta}\right)+\left[n\,(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right]P_n^m=0\,, \tag{4.11}$$

где m - произвольное число. Однозначные непрерывные на окружности решения уравнения (4.11) получаются при целых значениях m.
Каждому значению m соответствуют два линейно-независимых решения:

$$Q_m=\cos(m\,\lambda),\ Q_m=\sin(m\,\lambda),\quad m=0,1,2,\ldots\quad . \tag{4.12}$$

Если положить $\cos(\theta)=\sin(\varphi)=\mu$, то (4.11) приводится к уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{d\,P_n^m}{d\mu}\right)-\left[n\,(n+1)-\frac{m^2}{(1-\mu^2)}\right]P_n^m=0\,, \tag{4.13}$$

которое при $m = 0$ является уравнением полиномов Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\,P_n}{d\mu}\right]-n(n+1)\,P_n=0\,. \tag{4.14}$$

В уравнении (4.13) сделаем подстановку

$$P_n^m(\mu)=\text{y}\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Здесь функция y будет удовлетворять уравнению

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\,\text{y}}{d\mu^2}+2(m+1)\mu\frac{d\,\text{y}}{d\mu}+(n-m)\,(n+m+1)\,\text{y}=0\,. \tag{4.15}$$

Чтобы найти частные решения (4.15), продифференцируем уравнение полиномов Лежандра (4.14) m раз по m. Применив формулу Лейбница, получим:

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^{m+2}P_n}{d\,\mu^{m+2}}-2(m+1)\,\mu\frac{d^{m+1}P_n}{d\,\mu^{m+1}}+(n-m)\,(n+m+1)\frac{d^m P_n}{d\,\mu^m}=0\,. \tag{4.16}$$

Приравнивая (4.16) и (4.15), видим, что функции $y=\dfrac{d^m P_n(\mu)}{d\,\mu^m}$ являются частными решениями уравнения (4.16). Отсюда функции

$$P_n^m(\mu)=\left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n}{d\,\mu^m} \tag{4.17}$$

будут частными решениями уравнения (4.13).
Возвращаясь к переменной θ, получим искомые частные решения уравнения (4.11):

$$P_n^m(\mu)\sin^m(\theta)\frac{d^m P_n(\mu)}{d\,\mu} \tag{4.18}$$

Поскольку полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ представляют собой полиномы степени n от μ, то функции $P_n^m(\mu)$ также являются полиномами, причем $P_n^m(\mu)=0$ при $m > n$. Функции $P_n^m(\mu)$ называются присоединенными полиномами (функциями) Лежандра.

Итак, для каждого n получено $n + 1$ частных решений уравнения (4.11): $P_n(\mu)$, $P_n^1(\mu)$, ..., $P_n^n(\mu)$, соответствующих значениям $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Комбинируя эти решения с решениями (4.12) уравнения (4.10), получим $2n + 1$ сферических функций:

$$P_n(\mu),\ P_n^m(\mu)\cos(m\,\lambda),\ P_n^m(\mu)\sin(m\,\lambda),\quad (m=1,2,\ldots,n\,;\,n=0,1,\ldots), \tag{4.19}$$

являющихся частными решениями уравнения (4.8). Эти $2n+1$ сферические функции линейно независимы, так как линейно независимы множители $\cos(m\lambda)$ и $\sin(m\lambda)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, всего может быть $2n+1$ линейно независимых сферических функций порядка n. Поэтому любую сферическую функцию можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых решений (4.19):

$$Y_n(\theta,\lambda)=a_0P_n^0(\mu)+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\,\lambda)+b_k\sin(k\,\lambda)\right)P_n^k(\cos(\theta)),$$

где a_k, b_k, a_0 - постоянные.

Резюмируя изложенное, акцентируем внимание на терминах:

$$Y_n^0=P_n(\mu) \tag{4.20}$$

это обыкновенный полином Лежандра порядка n;

$$Y^{(1)}{}_n^m = \cos(m\lambda)\sin^m(\theta)P_m^{(m)} = P_n^m(\mu)\cos(m\lambda), \tag{4.21}$$

$$Y^{(2)}{}_n^m = \sin(m\lambda)\sin^m(\theta)P_m^{(m)} = P_n^m(\mu)\sin(m\lambda) \tag{4.22}$$

- сферические функции (гармоники); $P_n^m(\mu)$ - функция Лежандра порядка *n* степени *m*. Числа *n*, *m* - целые, $n \geq m \geq 0$. При *n* < *m* принимают $Y_n^m = 0$. Как всякие полиномы функции Лежандра непрерывны и дифференцируемы неограниченное число раз. Символ *m* означает производную порядка *m* от полинома $P_n(\mu)$. Линии на шаровой поверхности, вдоль которых значения сферической функции равны нулю, называют её узловыми линиями. При $m = 0$ набор сферических функций $P_n(\mu)$ не зависит от долготы λ. Их называют зональными гармоническими сферическими функциями первого рода, так как узловые линии функции $P_n(\mu)$ представляют параллели, разделяющие шаровую поверхность на *n + 1* зону. В каждой зоне функция $P_n(\mu)$ сохраняет знак, а при переходе через узловую линию меняет ее на противоположный. На полюсах эти функции отличны от нуля. Функции $P_n(\mu)\cos(m\lambda)$, $P_n(\mu)\sin(m\lambda)$ называют тессеральными, так как их узловые линии образуются $(n-m)$ параллелями, разбивающими поверхность шара на клетки (tesserae); в каждой клетке они сохраняют знак и меняют его при пересечении границы клетки.

Функции Лежандра нечетны по степени *m*, симметричны относительно экватора, если значение $(n-m)$ четное, и антисимметричны, если $(n-m)$ нечетное. Число $(n-m)$ равно числу нулевых точек (числу корней) функции $P_n^m(\mu)$ между полюсами Земли (полюса не учитываются). Функции с $m = 0$ на полюсах обращаются в нуль.

Полиномы Лежандра первого рода и *n*-го порядка, являющиеся стандартизованными полиномами Лежандра, определяют по формуле

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n\, n!}\left[\frac{d^n\left(\mu^2-1\right)^n}{d\,\mu^n}\right]; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

найденной Родриго (1816 г.). Следовательно, несколько первых стандартизованных (обычных) полиномов Лежандра $P_n(\mu)$ можно определить выражениями [76]:

$$P_0(\mu) = 1\ ;\ P_1(\mu) = \cos(\theta)\ ;\ P_2(\mu) = \frac{(3\cos(2\theta)+1)}{4}\ ;$$

$$P_3(\mu) = \frac{(5\cos(3\theta)+3\cos(\theta))}{8}\ ;$$

$$P_4(\mu) = \frac{(35\cos(4\theta)+2\cos(2\theta)+9)}{64}\ ; \ldots$$

Примечание. Под стандартизованными ортогональными полиномами $R_n(\mu)$, $n = 0, 1, \ldots$ понимают ортогональные на интервале $[a,b]$ многочлены, для которых справедлива формула Родрига

$$R_n(\mu) = C_n \frac{\left[W(\mu)B^n(\mu)\right]^n}{W(\mu)} = C_n\, Q_n(\mu),\ \mu \in [a,b]. \qquad (4.24)$$

Здесь весовая функция подчиняется условию $\frac{W'(\mu)}{W(\mu)} = \frac{A(\mu)}{B(\mu)}$, в котором $A(\mu) = g_0 + g_1\,\mu$, $B(\mu) = h_0 + h_1\,\mu + h_2\,\mu^2$, $Q_n(\mu) = a_n\mu^n + b_n\mu^{n-1} + \ldots$.

Коэффициенты $\{C_n\}$ в (4.24) можно выбрать следующими способами:

- вычислив старший коэффициент a_n полинома $Q_n(\mu)$, подчинить выбор C_n условию $C_n a_n = 1$ и получить формулу Родрига для ортогональных полиномов с единичным старшим коэффициентом;
- чтобы полиномы $R_n(\mu)$ были ортонормированными;
- чтобы максимально упростить формулы для ортогональных полиномов и облегчить их применение в практических задачах. Именно этот способ выбора чисел C_n называют стандартизацией классических ортогональных полиномов.

Полиномы $P_n(\mu)$ получают по рекуррентной формуле

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - n(2n+1)P_n(\mu) + n\,P_{n-1}(\mu) = 0\,. \qquad (4.25)$$

Они близки к полиномам наилучшего равномерного приближения, поэтому их широко используют (например, в телеметрии для разработки эффективных методов и алгоритмов сжатия информации).

Для полиномов $P_n(\mu)$ справедлива еще одна формула:

$$P_n(\mu) = \frac{2(2n-1)!!\cos(n\theta)}{(2n)!!} + \frac{2(2n-3)!!\cos((n-2)\theta)}{2(2n-2)!!} + \frac{2(2n-5)!!\,3\cos((n-4)\theta)}{2\,4(2n-4)!!} + \ldots, \qquad (4.26)$$

Здесь число слагаемых равно $\frac{n}{2}$, а символом $g\,!!$ обозначено произведение всех чисел, не превосходящих g и имеющих ту же чётность, что и g. Так как в правой части (4.10m) все коэффициенты положительные, то её максимум достигается при $\theta = 0$ или, иначе, полином Лежандра $P_n(\theta)$ имеет максимум в точке $\mu = \cos(\theta) = 1$.

Чтобы убедиться в том, что полиномы $P_n(\theta)$ ортогональны с весом $W(\mu) = 1$ на отрезке [-1,1], необходимо, учитывая (4.26), проинтегрировать по частям при $m < n$ выражение

$$A_n^m = \int_{-1}^{1} W(\mu)\mu^m P_n(\mu)d\mu = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \mu^m \left[(\mu^2 - 1)^n\right]^{(n)} d\mu = 0\,. \qquad (4.27)$$

Следовательно, ортогональность полиномов $P_n(\theta)$ на [-1,1] доказана.

Из (4.23) вытекает, что старший коэффициент полинома Лежандра $P_n(\theta)$ равен $\dfrac{2\,n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n\,n!}=\dfrac{(2\,n)!}{2^2\,(n!)^2}$. Следовательно, полином Лежандра с единичным старшим коэффициентом определяется равенством

$$P_n^*(\mu)=\frac{2^n\,(n!)^2\,P_n(\mu)}{(2\,n)!}=\frac{\left[\left(\mu^2-1\right)^n\right]^{(n)}\,n!}{(2\,n)!}. \tag{4.28}$$

Норма стандартизованного полинома Лежандра равна

$$\|P_n(\mu)\|^2=\int_1^{-1}P_n^2(\mu)d\mu=\frac{(2\,n)!}{2^n(n!)^2}\int_1^{-1}\mu^n P_n\,(\mu)d\mu=\frac{2}{2n+1},$$

поэтому ортонормированный полином Лежандра имеет вид

$$P_n(\mu)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(\mu) \tag{4.29}$$

причем его старший коэффициент равен $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,\dfrac{(2n)!}{2n(n!)^2}$.

Для вычисления полиномов Лежандра, а следовательно и сферических функций, пользуются рекуррентными формулами:

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_n^m(\mu)}{d\,\mu}=(n+1)D_{n+1}^m\,P_{n-1}^m(\mu)-n\,D_{n+1}^m\,P_{n+1}^m(\mu),$$

$$\mu\,P_n^m(\mu)=D_{n+1}^m\,P_{n+1}^m(\mu)+D_n^m\,P_{n-1}^m(\mu),$$

$$D_n^m=\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}},\ n=0,1,2,\ldots\ . \tag{4.30}$$

Сферические функции также ортогональны на [-1,1] (ортогональны функции одного порядка и полиномы разных порядков при одном μ) с весовой функцией $W(\mu)=1$ и образуют полную замкнутую систему $\{Y_n^m\}$, которую можно использовать для представления полей метеовеличин на сфере.

Сферические функции удобно нормировать так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S\left|Y_n^m\right|^2\,ds=1$$

где интеграл берется по поверхности сферы единичного радиуса.

Для рядов по сферическим функциям справедлива следующая теорема [65]:

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте [-1,1], а модуль непрерывности на всем сегменте удовлетворяет условию Дини $\lim\limits_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\mathrm{Ln}(n)=0$, то ряд Фурье-Лежандра сходится к функции $f(x)$ во всех точках интервала (-1,1), причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$.

Согласно этой теореме, линейной комбинацией функций $P_n^m(\mu)\cos(m\lambda)$, $P_n^m(\mu)\sin(m\lambda)$ можно с любой точностью, в смысле равномерной сходимости, представить непрерывную функцию $f(x)$ на сфере единичного радиуса, если n достаточно велико [62]. Таким образом, если гидродинамическая задача имеет решение, непрерывное вместе со вторыми производными на сфере, то решение может быть представлено бесконечным рядом по сферическим функциям (гармоникам), который сходится абсолютно и равномерно.

Разложение функции в ряд по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(\theta,\lambda)=a_0P_0(\mu)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_nY_n^0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_n^m\,Y_n^m(1)+b_n^m\,Y_n^m(2)\right]\right\}, \tag{4.32}$$

в котором коэффициенты разложения вычисляют по формулам:

$$a_0=\frac{1}{2}\iint_S f(\theta,\lambda)ds, \tag{4.33}$$

$$a_n=\frac{\iint_S f(\theta,\lambda)P_n(\mu)d\theta}{\iint_S P_n^2(\mu)ds}=\frac{N_n^2}{2\pi}\iint_S f(\theta,\lambda)Y_n^0\,d\theta, \tag{4.34}$$

$$a_n^m=\frac{\left(N_n^m\right)^2}{\pi}\iint_S f(\theta,\lambda)\,Y_n^{m(1)}\,ds, \tag{4.35}$$

$$b_n^m=\frac{\left(N_n^m\right)^2}{\pi}\iint_S f(\theta,\lambda)\,Y_n^{m(2)}\,ds, \tag{4.36}$$

$$N_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \tag{4.37}$$

$$N_n^m=N_n\sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}, \tag{4.38}$$

Экономичней выполнять разложение по сферическим функциям в комплексной форме. В этом случае

$$Y_n^m=\exp(im\lambda)P_n^m(\mu), \tag{4.39}$$

и коэффициенты также являются комплексными.

В спектральных моделях оперируют с ортонормированными полиномами и функциями Лежандра

$$\dot{P}_n = N_n\, P_n\, ;\; \dot{P}_n^m = N_n^m\, P_n^m\, . \tag{4.40}$$

Здесь числа N_n и N_n^m представляют собой равномерную оценку соответственно для ортонормированных полиномов и функций Лежандра:

$$\left|\overset{\bullet}{P_n}(1)\right| \le N_n = \left[\frac{2n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, cos\,\theta = \mu\, ,\, \mu \in [-1\, ,1], \tag{4.41}$$

$$\left|\overset{\bullet}{P_n}(1)\right| \le N_n^m = N_n \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Равномерные оценки (4.41) являются точными, так как

$$\left|\overset{\bullet}{P_n}(1)\right| = \left[\frac{2n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \left|\overset{\bullet}{P_n}(-1)\right| = (-1)^n \left[\frac{2n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{4.42}$$

$$\left|\overset{\bullet}{P_n}(1)\right| = \left[\frac{2n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\overset{\bullet}{P_n}(-1)\right| = (-1)^n \left[\frac{2n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Спектральные модели, в которых в качестве базисных функций используют ортонормированные сферические функции, доминируют в настоящее время [43], так как

- сферические функции непрерывны и определены всюду на сфере (полиномы Лежандра P_n^m имеют порядок $O\left(sin^m\,\theta\right)$ и стремятся к нулю при $\theta = 0$, $\theta = \pi$), благодаря чему обеспечивается однородное представление полей метеорологических величин всюду, включая окрестности полюсов;
- разложения в ряды по сферическим функциям достаточно гладких физических функций сходятся довольно быстро. Даже если в отдельных точках имеются разрывы, то сходимость рядов всегда будет обеспечена, но хуже, чем при отсутствии разрывов. Представление таких полей с помощью разложений по сферическим функциям будут давать более гладкие поля (т.е. сглаживать разрывы). Поэтому при выборе формы уравнений модели стремятся к тому, чтобы они не содержали переменных, для которых имеются точки разрывов.

Однако (вследствие особенностей сферической системы координат) полюса являются точками, в которых зональная и меридиональная компоненты непрерывного вектора горизонтальной скорости терпят разрыв. Эту трудность преодолевают двумя способами:

- представлением кинематических свойств воздушных течений с помощью скалярных функций - функции тока ψ и потенциала скорости φ:

$$U(\lambda)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r_0\sin\theta}\ ,$$

$$V(\theta)=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\frac{1}{r_0\sin\theta} \tag{4.43}$$

и решением (вместо уравнений движения) уравнений Пуассона для двумерной дивергенции и вихря вектора скорости. Для определения скалярных величин ψ и φ достаточно условия ограниченности у полюсов, которому сферические функции удовлетворяют по построению;

- введением в уравнения движения функций Робера [103]: $U=u\sin\theta$, $V=v\cos\theta$, которые не имеют разрыва, стремясь у полюсов к нулю.

Представление полей по сферическим функциям упрощает процедуру обращения оператора Лапласа, что весьма существенно, так как во многих моделях приходится решать уравнения Пуассона и Гельмгольца, в которых фигурирует этот оператор. Спектральные уравнения, базирующиеся на аппарате сферических функций,

- удовлетворяют требованиям сохранения интегральных инвариантов континуальной модели и отсутствия нелинейной вычислительной неустойчивости по Филлипсу;
- снимают проблему картографической проекции;
- снимают проблему полюсов, так как здесь решение ограничено на сфере вследствие того, что полиномы Лежандра P_n^m имеют порядок $O(\sin^m\theta)$ и стремятся к нулю на полюсах (при Q равном 0 или π);
- граничные условия являются естественными для глобальной и полусферной моделей (ограниченность решения, периодичность по долготе; дополнительное условие для полусферы: симметрия или асимметрия полей метеовеличин относительно экватора);
- позволяют избежать ошибок в определении скорости перемещения атмосферных волн за счет точного вычисления параметра Россби $\beta=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}y}\frac{1}{r_0}=\frac{2\omega_0\sin\theta}{r_0}$ (где $l=2\omega_0\sin\theta 1$ - параметр Кориолиса, входящий в проекции отклоняющей силы вращения Земли на координатные оси; ω_0 - угловая скорость суточного вращения Земли; θ - дополнение географической широта узла сетки; r_0 - средний радиус Земли) и линейной части адвекции, а также более точного расчета производных по горизонтальным координатам.

Однако

- сферические функции не являются собственными решениями линейной системы полных уравнений;
- при независимом представлении полей геопотенциала и ветра рядами по сферическим функциям отсутствуют соотношения между полями массы (давления/геопотенциала) и движения (ветра), поэтому для согласования этих полей приходится применять процедуру инициализации с помощью нормальных мод [36];

- использование сферических функций даёт возможность осуществлять метод БПФ лишь по долготе λ;
- в нижней тропосфере, где велика роль движений подсиноптического и подсеточного масштабов и атмосферные поля существенно негладкие, ряды по сферическим функциям сходятся довольно медленно [33, 52, 79]. Так, для обеспечения достаточно детального представления полей сравнительно плавно меняющихся в пространстве основных метеовеличин в ЕЦСПП используют спектральные модели на основе сферических функций с тотальным волновым числом, превышающим 1000.

4.2 Спектральное усечение бесконечных рядов по детерминированным базисным функциям

Спектральный метод, как и метод сеток, позволяет определить конечное число параметров. При использовании рядов по базисным функциям искомыми параметрами являются тенденции коэффициентов разложения, которые вычисляются путём решения систем определяющих уравнений. Поскольку в этих уравнениях содержится конечное число базисных функций и искомых параметров, то их принято называть пространственно усеченными уравнениями.

Пусть распределение некоторой метеорологической величины f, заданной на сфере в узлах широтно-долготной сетки, представлено рядом по сферическим функциям:

$$f(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} f_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \qquad (4.44)$$

в котором $Y_n^m(\lambda, \mu)$ - сферические функции порядка m и степени n, зависящие от пространственных координат, а коэффициенты разложения $f_n^m(t)$ есть функции времени.

Компоненты ряда (4.44) условно можно представить [12] как совокупность точек в области в плоскости m, n. Ряд (4.44) эквивалентен (с точностью до невязки ε) следующему ряду [12, 49]:

$$f(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=|m|}^{N(m)} f_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \qquad (4.45)$$

Так как ряды по сферическим функциям содержат два индекса, то форма усечения ряда (числа спектральных уравнений) может быть различной.

В спектральной модели атмосферы, разработанной в Росгидрометцентре, реализовано пентагональное усечение, полностью определяемое параметрами M^*, N^*, K^* [43].

Частными случаями пентагонального усечения являются треугольное ($M^* = N^* = K^*$ и число членов второй суммы в (4.45) линейно убывает при увеличении m), ромбоидальное ($K^* = N^* + M^*$) и трапециидальное ($K^* = N^*$, $K^* > M^*$) типы усечений. Предел суммирования в (4.45) равен

$$N(m) = \begin{cases} N^* + |m|, \text{если } N^* + |m| \le K^*; \\ K^*, \quad \text{если } N^* + |m| > K^*. \end{cases}$$

В пользу треугольного усечения свидетельствует то, что в этом случае при одинаковом числе членов ряда описывается большая доля дисперсии, чем при других способах усечения [49], а изотропность аппроксимации дифференциальных (непрерывных) уравнений на сфере (т.е. равномерное разрешение [12]) исключает проблему полюсов, поскольку атмосферное поле является инвариантным при вращении относительно полярной оси. Кроме того, такое усечение обеспечивает более высокую точность представления кинетической энергии, чем ромбоидальное [77]. Последнее удобно для программной реализации, так как спектральные коэффициенты можно накапливать в виде двумерных массивов с простыми индексами [43]. Эксперименты показывают, что при одинаковом числе членов ряда при ромбоидальном усечении разрешение в высоких широтах лучше, а в низких хуже, чем при треугольном усечении [49].

При произвольных значениях M^* и N^* получается усечение типа прямоугольной трапеции, а при $N^* = |m| + N1$ параллелограммное усечение.

Выбор типов усечения этим не ограничивается. Он может меняться в зависимости от решаемой задачи. Единственным средством, определяющим достоинства и недостатки различных типов усечения, служат практические расчеты.

Так, в работе [75] предложена секторная форма усечения спектральных уравнений, характеризующаяся постепенным уменьшением верхнего предела *N(m)* числа *n* по мере роста числа *m*. Граница секторного усечения описывается уравнением $N^2(m) + m^2 = 2\,M^2$. Такое усечение обеспечивает минимальные значения потоков энергии, количества движения и энстрофии через границы рассматриваемой области.

Однако все-таки остается неясным, какой из способов усечения более эффективен при численном интегрировании моделей. Эмпирические исследования показывают [49], что при одинаковом числе членов ряда треугольное усечение позволяет лучше представить исходные поля метеорологических величин. При работе с моделями это обстоятельство может оказаться несущественным, так как исходные данные (из-за недостаточной плотности наблюдательной сети) имеют разрешение, меньшее, чем используемое в современных спектральных моделях. Последние оперируют с аппроксимирующими рядами, содержащими большое число членов разложения, поэтому практически обеспечивается достаточно точное представление сравнительно плавно меняющихся в пространстве основных метеорологических величин. Чтобы охарактеризовать соответствие аппроксимированных и фактических полей в случае, когда в спектральных моделях сохраняют небольшое число волновых мод, были проведены расчеты для различного числа членов ряда и точек широтно-долготной сетки. Так и следовало ожидать, точность аппроксимации значений функций в узлах значительно повышается, если число коэффициентов разложения приближается к числу точек сетки, на которой заданы результаты объективного анализа.

4.3 Баротропная геострофичекая модель атмосферы (базис – сферические функции)

В основу модели положим баротропное квазигеострофическое уравнение

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -J\left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{l} + l\right), \tag{4.46}$$

Так как уравнение двумерное, то использовать при его решении тригонометрические функции неудобно. В современных гидродинамических моделях атмосферы используют двумерные сферические функции порядка m степени n, обладающие свойством ортогональности,

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = \overline{P}_n^m(\mu)\, e^{i m \lambda}, \tag{4.47}$$

где

$\overline{P}_n^m(\mu) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2} \dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\mu)$ – нормированные присоединённые полиномы Лежандра;

$P_n^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\,m} P_n(\mu)}{d\,\mu^m}, \tag{4.48}$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n \left(\mu^2 - 1\right)^n}{d\,\mu^n} \quad \text{– многочлены Лежандра,} \tag{4.49}$$

или

$$P_n^m(\mu) = \frac{(-1)^m}{2^n\, n!} \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\,m+n} \left(\mu^2-1\right)^n}{d\,\mu^{m+n}},$$

где

n – степень полинома,

m – порядок полинома.

$0 \le |m| \le n$,

если $|m| > n$, то $P_n^m(\mu) = 0$,

$\mu = \sin\varphi$ – Гауссова широта;

λ, φ – географические долгота и широта соответственно.

Выражение (4.49) носит название формулы Родрига (по имени французского математика Б.О. Родрига, получившего её).

Поскольку свойство ортогональности присоединенных полиномов Лежандра математически записывается следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^m(\mu)\, P_k^l(\mu)}{1-\mu^2}\, d\mu = \begin{cases} 0, & \begin{cases} m \ne l \\ n \ne k \end{cases}, \\ \dfrac{(n+m)!}{m(n-m)!}, & \begin{cases} m = l \\ n = k \end{cases} \end{cases} \tag{4.50}$$

или по другому

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu)\, P_k^l(\mu)\, d\,\mu = \begin{cases} 0 \quad , & \begin{cases} m \neq l \\ n \neq k \end{cases} \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad , & \begin{cases} m = l \\ n = k \end{cases} \end{cases}. \tag{4.51}$$

Тогда свойство ортогональности нормированных присоединенных полиномов Лежандра записывается в виде:

$$\int_{-1}^{1} \overline{P}_n^m(\mu)\, \overline{P}_k^l(\mu)\, d\,\mu = \begin{cases} 0 \quad , & \begin{cases} m \neq l \\ n \neq k \end{cases} \\ 1 \quad , & \begin{cases} m = l \\ n = k \end{cases} \end{cases}. \tag{4.52}$$

Для расчёта присоединенных полиномов Лежандра используют рекуррентные формулы, например, такого вида

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(\mu) = (2\,n+1)\mu\, P_n^m(\mu) - (\,n+m)\, P_{n-1}^m(\mu), \tag{4.53}$$

$$2\,m\,\mu\, P_n^m(\mu) = -\sqrt{1-\mu^2}\,\left[P_n^{m+1}(\mu) + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\mu)\right], \tag{4.54}$$

Разложение функции $f(\lambda, \mu, t)$ (при условии, что функция f и ее первые две производные непрерывны) в ряд по сферическим функциям, обеспечивающее точное решение уравнения (4.46) имеет вид

$$f(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} f_{n\,m}(t)\, Y_n^m(\lambda, \mu). \tag{4.55}$$

Но для практических приложений этот ряд должен быть усечен, то есть формула (4.55) заменяется на приближенную

$$\hat{f}(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=|m|}^{N} f_{n\,m}(t)\, Y_n^m(\lambda, \mu). \tag{4.56}$$

В отличие от (4.55) спектральное представление (4.56) является приближенным. Это отмечается диакритическим знаком «крышка» (циркумфлекс) над функцией в (4.56).

У сферических функций есть свойство, которое очень полезно при решении уравнений типа (4.46) – они являются собственными функциями двумерного оператора Лапласа, т.е. сферические функции удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -\frac{n(n+1)}{a^2} Y_n^m(\lambda, \mu), \tag{4.57}$$

где двумерный оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right], \tag{4.58}$$

где a – радиус Земли.

Подставляя ряд (4.56) с треугольным усечением в уравнение (4.46) и используя свойство (4.57) получим спектральную форму уравнения баротропной квазигеострофической модели

$$-\frac{1}{a^2} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} n(n+1) \frac{d\,\Phi_{nm}(t)}{d\,t} Y_n^m(\lambda, \mu) =$$

$$= -\frac{i}{a^4 l} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{nm}(t) m\ Y_n^m(\lambda, \mu) \left(\sum_{k=-N}^{N} \sum_{p=|m|}^{N} \Phi_{pk}(t) k(k+1) \frac{\partial Y_p^k(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + 2\,\omega \right) +$$

$$+\frac{i}{a^6 l} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{nm}(t) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} \left(\sum_{k=-N}^{N} \sum_{p=|m|}^{N} \Phi_{pk}(t) k(k+1)\ i\, p\, Y_p^k(\lambda, \mu) \right) + \varepsilon, \tag{4.59}$$

Коэффициент разложения в начальный момент времени $\Phi_{nm}(0)$ определяется из начальных полей геопотенциала.

Так как пределы сумм одинаковые, то можно объединить перемножаемые ряды

$$-\frac{1}{a^2} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} n(n+1) \frac{d\,\Phi_{nm}(t)}{d\,t} Y_n^m(\lambda, \mu) =$$

$$-\frac{i}{a^4 l} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{p=|m|}^{N} \left(\Phi_{pk}(t) \Phi_{nm}(t) k(k+1) m \frac{\partial Y_p^k(\lambda, \mu)}{\partial \mu} Y_n^m(\lambda, \mu) + 2\,\omega\, \Phi_{nm}(t) m\ Y_n^m(\lambda, \mu) \right) +$$

$$+\frac{i}{a^6 l} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{p=|m|}^{N} \Phi_{pk}(t) \Phi_{nm}(t) k(k+1) p\ Y_n^m(\lambda, \mu) \frac{\partial Y_p^k(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \varepsilon\,. \tag{4.60}$$

Минимизируем невязку по методу Галёркина, то есть потребуем выполнения соотношения

$$\int_0^{2\pi} \int_1^1 \varepsilon \overline{Y_{n1}^{m1}}(\lambda, \mu)\, d\,\mu\, d\,\lambda = 0 \text{, при } m1 \in [-N, N],\ n1 \in [0, N], \tag{4.61}$$

для всех возможных значений волновых чисел.

Поставляя (4.60) в (4.61) и учитывая ортогональность сферических функций, получим определяющую систему уравнений

$$-\frac{1}{a^2} n1(n1+1) \frac{d\,\Phi_{n1\,m1}(t)}{d\,t} =$$

$$-\frac{i}{a^4 l}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{p=|m|}^{N}\Big(\Phi_{pk}(t)\Phi_{nm}(t)k(k+1)m W_{npn1}^{mkm1}\Big)+2\omega\,\Phi_{n1\,m1}(t)m1+$$

$$+\frac{i}{a^6 l}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{p=|m|}^{N}\Phi_{pk}(t)\Phi_{nm}(t)k(k+1)p\;\,W1_{nn1p}^{mm1k}\;\;, \qquad (4.62)$$

где W_{npn1}^{mkm1}, $W1_{npn1}^{mkm1}$ - коэффициенты взаимодействия,

$$W_{npn1}^{mkm1}=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}Y_n^m(\lambda,\mu)\frac{\partial\,Y_p^k(\lambda,\mu)}{\partial\,\mu}\overline{Y_{n1}^{m1}}(\lambda,\mu)d\,\mu\,d\,\lambda\,, \qquad (4.63)$$

$$W1_{npn1}^{mkm1}=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}Y_p^k(\lambda,\mu)\frac{\partial\,Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\,\mu}\overline{Y_{n1}^{m1}}(\lambda,\mu)d\,\mu\,d\,\lambda\,. \qquad (4.64)$$

4.4 Баротропная негеострофичекая спектральная модель атмосферы – модель «мелкой воды» (базис – сферические функции)

Приближение мелкой воды предполагает, что атмосфера есть тонкая плёнка идеального газа, ограниченная снизу непроницаемой ровной поверхностью, а сверху вакуумом.

Модель представлена тремя прогностическими уравнениями для: меридиональной составляющей скорости ветра (4.65), зональной составляющей скорости ветра (4.66) и геопотенциала (4.67) [12, 13]

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}U\frac{\partial U}{\partial\lambda}+\frac{Cos\varphi}{a}V\frac{\partial U}{\partial\mu}+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}-lV=0, \qquad (4.65)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}U\frac{\partial V}{\partial\lambda}+\frac{Cos\varphi}{a}V\frac{\partial V}{\partial\mu}+\frac{Cos\varphi}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}+lU=0, \qquad (4.66)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\frac{\partial U\Phi}{\partial\lambda}+\frac{Cos\varphi}{a}\frac{\partial V\Phi}{\partial\mu}\;=0, \qquad (4.67)$$

где

U	- меридиональная составляющая скорости ветра,
V	- зональная составляющая скорости ветра,
Φ	- геопотенциал,
λ	- долгота,
μ=sin(φ)	- гауссова широта,
φ	- широта,
t	- время,
a	- радиус Земли,
l=2ωsin(φ)	- параметр Кориолиса.

Сначала необходимо привести уравнения системы (4.65) – (4.67) к спектральному виду. Для этого представим все метеорологические величины в виде ряда по сферическим функциям с треугольным усечением (4.55) и подставим в систему уравнений модели «мелкой воды» (4.65) – (4.67). В итоге получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)=\varepsilon \qquad (4.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{Cos\varphi}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)=\varepsilon \qquad (4.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]+\frac{Cos\varphi}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\right]=\varepsilon \qquad (4.70)$$

где ε – ошибка аппроксимации, вызванная заменой функции усечённым рядом.

Так как производная суммы равна сумме производных, то «меняем» местами дифференцирование и суммирование, а также учитываем правил произведения сумм:

$$\sum_{i}^{I} A_i \cdot \sum_{i}^{I} B_i = \sum_{i_1}^{I}\sum_{i_2}^{I} A_{i_1} B_{i_2}$$

получим

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \frac{\partial U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\frac{\partial U_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} +$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\text{м})\frac{\partial U_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu} +$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} -$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot V_{m_1 n_1}(t)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) = \varepsilon \qquad (4.70)$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \frac{\partial V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\frac{\partial V_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} +$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)\frac{\partial V_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu} +$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\mu} +$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot U_{m_1 n_1}(t)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) = \varepsilon \qquad (4.71)$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}\frac{\partial U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\Phi_{m_1n_1}(t)Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}\frac{\partial V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\Phi_{m_1n_1}(t)Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=$$

$$=\varepsilon \tag{4.72}$$

Поскольку коэффициент разложения зависит только от времени, а базисная функция (в данном случае сферическая) – только от пространства, система уравнений (4.70) – (4.72) примет следующий вид:

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dU_{mn}(t)}{dt}Y_n^m(\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\,U_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)U_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu}+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}-$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)=\varepsilon \tag{4.73}$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dV_{mn}(t)}{dt}Y_n^m(\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)\,V_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)Y_n^m(\lambda,\mu)V_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu}+$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\mu}+$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}l_{mn}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)=\varepsilon, \tag{4.74}$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt}Y_n^m(\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\Phi_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{Cos\varphi}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\Phi_{m_1n_1}(t)\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=$$

$$=\varepsilon, \tag{4.75}$$

Исходя из того, что сферическая функция $Y_n^m(\lambda,\mu)$ равна произведению полинома Лежандра $P_n^m(\mu)$ на экспоненту $e^{im\lambda}$, можно взять производную

$$\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=\frac{\partial P_n^m(\mu)e^{im\lambda}}{\partial\lambda}=P_n^m(\mu)\frac{\partial e^{im\lambda}}{\partial\lambda}=P_n^m(\mu)\cdot i\cdot m\cdot e^{im\lambda}=$$

$$=i\cdot m\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)$$

Учитывая рекуррентные соотношения [2, 49]

$$(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n^m(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=\alpha_{mn}Y_{n-1}^m(\lambda,\mu)-\beta_{mn}Y_{n+1}^m(\lambda,\mu),$$

где $\alpha_{mn}=(n+1)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}}$ и $\beta_{mn}=n\sqrt{\frac{(n+1)^2-m^2}{4(n+1)^2-1}}$.

уравнения (4.73) – (4.75) примут вид:

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dU_{mn}(t)}{dt}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot i\cdot m\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha_{mn}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right]+$$

$$+\frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) -$$

$$- \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) = \varepsilon, \tag{4.76}$$

$$\sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \frac{dV_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) +$$

$$+\frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \ i \ \cdot m \ \cdot$$

$$\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) + \frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot$$

$$\cdot \left[\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right] +$$

$$+\frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t) \cdot \ \alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda,\mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda,\mu) +$$

$$+ \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) \cdot \ U_{m_1 n_1}(t) \cdot \ Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) = \varepsilon. \tag{4.77}$$

$$\sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) +$$

$$+\frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot$$

$$\cdot \left[Y_n^m(\lambda,\mu) \ \cdot i \cdot m_1 \ \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) \ \cdot i \ \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda,\mu) \ \right] +$$

$$+\frac{1}{a \cdot Cos\varphi} \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=|m|}^{N} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t) \ \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot$$

$$\cdot \left[Y_n^m(\lambda,\mu) \cdot \left(\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right) +\right.$$

$$\left. + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda,\mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda,\mu))\right] = \varepsilon. \tag{4.78}$$

Поскольку система уравнений (4.76) – (4.78) незамкнута – 3 уравнения и *3*(2*N+1)* неизвестная (производные для всех коэффициентов разложения *(2*N+1)* для трех функций (две составляющие скорости и геопотенциал)), то далее минимизируем невязку методом Галёркина, для этого умножим ε на $\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)$ и проинтегрируем результат по μ от -1 до 1 и по λ от 0 до 2π, то есть по всему земному шару:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \varepsilon\, \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0,$$

где $\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)$ – это сопряженная сферическая функция.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \frac{dU_{mn}(t)}{dt}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot i\ \cdot m\ \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot U_{m_1n_1}(t)\left[\alpha_{mn}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right]\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \Phi_{mn}(t)\cdot\ i\cdot\ m\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu -$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot V_{m_1n_1}(t)\ \cdot\ Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0, \tag{4.79}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} \frac{dV_{mn}(t)}{dt}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot V_{m_1n_1}(t)\ \cdot i\ \cdot m\ \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right]\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\cdot\ (\alpha_{mn}\cdot Y_{n-1}^m(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^m(\lambda,\mu))\cdot$$

$$\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}l_{mn}\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0,\qquad(4.80)$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt}Y_n^m(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\left[Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot i\cdot m_1\cdot\ Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)+Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\ i\cdot\ m\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\ \right]\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\ \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot[Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\left(\alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right)+$$

$$+Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot(\alpha_{mn}\cdot Y_{n-1}^m(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^m(\lambda,\mu))]\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0.\qquad(4.81)$$

Учитывая, что коэффициенты разложения не зависят от пространства, получаем:

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dU_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot m\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\left[\alpha_{mn}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right]\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\cdot m\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu-$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\,Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\,\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0, \tag{4.82}$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dV_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot m\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right]\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot(\alpha_{mn}\cdot Y_{n-1}^m(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^m(\lambda,\mu))\cdot$$

$$\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0, \tag{4.83}$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot[Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\ i\cdot\ m_1\ \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)+Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\ i\cdot\ m\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\,]\cdot$$

$$\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot\ \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot[Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\left(\alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)-\beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\right)+$$

$$+Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot(\alpha_{mn}\cdot Y_{n-1}^{m}(\lambda,\mu)-\beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu))]\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0. \tag{4.84}$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dU_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot m\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\alpha_{mn}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu-$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\beta_{mn}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\cdot\ m\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu-$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}l_{mn}\cdot\ V_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0,$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{dV_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot m\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu -$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot \alpha_{mn}\cdot Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu -$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\Phi_{mn}(t)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot \beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0,$$

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot\ m_1\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}U_{mn}(t)\cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot\ m\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\ Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\ \cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\alpha_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu-$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot\ \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot\beta_{m_1n_1}\cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu+$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\ \cdot\Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\alpha_{mn}\cdot Y_{n-1}^{m}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu-$$

$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N}V_{mn}(t)\cdot\ \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\beta_{mn}\cdot Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu=0.$$

Учитывая ортогональность сферических функций при $\begin{cases} m = m_2 \\ n = n_2 \end{cases} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 4\pi,$

и

при $\begin{cases} m \neq m_2 \\ n \neq n_2 \end{cases} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0,$

система определяющих уравнений упрощается.

Окончательный вид прогностического уравнения меридиональной составляющей скорости ветра в спектральной форме.

$$\frac{dU_{m_2n_2}(t)}{dt}4\pi + \frac{i}{a\cdot Cos\varphi}\Phi_{m_2n_2}(t)m_2 +$$
$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\ U_{m_1n_1}(t)\ m\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}Y_n^m(\lambda,\mu)\,Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu +$$
$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot\alpha_{mn}\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}\cdot Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu -$$
$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot\beta_{mn}\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}Y_n^m(\lambda,\mu)Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu -$$
$$-\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\ \cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\,\overline{\cdot Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0 \qquad (4.85)$$

Окончательный вид прогностического уравнения зональной составляющей скорости ветра в спектральной форме.

$$\frac{dV_{m_2n_2}(t)}{dt}\cdot 4\pi + \frac{1}{a\cdot Cos\varphi}\cdot\Phi_{m_2n_2}(t)\cdot(\ \alpha_{m_2n_2} - \ \beta_{m_2n_2})\cdot 4\pi +$$
$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\ V_{m_1n_1}(t)\,m\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\cdot V_{m_1n_1}(t)\cdot \alpha_{m_1n_1}\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu) Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu -$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t) V_{m_1n_1}(t)\, \beta_{m_1n_1}\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu) Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu +$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} l_{mn}\cdot U_{m_1n_1}(t)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu = 0 \tag{4.86}$$

Окончательный вид прогностического уравнения геопотенциала в спектральной форме.

$$\frac{d\Phi_{m_2n_2}(t)}{dt} +$$

$$+\frac{i}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} U_{mn}(t)\cdot \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot (m_1+m)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\, \Phi_{m_1n_1}(t)\, \alpha_{m_1n_1}\cdot$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu)\cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\, \Phi_{m_1n_1}(t) \beta_{m_1n_1}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_n^m(\lambda,\mu) Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu +$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\, \Phi_{m_1n_1}(t)\cdot \alpha_{mn}\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Cos\varphi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\cdot Y_{n-1}^{m}(\lambda,\mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu) d\lambda d\mu -$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{m_1=-N}^{N}\sum_{n_1=|m_1|}^{N} V_{mn}(t)\ \Phi_{m_1 n_1}(t)\cdot\beta_{mn}\cdot$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = 0 \qquad (4.87)$$

При преобразовании системы уравнений модели «мелкой воды» к спектральному виду получены слагаемые, представляющие собой интегралы от произведения трех базисных функций, которые являются коэффициентами взаимодействия. В системе уравнений (4.85)-(4.87) два типа коэффициентов

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)\,Y_{n}^{m}(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = W_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{Cos\varphi}Y_{n_1}^{m_1}(\lambda,\mu)Y_{n+1}^{m}(\lambda,\mu)\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda,\mu)d\lambda d\mu = V_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2}$$

Наличие коэффициентов взаимодействия – это достоинство данного метода, так как коэффициенты взаимодействия прекрасно описывают взаимодействие волн, в результате которого появляются новые более короткие волны, которые не описываются при выбранном пространственном разрешении модели. Недостаток коэффициентов взаимодействия в их количестве и сложности расчёта.

Определить коэффициенты взаимодействия можно с помощью коэффициентов Клебша-Гордана [59].

$$W_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2} = \begin{cases} Z\cdot S\cdot C(n_2,n_1,n,|m_1|,|m_2|,|m|)\cdot C(n_2,n_1,n,0,0) & \text{при } (4.88)\\ 0, & \text{при } (4.89)\end{cases}$$

$$|m|+|m_1|+|m_2| - \text{чётное число,} \qquad (4.88)$$

$$|m|+|m_1|+|m_2| - \text{нечётное число,} \qquad (4.89)$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{(n_1-m_1)!\,(n_2-m_2)!\,(n-m)!\,(n+|m_1|)!\,(n+|m_2|)!\,(n+|m|)!}{(n_1+m_1)!\,(n_2+m_2)!\,(n+m)!\,(n_1-|m_1|)!\,(n_2-|m_2|)!\,(n-|m|)!}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}}\cdot i^{|m|+|m_1|+|m_2|}\cdot(-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n}$$

$$C(n_2,n_1,n,m_1,m_2,m) = \left[\frac{(2m+1)(m_1+n)!\,(m-n_2)!}{(m_1-n)!\,(m_2+n_1)!\,(m_2-n_1)!}\cdot\frac{(m-m_1+m_2)!\,(m_1+m_2-m)!\,(m_1+m_2+m+1)!}{(m+n_2)!\,(m+m_1+m_2)!}\right]^{1/2}.$$

$$\cdot \sum_{S=\max(n+n_1, m-m_1)}^{l} \frac{(-1)^{m_1+n_1+S}(m+S)!\,(m_2+S-n)!}{(m-S)!\,(S-n-n_1)!\,(S-m_1+m_2)!\,(m_1-m_2+S+1)!}$$

5 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО ФУНКЦИЯМ ХАФА: АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

5.1 Уравнение теории приливов

С целью учета вращения Земли при построении системы базисных функций вместо собственных функций решений уравнения Гельмгольца часто используют собственные функции (собственное решение) уравнения горизонтальной структуры атмосферы [28, 49]:

$$L[G(\theta,\lambda)] + (\sigma\, r_0)^2\; G(\theta,\lambda)\frac{1}{gh} = 0, \tag{5.1}$$

именуемые функциями Хафа $G(\theta,\lambda)$ и при угловой скорости вращения Земли $\omega_0 = 0$ вырождающиеся в обычные сферические функции. В (5.1) обозначено: σ - частота колебаний атмосферы (вещественная величина, если энергия сохраняется и не существует неограниченно растущих или затухающих решений); h - постоянная разделения переменных в трёхмерной модели атмосферы (см. ниже);

$$L = \frac{f^2}{\sin\,\theta}\frac{\partial\left(\dfrac{\sin\theta}{\left(f^2 - \cos^2(\theta)\right)}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{i}{f}\,ctg\,\theta\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{f^2}{f^2 - \cos^2\theta}\left(\frac{i}{f}ctg\,\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\lambda} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}\right) - \tag{5.2}$$

- оператор из уравнения Лапласа теории приливов (или, иначе, приливного уравнения Лапласа). Он представляет собой оператор Лапласа на единичной сфере, возмущенный членами, обращающимися в нуль при $\omega_0 = 0$ (т.е. при высоких значениях безразмерной частоты колебаний атмосферы $f = \dfrac{\sigma}{2\,\omega_0} \to \infty$, обратной периоду колебаний, выраженному в полусутках), и обобщающий оператор Лапласа в неизотропном случае.

5.2 Адиабатическая бароклинная модель покоящейся атмосферы. Уравнения вертикальной и горизонтальной структуры

Запишем уравнения бароклинной адиабатической модели в сферической системе координат для отклонений метеовеличин f' от их значений в покоящейся атмосфере $\bar{f}$, пренебрегая при этом малыми членами:

$$\frac{\partial v'(\lambda)}{\partial t} = -\frac{1}{r_0\,\bar{\rho}\sin\theta}\frac{\partial p'}{\partial\lambda} - 2\,\omega_0\cos\theta\; v'(\theta),$$

$$\frac{\partial v'(\theta)}{\partial t} = -\frac{1}{r_0 \overline{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + 2\omega_0 \cos\theta \, v'(\lambda),$$

$$\frac{\partial w'(\lambda)}{\partial t} = -\frac{1}{r_0 \overline{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g \rho'}{\overline{\rho}},$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\overline{\rho} D' - w' \frac{d \overline{\rho}}{d z},$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -c^2 \overline{\rho} D' + \overline{\rho} g w'. \qquad (5.3)$$

Здесь $c = \left(\frac{\chi \overline{p}}{\overline{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} = \chi R \overline{T}$ адиабатическая скорость звука; w' - вертикальная скорость;

$$D' = \frac{1}{r_0 \sin\theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \sin\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (5.4)$$

- трёхмерная дивергенция вектора скорости.

Пусть решение данной системы уравнений зависит от времени *t* экспоненциально. Это означает, что любая метеорологическая величина представляется в виде $f = F \exp(i \sigma t)$, где σ - круговая частота.

Введём обозначения

$$[v'(\lambda), v'(\theta), w', p', \rho', D'] = [u, v, w, p, \rho, D] \exp(i \sigma t)$$

и используем их в системе (5.3). В результате получим:

$$i \sigma u = \frac{1}{r_0 \overline{\rho} \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\omega_0 \cos\theta \, v, \qquad (5.5)$$

$$i \sigma v = \frac{1}{r_0 \overline{\rho}} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\omega_0 \cos\theta \, u, \qquad (5.6)$$

$$i \sigma w = \frac{1}{r_0 \overline{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g \rho'}{\overline{\rho}}, \qquad (5.7)$$

$$i \sigma \rho = -\overline{\rho} D' - w' \frac{d \overline{\rho}}{d z}, \qquad (5.8)$$

$$i \sigma p = -c^2 \overline{\rho} D' + \overline{\rho} g w'. \qquad (5.9)$$

Из (5.5), (5.6) найдём выражения для *u* и *v* и подставим их в (5.9), тогда дивергенция определяется выражением

$$D' = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{i}{r_0^2 \sigma} L\left(\frac{p}{\bar{\rho}}\right), \tag{5.10}$$

где L - оператор из приливного уравнения Лапласа. Исключив из (5.7) и (5.9) давление, а затем из результирующего уравнения плотность (с помощью (5.8)), получим уравнение для w:

$$\sigma^2 w - g\frac{\partial w}{\partial z} = (\chi - 1) g D' - c^2 \frac{\partial D'}{\partial z}. \tag{5.11}$$

Далее, используя (5.9), заменим давление в (5.10). Тогда соотношение для D' примет вид:

$$D' = \frac{\partial w}{\partial z} + (\sigma r_0)^2 L\left(c^2 D' + gw\right) \tag{5.12}$$

Система уравнений (5.11-5.12) содержит функции w и D'. Исключая вертикальную скорость, получим искомое уравнение для определения дивергенции:

$$c^2 \frac{\partial^2 D'}{\partial z^2} + \left(\frac{d c^2}{d z} - \chi g\right)\frac{\partial D'}{\partial z} + \sigma^2 D' +$$

$$+ g\frac{L\left\{D'\left[\frac{\sigma^2 c^2}{g} - (\chi - 1)g - \frac{d c^2}{d z}\right]\right\}}{(\sigma r_0)^2} = 0. \tag{5.13}$$

В (5.13) характеристикой стратификации атмосферы является параметр c^2, вместо которого воспользуемся высотой однородной атмосферы $H(z) = \frac{c^2}{\chi g}$, а затем осуществим замену переменных:

$$\eta = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \qquad D' = \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) y(\lambda, \theta, \eta).$$

Теперь произведём разделение переменных, положив $y = G(\lambda, \theta) v(\eta)$. В результате получим два уравнения:

$$L(G) + (\sigma r_0)^2 \frac{G}{gh} = 0, \tag{5.14}$$

$$V + \left\{-\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\chi H}{h}\right)\frac{\sigma^2 H}{\chi g} + \left[(\chi - 1) g + \frac{d c^2}{d z}\right]\right\} V = 0, \tag{5.15}$$

где h - упоминавшаяся выше (см. 5.1) постоянная разделения переменных, лишь при вещественных значениях которой (положительных и отрицательных) решение существует.

В (5.14) входят только горизонтальные координаты (λ и θ) и два параметра Земли (r_0 и ω_0). Это уравнение вытекает (при любых моделях вертикальной структуры, например, для изотермической или стандартной атмосферы, а также для однородного океана) из системы полных адиабатических уравнений термодинамики (при отсутствии форсингов, т.е. внешних возмущающих сил), линеаризованных относительно состояния покоя.

Структуру малых колебаний атмосферы вокруг состояния покоя описывают функции Хафа - собственные решения оператора Лапласа теории приливов, которые в общем случае представляют собой бесконечную суперпозицию сферических функций из различных элементарных состояний [44, 49].

Если в (5.14) провести ещё одно разделение переменных (а именно, выделить долготу, положив $G(\theta,\lambda) = \exp(i\,m\,\lambda)G_m(\cos\theta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то функция $G_m(\cos\theta)$ будет удовлетворять уравнению

$$L_m[G_m(\cos\theta)] + (\sigma r_0)^2 \frac{G_m(\cos\theta)}{g\,h} = 0\,, \tag{5.16}$$

которое также называют приливным уравнением Лапласа. Здесь оператор L_m получается из оператора L заменой производно $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ на im, где m - зональное волновое число. Собственные функции $G_m(\cos\theta)$ уравнения (5.16) также иногда называют функциями Хафа.

Рассмотрим характер предельного поведения решения уравнения (5.16) при некоторых крайних значениях параметров горизонтальной структуры атмосферы.

При $\omega_0 \to 0$ оператор L в (5.16) вырождается в оператор Лапласа на единичной сфере, а при $r_0 \to \infty$ сфера превращается в плоскость, величина $\dfrac{L}{r_0^2}$ стремится к оператору Лапласа на плоскости (собственные решения которого - полиномы Лежандра), уравнение (5.16) вырождается в обычное двумерное волновое уравнение на плоскости для гравитационных волн. Фазовая скорость этих волн $C_\Phi = (g\,h)^{\frac{1}{2}}$.

Итак, если сохранить вертикальную структуру атмосферы и данного колебания, атмосферу считать плоской по горизонтали ($r_0 \to \infty$) и невращающейся ($\omega_0 \to 0$), а решение синусоидальным, то h представляет собой глубину/толщу (океана/атмосферы), при которой скорость гравитационных волн $C_\Phi = (g\,h)^{\frac{1}{2}}$. Отметим, что модель плоской невращающейся Земли хорошо описывает горизонтальную структуру свободных колебаний атмосферы небольшого горизонтального масштаба, когда кривизна и вращение Земли существенно не сказываются.

Вторая ветвь асимптотики поведения решения уравнения (5.16) выявляется при конечных значениях величины $\dfrac{\sigma}{2\,\omega_0}$ и больших h, когда решение можно представить в виде линейной комбинации двух присоединенных полиномов Лежандра. Для остальных значений параметров, для которых асимптотика неприменима, естественно искать решение в виде линейной комбинации некоторого набора полиномов Лежандра, т.е., следуя методу Галеркина, аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных конечной алгебраической системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

5.3. Модель "мелкой воды" на основе функций Хафа

Нетрудно показать, что уравнение для горизонтальной структуры атмосферы в гидростатическом приближении эквивалентно системе уравнений "мелкой воды", линеаризованных относительно состояния покоя. Поэтому рассмотрим [49] решение названной системы уравнений с применением функций Хафа. С этой целью:

- в сферической системе координат (r, θ, λ) введем вместо координаты θ координату $x = \cos\theta$;
- в уравнениях "мелкой воды" вместо уравнений горизонтального движения будем использовать уравнения для двумерной дивергенции и вихря вектора скорости;
- перейдем от компонентов вектора скорости $v(\theta)$, $v(\lambda)$ к скалярным функциям (к функции тока ψ и потенциалу скорости φ) по формулам

$$v(\theta) = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \left(1-x^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{1}{r_0\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{5.17}$$

$$v(\lambda) = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \left(1-x^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\frac{1}{r_0\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.18}$$

- обозначим высоту свободной поверхности над "мелкой водой" через z;
- введем безразмерные величины со следующими масштабами: h_k для высоты, $\frac{\omega_0}{2}$ - для времени, $\left(g\, h_k\right)^{\frac{1}{2}}$ - для компонентов вектора горизонтальной скорости, $\frac{g\, h_k}{2\,\omega_0}$ - для функции тока и потенциала скорости. Тогда линеаризованные уравнения "мелкой воды" запишутся в виде:

$$\frac{\partial\nabla^2\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - x\nabla^2\psi - \left(1-x^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \nabla^2 z = 0\ , \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + x\nabla^2\varphi + \left(1-x^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \eta_1^2\,\nabla^2\varphi = 0, \tag{5.21}$$

в которых $\eta_1^2 = \dfrac{g\,h_k}{(2\,\omega_0 r_0)^2}$ содержит постоянную высоту h_k и представляет собой k-е собственное значение уравнения для вертикальной структуры.

Волновые решения полученной системы уравнений будем искать в виде

$$\begin{vmatrix}\varphi\\ \psi\\ z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\Phi\\ \Psi\\ Z\end{vmatrix} exp\left[i\left(m\lambda - \sigma\, t\right)\right] \tag{5.22}$$

Здесь m - зональное волновое число; σ - безразмерная частота функции Хафа; Φ, Ψ, Z - амплитуды волновых мод в полях φ, ψ, z.

Подстановка решений (5.22) в (5.21)-(5.20) даёт следующие соотношения:

$$i\left(\sigma\, R - m\right)\Phi + \left(x\, R + Q\right)\Psi - Z\, R = 0\,, \tag{5.23}$$

$$i\left(\sigma\, R + m\right)\Psi - \left(x\, R + Q\right)\Phi = 0\,, \tag{5.24}$$

$$i\,\sigma\, Z - \eta_1\, z\,\Phi\, R = 0\,, \tag{5.25}$$

в которых $R = \dfrac{d\left(1 - x^2\right)}{d\,x}\dfrac{d\,f}{d\,x} - \dfrac{m^2}{1 - x^2}$, $Q = \left(1 - x^2\right)\dfrac{d\,f}{d\,x}$. Представим теперь функции Φ, Ψ, Z конечными рядами по нормированным полиномам Лежандра:

$$\left(\Phi, \Psi, Z\right) = \sum_{n=m}^{m+2N+1}\left(iA_n^m\,, B_n^m\,, C_n^m\right)P_n^m\left(x\right), \tag{5.26}$$

где N - целое число.

Подставим (5.26) в (5.22)-(5.24) и используем рекуррентные формулы для полиномов Лежандра:

$$xP_\alpha = k_{\alpha+1}P_{\alpha+1} + k_\alpha P_{\alpha-1}, \tag{5.27}$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d\,P_\alpha}{d\,x} = \left(n+1\right)k_\alpha P_{\alpha-1} - n\,k_{\alpha+1}P_{\alpha+1}\,, \tag{5.28}$$

в которых вектор m, n представлен с помощью символа волнового вектора α, определяемого тождествами: $\alpha \equiv \left(m, n\right)$, $\alpha + q \equiv \left(m, n+q\right)$, где q - целое положительное число, причем самосопряженный волновой вектор $\alpha_C = \left(-\,m, n\right)$. Далее, собирая и приравнивая к нулю члены, стоящие перед полиномом Лежандра P_n^m, получим систему алгебраических уравнений:

$$(\sigma y_n + m)A_n^m - (n^2-1)k_n^m B_{n-1}^m -$$

$$-n(n+2)k_{n+1}^{m+1}B_{n+1}^m + y_n C_n^m = 0, \qquad (5.29)$$

$$-(\sigma y_n + m)B_n^m + (n^2-1)k_n^m A_{n-1}^m + n(n+2)k_{n+1}^m A_{n+1}^m = 0, (5.30)$$

$$\sigma C_n^m + \eta_1^2 y A_n^m = 0, \qquad (5.31)$$

где $y = n(n+1)$; $k_n^m = \left(\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$; $n \in [m, m+2N+1]$.

В зависимости от чётности полиномов P_n^m эта система распадается на две независимые подсистемы. Первая из них содержит искомые величины A_n^m и C_n^m при $n = m, m+2, \ldots$ и B_n^m при $n = m+1, m+3, \ldots$. Если обозначить решение через вектор-столбец $|X|$, то здесь

$$|X| = \left(A_m^m, B_{m+1}^m, C_m^m, A_{m+2}^m, B_{m+3}^m, C_{m+2}^m, \ldots, A_{m+2N}^m, B_{m+1+2N}^m, C_{m+2N}^m\right)^T \qquad (5.32)$$

Так как высота *z*, потенциал скорости φ и зональная составляющая ветра $v(\lambda)$ оказываются симметричными относительно экватора, а функция тока ψ и меридиональная составляющая ветра $v(\theta)$ - антисимметричными, то этот случай условно называют симметричным. Величины A, B, C, входящие в вектор $|X|$, находятся из однородного матричного уравнения

$$\|A\| \times |X| = \sigma |X|, \qquad (5.33)$$

в котором матрица $\|A\|$ порядка $3N$ определяется соответствующей подсистемой уравнений (5.29)-(5.31), а частота σ - собственное значение матрицы $\|A\|$.

Вторая подсистема содержит A_n^m и C_n^m для $n = m+1, m+3, \ldots$ и B_n^m для $n = m, m+2, \ldots$ и, следовательно, вектор-столбец

$$|X| = \left(B_m^m, A_{m+1}^m, C_{m+1}^m, B_{m+2}^m, A_{m+3}^m, C_{m+3}^m, \ldots, B_{m+2N}^m, A_{m+1+2N}^m, C_{m+1+2N}^m\right)^T \qquad (5.34)$$

В этом случае поля функций *z*, φ и $v(\lambda)$ антисимметричны относительно экватора, а функция тока ψ и меридиональная составляющая ветра $v(\theta)$ - симметричны. Этот случай называют антисимметричным. Частоты σ и векторы $|X|$ (и, в конечном итоге, величины A, B, C находят, соответственно, как собственные числа и собственные векторы матрицы $\|A\|$. Численные значения σ и $|X|$ стремятся к своим предельным значениям при увеличении числа членов ряда (5.26). Однако, например, при эквивалентной высоте h = 10 км достаточно точное решение получается уже при N = 20 [85].

В случае $m \geq 1$ имеет место два вида волновых движений с существенно различными частотами: высокочастотные гравитационно-инерционные волны, распространяющиеся на восток и на запад; волновые возмущения типа волн Россби, медленно перемещающиеся на запад.

Получим теперь решение для компонентов ветра $v(\lambda)$, $v(\theta)$, используя для этого соотношения (5.18), (5.19) и найденные выражения для амплитуд Φ и Ψ. Запишем (5.18), (5.19) в безразмерном виде и, обозначив через U_m и V_m коэффициенты разложения в ряд Фурье величин $v(\lambda)$ и $v(\theta)$, а соответствующие коэффициенты Фурье для Φ и Ψ через Φ_m и Ψ_m, получим из указанных уравнений

$$U_m = \frac{\eta_1 \left(i m \Phi_m - Q \Psi_m\right)}{x}, \; V_m = \frac{\eta_1 \left(i m \Psi_m + Q \Phi_m\right)}{x} \tag{5.35}$$

Следовательно, решение для $v(\lambda)$, $v(\theta)$ и z будет иметь вид разложения в ряд по функциям

$$H^m_{jk}(\lambda, x) exp\left(-i t \sigma^m_{jk}\right) = H^m_{jk}(x) exp(i m \lambda) exp\left(-i t \sigma^m_{jk}\right) \tag{5.36}$$

где $H^m_{jk}(\lambda, x)$ - гармоники Хафа; m - зональное волновое число; k - порядковый номер эквивалентной высоты h_k, являющейся собственным значением уравнения для вертикальной структуры атмосферы; j - порядковый номер частоты σ_{kj};

$$H^m_{jk}(x) = \begin{vmatrix} U^m_{jk}(x) \\ -i V^m_{jk}(x) \\ Z^m_{jk}(x) \end{vmatrix} \; - \tag{5.37}$$

- вектор-функции Хафа, через которые представляется решение для амплитуд в полях φ, ψ и z.

Функции Хафа ортогональны [86] для всех m (включая m = 0) в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} H_{\alpha k} \, H^*_{\beta k} \, d\lambda \, dx = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}, \tag{5.38}$$

где звездочка означает сопряженную величину; α и β- волновые векторы (т.е.), или, учитывая (5.36),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} H_\alpha \, H^*_\beta \, exp\left(i\left(m\alpha - m\beta\right)\lambda\right) d\lambda \, dx = \delta_{\alpha\beta} \tag{5.39}$$

Подставив (5.37) в (5.39), получим условие ортогональности вектор-функций Хафа для случая $m\alpha = m\beta$:

$$\int_{-1}^{1} H_\alpha H_\beta^* \, dx = \int_{-1}^{1} \left(U_\alpha \, U_\beta + V_\alpha \, V_\beta + Z_\alpha \, Z_\beta\right) dx = \delta_{\alpha\beta} \,. \qquad (5.40)^*$$

Аналогично записывается данное выражение и для Φ, Ψ, *Z*.

Для выполнения условия ортогональности коэффициенты A_n^m, B_n^m, C_n^m из (5.29) необходимо нормировать следующим образом:

$$\sum_{n=m}^{m+2N+1} \left\{ \left(C_n^m\right)^2 + y\eta_1^2 \left[\left(A_n^m\right)^2 + \left(B_n^m\right)^2 \right] \right\} = 1 \,. \qquad (5.41)$$

Таким образом, если рассматривать уравнения баротропной негеострофической модели атмосферы при фиксированной безразмерной угловой частоте f и отсутствии основного потока, то в задаче о свободных колебаниях при любых возможных значениях эквивалентной глубины h собственными функциями является полная ортонормированная на интервале [-1, 1] система функций Хафа. Однако достаточно появиться самой узкой зоне, где функции Хафа теряют осцилляционный характер, как система функций перестает быть полной. Так, функции Хафа знакопостоянные при $h > 0$ и значениях $|f|$, немного меньших единицы, около концов интервала [-1, 1]. С уменьшением $|f|$ эти зоны расширяются. При очень малых $|f|$ функции осциллируют лишь в узкой зоне вблизи экватора. Напротив, функции Хафа, соответствующие $h < 0$, осциллируют только в зонах около полюсов.

В книге [28] показано, что для асимптотики как первого, так и второго рода (в последнем случае лишь при $cos^2\theta - E > 0$, где *E*- полная энергия) ширина зоны осцилляции точного решения находится при $(1+\varepsilon)E^2 < cos\,\theta < 1$, где ε – произвольное положительное число.

Итак, через функции Хафа представимы нормальные моды трехмерной квазистатической адиабатической линеаризованной системы уравнений термодинамики атмосферы и уравнений "мелкой воды".

Если значения функций Хафа известны, то поле любой метеорологической величины можно представить рядом Фурье-Хафа так же, как по любой системе ортогональных функций. Однако имеется ортогональная матрица перехода от разложения по нормированным функциям Лежандра к разложению по функциям Хафа [28, 49], позволяющая рассчитывать коэффициенты разложения функций Хафа по нормированным функциям Лежандра, и наоборот.

Поскольку в эволюционных задачах динамики атмосферы разложение полей метеовеличин по опорным функциям осуществляется на каждом временном слое, применение сферических функций более экономично, чем функций Хафа. Это обусловлено тем, что

- при реализации модели, базирующейся на функциях Хафа, в памяти ЭВМ необходимо хранить громадное количество информации;

- в бароклинных моделях атмосферы векторные функции Хафа состоят из трех компонент и требуют в три раза больше машинной памяти, чем аналогичная модель по сферическим функциям;
- в бароклинных моделях нужно также вычислить внутренние моды для набора эквивалентных глубин и для каждой из них хранить в ЭВМ соответствующие таблицы функций Хафа и их производных.

Преимущество применения функций Хафа в качестве базисных функций заключается в том, что связь между полями ветра и массы в этом случае определяется над всей сферой с помощью динамического соотношения, более общего, чем геострофическое равновесие: подразумевается [49], что поля высот изобарических поверхностей и скорости ветра удовлетворяют линеаризованным относительно состояния покоя уравнениям движения. Таким путем определяют физическую природу волновых мод, и можно отделить высокочастотные шумы от погодообразующих низкочастотных мод одновременно в полях массы и движения. Очевидно, спектральная модель фактически становится фильтрованной и инициализация здесь не нужна, так как

- высокочастотные гравитационные моды могут быть исключены усечением ряда разложения;
- погодообразующие волновые моды при этом не подавляются [43];
- точнее вычисляется линейная часть фазовой скорости всех волновых мод и правильнее описывается их дисперсия [49].

В метеорологии функции Хафа используют

- при решении задач теории атмосферных приливов [28],
- в схеме спектрального объективного анализа для получения глобальных полей метеорологических величин [81]. Согласование коэффициентов разложения полей ветра и геопотенциала осуществляется так, чтобы они приближенно удовлетворяли определенному динамическому соотношению между этими полями;
- в схеме нелинейной инициализации, разработанной в ЕЦСПП [48, 90, 91] применительно к оперативной спектральной модели, основанной на использовании аппарата нормальных мод, и в других задачах.

6 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РЯДАМИ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА: АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

6.1 Полиномы Чебышева

Если в тригонометрическом тождестве $\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta$ положить $k = \arccos(x)$, то для функций

$$T_k(x) = \cos(k\arccos(x)),\ x \in [-1, 1],\ k = 0,1,2,\ldots \tag{6.1}$$

получим трехчленное рекуррентное соотношение

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x). \tag{6.2}$$

Задав в качестве начальных условий

$$T_0(x) = 1\ ,\ T_1(x) = x \tag{6.2a}$$

из (6.2) найдем:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x\ ,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ \ldots,$$

т.е. при любых k функция $T_k(x)$ представляет собой алгебраический полином k -той степени. Эти полиномы называют стандартизованными ортогональными полиномами Чебышева первого рода [65]. Они ортогональны на отрезке [-1,1] с весовой функцией $W(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}},\ x \in [-1, 1]$. Действительно, если в интеграле

$$J_{kj} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} T_k(x) T_j(x) dx$$

сделать замену переменной $x = cos\,\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$, то $T_k(cos\,\theta) = cos\,k\theta$ и интеграл приводится к виду

$$J_{kj} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta)\cos(j\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & k \ne j, \\ \dfrac{\pi}{2}, & k = j > 0, \\ \pi, & k = j = 0 \end{cases}$$

Следовательно, ортонормированные полиномы Чебышева первого рода выражаются через полиномы (6.1) по формулам:

$$T_1(x) = \frac{1}{\pi} T_0(x) = \frac{1}{\pi},\ T_k(x) = \left(2/\pi\right)^{-1} T_k(x),\ k \ge 1.$$

Рекуррентное соотношение (6.2) является разностным уравнением с характеристическим уравнением $\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$, имеющим корни $\lambda_{1,2} = x \pm \left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$. При $x \neq \pm 1$ корни простые, поэтому

$$T_k(x) = c_1\, \lambda k_1 + c_2\, \lambda k_2 .$$

С учетом начальных условий (5.2а) коэффициент $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$, а полином

$$T_k(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^k}{2}. \qquad (6.3)$$

При комплексных значениях $x = z$ функция $\sqrt{z^2 - 1}$ неоднозначна, поэтому под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимают ветвь решения, которая при $z_{Re} > 1$ принимает положительные значения и определена в плоскости с разрезом по [-1, 1].

Из (6.1) при $T_k(x) = cos(arccos(x)) = 0$ получают корни $T_k(x)$:

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2k}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, k-1 .$$

Вследствие (5.1) и того, что $\left|T_k(x)\right| \le 1$ при $x \le 1$, точками экстремума функции $T_k(x)$ на $[-1, 1]$ будут точки, где $\left|T_k(x)\right| = 1$. Они определяются условиями: $k\ arccos\left(x_m^{(k)}\right) = m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, из которых находим точки $x_m^{(k)} = cos\dfrac{m\pi}{k}$, $m = 0, 1, \ldots, k$ причем $T_k\left(x_{(m)}\right) = cos(\pi m) = (-1)^m$, т.е. знаки двух соседних экстремумов противоположны, а концы отрезка [-1,1] есть экстремальные точки: $T_k(1) = 1$, $T_k(-1) = (-1)^k$. Вне интервала $[-1, 1]$ полином $T_k(x)$ изменяется монотонно. Нули полиномов на [-1,1] расположены так, что максимумы *(+1)* и минимумы *(-1)* строго уравновешены.

Представляя формулу (5.3) при $x > 1$ и $x < -1$ в виде

$$T_k(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}\right)^k\right\}, \ x > 1;$$

$$T_k(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}\right)^k\right\}, \ x < -1,$$

находим, что многочлены Чебышева $\{T_k(x)\}$ при $|x|>1$ возрастают со скоростью геометрической прогрессии. Асимптотическое представление полиномов таково:

$$T_k(x)\approx\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k}{2},\ x>1,\ k\to\infty \tag{6.4}$$

$$T_k(x)\approx\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k}{2},\ x<-1,\ k\to\infty. \tag{6.5}$$

В практике часто рассматривают полиномы Чебышева, соответствующие сегменту $[0,1]$ и именуемые смещенными полиномами Чебышева. Они определяются формулами

$$T_k^*(x)=T_k(2x-1),$$

$$T_{k+1}^*(x)=(4x-2)T_k^*(x)-T_{k-1}^*(x)\ \text{(рекуррентная формула)}$$

и обладают на [0, 1] теми же свойствами, что и многочлены $T_k(x)$ на [-1, 1]. В принципе можно рассматривать смещение сегмента [-1, 1] на любой сегмент [a, b]. Так как линейное преобразование этих сегментов при $x'\in[-1,1]$, $x\in[a,b]$ производится по формуле $2x=(b-a)x'+a+b$, то соответствующие смещенные полиномы Чебышева имеют вид $T_k\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$.

Из (6.2) следует, что старший коэффициент полинома $T_k(x)$ равен 2^{k-1}, поэтому полиномы Чебышева с единичным старшим коэффициентом запишется следующим образом:

$$T_k^*(x)=2^{1-k}T_k(x)=x^k+\ldots\quad,\quad k\ge 1,$$

и в метрике С-пространства Эвклида оказываются наименее уклоняющимися от нуля на $[a,b]$. Это означает, что на $[a,b]$ для любого полинома $G_k(x)$ со старшим коэффициентом 1 справедливо неравенство

$$\max_{[a,b]}|G_k(x)|\ge\max_{[a,b]}\left|T_k^*[a,b](x)\right|=2^{1-2k}(b-a)^k.$$

Из формулы (6.1) при $x\in[-1,1]$ вытекает равенство:

$$\overline{T}_k(x)=\frac{(k+1)\sin[(k+1)\arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Следовательно, при любом *k* функции

$$U_k(x)=\frac{\sin[(k+1)\arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}},\ k=0,1,2,\ldots, \tag{6.6}$$

$$U_{k-1}(x)=2x\,U_k(x)-U_{k-1}(x). \tag{6.7}$$

Эти многочлены называют полиномами Чебышева второго рода. Они ортогональны на [-1, 1] с весом $\sqrt{1-x^2}$, причем

$$\left|U_k(x)\right|\le\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad x\in(-1,1),$$

$$\left|U_k(x)\right|\le k+1,\qquad x\in[-1,1];$$

$$\left|\dot{U}_k(x)\right|\le\frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in(-1,1),$$

$$\left|\dot{U}_k(x)\right|\le\sqrt{2/\pi}\,(k+1),\qquad x\in[-1,1],$$

где последние два неравенства для ортонормированных полиномов являются точными, т.е. равенства в них достигаются в концевых точках сегмента ортогональности.

Ряды Фурье по полиномам Чебышева аналогичны тригонометрическим рядам Фурье в смысле условий сходимости на интервале [-1,1] [9, 65]. Так, если непрерывная функция $f(x)$ задана на сегменте [-1,1] и интегрируема с весом $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $x\in[-1,1]$, а ее модуль непрерывности на [-1, 1]

$$\omega(\delta,f)=\sup\left|f(x)-f(t)\right|\ \text{при}\ \left|x-t\right|\le\delta \tag{6.8}$$

(где $x=cos\,\theta$, $t=cos(\tau)$, δ - фиксированное число, символ *sup* означает верхнюю грань величины $|\bullet|$) монотонно убывает к нулю как функция δ при $\delta\to 0$, т.е. удовлетворяет условию Дини:

$$\lim_{\delta\to\infty}\omega(\delta,f)\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)=0,$$

то функция $f(x)$ аппроксимируется рядом Фурье по ортонормированным полиномам Чебышева первого рода:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kT_k(x),\ \ x\in[-1,1], \tag{6.9}$$

равномерно сходящимся на [*-1, 1*]. Отметим, что верхняя грань $sup|\bullet|$ в условии (6.8) берется по множеству значений x и t на сегменте ортогональности при условии что $|x-t| \le \delta$. Эта величина показывает, насколько могут отличаться значения функции $f(x)$ в точках x и t, отстоящих друг от друга не более, чем на δ.

Для представления функции $f(x)$ на [-1, 1] рядом Фурье-Чебышева (6.9) достаточно непрерывности первой производной. При разложении в ряд (6.9) исходная функция не предполагается периодической и разложение также не является периодическим, поэтому требование равенства функции и её производных на концах сегмента снимается.

Условия сходимости рядов Фурье по полиномам Чебышева второго рода $U_k(x)$ во внутренних точках сегмента ортогональности примерно те же, что и для тригонометрических рядов Фурье, но сходимость в крайних точках имеет место при больших ограничениях на функцию на всем отрезке [-1, 1], так как точки $x = \pm 1$ являются нулями весовой функции $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и поэтому в этих точках полиномы $U_k(x)$ неограниченно возрастают.

Указанные выше свойства полиномов Чебышева первого рода обеспечивают ясный геометрический смысл форм их рельефа, что облегчает интерпретацию результаты аппроксимации различных функций. Например, полином $T_1(x)$ характеризует вклад линейного изменения функции $f(x)$, причем разница между значениями полинома на концах участка разложения равна 2. Таким образом, коэффициент при полиноме дает половину амплитуды соответствующей составляющей функции. Полином $T_2(x)$ - парабола второго порядка характеризует вклад "ложбины" и коэффициент C_2 показывает её "глубину".

Градиент любой составляющей можно определить, взяв производную соответствующего полинома: $T_1'(x) = (\arccos(x))' = 1$, $T_2'(x) = (\cos(2\arccos(x)))' = 4x$, $T_2' = (\cos(3\arccos(x))) = 8x - 3, \ldots$ Таким образом, одномерная функция геометрически представляется суммой парабол различных порядков, амплитуды которых определяются коэффициентами разложения при соответствующих полиномах.

Отметим, что полиномы Чебышева первого рода ортогональны с весом $W(x) = 1$ на регулярной системе дискретных точек $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)$.

Пусть x - переменная, принимающая целочисленные значения: $x = 1, \ldots, N$, где N - любое целое положительное число. Построим последовательность функций $T_k(x)$, являющихся полиномами k-той степени от дискретной переменной. При этом потребуем, чтобы последовательность функций обладала свойством. Запишем рекуррентное соотношение, генерирующее стандартизованные полиномы Чебышева от дискретного аргумента [6, 8, 32]:

$$T_{k+1} = T_1 T_k - \frac{k^2\left(N^2-k^2\right)T_{k-1}}{4\left(4k^2-1\right)}.$$

Отсюда $T_0 = 1$, $T_1 = x - \frac{N-1}{2}$, $T_2 = T_1^2 - \frac{N-1}{12}, \ldots.$

Пусть теперь функцию $f(x)$, заданную в N равноотстоящих точках $x \;\; x_1, \ldots, x_N$ требуется представить в виде полиномов K-той степени. Тогда

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{K} C_k T_k(x, N) = G_k(x),$$

где коэффициенты разложения определяются по формуле

$$C_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} f(x_n) T_k(x_n)}{\sum_{n=1}^{N} T_k^2(x_n)};$$

$$\sum_{n=1}^{N} T_k^2(x_n) = \frac{k!\,(2k+1)N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\ldots(N^2-k^2)}{2^{2k}\left[1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k+1)\right]^2}$$

В практике часто используют разложения по двумерным полиномам $T_k(x)$, являющимся полиномами равномерного приближения и аппроксимирующим случайные поля лучше, чем другие полиномы Чебышева.

Пусть поле $f(x, y)$ задано на множестве узлов (x_1, y_1), (x_2, y_2) и т.д. в прямоугольной области $[a, b]\times[c, d]$. Тогда разложение поля в ряд по полиномам Чебышева имеет вид:

$$f(x, y) \approx \sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{J} C_{k\,j} T_k(x_n)\, T_j(y_m),\; n = 1, 2, \ldots, N,\; m = 1, 2, \ldots, M, \qquad (6.10)$$

где суммирование ведётся по всей области; $T_k(x)$, $T_j(y)$ - полиномы Чебышева порядка k и j; x, y - целочисленные координаты с шагом, равным единице; коэффициенты разложения

$$C_{k\,j} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} F(x_n, y_m)\, T_k(x_n)\, T_j(y_m)}{\sum_{n=1}^{N} T_k^2(x_n) \sum_{m=1}^{M} T_k^2(y_m)}.$$

В случае использования ортонормированых полиномов

$$C_{k\,j} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} F(x_n\,, y_m)\, T_k(x_n) T_j(y_m)$$

Направим ось "*y*" по меридиану на юг, ось "*x*" - по параллели с запада на восток. Тогда коэффициенты разложения C_{10}, $C_{20}\dots$ будут количественно отражать интенсивность различного рода меридиональных составляющих, а коэффициенты C_{12}, C_{21}, C_{22} и другие - вклад более сложных процессов.

Для разложения полей по смешанным полиномам, когда вдоль параллелей разложение ведётся по тригонометрическим функциям, а вдоль меридианов по полиномам Чебышева, значения метеорологической величины задаются в узлах широтно-долготной сетки, опоясывающей всю Землю по заданным широтам. В этом случае

$$f(\lambda, y) = \sum_k \sum_j \left[C_{k\,j}^C \cos(k\,\lambda\,g) + C_{k\,j}^S \sin(k\,\lambda\,g)\right]\dot{T}_j(y),$$

где k, j - целые числа; $\lambda = 0, 1, \dots, (N-1)$ - индекс долгот; $y = 0, 1, \dots$ - индекс широт; $g = \dfrac{2\pi}{N}$. Формулы для расчета коэффициентов разложения в области задания функции имеют вид [11, 52]:

$$C_{k\,j}^C = \frac{2}{N}\sum_{\lambda=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M} f(\lambda, y)T_j(y)\cos(k\,\lambda\,g),$$

$$C_{k\,j}^S = \frac{2}{N}\sum_{\lambda=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M} f(\lambda, y)T_j(y)\sin(k\,\lambda\,g)$$

Если в рядах разложения взять число слагаемых равным числу точек, то представление поля будет точным. Однако полиномы Чебышева позволяют резко сократить число параметров, необходимых для описания конфигурации поля. Это обусловлено тем, что полиномы Чебышева обладают наиболее сильными экстремальными свойствами, так как в метрике С-пространства Эвклида усеченный ряд по полиномам Чебышева обеспечивает лишь немногим худшую аппроксимацию, чем полиномы наилучшего равномерного приближения. Так, отличие в ошибке приближения функции $f(x)$ полиномом $T_k(x)$ составляет около 50% при $k = 1$ и убывает с ростом k как $k^{-\frac{1}{2}}$ [53].

В случае интегрального приближения функций в квадратной области $[a, b]\times[c, d]$, а $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, она, после переноса начала координат и сжатия на основе соотношений

$$x' = \frac{(2x - a - b)}{b - a},\ y' = \frac{2\,y - c + d}{d - c}$$

переводится в квадрат $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ полученном квадрате функция представляется усеченным рядом по полиномам Чебышева (*) при $J = K$. Коэффициенты разложения находятся с помощью метода наименьших квадратов, чтобы выполнялось условие минимума интеграла [40]

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}\left\{f(x,y)-\sum_{x}\sum_{y}C_{k\,j}\;T_k(x)T_j(y)\right\}^2 dx\,dy = \min,$$

$$R = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Тогда $\dfrac{\partial I}{\partial C_{k\,j}} = 0$ и, значит,

$$C_{k\,j} = g_k\,g_j\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}f(x,y)T_k(x)T_j(y)dx\,dy, \tag{6.11}$$

где $g_k = \dfrac{1}{\pi}$ при $k = 0$ и $g_k = \dfrac{2}{\pi}$ при $k \neq 0$.

Откуда

$$C_{00} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}f(x,y)dx\,dy,$$

а коэффициенты стандартных и смешанных полиномов находят соответственно по формулам:

$$C_{oj} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}f(x,y)T_j(y)dx\,dy,\; j = 1,\ldots,K,$$

$$C_{k0} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}f(x,y)T_k(y)dx\,dy,\; k = 1,\ldots,K,$$

$$C_{kj} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{R}f(x,y)T_k(x)T_j(y)dx\,dy,\; j,k = 1,\ldots,K,$$

Наложим на область $[a,b]\times[c,d]$ квадратную регулярную сетку точек с шагом h. Пусть общее число сеточных ячеек будет равно $N \times N$. Зададим значения $f(x,y)$ в угловых точках этих ячеек и рассмотрим ячейку $\Delta_{n\,m}$ с вершинами в точках $(x_n\,, y_m)$, $(x_n\,, y_{m+1})$, $(x_{n+1}\,, y_m)$, $(x_{n+1}\,, y_{m+1})$. По таким узлам ячейки для функции $f(x,y)$ построен интерполяционный многочлен Лагранжа [40]:

$$f(x,y) = \frac{(x-x_{n+1})(y-y_{m+1})}{(x_n-x_{n+1})(y_m-y_{m+1})}f_{nm} + \frac{(x-x_n)(y-y_{m+1})}{(x_{n+1}-x_n)(y_m-y_{m+1})}f_{n+1m} +$$

$$+\frac{(x-x_{n+1})(y-y_m)}{(x_n-x_{n+1})(y_{m+1}-y_m)}f_{nm+1}+\frac{(x-x_n)(y-y_m)}{(x_{n+1}-x_n)(y_{m+1}-y_m)}f_{n+1m+1}=$$

$$\sum_r\sum_q\frac{W_n(x)W_m(y)}{x-x_{n+r}}(y-y_{n+q})W'_m(y_{m+q})f_{n+r,m+q}\,, \tag{6.12}$$

где f_{nm}, f_{n+1m+1}, f_{n+1m}, $f_{n\,m+1}$ - значения функции $f(x,\,y)$ в узлах расчетной сетки;

$$W_n(x)=(x-x_n)(x-x_{n+1}),\;\; x_n\le x\le x_{n+1}\,;$$

$$W_m(y)=(y-y_m)(y-y_{m+1}),\;\; y_m\le y\le y_{m+1}\,.$$

Записав интеграл (6.11) как $D\times D$ интегралов по ячейкам Δ_{nm}, а вместо функции $f(x,\,y)$ подставив ее выражение из (6.12), получим:

$$C_{kj}=g_k\,g_j\sum_{n=1}^{D}\sum_{m=1}^{D}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\int_{y_m}^{y_{m+1}}\sum_{r=0}^{D}\sum_{q=0}^{D}\frac{W_n(x)}{W'_m(x)}\frac{W_m(y)}{(y-y_{n+q})W'(y_{m+q})}\times$$

$$\frac{T_k(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{T_j(y)}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}f_{n+r,m+q}\,dx\,dy=\sum_{n=1}^{D}\sum_{m=1}^{D}\sum_{r=1}^{D}\sum_{q=1}^{D}B_{nm}^{(r,q)}f_{n+r,m+q}\,. \tag{6.13}$$

Здесь

$$B_{nm}^{(r,q)}(k,j)=g_k\,g_j\int_{x_n}^{x_{n+1}}\int_{y_m}^{y_{m+1}}\frac{W_n(x)}{(x-x_{n+r})W'_m(x_{n+r})}\frac{T_k(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{W_m(y)}{(y-y_{m+q})W'_m(y_{m+q})}\frac{T_j(y)}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}dx\,dy\,,$$

а интегралы можно вычислить через элементарные функции.

Коэффициентом при функции f_{n+1m+1} будет следующая сумма:

$$B_{nm}^{(1,1)}(k,j)+B_{n+1m}^{(0,1)}(k,j)+B_{n\,m+1}^{(1,0)}(k,j)+B_{n+1m+1}^{(0,0)}(k,j)\,.$$

Соответственно для граничных точек области $(x_{n+1}\,,y_1)$, $(x_n\,,y_{m+1})$, $(x_{n+1}\,,y_{D+1})$, $(x_{D+1}\,,y_{m+1})$ и угловых точек $(x_1\,,y_1)$, $(x_{D+1}\,,y_1)$, $(x_1\,,y_{D+1})$, $(x_{D+1}\,,y_{D+1})$ будем иметь:

$$\left\{B_{n1}^{(1,0)}(k,j)+B_{n+1,1}^{(0,0)}(k,j)\right\}f_{n+1,1}\,,$$

$$\left\{B_{nD}^{(1,1)}(k,j)+B_{n+1,D}^{(0,1)}(k,j)\right\}f_{n+1,D+1},$$

$$\left\{B_{D,m}^{(1,1)}(k,j)+B_{D,m+1}^{(1,0)}(k,j)\right\}f_{D+1,m+1},$$

$$B_{11}^{(0,0)}(k,j)f_{1,1}+B_{D,m+1}^{(1,0)}(k,j)f_{D+1,1},$$

$$B_{1,D}^{(0,1)}(k,j)f_{1,D}\ ;\ B_{D,D}^{(1,1)}(k,j)f_{D+1,D+1},$$

По коэффициентам $C_{k\,j}$ можно приближенно вычислить значение аппроксимируемой функции $f(x,y)$.

Рассмотренный метод позволяет использовать не только декартовы, но и географические (сферические) координаты (φ,λ).

Для оценки вклада, вносимого каждым членом разложения в общую пространственную изменчивость двумерного поля, используют коэффициент редукции

$$P_{kj}=C_{kj}^{2}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M}T_k^2(x_n)T_j^2(y_m)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M}\left[f(x_n,y_m)-G(x_n,y_m)\right]^2},$$

где C_{kj} - коэффициент Фурье обобщённого полинома, соответствующий комбинации полиномов Чебышева $T_k(x)$ и $T_j(y)$. Очевидно, чем точнее разложение характеризует фактическое поле, тем ближе к единице сумма P_{kj} всех членов разложения.

Для оценки точности разложения необходимо восстановить значение поля в каждой точке по аппроксимирующему ряду и вычислить среднеквадратическую ошибку представления по формуле

$$\sigma=\left\{\sum_{k=1}^{S}\frac{\left(G_k(x,y)-f(x,y)\right)^2}{S}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6.14}$$

в которой $S=N\times M$ - общее число точек.

В теории рядов для оценки точности представления используют соотношение полноты, которое для разложения (6.10) имеет вид

$$\sum_x\sum_y f^2(x,y)=C_{0,0}^2+C_{1,0}^2+C_{0,1}^2+C_{2,0}^2+\ldots+C_{K,J}^2\,.$$

Если ряд разложения усеченный, то квадрат среднеквадратической ошибки аппроксимации даётся формулой

$$\sigma^2=\frac{1}{S}\sum_x\sum_y f^2-\frac{1}{S}\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{J}C_{kj}^2 \tag{6.15}$$

На основе (6.15) вводится показатель качества разложения

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} C_{kj}^2}{S} \sum_x \sum_y f^2(x,y),$$

который эффективен в том случае, когда значения $f(x,y)$ берутся в виде отклонения от среднего для данного поля или от среднего климатического [7].

Присоединенные полиномы Чебышева

$$T_k^{(m)}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\,m}[\cos(\arccos(x))]}{d\,x^m}$$

могут быть использованы в качестве базисных функций для разработки спектральных гидродинамических моделей атмосферы, так как они

- обладают свойством ортогональности,
- образуют полную систему на сфере в том смысле, что любая гладкая функция $f(\lambda,\theta)$ может быть представлена рядом

$$f(\lambda,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|m|\le k=0}^{K} C_{mk} \exp(im\lambda) T_k^{(m)}(\cos\theta).$$

6.2 Аналитическое представление метеорологических полей в случае непериодических граничных условий

В случае непериодических боковых граничных условий (например, при прогнозе для региональной области) возможен подход, в основе которого лежит та же идея, что и при разложении по сферическим функциям: ищется естественная система функций линеаризованного оператора эволюционного уравнения (системы уравнений) атмосферной модели при заданных боковых граничных условиях, по которой можно осуществить разложение. В качестве примера рассмотрим такой оператор уравнения диффузии примеси, что

$$LE(x) = \frac{-\left[E'(x)P(x)\right]' + E(x)G(x)}{W(x)}, \tag{6.16}$$

где $P(x)$, $G(x)$, $W(x)$ - вещественные гладкие функции.

Пусть на интервале $[a,b]$ функции $W(x) > 0$, $P(x) > 0$; $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. Поставим для функции $E(x)$ боковые условия в точках a и b (их вид пока неважен) и будем искать собственные функции оператора L, воздействующего на $E(x)$, как ненулевые решения уравнения Штурма - Лиувилля:

$$L_{SL}E(x) = W(x)LE(x) = \lambda W(x)E(x), \tag{6.17}$$

где λ - собственные числа задачи, образующие дискретную последовательность вещественных чисел $\{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$; $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Система собственных функций (решений) задачи $\{E_k(x)\}$, $k = 0, 1, \ldots$ ортогональна на $[a, b]$ с весом $W(x)$. Поскольку собственные функции всегда определяются с точностью до постоянного множителя, то их удобно нормировать так, чтобы $\|E_k(x)\| = 1$. Коэффициенты разложения для вещественной функции $f(x)$ определим выражением

$$C_k = \left(f, \lambda_k^{-1} W^{-1} L_{SL} E_k\right)_W = \lambda_k^{-1}\left(f, W^{-1} L_{SL} E_k\right)_W. \tag{6.18}$$

Считая функцию $f(x)$ всюду гладкой (т.е. такой, что возможно многократное интегрирование по частям), проинтегрируем (6.18) по частям дважды. В результате получим:

$$C_k = \lambda_k^{-1} \int_a^b \{f(x)\left[-P(x)E_k(x)\right] + G(x)E_k(x)\}dx =$$

$$= \lambda_k^{-1}\{P(x)[f'(x)E_k(x) - f(x)E'(x)]\}\Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b \Big[\left(-P(x)f'(x)\right)' + f(x)G(x)\Big]E_k(x)\,dx = \lambda_k^{-1}\left[B(f, E_k) + (\Psi, E_k)_W\right]. \tag{6.19}$$

Здесь $B(f, E_k) = P\left[f'(x)E_k(x) - f(x)E_k'(x)\right]\Big|_a^b$;

$$\Psi(x) = W^{-1}(x)L_{SL}\, f(x).$$

Используем теперь линейные однородные граничные условия:

$$\left[H_a\, E'(x) + D_a\, E(x)\right]\Big|_{x=a} = 0, \quad |H_a| + |D_a| \neq 0,$$

$$\left[H_b\, E'(x) + D_b\, E(x)\right]\Big|_{x=b} = 0, \quad |H_b| + |D_b| \neq 0, \tag{6.20}$$

где H_a, H_b, D_a, D_b - заданные константы, которые удобно выбирать так, чтобы $H_a\, D_a = H_b\, D_b = 0$.

В случае периодических граничных условий слагаемое $B(f, E_k)$ в (6.19) исчезнет.

Иногда применяют условие вида: $E(a)\cos\alpha - E'(a)\sin\alpha = 0$, $E(b)\cos\beta - E'(b)\sin\beta = 0$, в котором α и β - подходящие константы. В этом случае асимптотика собственных чисел и собственных функций такова: $\lambda_k = O(k^2)$, $E_k(x) = O(1)$, $E'_k(x) = O(k)$ при $k \to \infty$.

Если функция $f(x)$ не удовлетворяет граничным условиям для собственных функций, то $B(f, E_k) = O(k)$ и из (6.19) $C_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$. При $f(a) = f(b) = 0$ слагаемое $B(f, E_k) = O(1)$ и $C_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. В этих случаях ряд Фурье сходится медленно.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям для $E(x)$, то $B(f, E_k) = 0$.

Вновь проинтегрировав (6.19) по частям, получим коэффициенты

$$C_k = \lambda_k^{-2} \left[(Y, E_k)_W + B(\Psi, E_k)_W\right],$$

где $Y = W^{-1} L_{SL} \Psi$. Тогда $(Y, E_k)_W = O(1)$, $B(\Psi, E_k) = O(k)$, $C_k = O(k^{-3})$, и сходимость ряда Фурье более быстрая.

Если граничные условия для функции $P(x)$ нулевые, т.е. $P(a) = P(b) = 0$, то $B(f, E_k) = 0$ независимо от значений $f(x)$ на границах. В пределе $C_k = O(k^{-r})$ для всех $r > 0$, и скорость сходимости ряда Фурье экспоненциальная. Такой вариант удобен для построения спектральных прогностических моделей на ограниченной территории, так как поведение решения на границах искусственно не сдерживается условиями периодичности, "жесткой стенки" и другими.

В качестве базисных функций целесообразно использовать полиномы. Задаче (6.19), (6.20) при ненулевых граничных условиях удовлетворяют две системы ортогональных полиномов:

- полиномы Лежандра при *a = -1*, *b = 1*, $P(x) = 1 - x^2$, $G(x) = 0$, $W(x) = 1$;
- полиномы Чебышева $T_k(x) = cos(k\, arccos\, x)$ при *a = -1*, *b = 1*, $P(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $G(x) = 0$, $W(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Если провести замену переменных, положив $x = cos\,\theta$, то $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Если функция $f(x)$ негладкая, то ряды Фурье-Чебышева сходятся быстрее, чем ряды по полиномам Лежандра, и обеспечивают возможность применения метода БПФ. Такие ряды

- позволяют снять особенности у полюсов и производить прямое и обратное БПФ по обеим переменным быстрее, чем ряды по сферическим функциям;
- при интегрировании на региональной сетке (особенно, если функция негладкая) ряды по полиномам Чебышева сходятся значительно быстрее, чем ряды по полиномам Лежандра [53].

7 МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ФИКСИРОВАННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Аналитическая аппроксимация случайных функций и полей широко применяется в гидрометеорологии [5, 26, 76, 89]. В качестве базисных функций используют как детерминированные, так и недетерминированные ортогональные и неортогональные базисы. В качестве детерминированных базисов могут выступать показательные функции $\{1, \exp(\nu_1 u), \exp(\nu_2 u), \ldots\}$, где ν - некоторая числовая последовательность; целые алгебраические полиномы $\{1, u, u^2, \ldots\}$; сплайны; финитные функции; тригонометрические полиномы $\{1, \sin(u), \cos(u), \sin(2u), \ldots\}$; степенные полиномы Чебышева, полиномы Лежандра и другие классические ортогональные многочлены, а также обобщённые сферические функции; векторные функции Хафа и др.

Перечислим основные задачи, которые могут быть решены с помощью синтезируемых при этом параметров разложения:

- объективный контроль данных наблюдений;
- уплотнение информации, содержащейся в эмпирических данных, без существенной потери точности с целью создания компактного банка данных на машинных носителях;
- восстановление процессов и полей по проекциям;
- аналитическое описание дискретно заданных случайных функций с целью статистического моделирования, сглаживания и интерполяции данных в узлы регулярных сеток;
- выделение обобщенных количественных характеристик (типа различных индексов циркуляции, используемых в долгосрочной прогностике) для описания эволюции крупномасштабных атмосферных процессов на больших территориях;
- фильтрация мелкомасштабных возмущений – метеорологического шума;
- исследование особенностей пространственной и временной статистической структуры ансамбля случайных гидрометеорологических полей и процессов, оценка и аппроксимация ковариационных, корреляционных и структурных функций;
- спектральный анализ (т.е. оценка спектров атмосферных возмущений различных пространственно-временных масштабов);
- классификация полей и процессов для построения генетических эволюционных цепочек;
- идентификация и распознавание процессов и полей;
- подбор аналогов по количественным параметрам;
- получение некоррелированных зависимых переменных для регрессионного анализа и прогноза;
- разработка гидродинамических и гидродинамико-статистических малопараметрических моделей для прогноза погоды на различные сроки и моделирования эволюции текущего климата.

Приведём сведения информационно-рекомендательного характера и наиболее существенные выводы, полученные различными авторами, с точки зрения обсуждаемых проблем.

Подчеркнем вначале несколько важных моментов:

- при формулировке конкретной задачи аналитической аппроксимации полей рядами по каким-либо базисным функциям исследователь располагает результатами измерений метеорологических величин на нерегулярной сети станций наблюдения, плотность которой в различных географических районах Земли существенно варьирует;

- измерения проводятся с помощью различных наблюдательных систем и имеют существенно разную точность. Поэтому вычислению параметров разложения полей по классическим ортогональным многочленам
- должна предшествовать процедура интерполяции данных в узлы регулярной сетки точек. Полиномиальная интерполяция предусматривает описание участка случайного поля метеорологической величины в окрестности каждого узла сетки выбранным многочленом. В случае оптимальной интерполяции необходимы априорные оценки характеристик статистической макро -и мезоструктуры полей и процессов. В рамках спектральных гидродинамических моделей атмосферы необходим спектральный объективный анализ [64, 81] и/или инициализация методом нормальных мод [17, 36];
- фиксированные базисные функции не зависят от особенностей эволюции атмосферных процессов, поэтому коэффициентам разложения присваивается размерность аппроксимируемых величин.

Для сравнительно небольших территорий можно применить разложения по целым алгебраическим полиномам [13, 37, 101]. Детальные исследования таких аппроксимаций были проведены в связи с задачей объективного анализа случайных полей метеовеличин в узлы регулярных сеток [16, 18, 19, 78, 82]. Оказалось [16], что на площади около 1200 х 1200 км^2 с помощью полиномов второй третьей степени практически с одинаковой точностью можно аппроксимировать поля различных величин при достаточно густой сети метеостанций (20-30). Однако увеличение степени полинома не повышает точность описания. Площадь, для которой выполняется аппроксимация, нельзя расширить больше, чем 1500 х 1500 км^2. , связи с этим полиномиальная аппроксимация на больших территориях оказывается кусочной из-за невозможности экстраполяции за границы области, для которой проведено разложение, и требуется согласование результатов между собой.

Практикуются также разложения случайных атмосферных полей в однократные и двойные ряды Фурье по тригонометрическим полиномам, поскольку спектральное представление позволяет изучать особенности волновых мод различных пространственно-временных масштабов. Разложение в однократные ряды Фурье выполняют для каждой параллели отдельно, поэтому число коэффициентов разложения велико. Так, по [20],

- для определения соответствующей величины $f(\lambda)$, как правило, требуется 10-12 гармоник;
- пять - шесть гармоник необходимо для описания среднемесячных значений параметра;
- первые три гармоники с высокой точностью характеризуют основные особенности поля (норму);
- более короткие моды обусловливают суточные изменения в поле $f(\lambda)$, поэтому их отождествляют с движущимися возмущениями;
- сдвиги между первыми тремя-четырьмя гармониками мгновенных значений величины $f(\lambda)$ и её месячными нормами соответствуют более или менее постоянным аномалиям поля, согласующимся с аномалиями погоды.

В задачах гидротермодинамики, основанных на базисе тригонометрических функций, производят аппроксимацию глобальных и полушарных полей двойными рядами Фурье. Так как южное полушарие освещено данными наблюдений существенно хуже, обычно предполагают, что поля давления, скорости ветра и температуры воздуха симметричны относительно экватора. Поэтому при разложении глобальных полей учитывают гармоники только с чётными меридиональными волновыми числами.

Погрешность такого допущения можно оценить модельным путем. Например, в монографии [46] показано, что

- сезонные глобальные поля общего количества облачности $N(\lambda,\theta)$, измеренной с метеорологических спутников, осредненные за 10 лет, восстанавливаются с высокой степенью точности как при использовании гипотезы о симметрии относительно экватора, так и без неё. При разложении в двойные ряды Фурье функция $N(\lambda,\theta)$ на полюсах принимает разные значения при разных λ. Для устранения этой особенности осуществлен переход от значений $N(\lambda,\theta)$ к покрытой облаками площади $dS = N(\lambda,\theta)\sin\theta\, d\lambda\, d\theta$ (где $\sin\theta\, d\lambda\, d\theta$ - площадь сферического прямоугольника на широте $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, стороны которого равны $d\lambda$ и $d\theta$). На полюсах при всех значениях λ функция $N(\lambda,\theta)\sin\theta = 0$;
- глобальные поля $N(\lambda,\theta)$ восстанавливаются практически одинаково точно с помощью двойных тригонометрических рядов и сферических функций;
- чем меньше период осреднения, тем больше погрешность восстановления полей $N(\lambda,\theta)$ при заданном числе членов ряда;
- поля $N(\lambda,\theta)$, осредненные за 5-10 лет, восстанавливаются точнее по сферическим функциям, а осредненные за месяц, декаду и особенно за пятидневку и сутки - описываются существенно точнее при разложении в двойные тригонометрические ряды Фурье. Это свидетельствует о предпочтительности использования тригонометрического базиса (по сравнению со сферическими гармониками) в задачах кратко - и среднесрочных гидродинамических прогнозов погоды и сжатия информации об ежедневных полях метеовеличин.

Широко применяют также разложения климатических полей в трех и четырехмерные ряды Фурье с целью уплотнения информации, исследования их многомерной статистической макроструктуры и выделения долговременных носителей памяти, необходимых для моделирования климата и параметризации физических процессов. Так, многолетние зонально усредненные среднемесячные вариации температуры и плотности воздуха, а также зональной компоненты скорости ветра аппроксимированы трехмерными рядами Фурье по высоте над уровнем моря $(0 \le H \le 100\ \text{км})$, географической широте $(-90^0 \le \lambda \le 90^0)$ и времени года $(1 \le t \le 12\ \text{месяцев})$ с последующим ранжированием коэффициентов по степени их вклада в точность представления [30, 56]. Анализ параметров разложения показал, что наблюдается существенный вклад широтных вариаций и годового хода в общую изменчивость полей метеовеличин в слое 0 - 100 км, а учет 50-100 коэффициентов позволяет восстанавливать поля и вертикальные профили величин с высокой точностью.

Из результатов аппроксимации полей геопотенциала изобарических поверхностей для Северного полушария ($\Delta\lambda = 10^0$, $\Delta\varphi = 5^0$) рядами по сферическим функциям следует [51, 52, 60, 69]:

- способ усечения рядов незначительно сказывается на точности представления;
- для аппроксимации полей в нижней и средней тропосфере необходимо использовать больше параметров разложения, чем на поверхностях 100 и 50 гПа, где поля более гладкие;
- погрешность аппроксимации зависит от шага сетки;

- чтобы погрешность аппроксимации не превышала точности радиозондовых измерений, необходимо сохранять сферические гармоники с $m \geq 15$, $n \geq 35$ и с $m \geq 18$, $n \geq 36$ соответственно для уровней 1000, 700 и 100, 50 гПа;
- для получения удовлетворительного по точности разложения случайного поля любой метеовеличины на полушарии в ряд по сферическим гармоникам нужно учитывать 100 и более членов. При этом необходимое число параметров разложения почти не уменьшается с уменьшением участка поверхности, где требуется иметь хорошее разложение. Этот недостаток разложения по сферическим функциям следует считать особенно существенным, если по величине коэффициентов разложения требуется оценить особенности циркуляции на ограниченной территории [5]. Вывод о медленной сходимости разложений по сферическим функциям подтверждается и тем, что, как указано выше, в лучших современных оперативных спектральных моделях тотальное волновое число превышает 1000 [41, 79].
- Полиномы Чебышева первого рода нашли широкое применение для решения ряда метеорологических задач, в том числе прогностических [5, 6, 15, 61, 71, 97]. Это объясняется тем, что они
- являются полиномами равномерного приближения;
- позволяют существенно сконцентрировать исходную информацию. Так, для описания полей метеовеличин над районами, составляющими 1/3 полушария по широте, достаточно 16 членов ряда, т.е. полинома третьего порядка [10]. Для карт барической топографии (АТ-500 и выше) первые 10% членов ряда описывают до 90% исходной информации [16];
- В принципе случайное поле можно представить рядом по любым детерминированным многочленам. Однако аппроксимация сложных полей метеовеличин, генерируемых нелинейным взаимодействием физических процессов различных пространственно-временных масштабов, протекающих в атмосфере и в деятельном слое подстилающей поверхности, на основе любых фиксированных базисов очень условна, приводит к весьма грубой стилизации полей, к расщеплению их на "компоненты", не существующие в природе и не имеющие никакого метеорологического смысла. Чтобы уменьшить влияние искусственности, возникающей при использовании классических ортогональных многочленов, и уменьшить порядок аппроксимирующего полинома, применяют статистически оптимальные разложения. Главная особенность такой аппроксимации состоит в том, что при фиксированном числе членов ряда норма ошибки, усредненная по ансамблю реализаций случайных полей, минимальна (т.е. в среднем обеспечивается минимальная остаточная дисперсия по сравнению с любой ортонормированной системой базисных функций, по которым ведётся разложение).

В заключение данного раздела подведем основные итоги о возможностях использования детерминированных базисных функций для разработки гидродинамических моделей атмосферы.

1) В последние десятилетия интенсивно разрабатываются гидродинамические модели, основанные на проекционных методах. Такие методы предусматривают отыскание численных решений операторных уравнений путем их проецирования на некоторое подпростстранство, представление случайных полей метеовеличин рядами по его базисным функциям и решение системы пространственно-усеченных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно тенденций коэффициентов разложения. При этом базисные функции должны однородно и с высокой точностью аппроксимировать поля величин, учитывать их волновую структуру и периодичность, обеспечивать быструю сходимость ряда Фурье и быть мультипликативной системой собственных функций тождественного непрерывного оператора, действующего на зависимые переменные на сфере.

2) Широкое использование спектральных гидродинамических моделей атмосферы объясняется тем, что они обеспечивают ряд важных преимуществ по сравнению с разностными: они могут быть экономичнее; в них проще удовлетворять покомпонентным законам сохранения дифференциальной задачи и требованию отсутствия нелинейной вычислительной неустойчивости; боковые граничные условия естественны; снимается проблема картографической проекции и т.д.

3) Недостатки спектральных методов связаны с описанием физических процессов и представлением зональной $v(\lambda)$ и меридиональной $v(\theta)$ компонент непрерывного вектора скорости вблизи полюсов, где они терпят разрыв в силу особенностей сферических координат. Эти трудности, а также проблема вычислительной оптимизации процесса интегрирования модели шагами по времени существенно связаны с выбором базисных функций. В качестве базисных функций в моделях используют тригонометрические полиномы, присоединенные функции Чебышева, сферические функции, трехкомпонентные вектор-функции Хафа, обобщённые сферические функции и другие детерминированные ортогональные многочлены.

4) Основные достоинства разложения полей по тригонометрическим полиномам таковы:

- доказанная оптимальность для некоторых классов функций;
- хорошая сходимость рядов Фурье;
- простота генерации и наглядность параметров разложения;
- возможность выполнять БПФ по долготе и широте.

Однако применение тригонометрических полиномов на сфере затруднено, так как особенности в полных уравнениях в окрестности особых точек приводят к медленной сходимости рядов Фурье. Эти особенности снимают введением специально конструируемых функций, не имеющих разрывов и стремящихся у полюсов к нулю. В этом случае, например, в квазигеострофических моделях атмосферы можно исключить коэффициенты взаимодействия [49].

5) Присоединенные функции Чебышева, как и тригонометрические полиномы, не являются собственными решениями уравнений гидродинамики, но позволяют

- снять особенности у полюсов;
- выполнять БПФ по λ и θ быстрее, чем по сферическим функциям;
- резко сократить число параметров разложения благодаря своим сильным экстремальным свойствам, особенно в случае негладких физических полей.

6) Полиномы Лежандра (собственные решения линеаризованного оператора Лапласа на сфере)

- непрерывны и определены всюду на сфере,
- удовлетворяют условию ограниченности у полюсов,
- обеспечивают однородное представление полей.

Однако в нефильтрованных гидродинамических моделях атмосферы поля скоростей $v(\lambda)$, $v\theta$ нельзя аппроксимировать рядами Фурье по сферическим функциям у полюсов, поэтому кинематические свойства атмосферных течений либо представляют в терминах скалярных величин (функции тока и потенциала скорости), либо используют синтетические функции. Кроме того, для сферических функций можно выполнять БПФ лишь по λ; вследствие отсутствия явного соотношения между полями массы и движения в моделях по сферическим функциям необходимо согласовывать поля геопотенциала и ветра нормальномодовой инициализацией. В тропосфере, где пространственная изменчивость величин велика, ряды Фурье по сферическим функциям сходятся весьма медленно, поэтому в спектральных моделях современного поколения тотальное волновое число велико [41, 44].

7) Собственные решения системы полных линеаризованных уравнений гидротермодинамики в адиабатическом приближении аппроксимируют с помощью функций Хафа - собственных решений оператора Лапласа теории приливов, которые представляют собой бесконечную суперпозицию сферических функций из различных элементарных состояний [28]. Хотя применение сферических функций оказывается более экономичным, чем функций Хафа, тем не менее в последнем случае [49] поля геопотенциала и ветра над сферой удовлетворяют линеаризованным уравнениям движения, обобщающим геострофическое соотношение. Кроме того, можно отсечь шумы одновременно в полях массы и ветра, поэтому гидродинамическая модель становится фильтрованной, но инициализация не требуется, так как негеострофические низкочастотные моды не подавляются.

В свете сказанного в гидродинамических моделях атмосферы, по-видимому, рационально представлять скалярные поля (функции тока ψ, потенциала поля движения φ) рядами по сферическим функциям, а поле скорости $V(\lambda,\theta)$ - по неизвестным векторным сферическим функциям, используя в качестве основного состояния точное частное решение непрерывных уравнений, нелинейных относительно спектральных коэффициентов [98].

8) В принципе случайное поле можно представить рядом по любой системе априори заданных опорных функций. Однако такое описание полей, генерируемых нелинейным взаимодействием физических процессов различных масштабов, приводит к их грубой стилизации и к расщеплению на "составляющие", не ассоциирующиеся с топологическими структурами синоптических объектов. Более того, непериодический случайный процесс нельзя аппроксимировать рядом Фурье по детерминированным базисным функциям, существенно использующим условие периодичности (имеются в виду тригонометрические полиномы, сферические функции, обобщённые сферические функции и функции Хафа), с взаимно независимыми коэффициентами, являющимися случайными функциями времени. Это связано с серьезными трудностями применения параметров разложения, несущих дублирующуюся информацию, в физико-статистических схемах прогноза, предусматривающих уменьшение размерности пространства эвристического вектора-предиктора путем отбора наиболее информативных и независимых носителей метеорологической памяти с помощью различных решающих правил или композиции таковых. Лишь при разложении по полиномам Чебышева физическая функция не предполагается периодической и, соответственно, разложение непериодическое. Разумеется, этот факт не уменьшает искусственности описания полей рядами Чебышева-Фурье. Возможность преодоления указанных трудностей видится в следующих направлениях:

- в отказе от наиболее жестких ограничений, связанных с использованием априори заданных ортогональных многочленов в качестве базисных функций;
- в построении информативных ортогональных базисов, учитывающих ретроспективную эволюцию и пространственно-временные статистические связи атмосферных процессов и полей;
- в совместном применении детерминированных и недетерминированных информативных базисов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анискина О.Г. Некоторые аспекты гидродинамического моделирования атмосферных процессов. Учебное пособие. – Спб.: 2016. – 168 с.
2. Анискина О.Г., Готюр И.А. Теоретические основы моделирования атмосферных процессов. Часть 2: Численные методы реализации моделей атмосферы.– Спб: 2015 – 61 с.
3. Анжина Г.И. Прогностическая схема с использованием спектрально-сеточного преобразования.//Труды ГМЦ СССР, 1976, вып. 178, с. 40-52.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965 – 323 с.
5. Багров Н.А. Аналитическое представление полей.// Труды ЦИП, 1958. вып.64. С. 3-25.
6. Багров Н.А., Зверев Н.И. Способ прогноза поля геопотенциала Н500 на средние сроки.// Труды ЦИП, 1961. вып. 108. С. 3-22.
7. Багров Н.А., Стеблянко В.А. Некоторые характеристики циркуляции атмосферы на уровне 500 мб. // Труды ГМЦ СССР, 1973. вып.106. №.13-31 с.
8. Багров Н.А., Стеблянко В.А. О точности аналитического представления метеорологических полей.// Труды ГМЦ СССР, 1968. вып. 28. С. 30-40.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.1 – М.: Наука, 1973. – 631 с.
10. Белинский Н.А., Глаголева М.Г. Исследование возможности экстраполяции полей аномалий цикло- и антициклонической деятельности.// Труды ЦИП, 1959. вып. 91. С. 3-17.
11. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды.– Л.: Гидрометеоиздат, 1975. - 392 с.
12. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды.– Л., Гидрометеоиздат, 1989.– 378 с.
13. Белоусов С.Л., Гандин Л.С., Машкович С.А. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью ЭВМ. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. - 282 с.
14. Блинова Е.Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы // Докл. АН СССР. 1943. - № 7, том 39. – с. 284 - 287.
15. Борисенков Е.П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей.// Труды ААНИИ, 1963. вып. 263. - 243 с.
16. Борисенков Е.П., Гуров В.П., Титов С.И. Динамика атмосферы и численные методы прогноза. Л.:ЛВИКА им. А.Ф. Можайского, 1967. 486 с.
17. Бурштейн А.Б. Концепция медленного преобразования в региональной модели атмосферы. // Метеорология и гидрология, 1988. № 10. С. 37-43.
18. Быков В.В., Курбаткин Г.П., Горелышева И.В.. Опыт построения многоуровенной схемы численного анализа аэрологических данных. // Труды ММЦ, 1964. вып. 4. С. 56-72.
19. Быков В.В, Курбаткин Г.П. Опыт объективного анализа аэрологических данных. // Изв. АН, сер. геофиз., 1961, № 2. С. 307-318
20. Ван Мигем Дж., Дефрис П., , Ван Изакер Дж. Об избирательной роли систем движения в общей циркуляции атмосферы//Сб.: Атмосфера и океан в движении. М: Иностр. лит-ра, 1963. С. 144-156.
21. Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука. - 407с.
22. Вулих Б.З. Краткий курс теории вещественной переменной.- М.:Наука, 1965 – 304 с
23. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза. Вычислительные аспекты. Л.:Гидрометеоиздат, 1987– 264 с.

24. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики М.: Физматлит, 2010. — 736 с.
25. Груза Г.В., Рейтенбах Р.Р. Статистика и анализ гидрометеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат. 1982.- 216 с.
26. Даценко Н. М., Иващенко Н. Н., Сонечкин Д. М. Свойства естественных ортогональных составляющих температурных полей Северной Евразии в XX веке // Известия РАН. ФАО. 2011, Т. 47. Вып. 1. С. 35—47.
27. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа.–М., Физико-матем. лит-ра, 1962 – 659 с.
28. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. - 196 с.
29. Дымников В.П., Филатов А.Н. Основы математической теории климата. М.:ВИНИТИ, 1994– 254 с.
30. Елисейкин С.А., Климов С.А., Корсиков А.А. Аналитическое описание климатических полей метеопараметров в слое 0-100 км.// Труды ВНИИГМИ-МЦД, 1990. вып. 153. – С. 126-131.
31. Ефимов В.А. Математическое моделирование долговременных нестационарных планетарных процессов в системе океан-атмосфера. // Труды ААНИИ, 1976. вып. 336 – 255 с.
32. Ефимов В.А. Решение нелинейных уравнений динамики атмосферы на сфере.//Метеорология и гидрология, 1968, №5 – с. 22-29.
33. Зверев Н.И. Применение статистики в предсказании погоды. //Труды ГМЦ СССР, 1970. вып. 66. -196 с.
34. Зверев Н.И.., Пурганская И.П. Практические приемы разложения полей метеорологических элементов по полиномам Чебышева. // Труды ЦИП, 1963. вып. 123. – С. 78-86.
35. Ильин А.А., Филатов А.Н. Полная и селективная инициализация в спектральных моделях. //Метеорология и гидрология, 1988, № 3 – с.15-16.
36. Кадышников В.М., Лосев В.М., Бурштейн А.Б. Нелинейная инициализация методом нормальных мод и ее влияние на региональные прогнозы. // Метеорология и гидрология, 1987, N 12 – с.16- 24.
37. Калмыкова Н.М. Аналитическое представление полей метеорологических элементов.// Труды ЦИП, 1956. вып. 46 – С. 79-83.]
38. Кибель И.А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. // Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз.1940, № 5 – с. 30-35
39. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970 – 710 с.
40. Крупицкая Т.М., Чернин К.Е. Аппроксимация двумерных полей по полиномам Чебышева. // Труды ААНИИ. 1964. Т. 271 – С.31-44.
41. Курбаткин Г.П. Гидродинамические оперативные прогнозы. // Сб.: Достижения в области гидрометеорологии и контроля природной среды. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – с. 10-33.
42. Курбаткин Г.П. Некоторые задачи моделирования ультрадлинных атмосферных волн.//Докл. АН СССР, 1970, т. 162, № 4 – с. 793-795.
43. Курбаткин Г.П., Дегтярев А.И., Фролов А.В. Спектральная модель атмосферы, инициализация и база данных для численного прогноза погоды. Спб., Гидрометеоиздат, 1994 – 184 с.
44. Курганский В.М. Введение в крупномасштабную динамику атмосферы. СПб., Гидрометеоиздат, 1993 - 168 с.

45. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. - 334 с.
46. Матвеев Ю.Л., Матвеев Л.Т., Солдатенко С.А. Глобальное поле облачности. Л., Гидрометеоиздат, 1986. - 279 с.
47. Математическая энциклопедия, том 1. - М.: Изд-во Сов. энциклопедия, 1977, с. 978-985.
48. Махенхауер Б. Спектральный метод. //Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.:Гидрометеоиздат, 1982, с. 88-192.
49. Машкович С.А. Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды. Л.:Гидрометеоиздат, 1986, 287 с.
50. Машкович С.А., Вейль И.Г. О крупномасштабных атмосферных процессах с "отрицательной" вязкостью.// Метеорология и гидрология, 1970, №8, с. 3-15.
51. Машкович С.А., Хейфец Я.М. Прогноз малой заблаговременности в рамках линейной трехуровенной модели.// Труды Всесоюзн. научн. метеорол. совещания, т.2. Л.: Гидрометеоиздат, 1963. С.215-221.
52. Морской Г.И., Руденко И.Т. Практический гармонический анализ на сфере. // Труды ЦИП, 1963. вып. 123. с.18-33.
53. Ольховский Ю.Б., Новоселов О.Н., Мановцев А.П. Сжатие данных при телеметрии. М.: Сов. радио, 1971. - 303 с.
54. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.:Мир, 1983 – 382 с.].
55. Поляк И.И. Численные методы анализа наблюдений. Л.: Гидрометеоиздат. 1975. - 211 с.
56. Рейтенбах Р.Г., Рощина Т.Ю., Стерин А.М. Многомерная структура климатических полей свободной атмосферы.// Труды ВНИИГМИ-МЦД, 1984. вып.109. – с. 16-30.
57. Ремез Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Задачи с линейно входящими параметрами. Киев : Изд-во АН УкрССР, 1957. - 454 с.
58. Репинская Р.П., Анискина О.Г.
59. Репинская Р.П., Курзенева Е.В. Синтез правил отбора коэффициентов взаимодействия в спектральной негеострофической баротропной модели// Межвуз. сб.: Метеорологические прогнозы. Спб, изд.РГГМИ, 1992, с. 44-58.
60. Руденко С.И. К вопросу о представлении метеорологических полей в спектральных моделях.//Труды ГМЦ СССР, 1973. вып. 86. С.38-45.
61. Свинухов Г.В. Опыт объективного прогноза поля геопотенциала на поверхности 500 мб. на 3-7 дней по Берингову морю.- Метеорология и гидрология, 1964, № 12. С. 30-33.
62. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - с.????????
63. Сонечкин Д.М. Об оценке числа степеней свободы крупномасштабных атмосферных процессов. // Труды ГМЦ СССР,1987, вып.290, с. 27-39.
64. Сонечкин Д.М., Казанджан Г.П. Итерационная схема спектрального объективного анализа синоптических и аэрологических наблюдений. // Труды ГМЦ СССР, 1982. вып. 251. С. 17-26.
65. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Физматлит, 2005. - 480 с.
66. ТихомировВ.Н. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976 - 304 с.
67. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978, 411 с.

68. Хейфец Я.М., Шишкова И.А. Усовершенствование методики долгосрочного прогноза карт абсолютной топографии по баротропной модели.// Труды ЦИП, 1960. вып. 93. – с. 16-24.
69. Чанг Ю. (ред.) Модели общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 352 с.
70. Чебышев П.Л. Теория механизмов, известных под именем параллелограммов. Полное собр. соч., т.2. М.: Изд-во АР СССР, 1947–80 с.
71. Чичасов Г.Н. Технология долгосрочных прогнозов погоды. СПб., Гидрометеоиздат, 1991. - 304 с.
72. Шнееров Б.Е, Мелешко В,.П. и др. Глобальная модель циркуляции атмосферы и верхнего слоя океана. //Труды ГГО, 1997, вып. 544.– с. 3-123.
73. Эдвардс Р.Э Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985.– 399 с.
74. Юдин М.И. К определению среднего движения в задачах долгосрочного прогноза и теории климата. // Труды ГГО, 1972, вып. 272. – с. 3-14.
75. Юдин М.И. Матюгин В.А., Гаврилина В.М. Модификация формы спектрального усечения уравнений с целью повышения точности метеорологических прогнозов.//Метеорология и гидрология, 1995, № 6. – с. 5-11.
76. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1964. – 344 с.
77. Baer F. Adjustments of initial conditions required to suppress gravity oscillations in non-linear flows. //Beitr. Phys. Atm.,1977, v. 50.
78. Bergthorsson P. a.o. Routine forecasting with the barotropic model. // Tellus, 1955. 7, v 3, p. 17-25
79. ECMWF Forecast Model Documentation Manuel. Revision 4. September 1982. V. 1. Theoretical Bases; V. 2. Organisation of the Model.
80. Eliasen E., Machenhauer B., Rasmussen E. On numerical method for integration of the hydrodinamical eguation with a spectral representation of the horizontal filds // Institut for teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet. 1970. - rep. №2. - 35 p.
81. Flattery T.W. Spectral models for global analysis and forecasting.- In: Proc. Sixth. AWS Technical Exchange Conference, 1971, U.S. Air Force, Air Weather Servise, Washington, p. 42-54.
82. Gilchrist B., Cressman G.P. An experiment in objective analysis. // Tellys, 1954, 6, № 4, p. 309-318.
83. Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components.// J. Educat. Psychol., 1933. V. 24. P. 417-441, 498-520.
84. Karhunen K. Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsreghnung. // Ann. Acad. Sci. Fennical, Ser. A137, 1947 (trans. By I. Selin in "On Linear Methods in Probability Theory", T-131, 1960, The RAND Corp., Santa Monica, Calif.)]
85. Kasahara A. Normal mode of ultralong waves in the atmosphere.// Mon. Wea. Rev., 1976, v. 104, p. 669-690
86. Kasahara A. Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions.// J. Atm. Sci., 1977, vol. 34, Ь 5, p.687-701.
87. Колмогоров А.Н. Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenclasse. // Ann. of Math., 1936, № 37
88. Kubota S. Surface spherica harmonic representation of the system of equation for analysis.//Papers in meteorologyand geophysics. Tokyo, Japan, 1960, v. 10, № 3-4, p. 145-166.
89. Lorenz E. N. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Sci. Rep., 1956, №. 1. Statistical Forecasting Project. M.I.T. Cambridge, Massachusetts. 48 p.
90. Machenhauer B. On the dynamics of gravity oscillation in a shallow water model, wich application to normal mode initialization. // Contr. Atm. Phys.,1977. V. 50. P. 253-271.

91. Machenhauer B., Andersen J.H. Nonlinear normal mode initialization. // The GARP Programme on Numerical Experimentation, Rep. Ь 18. Geneva, WMO, 1978. - 31 p.
92. Machenhauer B., Daley R. A baroclinic primitive eguation model with a spectral representation in three dimensions // Institut for teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet. - 1972. - rep. № 4. - 63 p.
93. Machenhauer B., Rasmussen E. On the integration of the spectral hydrodinamical eguations by transform method // Institut for teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet. - 1972. - rep. №3. - 44 p.
94. Merilees P.E. An alternative scheme for the summation of spherical harmonics. // J. Appl. Meteorol.,1973. V. 12, № 1, p.224-227.
95. Merilees P.E. Numerical Experiments with the Pseudospectral Method Coordinates. // Atmosphere, 1974. V. 12. № 3. P. 77-96.
96. Merilees P.E. The pseudospectral approximation applied to the shallow water eguations on a Sphere. // Atmosphere,1973. V. 11. № 1. P.13-20.
97. Milkern F.S., Cooley D.S. Verification of hemispherical predictions.// J. of Meteorol, 1961. 18. № 1, p. 50-59.
98. Moses H.E. The use of vector spherical harmonics in global meteorology and aeronomy.// J. Atmos. Sci., 1974. v. 31, № 6, pp. 1490-1499.
99. Orszag S.A. Fourier series on sphere//Difference and spectral methods for atmosphere and ocean dynamics problems.(Proceedings of Symp.). P. 2. Novosibirsk, Computing Centre of the Sibirian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1974. P. 88-161.
100. Ракушина Е. В., Кандиева К. К., Анискина О. Г., Погорельцев А. И. Применение аппарата естественных ортогональных функций для анализа крупномасштабных динамических процессов в средней атмосфере. Труды ГГО. 2018. Вып. 591. С. 105—123.
101. Panofsky H.A. Objective weather map analysis.// J. of Meteorol., 1949, 6, Ь 66.
102. Phillips N.A. An example of nonlinear computational instability. // In: The atmosphere and the sea in motion/ Edited by B. Bolin. Rockefeller Institute, New York, 1959.
103. Robert A.J. The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. // J. of the meteorological society of Japan. Ser. II, 1966,. v. 44, № 5, p. 237-245.
104. Silberman I. Planetary waves in the atmosphere. // J. of Meteor. 1954, v. II, № 7, p. 27-34.
105. Werner H. Rational Tshebyscheff-Approximation. Eigenwertteorie und Differenzentechnung. // Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, v.13, Ь 2, p.330-347.

У ч е б н о е   п о с о б и е

Анискина Ольга Георгиевна,

Репинская Раиса Петровна

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В АТМОСФЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

Учебное пособие