Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. Веретенников

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Р Г Г М У

Санкт-Петербург
2018

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

УДК
ББК

Веретенников В. Н. Элементы векторной алгебры. Учебное пособие. – Спб: РГГМУ, 2018 – 72 с.

Пособие является третьим выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам.

Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

Рецензент: *Вагер Б. Г., д-р физ.-мат. наук, проф. СПбАСУ*

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Основные теоретические сведения» – приводятся основные теоретические сведения с достаточной полнотой и доказательно (заголовок раздела опускается). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

Понятие опорного конспекта прочно вошло в педагогическую литературу, начиная с работ донецкого учителя-новатора Шаталова. Здесь опорный конспект по математике понимается расширительно в той мере, в какой он может заменить минимальный конспект для учащихся.

Опорный конспект целесообразен для первичного, быстрого ознакомления с курсом математики, а далее нужно продолжить изучение теорию по разделу «Основные теоретически сведения», где все изложено с достаточной полнотой и доказательно. Опорный конспект полезен и для закрепления изученного материала, для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Физическое обоснование векторной концепции

Некоторые физические величины (например, температура, масса, объем, работа, потенциал) могут быть ***охарактеризованы одним числом***, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения; такие величины называются ***скалярными***. Ещё примеры скалярных величин: длина, площадь, время, угол, плотность, сопротивление.

Другие величины (например, сила, скорость, ускорение, напряжённость электрического или магнитного поля) ***характеризуются числом и направлением***. Эти величины называются ***векторными***. Для ***геометрического изображения*** физических векторных величин служат векторы. Векторы часто используются в различных областях чистой и прикладной математики, в физике и технических науках. В гидрометеорологии, помимо скалярных процессов, часто приходится рассматривать векторные процессы, примерами которых могут служить векторы скорости ветра и морских течений. Векторный анализ, применяемый физиками или инженерами для решения своих проблем, во многих аспектах отличается от n-мерных векторных пространств, используемых в чистой математике. Оба направления, однако, имеют общие интуитивные основы. Естественно, необходимость векторной концепции возникает и в механике. Например, сила, приложенная к телу, не может быть охарактеризована одним числом. Сила характеризуется двумя свойствами – модулем и направлением. Сила представляет собой пример векторной величины.

Необходимо подчеркнуть, что вектор не является числом. Если мы рассматриваем вектор, лежащий в плоскости, то для его описания необходимо знать два фактора – модуль и его направление (например, угол, образуемый им с одним из осей координат). Если рассматривается вектор в трехмерном пространстве, то для описания вектора требуется три фактора: один – величину для его модуля и два для указания его положения в системе координат.

1.1.Основные понятия

Направленные отрезки на плоскости

Рассмотрим некоторую плоскость Π и произвольную прямую ℓ, принадлежащую этой плоскости. Прямая ℓ разбивает плоскость Π на две полуплоскости Π_1 и Π_2 (рис. 1.1). Через две различные точки B и C прямой ℓ проведём параллельные между собой и принадлежащие плоскости Π прямые b и c. Точка B делит прямую b на два луча b_1 и b_2 таких, что $b_1 \in \Pi_1$, а $b_2 \in \Pi_2$. Точно также точка C делит прямую c на два луча c_1 и c_2 таких, что $c_1 \in \Pi_1$, а $c_2 \in \Pi_2$.

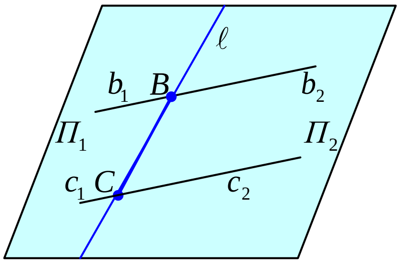


Рис. 1.1

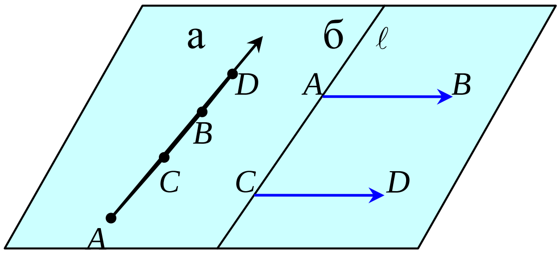


Рис. 1.2

Определение 1. Два луча $[AB)$ и $[CD)$ называются ***сонаправленными***, если 1) они лежат на одной прямой и один из них включается в другой (рис. 1.2, а) или 2) они лежат на различных параллельных прямых и в одной и той же из полуплоскостей, определяемых прямой ℓ, проходящей через их начала (A и C) (рис. 1.2, б).

Обозначение: $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$ (рис. 1.2).

Определение 2. Два параллельных луча, лежащих в различных полуплоскостях, называются ***противоположно направленными***.

Обозначение: $[AB)\uparrow\downarrow[CD)$ (рис. 1.3).

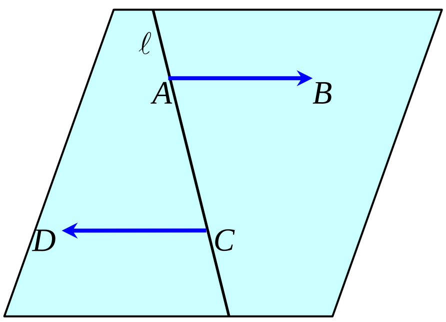


Рис. 1.3

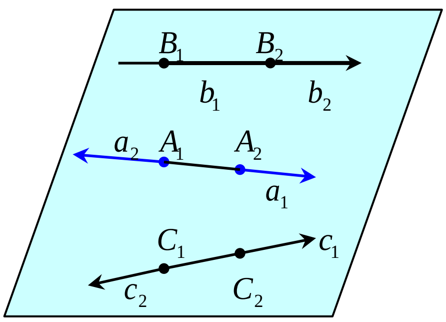


Рис. 1.4

Если лучи принадлежат одной и той же прямой, то их пересечение является отрезком или пустым множеством либо один из лучей содержится в другом. В двух первых случаях лучи также являются противоположно направленными, а в третьем – сонаправленными.

Так, на рис. 1.4 $a_2 \cap a_2 = \varnothing, b_2 \subset b_1$ и $c_1 \cap c_2 = [C_1C_2]$.

Определение 3. Множество всех лучей плоскости, сонаправленных с одним и тем же лучом, называется ***направлением плоскости***.

Так как любой луч данного направления однозначно определяет всё множество лучей этого направления, то направление на плоскости можно задать с помощью только одного луча.

Определение 4. Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ плоскости называются одинаково направленными, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены.

Определение 5. Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ плоскости называются противоположно направленными, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ противоположно направлены.

Рассмотрим на плоскости две произвольные несовпадающие точки A и B, упорядоченные определенным образом; например, точку A будем считать первой, а точку B – второй.

Определение 6. Отрезок $[AB]$, для которого точки A и B упорядочены определённым образом, называется ***направленным отрезком***.

Отрезок $[AB]$, определяемый данными точками, **обозначим** так: **AB** или $\overrightarrow{AB}$.

Точка A называется ***началом направленного отрезка*** **AB**, а точка B – его ***концом***. Очевидно, направление отрезка **AB** совпадает с направлением луча $[AB)$. Из определения 6 следует, что направленный отрезок **AB** можно рассматривать и как упорядоченную пару точек $(A; B)$.

Определение 7. Длиной ***направленного отрезка*** **AB** называется длина отрезка $[AB]$.

Обозначение: $|\mathbf{AB}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 8. ***Направленные отрезки*** **AB** и **BA** называются ***противоположными***.

Каждую точку можно рассматривать как частный случай ***направленного отрезка***, начало которого и конец совпадают.

Точку A как ***направленный отрезок*** обозначают **AA** или $\overrightarrow{AA}$ и называют ***нулевым направленным отрезком***.

Для ***нулевого направленного отрезка*** принято считать, что $|\mathbf{AA}| = 0$, а направление не определено.

Направленные отрезки в пространстве

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость *П*, которая разбивает пространство на два полупространства. Всякая прямая, пересекающая плоскость *П*, точкой пересечения делится на два луча, лежащих разных полупространствах.

Два луча, лежащих параллельных прямых и принадлежащих одному и тому же полупространству, называются ***сонаправленными***. Два луча, лежащих параллельных прямых, принадлежащих различным полупространствам, – ***противоположно направленными***.

Множество всех лучей пространства, сонаправленных с одним и тем же лучом, называется ***направлением в пространстве***. Сонаправленность и ***противонаправленность*** лучей обозначаются при помощи символов $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ соответственно.

Отрезок $[AB]$ называется направленным, если его концы A и B упорядочены; при этом если первой является точка A, а второй – точка B, то A – ***начало направленного отрезка***, а B – его ***конец***.

Направленный отрезок обозначается так: **AB** или $\overrightarrow{AB}$. На чертеже ***направленный отрезок*** снабжен стрелкой на конце.

Из определения ***направленного отрезка*** следует, что это понятие эквивалентно понятию упорядоченной пары точек (A; B).

Направленные отрезки **AB** и **CD** называются ***сонаправленными***, если сонаправлены лучи $[AB)$ и $[CD)$ (пишут $\mathbf{AB}\uparrow\uparrow\mathbf{CD}$).

Направленные отрезки **AB** и **CD** называются ***противоположно направленными***, если противоположно направлены лучи $[AB)$ и $[CD)$ (пишут $\mathbf{AB}\uparrow\downarrow\mathbf{CD}$).

Векторы на плоскости

Определение 1. Вектор есть множество всех ***направленных отрезков*** плоскости, имеющих одинаковое направление и равные длины.

Замечание. В школьном курсе геометрии вектор определяется как параллельный перенос. Легко заметить, что приведённое определение вектора эквивалентно определению параллельного переноса.

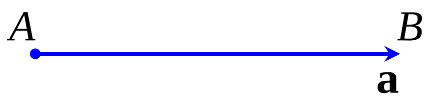
В книгах векторы обычно **обозначаются** так $\mathbf{AB}, \mathbf{a}$, а в тетрадях и на доске – $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$.

Из определения вектора следует, что из любой точки плоскости можно отложить ***направленный отрезок***, принадлежащий любому заданному вектору, т.е. любая точка плоскости является началом ***направленного отрезка*** – одного из «представителей» данного вектора. Поэтому любой направленный отрезок плоскости однозначно задаёт вектор, в то время как произвольный вектор задаёт на плоскости бесчисленное множество (семейство) ***направленных отрезков***.

Это обстоятельство позволяет на чертеже изображать вектор одним из ***направленных отрезков***, представляющих этот вектор, и при необходимости параллельно переносить его в любую точку плоскости.

То, что ***направленный отрезок*** **AB** входит в семейство ***направленных отрезков***, задающих вектор **a**, записывают следующим образом $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$.

Геометрически вектор часто изображают отрезком со стрелкой.



Определение 2. Длина $|\mathbf{AB}|$ ***направленного отрезка*** $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$ называется длиной или модулем вектора **a**.

Обозначение $|\mathbf{AB}|$ или $|\mathbf{a}|$.

Модуль вектора – ***скалярная неотрицательная*** величина.

Определение 3. Вектор **a**, для которого $|\mathbf{a}| = 1$, называется ***единичным вектором*** или ***ортом***.

Определение 4. Множество всех нулевых ***направленных отрезков*** называется нулевым вектором (или нуль вектором).

Обозначение: символ **o**.

Из приведенного определения следует, что длина нулевого вектора равна нулю ($|\mathbf{o}| = 0$). Направление его не определено (можно считать его направленным одинаково с любым вектором).

Так как вектор есть множество ***направленных отрезков***, имеющих равные длины, то векторное равенство $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ нужно понимать в том смысле, что векторы **a** и **b** – это по сути дела один и тот же вектор.

Определение 5. Векторы **a** и **b** называются ***равными***, если они:

1) коллинеарны $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,
2) сонаправлены $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$,
3) их длины равны $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

Обозначение $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Замечание. Иначе говоря, векторы равны, если при параллельном переносе векторов и совмещении их начал будут совмещены и их концы.

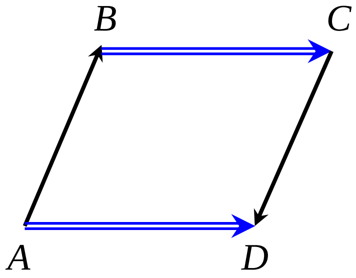


Рис. 1.5

На рис. 1.5 изображен параллелограмм *ABCD*, где векторы **BC** и **AD** равны. Так как векторы **AB** и **CD** имеют противоположные направления, то $\mathbf{AB} \neq \mathbf{CD}$, хотя $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{CD}|$.

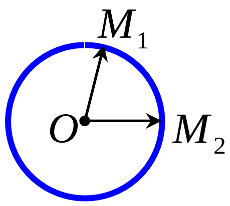


Рис. 1.6

Отметим, что на рис. 1.6 $\mathbf{OM}_1 \neq \mathbf{OM}_2$, где M_1 и M_2 – две разные точки окружности радиуса *R* с центром в точке *O*, поскольку векторы $\mathbf{OM}_1$ и $\mathbf{OM}_2$ имеют разные направления.

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются ***противоположными*** (векторы **AB** и **CD** или **AB** и **BA**).

Некоторые свойства равных направленных отрезков

1. Каждый ***направленный отрезок*** **равен** самому себе $\mathbf{AB} = \mathbf{AB}$.
2. Если $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$, то $\mathbf{CD} = \mathbf{AB}$.
3. Если $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$ и $\mathbf{CD} = \mathbf{EF}$, то $\mathbf{AB} = \mathbf{EF}$.

Определение 6. Два ненулевых вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются ***коллинеарными***.

Коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ **обозначают** символом параллельности $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Из этого определения следует, что прямые, на которых лежат «представители» ***коллинеарных*** векторов, параллельны.

Для определённости считают, что нулевой вектор ***коллинеарен*** любому вектору.

Замечание. Иначе говоря, векторы ***коллинеарные***, если при параллельном их переносе и совмещении их начал они лежат на одной прямой.
Замечание. Из определения следует, что если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нулевой, то они ***коллинеарны***.

Если отложить ***коллинеарные*** векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общей точки *O*, $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, то точки *O*, *A* и *B* будут лежать на одной прямой.

При этом возможны два случая. Точки *A* и *B* располагаются на этой прямой

1) по одну сторону от точки *O*,
2) по разные стороны (рис.1.7).

Рис. 1.7

В первом случае векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются

- ***одинаково направленными*** (или ***сонаправленными***, пишут

$$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}),$$

- а во втором – ***противоположно направленными*** (пишут

$$\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}).$$

Векторы в пространстве

В пространстве понятие вектора вводится так же, как и на плоскости.

Каждая упорядоченная пара (*A*; *B*) несовпадающих точек определяет в пространстве ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB}$ с началом *A* и концом *B*.

Множество всех ***направленных отрезков*** пространства, имеющих одинаковое направление и равные длины, называется ***вектором***.

Таким образом, вектор пространства отличается от вектора плоскости тем, что в первом случае – это множество всех ***направленных отрезков*** пространства, имеющих равные длины, а во втором – множество ***направленных отрезков*** плоскости, имеющих равные длины.

Из определения вектора следует, что из любой точки пространства можно отложить ***направленный отрезок***, принадлежащий любому заданному вектору, т.е. каждая точка пространства является началом ***направленного отрезка*** – одного из «представителей» данного вектора.

Поэтому любой ***направленный отрезок*** однозначно задаёт вектор, в то время как произвольный вектор задаётся в пространстве классом ***направленных отрезков***.

Это обстоятельство позволяет на чертеже изображать вектор одним из ***направленных отрезков***, представляющих этот вектор, и при необходимости параллельно переносить его в любую точку пространства.

Определение. Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются ***компланарными***.

На рис. 1.8 векторы, представленные ***направленными отрезками*** **AB**, **CD** и **EF**, ***компланарны***

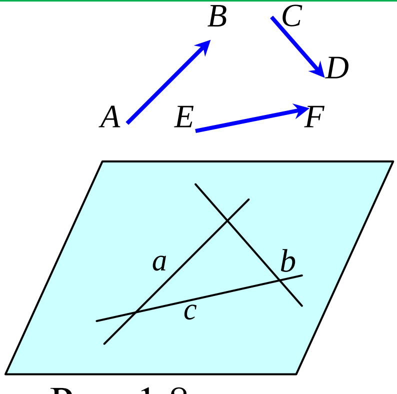


Рис. 1.8

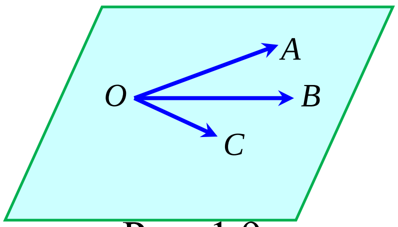


Рис. 1.9

Замечание. Иначе говоря, векторы ***компланарны***, если при параллельном их переносе и совмещении начал они лежат в одной плоскости.

Из определения ***компланарности*** векторов следует, что если из некоторой точки *O* пространства отложить ***направленные отрезки***, задающие ***компланарные*** векторы, то эти отрезки будут принадлежать одной плоскости (рис. 1.9).

Для определённости любую тройку векторов, содержащую нулевой вектор, считают ***компланарной***.

Очевидно, что ***два вектора всегда компланарны***.

Из определения равенства векторов следует, что если данный вектор перенести параллельно самому себе, то получится вектор, равный данному (т.е. каков бы ни был вектор **a** и точка *A*, всегда можно построить единственный вектор **AB** с началом в точке *A*, равный вектору **a**, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$).

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называется ***свободным***. В нашем курсе рассматриваются только ***свободные*** векторы, поэтому, говоря о векторах, прилагательное «свободный» в текст не будем включать, но всегда будем его подразумевать.

Иногда свобода перемещения вектора ограничена. Если точка приложения вектора строго фиксирована, то вектор называется ***связанным***. Примером может служить радиус-вектор точки *M*.

1.2. Линейные операции с векторами.

Вводя различные операции с векторами, сохраним принятые в алгебре чисел термины «сложение» и «умножение». Однако, следует иметь в виду, что поскольку понятия «вектор» и «число» существенно различны, то содержание вводимых операций может не совпадать с соответственными операциями алгебры чисел. Поэтому мы должны исследовать основные правила этих по сути дела новых операций и обязаны, в частности, проверить выполнимость установленных в алгебре чисел законов: ***коммутативного*** (***переместительного***), ***ассоциативного*** (***сочетательного***) и ***дистрибутивного*** (***распределительного***).

Линейными операциями над векторами называются сложение, вычитание и умножение вектора на число.

Сложение векторов

Определение. Суммой двух векторов называется третий вектор,

- началом которого является начало первого вектора,
- концом – конец второго,
- причем начало второго вектора совмещено с концом первого.

Пусть даны два вектора, **a** и **b**. Из произвольной точки *O* плоскости отложим ***направленный отрезок*** $\mathbf{OA} \in \mathbf{a}$, а из точки *A* – отрезок $\mathbf{AB} \in \mathbf{b}$ (рис. 2.1). ***Направленный отрезок*** $\mathbf{OB}$ принадлежит некоторому множеству ***направленных отрезков***, имеющих равные длины, или, что есть то же самое, задаёт некоторый вектор **c** такой, что $\mathbf{OB} \in \mathbf{c}$.

Рис. 2.1

Вектор **c** называется ***суммой*** векторов, **a** и **b**. Для обозначения суммы векторов применяют знак «+». Таким образом, если

$$\mathbf{OA} \in \mathbf{a},\ \mathbf{AB} \in \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{OB} \in \mathbf{c}, \text{ то } \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Можно показать, что определение вектора суммы не зависит от выбора точки *O*.

Приведенный способ сложения векторов называется ***правилом треугольника.***

Из этого правила следует, что для любых трех точек *A*, *B*, *C* плоскости имеет место соотношение

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC},$$

называемое ***равенством. Шаля***[1].

Теорема 2.1. *Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:*

1) *для любых двух векторов* **a**, **b**

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\textit{\textbf{коммутативность}});$$

2) *для любых трех векторов* **a**, **b**, **c**

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (\textit{\textbf{ассоциативность}});$$

3) *для любого вектора* **a**

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a};$$

4) *для каждого вектора* **a** *существует единственный вектор* $-\mathbf{a}$*, называемый вектором, противоположным вектору* **a***, такой, что*

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}.$$

[1]Шаль М. (1793–1880) – французский математик и историк математики. Шаль создал новое направление в науке – вычислительную геометрию.

▲ 1) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представим ***направленными отрезками*** **OA** и **OB** с общим началом O и на этих отрезках построим параллелограмм (рис. 2.2).

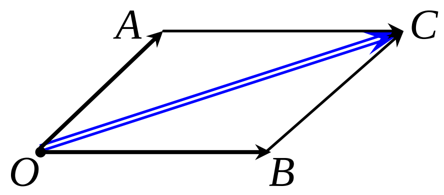


Рис. 2.2

Так как $\mathbf{a} = \mathbf{OA} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{OB} = \mathbf{AC}$ и по определению суммы векторов

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AC} = \mathbf{OC} \text{ и } \mathbf{OB} + \mathbf{BC} = \mathbf{OC},$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \ ▲$$

Заметим, что приведенное построение дает другое правило сложения векторов, эквивалентное правилу треугольника:

> для построения вектора суммы двух векторов нужно из некоторой точки отложить ***направленные отрезки***, изображающие векторы-слагаемые, и на этих отрезках построить параллелограмм;
> диагональ этого параллелограмма, исходящая из общей точки, взятых ***направленных отрезков***, задает сумму векторов.

Это правило сложения называется ***правилом параллелограмма***.

Доказанное свойство 1 сложения векторов справедливо и тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ***коллинеарные***.

Предлагаем студенту убедиться в этом самостоятельно (необходимо рассмотреть два случая; когда направления векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ совпадают и когда они противоположны).

Доказательство следует непосредственно из рисунка 2.3.

2) Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ представлены ***направленными отрезками*** **OA**, **AB** и **BC**. Тогда **OB** соответствует сумме

$$\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

а **OC** – сумме

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

С другой стороны, **AC** представляет сумму

$$\mathbf{b} + \mathbf{c},$$

поэтому **OC** изображает также и сумму

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Из всего этого заключаем, что

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

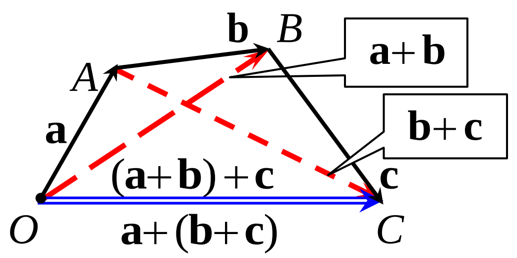


Рис. 2.3

3) Пусть **OA** представляет вектор **a**. Так как $\mathbf{AA}=\mathbf{o}$, то вектору $\mathbf{a}+\mathbf{o}$ соответствует тот же отрезок **OA**, поэтому

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}.$$

4) Пусть $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ есть вектор, представленный отрезком **AO**. Тогда вектор

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})$$

изображается отрезком **OO** и равен $\mathbf{o}$. ▼

Проведенные в теореме 2.1 (п. 2) рассуждения дают прием сложения любого конечного числа векторов.

Пусть заданы n векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и требуется найти их сумму. К концу вектора $\mathbf{a}_1$ приставим начало вектора $\mathbf{a}_2$, к концу построенного вектора $\mathbf{a}_2$ приставим начало вектора $\mathbf{a}_3$ и т.д. Наконец, к концу вектора $\mathbf{a}_{n-1}$ приставим начало вектора $\mathbf{a}_n$ (рис. 2.4). Тогда вектор $\mathbf{a}$, началом которого является начало вектора $\mathbf{a}_1$, а концом – конец вектора $\mathbf{a}_n$, и будет суммой векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n : \mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_n.$$

При этом безразлично, в каком порядке нумеруются заданные векторы.

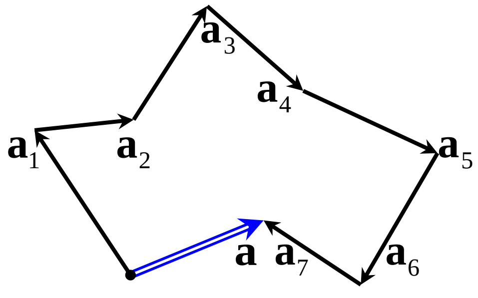


Рис. 2.4

Таким образом,

суммой n векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора $\mathbf{a}_1$, конец с концом последнего $\mathbf{a}_n$ при условии, что каждый последующий вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ отложен из конца предыдущего $\mathbf{a}_k$ $(1 \le k \le n)$.

Указанный способ построения суммы называется ***правилом замыкающей*** или ***правилом многоугольника***.

Правило треугольника является частным случаем правила многоугольника.

При определении суммы не предполагалось, что векторы являются ***компланарными***. Сумма трех ***некомпланарных*** векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, наряду, с правилом замыкающей, получается и по ***правилу параллелепипеда***:

сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ равна вектору $\mathbf{OD}$, где $\mathbf{OD}$ – диагональ параллелепипеда, построенного на векторах

$$\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}, \mathbf{OC} = \mathbf{c},$$

отложенных из одной точки O.

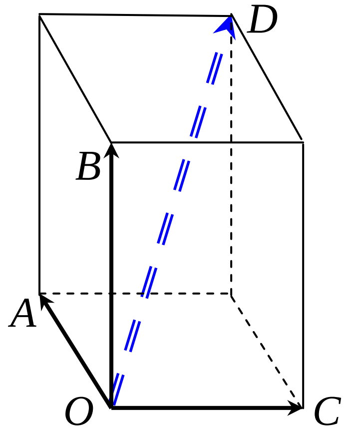


Рис. 2.5

Пример. Доказать, что средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и длина её равна половине длины этой стороны.

▲ Пусть $[\mathbf{EF}]$ – средняя линия треугольника ABC (рис. 2.6).

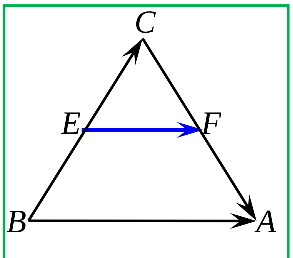


Рис. 2.6

$$\mathbf{BA} \in \mathbf{c},\ \mathbf{BC} \in \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{CA} \in \mathbf{b}.$$

Тогда по определению суммы векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

Так как E и F – середины сторон BC и CA, то

$$\mathbf{EF}=\mathbf{EC}+\mathbf{CF}=1/2\cdot\mathbf{BC}+1/2\cdot\mathbf{CA}\in 1/2\cdot\mathbf{a}+1/2\cdot\mathbf{b}=1/2\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=1/2\cdot\mathbf{c}.$$

Так как $\mathbf{BA}\in\mathbf{c}$ и $\mathbf{EF}\in 1/2\cdot\mathbf{c}$, то $\mathbf{EF}\parallel\mathbf{BA}$ и $|\mathbf{EF}|=1/2\cdot|\mathbf{BA}|$. ▼

Вычитание векторов

Операция вычитания векторов вводится как операция, обратная сложению.

Определение. ***Разностью векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$.

Обозначение $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Таким образом,

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c}, \text{ если } \mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}.$$

Вектор $\mathbf{a}$ называется ***уменьшаемым вектором***, а вектор $\mathbf{b}$ – ***вычитаемым вектором***.

Покажем, что для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ определяется однозначно.

В самом деле, из произвольной точки O пространства построим отрезки $\mathbf{OA}$ и $\mathbf{OB}$, представляющие соответственно векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 2.6).

Тогда ***направленный отрезок*** $\mathbf{BA}$ будет представлять разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

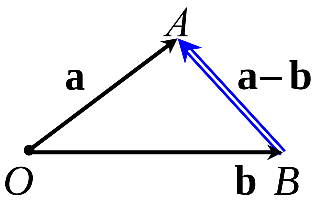


Рис. 2.6

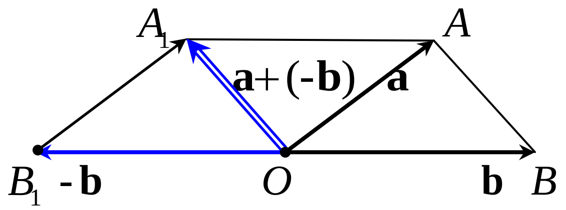


Рис. 2.7

Пусть существуют два различных вектора $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, являющихся разностями векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Это означает, что

$$\mathbf{b}+\mathbf{c}_1=\mathbf{a} \text{ и } \mathbf{b}+\mathbf{c}_2=\mathbf{a}.$$

Прибавив к обеим частям равенств вектор $-\mathbf{b}$, получим:

$$\mathbf{b}+\mathbf{c}_1+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-\mathbf{b});\ \mathbf{b}+\mathbf{c}_2+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}). \qquad (2.1)$$

Применив закон ***коммутативности*** сложения, из равенств (2.1) при условии, что $\mathbf{b}+(\text{-}\mathbf{b})=\mathbf{o}$, получим:

$$\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{b});\,\mathbf{c}_2=\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{b}),$$

поэтому $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}_2$. Это равенство означает, что разность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется однозначно.

Заметим, что при доказательстве единственности разности двух векторов мы попутно доказали, что

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{b}), \qquad (2.2)$$

т.е., что разность двух векторов равна сумме уменьшаемого вектора и вектора, противоположного вычитаемому вектору.

Применяя это свойство, легко построить вектор разности.

В самом деле, пусть $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$ (рис. 2.7). Построим отрезок $\mathbf{OB}_1=(\text{-}\mathbf{b})$, и затем отрезок $\mathbf{OA}_1=\mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{b})$, который на основании равенства (2.2) представляет вектор $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Отрезок $\mathbf{BA}$, как это легко заметить из рисунка 2.2, также представляет вектор разности $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Из (2.2) вытекает, что в векторных равенствах векторы можно переносить из одной части равенства в другую, меняя знак, стоящий перед вектором, на противоположный знак.

Иначе говоря, если $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, то $\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

Пример. В параллелограмме *ABCD* (рис. 2.8) $\mathbf{AB}=\mathbf{p}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{q}$. Выразить векторы $\mathbf{BC}, \mathbf{CD}, \mathbf{AC}, \mathbf{CA}, \mathbf{BD}, \mathbf{DB}$ через векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

▲

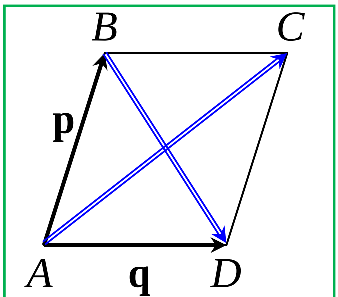


Рис. 2.8

Коллинеарные векторы $\mathbf{BC}$ и $\mathbf{AD}$ имеют равные длины (противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны) и одинаково направлены. В соответствии с определением равенства векторов получаем $\mathbf{BC}=\mathbf{AD}$. Так как $\mathbf{AD}=\mathbf{q}$, то $\mathbf{BC}=\mathbf{q}$.

Векторы $\mathbf{CD}$ и $\mathbf{AB}$ противоположно направлены и имеют равные длины. По определению противоположных векторов получаем

$$\mathbf{CD} = -\mathbf{DC} = -\mathbf{AB} = -\mathbf{p}\text{, т.е. } \mathbf{CD} = -\mathbf{p}.$$

Вектор **AC** является суммой векторов **AB** и **BC**, но $\mathbf{BC} = \mathbf{AD}$, поэтому $\mathbf{AC} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. Далее,

$$\mathbf{CA} = -\mathbf{AC} = -(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = -\mathbf{p} - \mathbf{q}.$$

(Этот результат можно получить и другим способом:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{CD} + \mathbf{DA},\ \mathbf{CD} = -\mathbf{DC} = -\mathbf{AB} = -\mathbf{p},\ \mathbf{DA} = -\mathbf{AD} = -\mathbf{q},$$

поэтому $\mathbf{CA} = -\mathbf{p} - \mathbf{q}$.)

По определению разности двух векторов получаем:

$$\mathbf{BD} = \mathbf{AD} - \mathbf{AB} \text{ или } \mathbf{BD} = \mathbf{q} - \mathbf{p}\text{, так как } \mathbf{AD} = \mathbf{q},\ \mathbf{AB} = \mathbf{p}.$$

Аналогичным образом находим, что $\mathbf{DB} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$. ▼

Замечание. Если даны два ***неколлинеарных*** вектора **p** и **q**, то их сумма и разность являются диагональными векторами параллелограмма, построенного на векторах **p** и **q**.

Пример. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.9)

$$\mathbf{AB} = \mathbf{p},\ \mathbf{AD} = \mathbf{q},\ \mathbf{AA_1} = \mathbf{r}.$$

Выразить векторы $\mathbf{AC},\ \mathbf{D_1B_1},\ \mathbf{AC_1},\ \mathbf{B_1C},\ \mathbf{D_1B},\ \mathbf{DB_1}$ через векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$.

▲ По определению суммы векторов получаем:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AB} + \mathbf{AD} = \mathbf{p} + \mathbf{q};$$

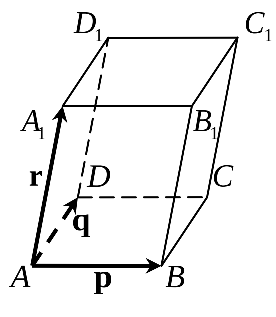


Рис. 2.9

$$\mathbf{AC_1} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CC_1} = \mathbf{AB} + \mathbf{AD} + \mathbf{AA_1} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}.$$

По определению разности двух векторов находим:

$$\mathbf{D_1B_1} = \mathbf{A_1B_1} - \mathbf{A_1D_1} = \mathbf{AB} - \mathbf{AD} = \mathbf{p} - \mathbf{q};$$

$$\mathbf{B_1C} = \mathbf{BC} - \mathbf{BB_1} = \mathbf{AD} - \mathbf{AA_1} = \mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Так как

$$\mathbf{D_1B} = \mathbf{D_1D} + \mathbf{DA} + \mathbf{AB} \text{ и } \mathbf{D_1D} = -\mathbf{AA_1} = -\mathbf{r},$$

$$\mathbf{DA} = -\mathbf{q},\ \mathbf{AB} = \mathbf{p},$$

то

$$\mathbf{D_1B} = \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{r}.$$

Поскольку

$$\mathbf{DB_1} = \mathbf{DA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BB_1} \text{ и } \mathbf{DA} = \text{-}\mathbf{q},\ \mathbf{AB} = \mathbf{p},\ \mathbf{BB_1} = \mathbf{r},$$

то

$$\mathbf{DB_1} = \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}.$$ ▼

Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора **a** на число $\lambda\ (\lambda \neq 0)$ называется вектор **b**, удовлетворяющий следующим условиям:

1) векторы **a** и **b** сонаправлены, если $\lambda > 0$,

2) векторы **a** и **b** противоположно направлены, если $\lambda < 0$;

$$|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|.$$

Если $\lambda = 0$, положим $\lambda\mathbf{a} \equiv \mathbf{o}$.

Операция умножения вектора на число записывается следующим образом $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Теорема 2.2. *Умножение вектора на число обладает следующими свойствами*:

1) *для любого числа* λ *и любых векторов* **a** и **b**

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b};$$

2) *для любых чисел* λ, μ *и любого вектора* **a**

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$$

3) *для любых чисел* λ, μ *и любого вектора* **a**

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};$$

4) *для любого вектора* **a**

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

▲ 1. а) пусть $\lambda = 0$, тогда из определения умножения вектора на число $\lambda = 0$ свойство 1 очевидно.

б) Пусть $\lambda > 0$. Возможны два случая:

- Векторы **a** и **b** ***неколлинеарны*** и
- векторы **a** и **b** ***коллинеарны***.

Допустим, что векторы **a** и **b** ***неколлинеарны***. Построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 2.10). Далее построим ***направленные отрезки*** $\mathbf{OA}_1 = \lambda\mathbf{a}$ и $\mathbf{OB}_1 = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1, а также определения операции умножения вектора на число следует, что

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = \lambda\mathbf{b}.$$

Из треугольника OA_1B_1 имеем

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

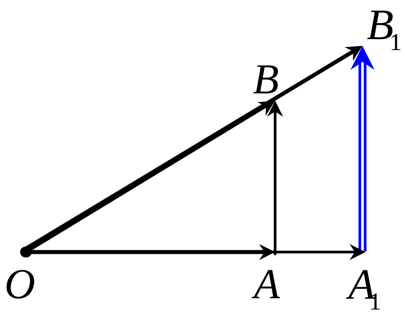


Рис. 2.10

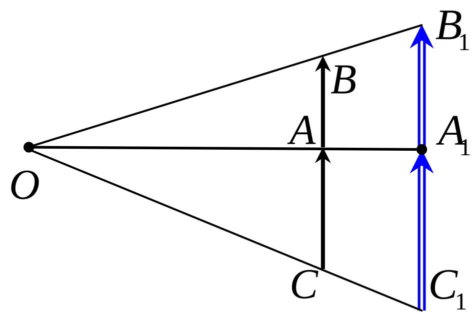


Рис. 2.11

Допустим, что векторы **a** и **b** ***коллинеарны***. Построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{CB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 2.11).

Возьмем точку O, не принадлежащую прямой (CB), и проведем прямые $(OC), (OA), (OB)$ и прямую (C_1B_1), параллельную (CB), так, что $|OC_1|/|OC| = \lambda$.

Тогда из подобия треугольников OAC и OA_1B_1, OAB и OA_1B_1, OBC и OB_1C_1 следует:

$$\frac{|C_1A_1|}{|CA|} = \lambda; \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \lambda; \frac{|C_1B_1|\,|\,C_1B_1\,|}{|CB|} = \lambda,$$

откуда

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1 = \lambda\mathbf{a}; \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = \lambda\mathbf{b}; \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1 = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Так как $\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1$, то $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

в) Если $\lambda < 0$, то доказательство проводится аналогично. Предлагается доказательство этого случая провести читателю самостоятельно. Справедливость свойств 2 — 4 очевидна, если $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$. Примем прямую (OA) за числовую ось, считая, что точка O – нулевая точка этой оси, а точка A – единичная. Пусть точка B представляет какое-то число λ. Тогда отрезок **OB** представит вектор $\lambda\mathbf{a}$, как это следует из определения операции умножения вектора на число. Отсюда следует справедливость свойств 2 — 4. ▼

Пример. Доказать, что для всякого треугольника существует такой треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

▲ Пусть дан треугольник *ABC* (рис. 2.12).

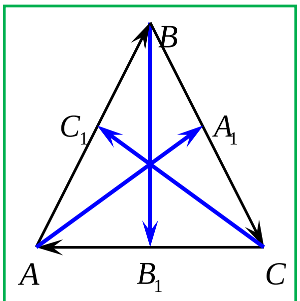


Рис. 2.12

Тогда $\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CA}=\mathbf{o}$.

Середины сторон *BC*, *CA*, *AB* обозначим через A_1, B_1, C_1. ***Направленный отрезок***

$$\mathbf{AA}_1=\mathbf{AB}+\mathbf{BA}_1=\mathbf{AB}+1/2\cdot\mathbf{BC}.$$

Аналогично

$$\mathbf{BB}_1=\mathbf{BC}+1/2\cdot\mathbf{CA};\ \mathbf{CC}_1=\mathbf{CA}+1/2\cdot\mathbf{AB}.$$

Сложив эти равенства и применив свойство ассоциативности сложения, получим

$$\mathbf{AA}_1+\mathbf{BB}_1+\mathbf{CC}_1=(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CA})+1/2\cdot\mathbf{BC}+1/2\cdot\mathbf{CA}+1/2\cdot\mathbf{AB}.$$

Пользуясь теперь свойством 4 умножения вектора на число и ***ассоциативным*** свойством сложения векторов, получим

$$\mathbf{AA}_1+\mathbf{BB}_1+\mathbf{CC}_1=3/2\cdot(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CA}).$$

Отсюда на основании равенства $\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CA}=\mathbf{o}$ имеем

$$\mathbf{AA}_1+\mathbf{BB}_1+\mathbf{CC}_1=\mathbf{o}.$$ ▼

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором или ***ортом***.

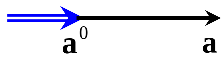
Обозначение $\mathbf{a}^0$ (читается: **a** с нуликом) $\left(\left|\mathbf{a}^0\right|=1\right)$.

Пусть **a** – произвольный ненулевой вектор, а $\mathbf{a}^0$ – единичный вектор того же направления, что и **a**, тогда, очевидно,

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0 .$$

Умножая обе части равенства на положительное число $1/|\mathbf{a}|$, получаем

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} .$$



Поэтому,

чтобы получить единичный вектор того же направления, что и данный вектор, нужно данный вектор умножить на число $1/|\mathbf{a}|$

(***или, что есть то же самое, разделить на его длину***).

Теорема 2.3. *Для того чтобы векторы* **a** и **b** *были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы существовало число* λ*, удовлетворяющее условию*

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} .$$

▲ **Необходимость**. Пусть $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Возможны три случая:

$$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b},\ \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{o} .$$

Покажем, что теорема верна в каждом случае.

В самом деле, если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$.

Приняв $\lambda = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, получим $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} = -\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}$ и $\lambda = -\dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

И, наконец, если $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, то $\mathbf{b} = 0 \cdot \mathbf{a}$, то есть $\lambda = 0$.

Достаточность. Если $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, то ***коллинеарность*** векторов **a** и **b** непосредственно следует из определения операции умножения вектора на число. ▼

Определение. Вектор $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k$, полученный в результате проведения нескольких линейных операций, называется ***линейной комбинацией*** векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

1.3. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Пусть задано k векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Будем называть это заданное множество векторов ***системой векторов***.

Определение. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ называется ***линейно зависимой***, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_\mathbf{k} = \mathbf{o}. \tag{3.1}$$

Если равенство (3.1) выполняется только, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ называется ***линейно независимой***.

Теорема 3.1. *Система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(k \geq 2)$ *линейно зависима в тои и только в том случае, если хотя бы один из ее векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

▲ Предположим сначала, что система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Будем считать для определенности, что в равенстве (3.1) отличен от нуля коэффициент λ_k. Перенося все слагаемые, кроме последнего, в правую часть, после деления на число $\lambda_k \neq 0$ получим, что вектор $\mathbf{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{a}_{k-1}.$$

Обратно, если один из векторов равен линейной комбинации остальных,

$$\mathbf{a}_k = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \mathbf{a}_{k-1},$$

то, перенося $\mathbf{a}_k$ в правую часть, получим линейную комбинацию

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \mathbf{a}_{k-1} + (-1)\mathbf{a}_k = \mathbf{o}.$$

В правой части равенства есть отличные от нуля коэффициенты $(-1 \neq 0)$. Значит, система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. ▼

Простейшим примером линейно-зависимых векторов является пара ***коллинеарных*** векторов.

Условие

$$\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1, \tag{3.2}$$

т.е. ***условие линейной зависимости двух ненулевых векторов, есть условие, необходимое и достаточное для коллинеарности этих векторов.***

▲ Пусть даны два коллинеарных ненулевых вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Обозначим через λ отношение длин этих векторов, т.е. число $|\mathbf{a}_1|/|\mathbf{a}_2| = \lambda$. Очевидно, что векторы $\mathbf{a}_2$ и $\lambda\mathbf{a}_1$ при сделанном выборе числа λ имеют одинаковые длины.

Значит, если $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ одинаково направлены, то $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$, если же они направлены в противоположные стороны, то $\mathbf{a}_2 = -\lambda\mathbf{a}_1$.

Итак, два ***коллинеарных*** вектора всегда линейно зависимы.

Ясно, что верно и обратное утверждение: если два вектора линейно зависимы, то они ***коллинеарны***. ▼

Докажем теперь, что ***линейная зависимость трех векторов есть условие необходимое и достаточное для компланарности трех векторов.***

▲ Пусть заданы три ***компланарных*** ненулевых вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. В соответствии с определением при совмещении начал этих векторов они окажутся в одной плоскости (рис. 3.1).

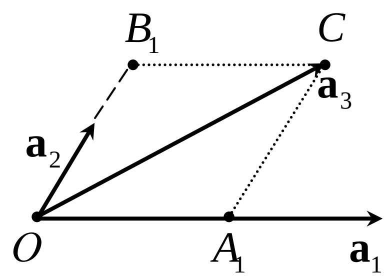


Рис. 3.1

Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ***не коллинеарны*** (иначе они линейно зависимы). Из произвольной точки плоскости O отложим все три вектора. Через конец вектора $\mathbf{a}_3$ (точку С) проведем прямые, параллельные векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Эти прямые пересекут прямые, на которых лежат векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в точках A_1 и B_1.

Векторы $\mathbf{OA}_1$ и $\mathbf{a}_1$, очевидно, ***коллинеарны***. Поэтому $\mathbf{OA}_1 = \lambda_1\mathbf{a}_1$ и аналогично $\mathbf{OB}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2$. Но

$$\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1 = \mathbf{OC} = \mathbf{a}_3.$$

Итак, $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ и, следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы.

Верно и обратное утверждение: если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы, то они ***компланарны***.

Если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ***не коллинеарны***, то они определяют некоторую плоскость. В той же плоскости лежат, очевидно, векторы $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ и $\lambda_2 \mathbf{a}_2$, а потому и их сумма – вектор $\mathbf{a}_3$.

Если же векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ ***коллинеарны***, то на той же прямой лежит и вектор $\mathbf{a}_3$, и три заданных вектора не только ***компланарны***, но даже ***коллинеарны***. ▼

Из проведенных рассуждений следует, что если на плоскости задана пара ***неколлинеарных*** векторов, то любой третий вектор, лежащий в той же плоскости, может быть представлен как линейная комбинация двух заданных.

Определение. Пару векторов будем называть «упорядоченной парой», если указано, какой вектор пары считается первым, а какой вторым.

Определение. Упорядоченная пара неколлинеарных векторов называется ***базисной системой векторов*** (***базисом***) на плоскости, определяемой заданными векторами.

Теорема 3.2 (разложения). *Всякий вектор на плоскости может быть представлен как линейная комбинация базисной системы векторов, это представление (разложение по базисной системе) единственно.*

▲ Пусть векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ базисные. Тогда, как показано выше, любой вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 .$$

Остается доказать единственность разложения.

Предположим, что существует еще одно разложение вектора по той же базисной системе

$$\mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 ,$$

причем хоть одно из чисел β_1 и β_2 отлично от чисел α_1 и α_2.

Тогда, вычитая из одного равенства другое, получаем

$$(\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{o} .$$

Значит, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ линейно зависимы, а потому ***коллинеарны***. Но это противоречит утверждению, что $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют базисную систему. Итак, разложение заданного вектора по заданной базисной системе единственно. ▼

Проведенные рассуждения легко переносятся и на векторы, заданные в пространстве.

Определение. Тройка векторов называется «упорядоченной тройкой», если указано, какой вектор тройки считается первым, какой вторым и какой третьим.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***базисной системой векторов*** (***базисом***) в пространстве.

Теорема 3.3 (разложения). *Всякий вектор может быть представлен как линейная комбинация базисной системы векторов; это представление («разложение по базисной системе») единственно.*

▲ Пусть задана базисная система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}$ – произвольный вектор. Пусть O – общее начало этих векторов.

Через точку D – конец вектора $\mathbf{a}$ (рис. 3.2) – проведем прямую DE, параллельную вектору $\mathbf{e}_3$.

Пусть E – точка пересечения этой прямой с плоскостью, определяемой векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Через точку E проведем прямые, параллельные векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, пусть B_1 и A_1 – точки пересечения этих прямых с прямыми, на которых лежат указанные векторы. Наконец, через точку D проведем прямую, параллельную OE до пересечения в точке C_1 с прямой, на которой лежит вектор $\mathbf{e}_3$. Имеем

$$\mathbf{OE} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1,\ \mathbf{a} = \mathbf{OD} = \mathbf{OE} + \mathbf{OC}_1,\ \mathbf{OA}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{OB}_1 = \alpha_2 \mathbf{e}_2,\ \mathbf{OC}_1 = \alpha_3 \mathbf{e}_3.$$

Поэтому

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3.$$

Полученное разложение единственно, так, как если бы существовало еще одно разложение

$$\mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3,$$

то выполнялось бы равенство

$$(\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + (\beta_3 - \alpha_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{o},$$

причем хоть одно из чисел $\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_3 - \alpha_3$ было бы отлично от нуля.

Это означало бы, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ были бы линейно зависимы, а потому и ***компланарны***, что противоречит условию теоремы. ▼

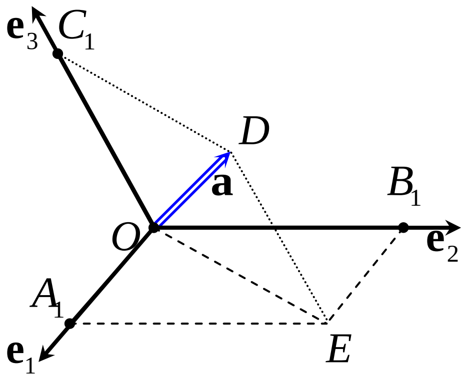


Рис. 3.2

Из доказанной теоремы следует также,

Что любые четыре вектора линейно зависимы.

Введем еще одно важное понятие.

Определение. Координатами вектора в заданном базисе называются коэффициенты разложения вектора по базисной системе векторов.

Итак, если задана базисная система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3,$$

то координатами вектора, **a**, в заданном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, называются числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Записываются координаты вектора в заданном базисе в виде строки

$$\mathbf{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}.$$

Таким образом, если задан базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и в этом базисе $\mathbf{a} = \{3; 1; -2\}$, то $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.

Очевидно, если задан некоторый базис, то задание координат вектора в этом базисе полностью определяет сам вектор и, следовательно,

два вектора ***равны*** тогда и только тогда, когда равны их координаты в каком-либо заданном базисе.

Используя правила линейных операций, получаем следующие **теоремы**:

При умножении вектора на число все его координаты в заданном базисе умножаются на это число.

При сложении векторов складываются соответственные координаты этих векторов.

▲ Действительно, пусть задан базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и в этом базисе два вектора:

$$\mathbf{a}_1 = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}, \mathbf{a}_2 = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}.$$

Тогда

$$\lambda \mathbf{a}_1 = \lambda(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3) = \lambda\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \lambda\alpha_2 \mathbf{e}_2 + \lambda\alpha_3 \mathbf{e}_3 = \{\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \lambda\alpha_3\};$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3) + (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{e}_3 = \{\alpha_1 + \beta_1;\ \alpha_2 + \beta_2;\ \alpha_3 + \beta_3\}.$$ ▼

Отметим, что в пространстве можно выбирать бесконечное множество базисных систем векторов. И один и тот же вектор в разных базисных системах будет иметь разные координаты. Во многих задачах полезно переходить от одной базисной системы к другой и устанавливать соотношения между координатами вектора в различных системах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. В базисной системе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ заданы три вектора:

$$\mathbf{a}_1 = \{1; 2; 0\}, \mathbf{a}_2 = \{-1; 1; 1\}, \mathbf{a}_3 = \{2; 0; 1\}.$$

В базисной системе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\{-1; 2; 1\}$.
Найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

▲ $\mathbf{a} = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3;$

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) + 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) =$$

$$= -\mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3;\ \ \mathbf{a} = \{-1; 0; 3\} \text{ в базисе } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3.$$ ▼

Пример. Даны векторы

$$\mathbf{a} = \{1; -2; 0\}, \mathbf{b} = \{1; 2; -1\}, \mathbf{c} = \{-1; -6; 2\}.$$

Установить являются ли эти векторы, заданные своими координатами в какой-то базисной системе, линейно зависимыми и, если это так, выразить один из векторов через другие.

▲ В соответствии с определением линейной зависимости отыскиваются такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, чтобы

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{o};\ \lambda_1\{1; -2; 0\} + \lambda_2\{1; 2; -1\} + \lambda_3\{-1; -6; 2\} = \mathbf{o};$$

$$\{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3;\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3;\ -\lambda_2 + 2\lambda_3\} = \mathbf{o}.$$

Так как при равенстве векторов должны быть равны их координаты, то

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Составим и преобразуем матрицу однородной системы

$$(2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $r = 2, n = 3$, т.е. однородная система имеет бесчисленное множество решений. Минор второго порядка, расположенный в верхнем левом углу преобразованной матрицы (эквивалентной исходной) отличен от нуля, его можно взять в качестве базисного минора. Указанному базисному минору соответствуют первые два уравнения системы. Запишем их так:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3, \\ \lambda_2 = 2\lambda_3, \end{cases}$$

где λ_1, λ_2 – базисные неизвестные; λ_3 – свободная неизвестная.

Выбираем $\lambda_3 = 1$. Тогда

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}, \mathbf{a} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}, \mathbf{a} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$. ▼

Пример. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ заданы четыре вектора:

$$\mathbf{a}_1 = \{0; 1; -2\}, \mathbf{a}_2 = \{2; 1; 1\}, \mathbf{a}_3 = \{1; 0; 1\}, \mathbf{a}_4 = \{2; 1; 3\}.$$

Найти координаты вектора $\mathbf{a}_4$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

▲ Так как четыре вектора всегда линейно зависимы, то

$$\mathbf{a}_4 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3;$$

$$\{2; 1; 3\} = \alpha_1\{0; 1; -2\} + \alpha_2\{2; 1; 1\} + \alpha_3\{1; 0; 1\}.$$

Сравнивая координаты векторов, получаем:

$$\begin{cases} 2 = \qquad\quad 2\alpha_2 + \alpha_3, \\ 1 = \quad \alpha_1 + \ \alpha_2, \\ 3 = -2\alpha_1 + \ \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} (2) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Последняя матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \qquad\quad = 1, \\ \quad -\alpha_2 \qquad\quad = -3, \\ \quad 3\alpha_2 + \alpha_3 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2, \\ \alpha_2 = 3, \\ \alpha_3 = -4, \end{cases} \ \mathbf{a} = \{-2; 3; -4\}. \ \blacktriangledown$$

1.4. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана некоторая прямая ℓ и единичный вектор $\mathbf{e} \parallel \ell$ (рис. 4.1). Из некоторой точки $O \in \ell$ построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{OE} \in \mathbf{e}$. Прямая ℓ с выбранным на ней единичным ***направленным отрезком*** **OE** представляет собой ось с заданным направлением.

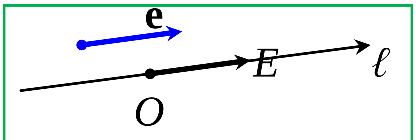


Рис. 4.1

Угол между двумя векторами

Строгое определение угла является довольно трудной задачей, так как термин «угол» употребляется для обозначения различных понятий:

- фигуры, образованной двумя лучами, исходящими из одной точки;

- части плоскости между двумя лучами, исходящими из одной точки;
- меры поворота одного луча до совпадения с другим лучом; аргумента тригонометрических функций и т.п.

В дальнейшем термин «угол» будем использовать для обозначения фигуры, образованной двумя лучами, исходящими из одной точки, и числа, измеряющего поворот одного луча до совпадения с другим лучом. Это число назовём ***мерой угла***.

Под мерой угла будем понимать меру так называемого ***ориентированного угла***.

Если, например, луч $[OA)$ до совпадения с лучом $[OB)$ повернуть вокруг точки O на угол φ, то луч $[OB)$ до совпадения с лучом $[OA)$ необходимо повернуть вокруг точки O на угол $-\varphi$ (рис. 4.2).

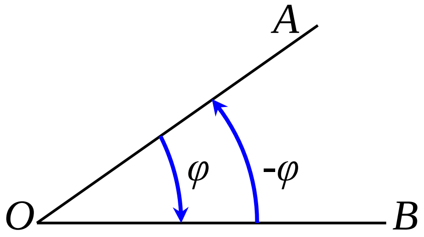


Рис. 4.2

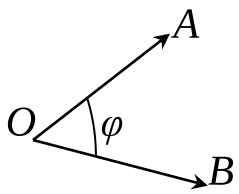


Рис. 4.3

Меру угла будем считать ***положительной***, если вращение первого луча до совпадения со вторым происходит против часовой стрелки, и ***отрицательной***, если вращение происходит по часовой стрелке.

> **Определение**. ***Углом между двумя векторами*** (или ***между вектором и осью***) называется ***ориентированный*** угол между двумя ***направленными отрезками***, исходящими из одной точки и представляющими данные векторы.

Угол между векторами **a** и **b**, заданными ***направленными отрезками*** **OA** и **OB** (рис. 4.3), **обозначается** так

$$(\mathbf{a}\widehat{;\ }\mathbf{b}) = \varphi .$$

Два вектора, **a** и **b** называются ***перпендикулярными*** или ***ортогональными***, если $(\mathbf{a}\widehat{;\ }\mathbf{b}) = \pi/\mathbf{2}$.

Определим еще два частных случая:

$$1)\ \text{если}\ \mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b},\ \text{то}\ (\mathbf{a}\widehat{;\ }\mathbf{b}) = \mathbf{0};$$

$$2)\ \text{если}\ \mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b},\ \text{то}\ (\mathbf{a}\widehat{;\ }\mathbf{b}) = \pi .$$

Проекция вектора на ось на плоскости

Рассмотрим на оси ℓ ненулевой ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB}$ (рис. 4.1).

Определение. ***Величиной направленного отрезка*** $\mathbf{AB}$ на оси ℓ называется число AB (рис. 4.4), равное длине отрезка $\mathbf{AB}$ на оси ℓ, взятой со знаком «+», если направление отрезка $\mathbf{AB}$ совпадает с направлением оси ℓ, и со знаком «–», если эти направления противоположны.

Рассмотрим теперь произвольный вектор, $\mathbf{a}$ не перпендикулярный к оси ℓ. Построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$. Опуская из его начала и конца перпендикуляры на заданную ось ℓ, построим на ней ***направленный отрезок*** $\mathbf{A_1B_1} = \mathbf{b}$ (рис. 4.5).

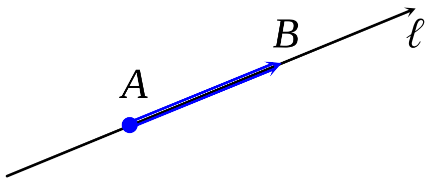


Рис.4.4

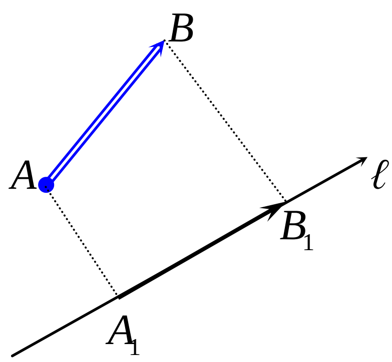


Рис. 4.5

Определение. ***Проекцией вектора*** $\mathbf{AB}$ ***на ось*** ℓ называется величина ***направленного отрезка*** $\mathbf{A_1B_1}$ оси ℓ, построенного указанным выше способом.

Обозначение $\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB}$ (или $\text{пр}_\ell\,\mathbf{AB}$).

Итак,

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB} = A_1B_1 = \left[\begin{array}{l} |\mathbf{A_1B_1}|, \text{ если } \mathbf{A_1B_1} \uparrow\uparrow \ell, \\ -|\mathbf{A_1B_1}| \text{ если } \mathbf{A_1B_1} \uparrow\downarrow \ell. \end{array}\right. \qquad (4.1)$$

Замечание. Эту проекцию называют ***алгебраической*** (или ***скалярной***) ***проекцией*** вектора на ось. Вектор $\mathbf{A_1B_1}$ называется ***векторной проекцией*** вектора $\mathbf{AB}$ на ось ℓ.

Проекция вектора на ось в пространстве

Пусть задан произвольный вектор $\mathbf{a}$, не перпендикулярный к оси ℓ. Построим ***направленный отрезок*** $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$ и через точки A и B проведём плоскости Π_1 и Π_2, перпендикулярные к ℓ. На линии пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 с осью ℓ получим точки A_1 и B_1 (рис. 4.6).

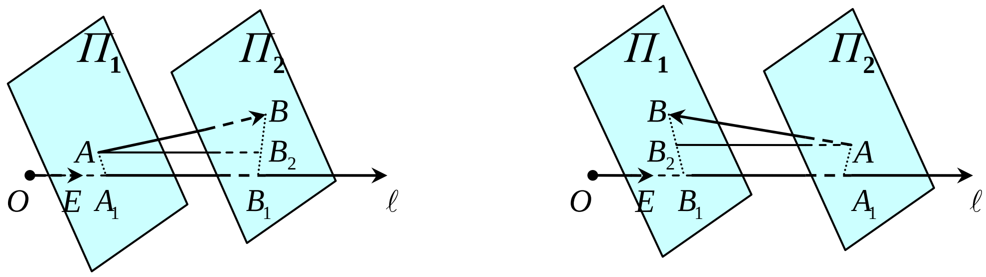


Рис. 4.6

Направленный отрезок $\mathbf{A_1B_1} \in \mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{b}$ называется ***векторной проекцией*** вектора $\mathbf{a}$ на ось ℓ.

Пусть $|\mathbf{A_1B_1}| = p$, тогда очевидно, что

$$\mathbf{b} = p\,\mathbf{e}, \text{ если векторы } \mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{e} \text{ (рис. 4.6, а), и}$$

$$\mathbf{b} = -p\,\mathbf{e}, \text{ если } \mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{e} \text{ (рис. 4.6, б).}$$

Величина p, взятая со знаком плюс или минус, называется ***скалярной проекцией*** вектора $\mathbf{a}$ на ось ℓ (слово «скалярная» часто опускается). В случае, если точки A_1 и B_1 совпадают (т.е. когда $\mathbf{a} \perp \ell$), векторной проекцией вектора $\mathbf{a}$ на ось ℓ будет нулевой вектор.

Легко заметить, что проекция вектора на ось не зависит от выбора ***направленного отрезка***, представляющего этот вектор.

Основные свойства проекций

Теорема 4.1. *Проекция вектора* $\mathbf{a}$ *на какую-либо ось равна произведению модуля (длины) вектора на косинус угла между осью и этим вектором:*

$$\mathrm{pr}_\ell\, \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a};\, \ell}). \tag{4.2}$$

▲ Пусть $\varphi = (\widehat{\mathbf{a},\, \ell})$.

Если $\varphi < \pi/2$ (см. рис. 4.7, а), то $\mathbf{A_1B_1} \uparrow\uparrow \ell$, и в силу (4.1)

$$\mathrm{pr}_\ell\, \mathbf{a} = |\mathbf{A_1B_1}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Если $\varphi > \pi/2$ (см. рис. 4.7, б), то $\mathbf{A_1B_1} \uparrow\downarrow \ell$, и в силу (4.1)

$$\mathrm{pr}_\ell = -|\mathbf{A_1B_1}| = -|\mathbf{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\mathbf{a}| \cos\varphi.$$

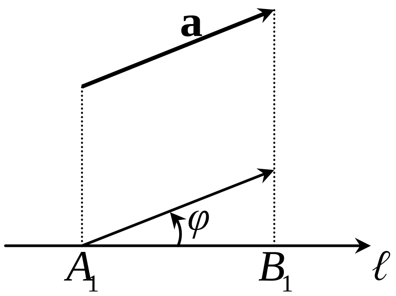


Рис. 4.7, а

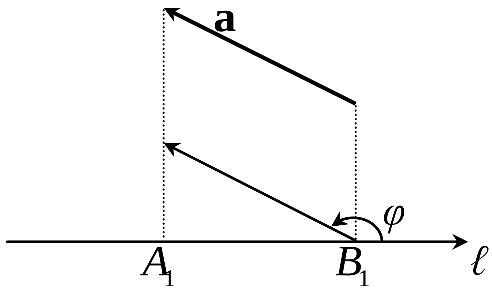


Рис. 4.7, б

Таким образом, для любого угла φ справедливо равенство (4.2). ▼

Замечание.	Если $\varphi = 0$, то $\operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} = \lvert\mathbf{a}\rvert$.
	Если $\varphi = \pi/2$, то $\operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} = 0$.
	Если $\varphi = \pi$, то $\operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} = -\lvert\mathbf{a}\rvert$.

Следствие. Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $\operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} = \operatorname{pr}_\ell \mathbf{b}$.

Теорема 4.2. *При умножении вектора на число его проекция на ось также умножается на это число*:

$$\operatorname{pr}_\ell(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \cdot \operatorname{pr}_\ell \mathbf{a}. \tag{4.3}$$

▲ Умножив вектор $\mathbf{a}$ на число λ, для проекции вектора $\mathbf{a}$ на ось ℓ будем иметь

$$\operatorname{pr}_\ell(\lambda\mathbf{a}) = \lvert\lambda\mathbf{a}\rvert\cos\varphi = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\mathbf{a}\rvert\cos\varphi.$$

Если $\lambda > 0$, то направления векторов $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ совпадут; следовательно, совпадут и направления их проекций.

Если же $\lambda < 0$, то направления векторов $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ противоположны, следовательно, будут противоположными и направления их проекций. ▼

Теорема 4.3. *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций векторов на ту же ось*:

$$\operatorname{pr}_\ell(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} + \operatorname{pr}_\ell \mathbf{b}. \tag{4.4}$$

▲ Пусть точки A и B – соответственно начало и конец вектора $\mathbf{a}$, точки B и C – начало и конец вектора $\mathbf{b}$ (рис. 4.8).

Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно проекции на ось ℓ точек A, B, C. По определению

$$\operatorname{pr}_\ell \mathbf{a} = A_1B_1,\ \mathbf{pr}_\ell\mathbf{b} = B_1C_1,\ \operatorname{pr}_\ell(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{pr}_\ell \mathbf{AC} = A_1C_1.$$

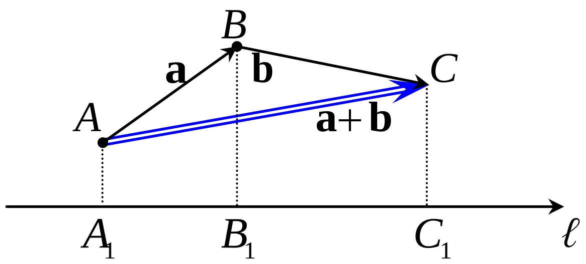


Рис. 4.8

Согласно основному тождеству для любых трех точек A_1, B_1, C_1 на оси справедливо равенство

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Отсюда следует справедливость равенства (4.4). ▼

Из теорем 4.2 и 4.3 следует:

$$\mathrm{pr}_\ell(\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k)=\alpha_1\mathrm{pr}_\ell\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathrm{pr}_\ell\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathrm{pr}_\ell\mathbf{a}_k. \qquad (4.5)$$

Пример. Сторона правильного шестиугольника (рис. 4.9) равна a. Найти проекции векторов на ось **AD**, представители которых совпадают со сторонами шестиугольника.

▲ Пусть **e** – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением **AD**.

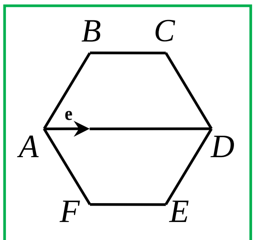


Рис. 4.9

Векторы, представители которых совпадают со сторонами шестиугольника, обозначим так же, как и представляющие их ***направленные отрезки***. Тогда

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{AB}=|\mathbf{AB}|\cos(\mathbf{AB}\,\widehat{,}\,\mathbf{e})=a\cos\pi/3=1/2\cdot a;$$

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{BC}=|\mathbf{BC}|\cos(\mathbf{BC}\,\widehat{,}\,\mathbf{e})=a\cos 0=a;$$

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{DE}=|\mathbf{DE}|\cos(\mathbf{DE}\,\widehat{,}\,\mathbf{e})=a\cos 2\pi/3=-1/2\cdot a;$$

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{EF}=|\mathbf{EF}|\cos(\mathbf{EF}\,\widehat{,}\,\mathbf{e})=a\cos\pi=-a;$$

$$\mathrm{pr}_\ell\,\mathbf{FA}=|\mathbf{FA}|\cos(\mathbf{FA}\,\widehat{,}\,\mathbf{e})=a\cos 2\pi/3=-1/2\cdot a.$$ ▼

1.5. *Координаты и компоненты вектора*

Координаты вектора и точки на прямой

Рассмотрим некоторый вектор $\mathbf{m} \neq \mathbf{o}$ и множество всех ***коллинеарных*** с ним векторов. Из условия ***коллинеарности*** следует, что для каждого вектора $\mathbf{a}$ рассматриваемого множества существует число λ такое, что

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{m}. \qquad (5.1)$$

Вектор $\mathbf{m}$ называется ***базисным*** вектором, а число λ – координатой вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{m}$.

Равенство (5.1) называется ***разложением вектора*** $\mathbf{a}$ ***по направлению базисного вектора*** $\mathbf{m}$. То, что число λ является координатой вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{m}$, записывается так $\mathbf{a} = (\lambda)\{\mathbf{i}\}$.

Введение координат векторов позволяет операции над векторами заменять операциями над их координатами. Так, например, сложение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ рассматриваемого множества можно произвести по следующей схеме:

$$\text{если } \mathbf{a} = (\lambda)\{\mathbf{m}\}, \mathbf{b} = (\mu)\{\mathbf{m}\}, \text{ то } \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\lambda + \mu)\mathbf{m}.$$

Отсюда следует правило:

координата суммы двух векторов относительно некоторого базиса $\mathbf{m}$ ***равна сумме координат векторов-слагаемых относительно того же базиса***.

Аналогичные правила устанавливаются для вычитания и умножения вектора на число:

координата разности двух векторов относительно некоторого базисного вектора равна разности координат этих векторов относительно того же базисного вектора;

координата произведения вектора $\mathbf{a}$ ***на число*** λ ***относительно некоторого базисного вектора*** $\mathbf{m}$ ***равна произведению координаты вектора*** $\mathbf{a}$ ***относительно вектора*** $\mathbf{m}$ ***на число*** λ.

В частности, если базисный вектор $\mathbf{i}$ единичный, то координата произвольного вектора $\mathbf{a}$ относительно $\mathbf{i}$ будет равна длине этого вектора,

- взятой со знаком плюс, если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{i}$,
- и со знаком минус, если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{i}$.

Координаты векторов относительно единичного базисного вектора называются ***декартовыми***.

Рассмотрим теперь некоторую прямую ℓ, параллельную векторам рассматриваемого множества (рис.6.1). На этой прямой выберем произвольную точку *O* и отложим отрезок $\mathbf{OE} \in \mathbf{i}$.

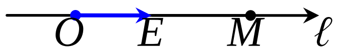


Рис. 5.1

Произвольная точка *M* прямой ℓ, отличная от точки *O*, задаёт на этой прямой некоторый отрезок **OM**. Очевидно, что существует число *x* такое, что

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OE}. \qquad (5.2)$$

Прямая ℓ с выбранным на ней единичным отрезком **OE** называется ***координатной осью*** и **обозначается** *Ox*, число *x* называется ***декартовой координатой точки*** *M*, точка *O* – ***началом координат***, а точка *E* – ***единичной точкой***.

Из соотношения (5.2) следует, что

- если $\mathbf{OM} \uparrow\uparrow \mathbf{OE}$, то $x > 0$,
- если же $\mathbf{OM} \uparrow\downarrow \mathbf{OE}$, то $x < 0$.

Координата точки *O* по определению принимается равной нулю. Направление координатной оси, совпадающее с направлением единичного отрезка **OE**, считается положительным, а противоположное направление – отрицательным.

То, что число *x* является координатой точки *M*, записывается так $M(x)$. Отрезок **OM** называется ***радиус-вектором точки*** *M*, а ось *Ox* – ***осью абсцисс***.

Таким образом, при сделанных предположениях каждая точка прямой ℓ имеет единственную вполне определённую декартову координату. В этом случае говорят, что на прямой задана, декартова система координат.

Пример. Найти координату вектора **a**, если $A(3)$, $B(\text{-}5)$ и $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$.

▲ $\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OB}$, но

$$\mathbf{OA} = 3\mathbf{OE},\ \mathbf{OB} = \text{-}5\mathbf{OE} \Rightarrow \mathbf{AB} = \text{-}3\mathbf{OE} - 5\mathbf{OE} = \text{-}8\mathbf{OE},$$

т.е. $\mathbf{a}(\text{-}8)$. ▼

Координаты вектора и точки на плоскости

Пусть на плоскости даны два ***неколлинеарных*** и отличных от нуля вектора **a** и **b** и произвольный вектор **c**.

Требуется представить вектор **c** как сумму двух векторов, соответственно ***коллинеарных*** векторам **a** и **b**.

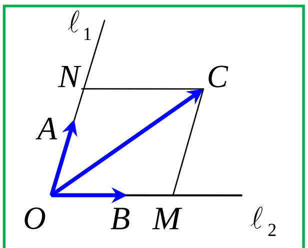


Рис. 5.2

Из произвольной точки *O* плоскости отложим ***направленные отрезки*** $\mathbf{OA} \in \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} \in \mathbf{b}$ и $\mathbf{OC} \in \mathbf{c}$ и построим прямые ℓ_1 и ℓ_2, проходящие через ***направленные отрезки*** **OA** и **OB** (рис. 6.2).

Через конец ***направленного отрезка*** **OC** – точку *C* – проведём прямые (*CM*) и (*CN*), параллельные соответственно отрезкам **OA** и **OB**. Получим

$$\mathbf{OC} = \mathbf{ON} + \mathbf{OM}.$$

Так как отрезки **OM** и **ON** ***коллинеарны*** соответственно отрезкам **OB** **OA**, то существуют два числа *x* и *y* таких, что

$$\mathbf{ON} = x\mathbf{OA} \text{ и } \mathbf{OM} = y\mathbf{OB}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}. \qquad (5.3)$$

Равенство (6.3) называется ***разложением вектора*** **c** ***по векторам*** **a** и **b** (как было показано при рассмотрении линейной зависимости векторов). Такое разложение единственное.

Числа *x* и *y* в разложении (5.3) называются координатами вектора **c**, а векторы $x\mathbf{a}$ и $y\mathbf{b}$ – компонентами вектора **c** в разложении по направлениям векторов **a** и **b**.

Пусть теперь на плоскости дана произвольная точка *M*, отличная от точки *O*. Очевидно, что существуют два числа *x* и *y* таких, что

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB}.$$

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 с выбранными на них отрезками **OA**, **OB** называются ***осями координат***, числа *x*, *y* – ***координатами точки*** *M*; векторы **a** и **b**, определяемые ***направленными отрезками*** **OA** и **OB**, –

базисными векторами; точка O – ***началом координат***; совокупность точки O и векторов **a** и **b** – ***векторным базисом***; отрезок **OM** – ***радиус-вектором точки*** M.

То, что числа x и y являются координатами точки M, записывается так $M(x;y)$. Оси координат **обозначаются** соответственно Ox и Oy, а базис – $\{O;\mathbf{a};\mathbf{b}\}$.

Совокупность координатных осей и базиса называется ***аффинной*** (или ***косоугольной***, если векторы **a** и **b** не взаимно перпендикулярны) ***системой координат на плоскости*** и **обозначается** Oxy.

Координаты точки O по определению принимаются равными нулю $O(0;0)$. На каждой из координатных осей за положительное направление принимается направление соответствующего базисного вектора, а за отрицательное – противоположное направление.

Таким образом,

на координатной плоскости каждая точка единственным образом задаётся упорядоченной парой чисел – её координатами,

и обратно,

каждой упорядоченной паре чисел соответствует единственная точка.

Введём теперь на плоскости прямоугольную систему координат. Если базисные векторы **a** и **b** – единичные и взаимно перпендикулярные (а, следовательно, взаимно перпендикулярны и координатные оси), то система координат называется ***декартовой прямоугольной***, а базис – ***ортонормированным***.

Ось Ox называется ***осью абсцисс***, а ось Oy – ***осью ординат***. Первая координата x точки (вектора) – ***абсцисса точки*** (***вектора***), вторая координата y – ордината.

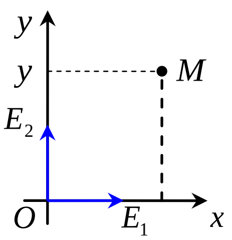


Рис. 5.3

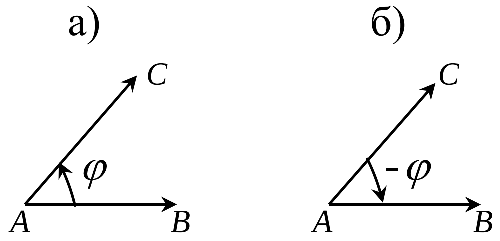


Рис. 5.4

Для декартовой прямоугольной системы координат вводят следующие **обозначения**:

единичный ***направленный отрезок*** оси Ox – $\mathbf{OE}_1$,

единичный ***направленный отрезок*** оси Oy – $\mathbf{OE}_2$,

базисные векторы – соответственно $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ (рис. 5.3).

Рассмотрим на плоскости два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Из некоторой точки A плоскости отложим ***направленные отрезки*** $\mathbf{AB} \in \mathbf{a}$ и $\mathbf{AC} \in \mathbf{b}$ (рис. 5.4). Будем теперь вращать отрезок $\mathbf{AB}$ вокруг точки A на наименьший угол до совпадения $\mathbf{AB}$ с $\mathbf{AC}$.

При этом возможны два случая:

- когда вращение происходит против движения часовой стрелки (рис. 5.4, а)
- и по движению часовой стрелки (рис. 5.4, б).

В первом случае говорят, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют ***правую*** ориентацию, во втором – ***левую***.

Так как при построении системы координат мы исходили из базисных векторов, то очевидно, что на плоскости систему координат (как аффинную, так и прямоугольную) можно выбрать двумя способами:

- если базисные векторы имеют правую ориентацию, система координат называется ***правой*** (рис. 5.5, а),
- если же базисные векторы имеют левую ориентацию, система координат называется ***левой*** (рис. 5.5, б).

В дальнейшем мы будем рассматривать правую систему координат.
В дальнейшем мы будем рассматривать правую систему координат.

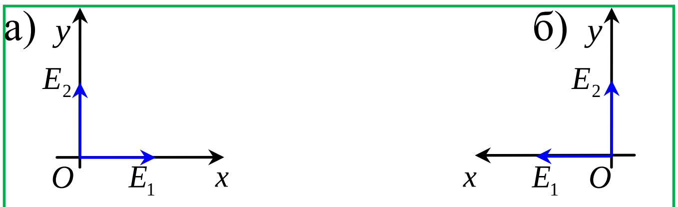


Рис. 5.5

Координаты вектора и точки в пространстве

Пусть в пространстве заданы три ***некомпланарных*** вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и произвольный вектор $\mathbf{r}$. Из некоторой точки O отложим ***направленные отрезки***

$$\mathbf{OA} \in \mathbf{a},\ \mathbf{OB} \in \mathbf{b},\ \mathbf{OC} \in \mathbf{c},\ \mathbf{OM} \in \mathbf{r}$$

и построим на этих параллелепипед такой, чтобы три его стороны лежали на прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, проходящие через ***направленные отрезки*** $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$, а отрезок $\mathbf{OM}$ являлся его диагональю (рис. 5.6).

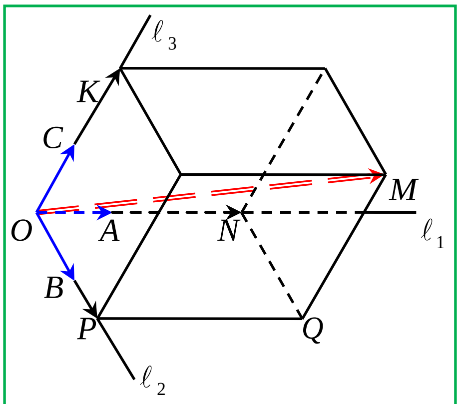


Рис. 5.6

Будем иметь

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QM}. \qquad (5.4)$$

Поскольку $\mathbf{OQ} = \mathbf{ON} + \mathbf{OP}$, а $\mathbf{QM} = \mathbf{OK}$, то равенство (6.4) можно представить в виде

$$\mathbf{OM} = \mathbf{ON} + \mathbf{OP} + \mathbf{OK}. \qquad (5.5)$$

Так как

$$\mathbf{ON} \uparrow\uparrow \mathbf{OA},\ \mathbf{OP} \uparrow\uparrow \mathbf{OB},\ \mathbf{OK} \uparrow\uparrow \mathbf{OC},$$

то существуют три числа *x*, *y*, *z* таких, что

$$\mathbf{ON} = x\mathbf{OA},\ \mathbf{OP} = y\mathbf{OB},\ \mathbf{OK} = z\mathbf{OC}.$$

Подставив эти значения отрезков в равенство (6.5), получим

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}.$$

Но так как

$$\mathbf{OA} \in \mathbf{a},\ \mathbf{OB} \in \mathbf{b},\ \mathbf{OC} \in \mathbf{c} \text{ и } \mathbf{OM} \in \mathbf{r},$$

то аналогичным соотношением связаны и векторы **a**, **b**, **c**, **r**:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}. \qquad (5.6)$$

Равенство (5.6) называется ***разложением вектора*** **r** ***по трём некомпланарным векторам*** **a**, **b**, **c**. Это разложение единственное.

Числа *x*, *y*, *z* называются ***координатами вектора*** **r**, векторы **a**, **b**, **c** – ***базисными векторами***, а векторы $x\mathbf{a}$, $y\mathbf{b}$, $z\mathbf{c}$ – ***компонентами вектора*** **r** в разложении (5.6).

Пусть теперь в пространстве дана произвольная точка *M*, отличная от точки *O*. Существуют три числа *x*, *y*, *z* таких, что

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}.$$

Прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 с выбранными на них отрезками **OA**, **OB**, **OC** называются ***осями координат***.

- плоскости, проходящие через прямые ℓ_1 и ℓ_2, ℓ_2 и ℓ_3, ℓ_3 и ℓ_1, – ***координатными плоскостями***;
- числа x, y, z – ***координатами точки*** M;
- векторы **a**, **b**, **c**, определяемые ***направленными отрезками*** **OA**, **OB**, **OC**, – ***базисными векторами***;
- точка O – ***началом координат***;
- совокупность точки O и векторов **a**, **b**, **c** – ***векторным базисом***;
- отрезок **OM** – ***радиус-вектором точки*** M.

То, что числа x, y, z являются координатами точки M, записывается так $M(x; y; z)$. Оси координат **обозначаются** соответственно Ox, Oy, Oz, а базис – $\{O; \mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}\}$.

Совокупность координатных осей, координатных плоскостей и базиса называется ***аффинной*** (или ***косоугольной***, если векторы a, **b**, **c** не взаимно перпендикулярны) системой координат в пространстве и **обозначается** $\{O; x; y; z\}$. Координаты точки O (начала координат) принимаются равными нулю $O(0; 0; 0)$. На каждой из координатных осей за положительное направление принимается направление соответствующего базисного вектора, а за отрицательное – противоположное направление.

Таким образом,

в пространстве в системе координат
каждая точка единственным образом
задаётся упорядоченной тройкой чисел – её координатами,

и обратно,

каждой упорядоченной тройке чисел
соответствует единственная точка.

Введём теперь в пространстве прямоугольную систему координат.

Пусть базисные векторы **a**, **b**, **c** – единичные и взаимно перпендикулярные (следовательно, взаимно перпендикулярны координатные оси и координатные плоскости).

Тогда система координат называется ***декартовой прямоугольной*** системой, а базис – ***ортонормированным***.

Ось Ox называется ***осью абсцисс***, ось Oy – ***осью ординат***, а ось Oz – ***осью аппликат***.

Координатных плоскостей три Oxy, Oyz, Oxz. Эти плоскости разбивают пространство на восемь частей, называемых ***октантами***.

Первая координата (x) точки (вектора) называется ***абсциссой точки*** (***вектора***), вторая (y) – ***ординатой***, а третья (z) – ***аппликатой***.

Для декартовой прямоугольной системы координат вводят следующие **обозначения**: единичные ***направленные отрезки*** осей – соответственно $\mathbf{OE}_1, \mathbf{OE}_2, \mathbf{OE}_3$ (рис. 6.7), базисные векторы – соответственно $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

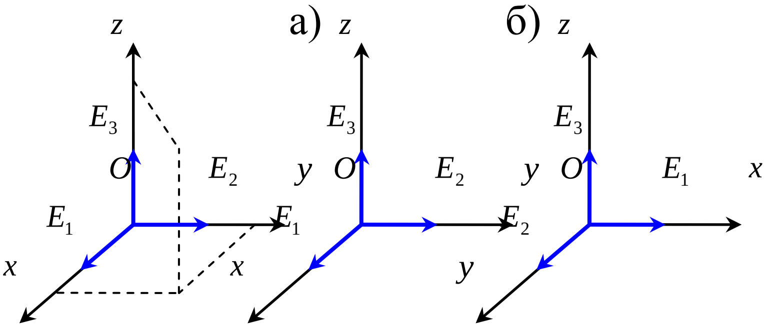


Рис. 6.7 Рис. 6.8

Мы уже знаем, что в пространстве любая упорядоченная тройка векторов может быть либо правой, либо левой. В связи с этим в пространстве систему координат (как аффинную, так и прямоугольную) можно выбрать двумя способами.

В случае, когда базисные векторы имеют правую ориентацию (рис. 6.8, а), система координат называется ***правой***; если же базисные векторы имеют левую ориентацию (рис. 6.8, б), то система координат называется ***левой***. Как и в случае плоскости, в пространстве будем рассматривать правую систему координат.

Линейные операции над векторами в координатах

Мы рассмотрели линейные операции над векторами в их векторном (бескоординатном) задании. Рассмотрим эти операции при координатном задании векторов.

При необходимости произвольный вектор **a** в координатах будем записывать двояко:

- как в форме $\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$,
- так и в эквивалентной форме $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$.

Единичный вектор

Единичным вектором называется вектор, у которого *i*-я координата равна единице, а остальные координаты равны нулю.

$$\mathbf{a}_1^0=\{1;0\};\mathbf{a}_2^0=\{0;1\}.$$

$$\mathbf{a}_1^0=\{1;0;0\};\mathbf{a}_2^0=\{0;1;0\};\mathbf{a}_3^0=\{0;0;1\};$$

Нулевой вектор

Нулевой вектор, или нуль-вектор, представляет собой вектор, все координаты которого равны нулю.

$$\mathbf{o}=\{0;0\},\mathbf{o}=\{0;0;0\}.$$

Пусть даны два вектора $\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}$. На основании правила сложения векторов имеем

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k})+(b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k})=$$

$$=(a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z\}.$$

Таким образом,

координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.

Это правило легко распространить на случай суммы произвольного конечного числа векторов.

Пример. Даны векторы $\mathbf{a}=\{1;-2;3\}$ и $\mathbf{b}=\{2;3;-4\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

▲ Из определения сложения векторов в координатной форме следует, что координаты вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ равны сумме координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{1+2;-2+3;3+(-4)\}=\{3;1;-1\}.$$ ▼

Аналогично получаем

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\{a_x-b_x;\,a_y-b_y;\,a_z-b_z\}.$$

Таким образом,

координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов.

Пример. ***Направленные отрезки***, совпадающие со сторонами параллелограмма равны соответственно векторам

$$\mathbf{a}=\{2;3;4\} \text{ и } \mathbf{b}=\{-1;4;2\}.$$

Найти векторы, которым равны ***направленные отрезки***, совпадающие с диагоналями параллелограмма.

▲ Пусть $\mathbf{AB}=\mathbf{a}$, $\mathbf{AD}=\mathbf{b}$, тогда $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Поскольку координаты суммы векторов равны сумме координат складываемых векторов, то

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{1;7;6\}.$$

Так как $\mathbf{BD}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и координаты разности двух векторов равны соответственно разности координат уменьшаемого и вычитаемого, то

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\{3;-1;2\}. \ ▼$$

Умножив заданный вектор **a**, на число λ, получим

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_x)\mathbf{i}+(\lambda a_y)\mathbf{j}+(\lambda a_z)\mathbf{k},$$

или,

$$\lambda\mathbf{a}=\{\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\}.$$

Таким образом,

координаты произведения вектора на число равны произведениям координат этого вектора на данное число.

В частности, если $\lambda=-1$, то

$$-\mathbf{a}=\{-a_x;-a_y;-a_z\},$$

т.е.

соответствующие координаты противоположных векторов имеют противоположные значения.

Пусть $\mathbf{a}=\{a_x;a_y;a_z\}, \mathbf{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ – ***коллинеарные*** векторы, причем $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$.

Тогда $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, т.е. $b_x=\lambda a_x, b_y=\lambda a_y, b_z=\lambda a_z$, или

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \qquad (5.7)$$

Обратно, если выполняются соотношения (5.7), то $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, т.е. векторы **a** и **b** ***коллинеарны***.

Таким образом,

векторы а и b коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пример. Подобрать такие числа α и β, чтобы векторы $\mathbf{a} = \{4; 3; \alpha\}$ и $\mathbf{b} = \{2; \beta; -1\}$ были ***коллинеарными***.

▲ $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, если $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. В координатах $2 = 4\lambda,\ \beta = 3\lambda,\ -1 - \alpha\lambda$.

Из первого соотношения $\lambda = 1/2$, тогда $\beta = 3/2$ и $\alpha = -2$. ▼

Координаты вектора, заданного двумя точками

Пусть в заданной прямоугольной декартовой системе координат начало вектора находится в точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а конец – в точке $M_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 5.9). Найти координаты вектора $\mathbf{M_1M_2}$.

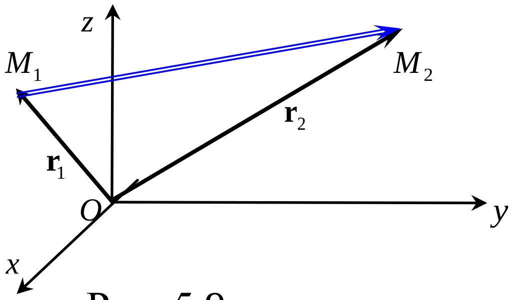


Рис. 5.9

▲ Из рисунка 6.3 видно, что $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-векторы точек M_1 и M_2 соответственно. Поэтому

$$\mathbf{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Координаты вектора $\mathbf{M_1M_2}$ ***равны разностям одноименных координат конечной*** M_2 ***и начальной*** M_1 ***точек этого вектора***. ▼

1.6. Скалярное произведение векторов.

Пусть **a** и **b** – два вектора, а $(\mathbf{a},\widehat{\ }\,\mathbf{b})=\varphi$, угол между векторами **a** и **b**.

Определение. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов **a** и **b** называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

В случае если один из векторов **a** или **b** – нулевой, будем считать, что скалярное произведение равно нулю.

Обозначение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (или $(\mathbf{a},\mathbf{b})$). Итак,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a}\,\widehat{,}\,\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (6.1)$$

Непосредственно из определения следует, что скалярное произведение есть скаляр.

Скалярное произведение можно выразить и через проекцию одного из перемножаемых векторов на направление другого вектора.

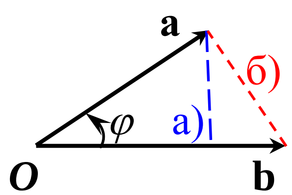


Рис. 6.1

Заметив, что $|\mathbf{a}|\cos\varphi$ есть проекция вектора **a** на направление вектора **b**, можем написать

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\cdot\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} \qquad (6.2,\ а)$$

и, аналогично,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} \qquad (6.2,\ б)$$

т.е.

скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию на него другого вектора.

<u>Свойства скалярного произведения (*геометрические*)</u>

1. **Теорема 6.1**. *Для того чтобы ненулевые векторы* **a** и **b** *были взаимно перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю*:

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$$

▲ **Необходимость**. Пусть $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Это значит, что $(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = \pi/2$, поэтому $\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0.$$

Достаточность. Пусть теперь $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Так как векторы **a** и **b** ненулевые, то из равенства

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b})$$

и следует, что $\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = 0$, откуда $(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = \pi/2$.

Следовательно, векторы **a** и **b** взаимно перпендикулярны. ▼

Поскольку направление ***нулевого вектора*** неопределенно, мы можем его считать ортогональным любому вектору.

2.
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 \text{ или } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \tag{6.3}$$

▲ Если $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, то из определения скалярного произведения векторов следует, что

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{a}) = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2.$$ ▼

Скалярное произведение вектора на себя называется ***скалярным квадратом***. Из равенства (7.3) следует, что

длина вектора равна
корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора.

Свойства скалярного произведения (*алгебраические*)

3. **Теорема 6.2 (коммутативность)**. *Для любых двух векторов* **a** и **b**:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

▲ По определению скалярного произведения

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) \text{ и } \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}).$$

Но так как $\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = \cos(\mathbf{b}\,\hat{,}\,\mathbf{a})$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. ▼

4. **Теорема 6.3 (дистрибутивность).**

Для любых трех векторов, **a**, **b**, **c**:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

▲ Представив скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ через проекции и, используя свойства проекций, будем иметь

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\mathbf{a}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$ ▼

Замечание. Свойство 4 дает право при скалярном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно.

В силу свойства 3 можно при этом не заботиться о порядке сомножителей.

5. **Теорема 6.4 (ассоциативность по отношению к скалярному множителю).** *Для любого числа* λ *и любых двух векторов* **a** и **b**:

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.$$

▲ Представив скалярное произведение $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$ через проекцию и, используя свойства проекций, будем иметь

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}(\lambda\mathbf{a})=|\mathbf{b}|\cdot\lambda\,\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\lambda\left(|\mathbf{b}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}\right)=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$ ▼

Физический смысл скалярного произведения

Зависит от физического смысла сомножителей. Если один сомножитель – сила $\boldsymbol{F}$, а второй – прямолинейный путь $\boldsymbol{S}$, пройденный телом под действием этой силы, то скалярное произведение их – работа.

$$A=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cdot\cos(\boldsymbol{F},\hat{\ }\boldsymbol{S}).$$

Скалярное произведение базисных векторов {i, j, k}

Так как базис $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ ортонормированный, то для скалярных произведений базисных векторов имеем (из геометрических свойств):

$$\begin{cases}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1;\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0.\end{cases} \qquad (7.4)$$

Таблица скалярного умножения базисных векторов

	i	**j**	**k**
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Теорема 6.5. *Если векторы* **a** *и* **b** *заданы своими координатами в ортонормированном базисе* $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, *то их скалярное произведение определяется формулой*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (6.5)$$

▲ Используя ***дистрибутивное*** и ***ассоциативное*** по отношению к скалярному множителю свойства скалярного произведения (теоремы 6.3 и 6.4), получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\{a_x;\, a_y;\, a_z\}\cdot\{b_x;\, b_y;\, b_z\}=(a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k})\cdot(b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k})=$$

$$=a_xb_x\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_xb_z\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+$$

$$+a_yb_x\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_yb_z\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+$$

$$+a_zb_x\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_zb_y\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_zb_z\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Учитывая таблицу скалярного умножения базисных векторов, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$ ▼

Итак,

если векторы* a *и* b *заданы
своими координатами в ортонормированном базисе,
то их скалярное произведение равно
сумме произведений одноименных координат.

Следствие 6.1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов в координатной форме является равенство

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Следствие 6.2. Для скалярного квадрата $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ из формулы (6.5) получаем

$$\mathbf{a}^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2, \qquad (6.6)$$

а в координатах

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (6.7)$$

В ортонормированном базисе длина вектора равна
квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Косинус угла между векторами. Направляющие косинусы

Согласно определению

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами, **a** и **b**. Из этой формулы получаем

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \qquad (6.8)$$

(предполагается, что векторы, **a** и **b** – ненулевые).

Пусть $\mathbf{a}=\{a_x; a_y; a_z\}, \mathbf{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$. Подставив в формулу (6.8) значение скалярного произведения, длины векторов, получим

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (6.9)$$

По формуле (6.9) легко найти углы α, β, γ, которые образует вектор с координатными осями (рис. 6.2). Эти углы называются ***направляющими углами***.

Направляющими углами вектора $\mathbf{a}=\{a_x; a_y; a_z\}\neq 0$ будут

$$\alpha=(O\widehat{x,\mathbf{a}})=(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{a}});\ \beta=(O\widehat{y,\mathbf{a}})=(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{a}});\ \gamma=(O\widehat{z,\mathbf{a}})=(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{a}}).$$

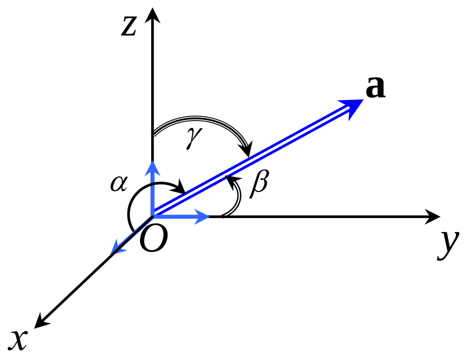


Рис. 6.2

Согласно формуле (6.8)

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{i}|};\ \cos\beta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{j}|};\ \cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{k}|}.$$

Но так как $\mathbf{i}=\{1; 0; 0\}, \mathbf{j}=\{0; 1; 0\}, \mathbf{k}=\{0; 0; 1\}$, то, применив формулу (6.9), получим:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}; \qquad (6.10)$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Косинусы углов α, β, γ называются ***направляющими косинусами вектора*** **a**. Эти углы задают в пространстве направление вектора.

Пример. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{n}^0$.

▲ По условию $|\mathbf{n}^0| = 1$. Пусть $\mathbf{n}^0 = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j} + n_z\,\mathbf{k}$. Тогда

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{i} = n_x = |\mathbf{n}^0| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos(\mathbf{n}^0 \widehat{,} \mathbf{i}) = \cos\alpha,$$

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{j} = n_y = \cos\beta,$$

$$\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{k} = n_z = \cos\gamma.$$

Таким образом,

координатами единичного вектора являются косинусы углов, образованных этим вектором с осями координат:

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma.$$

Отсюда получаем:

$$(\mathbf{n}^0)^2 = \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}^0 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma. \text{ ▼}$$

Пример. Пусть единичный вектор $\mathbf{n}^0$ ортогонален оси z:

$$\mathbf{n}^0 = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j}.$$

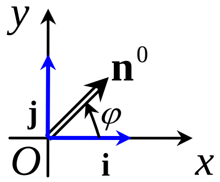


Рис. 7.3

Тогда его координаты n_x и n_y соответственно равны

$$n_x = \cos\varphi,\ n_y = \sin\varphi.$$

Тем самым

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi. \text{ ▼}$$

Косинусы направляющих углов вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

которое можно получить непосредственно из выражений (7.10) путем их почленного возведения в квадрат с последующим сложением.

Если, в частности, вектор **a** единичный, т.е.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1,$$

то формулы (7.10) запишутся в следующем виде:

$$\cos\alpha = a_x;\ \cos\beta = a_y;\ \cos\gamma = a_z.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}.$$

Пример. Вычислить $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, если известно, что

$$|\mathbf{a}| = 3,\ |\mathbf{b}| = 4 \text{ и } (\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) = \pi/3.$$

▲ По определению скалярного произведения

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b}) \text{ или } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3\cdot 4\cdot\cos\pi/3 = 12\cdot 1/2 = 6.$$ ▼

Пример. Найти значение скаляра $\alpha = 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - 3\mathbf{a}^2 + 3$, если

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ и } \mathbf{b} = \{7; -3; -1\}.$$

▲
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5\cdot 7 + 3\cdot(-3) + (-2)\cdot(-1) = 35 - 9 + 2 = 28;$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 25 + 9 + 4 = 38.$$

Следовательно,

$$\alpha = 2\cdot 28 - 3\cdot 38 + 3 = -5.$$ ▼

1.7. Векторное произведение векторов.

Базисные, т.е. ***некомпланарные*** тройки векторов в пространстве разделяются на 2 типа.

- Если при наблюдении от конца 3-го вектора базисной тройки кратчайший поворот от 1-го вектора ко 2-му проводится против часовой стрелки – базисная система называется ***правой***.
- Если при наблюдении от конца 3-го вектора кратчайший поворот от 1-го вектора ко 2-му проводится по часовой стрелке – тройка векторов называется ***левой***.

Определение. ***Векторным произведением*** вектора **a** на вектор **b** называется ***вектор***, **обозначаемый** символом $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (или $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$), такой, что

1) длина вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равна $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a}\,\hat{,}\,\mathbf{b})$;

2) вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен каждому из векторов, **a** и **b**, т.е. перпендикулярен плоскости этих векторов;

3) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку векторов.

В случае если векторы, **a** и **b** коллинеарны, будем считать, что

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

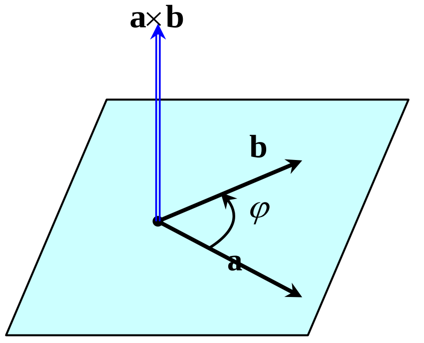


Рис. 7.1 ($\varphi = (\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b})$).

Свойства векторного произведения (*геометрические*)

1. Теорема 7.1. *Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы-сомножители коллинеарны.*

▲ **Достаточность.** Пусть $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}$, тогда $\sin(\mathbf{a}, \hat{\ }\mathbf{b}) = 0$. Следовательно,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0, \text{ откуда } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Необходимость. Пусть $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Так как $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, то $\sin(\mathbf{a}, \hat{\ }\mathbf{b}) = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}.$$ ▼

2. Теорема 7.2. *Длина (модуль) векторного произведения неколлинеарных векторов,* **a** и **b** *численно равна площади $S_П$ параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах как на сторонах*:

$$S_П = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \hat{\ }\mathbf{b}). \qquad (7.1)$$

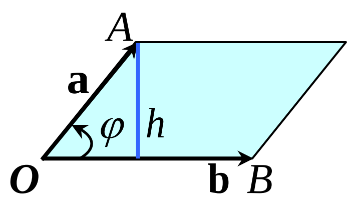


Рис. 7.2

▲ Пусть $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}$ и $\varphi = (\mathbf{a}, \hat{\ }\mathbf{b})$.

На ***направленных отрезках*** **OA** и **OB** построим параллелограмм (рис. 7.2). Поскольку

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi, \text{ то } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{OA}| \cdot |\mathbf{OB}| \cdot \sin\varphi.$$

Но $|\mathbf{OA}|\cdot\sin\varphi = h$, где h – высота параллелограмма, опущенная на основание $[OB]$.

Тогда предыдущее равенство можно записать так:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{OB}|\cdot h = S_П\,. \;▼$$

<u>Свойства векторного произведения (*алгебраические*)</u>

3. *Векторное произведение антикоммутативно, т.е. всегда*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}\,. \qquad (7.2)$$

▲ Из определения,

- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ имеют одинаковые длины (длина векторного произведения не зависит от порядка сомножителей),
- ***коллинеарны*** (они перпендикулярны одной и той же плоскости, в которой лежат векторы, **a** и **b**).
- Направления же этих векторов противоположны, так как векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку, а векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}\times\mathbf{a}$ – левую тройку (рис. 8.3). ▼

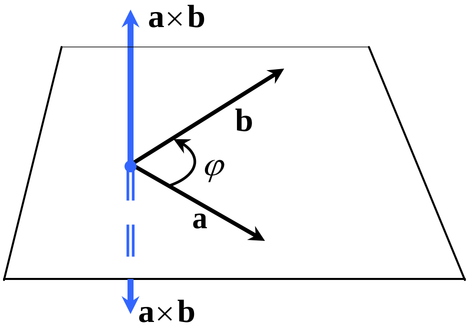


Рис. 7.3

4. *Векторное произведение обладает дистрибутивным свойством по отношению к сложению*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}\,.$$

5. *Векторное произведение двух векторов обладает ассоциативным свойством по отношению к третьему – скалярному сомножителю (числовой множитель λ можно выносить за знак векторного произведения)*:

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.$$

▲ Вектор $\lambda\mathbf{a}\,||\,\mathbf{a}$.

Так как вектор $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен к векторам $\lambda\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то

$$\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,||\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.$$

- Причем при значении $\lambda > 0$ $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,
- а при значении $\lambda < 0$ $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}\uparrow\downarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Поэтому

$$\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}\uparrow\uparrow\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Таким образом, направление вектора $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ при любом значении λ совпадает с направлением вектора $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

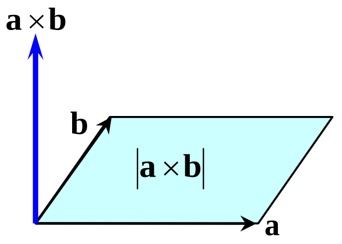
Равенство модулей векторов $\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ следует из равенства

$$|\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\lambda\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\lambda\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{b}) = |\lambda|\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{b}) = |\lambda|\cdot|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|. \blacktriangledown$$

Замечание. Свойство 4 дает право при векторном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно, а свойство 5 – объединять числовые коэффициенты сомножителей.

Следует, однако, помнить, что порядок сомножителей векторного произведения является существенным и при перестановке сомножителей знак векторного произведения нужно изменить (свойство 3).

Физический смысл модуля векторного произведения



Если $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ – радиус-вектор точки N_0, а $\mathbf{b} = \mathbf{F}$ – сила, приложенная в точке, то $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{M}$ – вектор – момент силы.

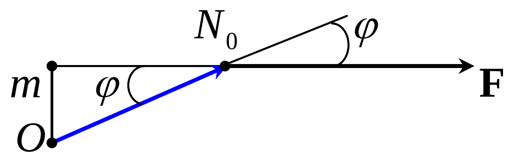


Рис. 7.4

$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{F}|\cdot\sin(\mathbf{r},\hat{\ }\mathbf{F}) = |\mathbf{F}|m$ – произведение силы на плечо, где

$$|\mathbf{r}|\sin\varphi = m,\ \varphi = (\mathbf{r},\hat{\ }\mathbf{F}).$$

Пример. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AD} = \mathbf{b}$, причем

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q},\ \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q} \text{ и } |\mathbf{p}| = \sqrt{2},\ |\mathbf{q}| = 2,\ (\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q}) = \pi/4.$$

▲ $S_{ABCD} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |(2\mathbf{p}-3\mathbf{q})\times(\mathbf{p}+2\mathbf{q})| =$

$$= |2\mathbf{p}\times\mathbf{p} + 4\mathbf{p}\times\mathbf{q} - 3\mathbf{q}\times\mathbf{p} - 6\mathbf{q}\times\mathbf{q}| = |4\mathbf{p}\times\mathbf{q} + 3\mathbf{p}\times\mathbf{q}| =$$

$$= |7\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = 7|\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = 7|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|\cdot\sin(\mathbf{p}\,\hat{,}\,\mathbf{q}) = 7\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}/2 = 14.$$ ▼

Векторное произведение базисных векторов {i, j, k}

Так как базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ортонормированный, то для векторных произведений базисных векторов имеем (из геометрических свойств):

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ &\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ &\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{o}. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Таблица векторного умножения базисных векторов

	i	**j**	**k**
i	**o**	**k**	−**j**
j	−**k**	**o**	**i**
k	**j**	−**i**	**o**

Замечание. Чтобы определить векторные произведения разноименных ортов, можно пользоваться циклической схемой (рис. 7.5).

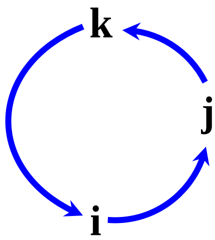


Рис. 7.5

Если умножать рядом стоящие векторы, так как указывают стрелки (против часовой стрелки), то в результате получится следующий вектор.

Если в противоположном направлении (по часовой стрелке) – то следующий вектор берут со знаком «минус».

Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Используя дистрибутивное и ассоциативное по отношению к скалярному множителю свойства векторного произведения, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \{a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}\}\times\{b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}\} = \\ &= a_x b_x\,\mathbf{i}\times\mathbf{i} + a_x b_y\,\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_x b_z\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} + \\ &+ a_y b_x\,\mathbf{j}\times\mathbf{i} + a_y b_y\,\mathbf{j}\times\mathbf{j} + a_y b_z\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \\ &+ a_z b_x\,\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_z b_y\,\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_z b_z\,\mathbf{k}\times\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Применив теперь равенства (7.3) для векторных произведений базисных векторов запишем предыдущее равенство в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= a_x b_y\,\mathbf{k} + a_x b_z(-\mathbf{j}) + a_y b_x(-\mathbf{k}) + a_y b_z\,\mathbf{i} + a_z b_x\,\mathbf{j} + a_z b_y(-\mathbf{i}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \quad (7.4)$$

Формулу (7.4) можно записать в символической, легко запоминающейся форме, если воспользоваться определителем 3-го порядка:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (7.5)$$

Разлагая этот определитель по элементам 1-ой строки, получим (7.4). Таким образом,

векторное произведение двух векторов
в координатной форме равно
векторному определителю третьего порядка,
первой строкой определителя являются базисные векторы,
второй – координаты первого вектора-сомножителя,
а третьей – координаты второго вектора-сомножителя.

Важной геометрической задачей, решаемой с помощью введенной операции, является вычисление площади треугольника по координатам его вершин.

Следствие. *Площадь треугольника ABC определяется формулой*

$$S_{ABC} = 1/2\left|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}\right|. \quad (7.6)$$

▲ Пусть даны координаты вершин треугольника A, B, C. Зная их, находим векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$. Следовательно, справедлива формула (7.6). ▼

Вычисление площадей с помощью векторного произведения

Пример. Вычислить площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$.

▲ 1) Найдем векторное произведение через векторный определитель

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

2) Вычислим его модуль $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 1 + 2^2} = \sqrt{21}$.

Отсюда $S_{П} = \sqrt{21}$.

3) Найдем высоту из условия $h = \dfrac{S}{|\mathbf{a}|}$; $h = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{2^2 + 1}} = \sqrt{\dfrac{21}{5}} = \sqrt{4.2}$. ▼

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами

$$A(7; 3; 4),\ B(1; 0; 6),\ C(4; 5; -2).$$

▲ 1) Найдем векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$:

$$\mathbf{AB} = \{-6; -3; 2\},\ \mathbf{AC} = \{-3; 2; -6\}.$$

2) Вычислим векторное произведение

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 42\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = 1/2 \cdot \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} =$$

$$= 7/2 \cdot \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 49/2 = 24.5.$$ ▼

При вычислении площадей всегда и обязательно
сначала найдите $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,
затем $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ –
это ***две*** операции и объединять их нельзя!

Пример. Вычислить синус угла, образованного векторами
$$\mathbf{a}=\{3;4;5\} \text{ и } \mathbf{b}=\{-2;1;2\}.$$
▲ Как известно,
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b}), \text{ откуда } \sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b})=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}.$$
Находим:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&4&5\\-2&1&2\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-16\mathbf{j}+11\mathbf{k};$$
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{9+256+121}=\sqrt{386};$$
$$|\mathbf{a}|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2};\ |\mathbf{b}|=\sqrt{4+1+4}=3,$$
следовательно,
$$\sin(\mathbf{a}\hat{,}\mathbf{b})=\sqrt{386}/3\cdot5\sqrt{2}=\sqrt{193}/15.$$ ▼

1.8. Смешанное произведение векторов

Пусть имеем три вектора **a**, **b** и **c**. Так как векторное произведение векторов **b** и **c** есть вектор, то можно рассматривать и скалярное произведение вектора **a** на вектор $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ и векторное произведение вектора **a** на вектор $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Рассмотрим первое из этих произведений.

Определение. ***Смешанным произведением*** векторов, **a**, **b** и **c** называется ***<u>число</u>***, равное скалярному произведению вектора **a** на векторное произведение векторов **b** и **c**, т.е.
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \text{ или } (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]).$$
Обозначение $\mathbf{abc}$ или (**a**, **b**, **c**).

<u>Свойства смешанного произведения (*геометрические*)</u>

1. **Теорема 8.1**. *Смешанное произведение* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ *равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах,* **a**, **b**, **c**, *взятому со знаком* «+», *если тройка,* **a**, **b**, **c** *– правая, и со знаком* «–» *если тройка,* **a**, **b**, **c** *– левая, т.е.*
$$\mathbf{abc}=\begin{cases}V, & \text{если } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ правая ттройка}\\-V, & \text{если } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ левая ттройка}\end{cases}.$$

▲ Отложим векторы **a**, **b** и **c** от общей точки *O*. Если все четыре точки *O*, *A*, *B*, *C* лежат в одной плоскости (векторы, **a**, **b** и **c** в этом случае ***компланарны***), то смешанное произведение $\mathbf{abc} = 0$. Это следует из того, что вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **b** и **c**, а значит и вектору **a**.

Если же точки *O*, *A*, *B*, *C* не лежат в одной плоскости (векторы, **a**, **b** и **c** ***некомпланарны***), построим на отрезках

$$\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{OC} = \mathbf{c}$$

параллелепипед (рис. 8.2). Пусть векторы, **a**, **b**, **c** образуют правую тройку. Обозначим через *V* объем построенного параллелепипеда, через *S* – площадь параллелограмма, построенного на векторах **b** и **c**, а через *h* – высоту параллелепипеда.

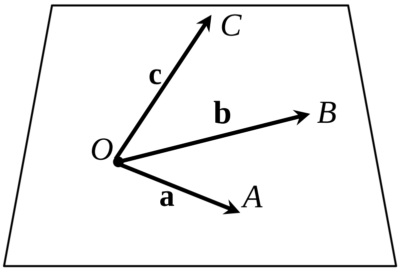


Рис. 8.1

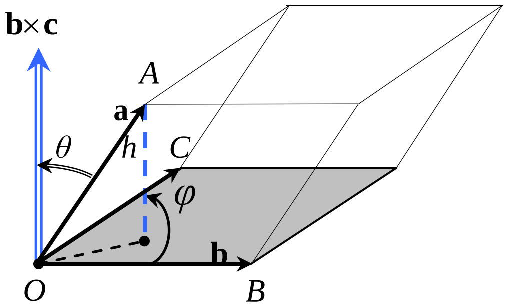


Рис. 8.2

Тогда по определению скалярного и векторного произведений

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cdot \cos\theta = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \sin\varphi \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\theta,$$

где $\varphi = (\mathbf{b} \,\hat{,}\, \mathbf{c})$, а $\theta = (\mathbf{a} \,\hat{,}\, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Так как $|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \sin\varphi = S$, $|\mathbf{a}| \cdot \cos\theta = h$, то $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = S \cdot h = V$.

Если, **a**, **b**, **c** – левая тройка, то $h = |\mathbf{a}| \cos(\pi - \theta) = -|\mathbf{a}| \cos\theta$.

Поэтому $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -S \cdot h = -V$. ▼

2. Теорема 8.2. *Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.*

▲ **Необходимость**. Пусть векторы, **a**, **b**, **c** ***компланарны***. Это означает, что вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору **c**, а, следовательно, скалярное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, то есть $\mathbf{abc} = 0$.

Достаточность. Пусть теперь $\mathbf{abc} = 0$. Это означает,

- либо один из векторов-сомножителей равен нулю,

• либо $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$.

Но вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен также к векторам **a** и **b**. Следовательно, вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен ко всем трем векторам **a**, **b**, **c**. Это может быть только в том случае, когда векторы **a**, **b**, **c** ***компланарны***. ▼

$$\mathbf{abc}=0\text{, если }\left[\begin{array}{l}\mathbf{a}=\mathbf{o}\ \text{ или }\ \mathbf{b}=\mathbf{o}\ \text{ или }\ \mathbf{c}=\mathbf{o}\\ \mathbf{a}\,\|\,\mathbf{b},\ \mathbf{b}\,\|\,\mathbf{c},\ \mathbf{a}\,\|\,\mathbf{c}\\ \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\ \text{ компланарны}\end{array}\right.\Rightarrow \mathbf{abc}=0$$

– условие ***компланарности***.

Свойства смешанного произведения (*алгебраические*)

3. *Смешанное произведение не зависит от группировки множителей:*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad (8.1)$$

т.е. знаки «$\cdot$» *и* «$\times$» *в смешанном произведении можно менять местами.*

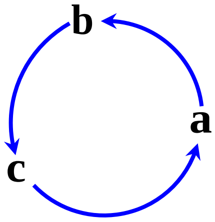
▲ В самом деле, так как скалярное произведение не зависит от порядка множителей, то

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}.$$

По теореме 8.1 обе части равенства (9.1) имеют одинаковые абсолютные величины, равные объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах **a**, **b**, **c**. Знаки этих произведений также совпадают, поскольку системы векторов **a**, **b**, **c** и **b**, **c**, **a** либо одновременно правые, либо левые.

Следовательно, произведения $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ одинаковы. Это обстоятельство оправдывает обозначение смешанного произведения векторов **a**, **b**, **c** через символ $\mathbf{abc}$. ▼

4. *При круговой перестановке векторов местами* (*1-й заменяется 2-м, 2-й – 3-м, 3-й – 4-м*) *смешанное произведение не изменяется. Схематически*



$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}.\qquad (8.2)$$

Если поменять местами два соседних вектора, то смешанное произведение меняет знак на противоположный знак.

$$\mathbf{abc} = -\mathbf{bac};\ \mathbf{abc} = -\mathbf{acb};\ \mathbf{abc} = -\mathbf{cba}. \qquad (8.2)$$

5. *Смешанное произведение суммы векторов на два других вектора равно сумме смешанных произведений каждого из векторов-слагаемых на два других вектора*

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}. \qquad (8.3)$$

▲ Справедливость равенства (8.3) следует из закона ***дистрибутивности*** скалярного произведения двух векторов. ▼

6. *Скалярный множитель можно выносить за знак смешанного произведения*

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc}). \qquad (8.4)$$

▲ Равенство (8.4) является следствием соответствующих свойств векторного и скалярного умножения двух векторов. ▼

Смешанное произведение в координатах

Пусть векторы **a**, **b**, **c** заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}.$$

Вычислим смешанное произведение **abc** в координатной форме. Имеем

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Откуда

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Рассматривая правую часть этого равенства как разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки, окончательно получим

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

смешанное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, равно определителю третьего порядка, строки которого составлены соответственно из координат первого, второго и третьего из перемножаемых векторов.

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов

$$\mathbf{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\},\mathbf{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\},\mathbf{c}=\{c_x;\ c_y;\ c_z\}$$

запишется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Кроме того, объем параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**

$$V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример. Показать, что точки

$$A(2;-1;-2),B(1;2;1),C(2;3;0),D(5;0;-6)$$

лежат в одной плоскости.

▲ 1. Найдем координаты векторов $\mathbf{a}=\mathbf{AB},\mathbf{b}=\mathbf{AC},\mathbf{c}=\mathbf{AD}$ по координатам их начала и конца. Имеем

$$\mathbf{a}=\{-1;3;3\},\mathbf{b}=\{0;4;2\},\mathbf{c}=\{3;1;-4\}.$$

2. Вычислим

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=18-18=0.$$

Поскольку $\mathbf{abc}=0$, то точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. ▼

Пример. Даны вершины пирамиды

$$A(2;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;6),\ D(2;3;8).$$

Вычислить её объем и высоту, опущенную на грань ABC.

▲ 1. Обозначим $\mathbf{a}=\mathbf{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{AC}$, $\mathbf{c}=\mathbf{AD}$. Найдем векторы-ребра по координатам вершин $\mathbf{a}=\{-2;3;0\}$, $\mathbf{b}=\{-2;0;6\}$, $\mathbf{c}=\{0;3;8\}$.

2. Вычислим объем пирамиды по формуле $V=1/6\cdot|\mathbf{abc}|$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – векторы-ребра пирамиды.

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 8\end{vmatrix}=14.$$

3. $V_{\text{пир}}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot h,\ \Rightarrow h=\dfrac{3\cdot V_{\text{пир}}}{S_{ABC}}$; $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|18\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+12^2+6^2}=3\sqrt{14},$$

$$h=\frac{3\cdot 14}{3\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$ ▼

Пример. Показать, что векторы

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}-9\mathbf{j},\ \mathbf{c}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

компланарны и найти линейную зависимость между ними.

▲ $$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}=0,$$

так как в определителе пропорциональны две строки. Смешанное произведение векторов равно нулю, следовательно, векторы компланарны. Если векторы компланарны, то они линейно зависимы.

Пусть $\mathbf{c}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$, т.е.

$$3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}=m\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})+n\cdot(\mathbf{i}-2\mathbf{j})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3=m+n,\\ -3=m-2n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1,\\ n=2,\end{cases}$$ то есть $\mathbf{c}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. ▼

Пример. Дана пирамида с вершинами в точках

$$A(1;\,2;\,3),\ B(-2;\,4;\,1),\ C(7;\,6;\,3),\ D(4;\,-3;\,-1).$$

Найти $a)$ длину ребра AB; б) площадь грани ABC;
в) угол между ребрами AD и AC.

▲ а) Найдем длину ребра AB:

$$\mathbf{AB} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k};\ AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}.$$

б) Вычислим площадь грани ABC:

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|;\ \mathbf{AC} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j};$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 24\mathbf{k};$$

$$S_{ABC} = 1/2 \cdot \sqrt{8^2 + (-12)^2 + (-24)^2} = 1/2 \cdot 4\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 14.$$

в) Найдем угол между ребрами AD и AC:

$$\cos(\mathbf{AD}, \hat{\ } \mathbf{AC}) = \frac{\mathbf{AD} \cdot \mathbf{AC}}{|\mathbf{AD}| \cdot |\mathbf{AC}|};$$

$$\mathbf{AD} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k};\ \mathbf{AD} \cdot \mathbf{AC} = 3 \cdot 6 + (-5) \cdot 4 + (-4) \cdot 0 = -2;$$

$$|\mathbf{AD}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2};\ |\mathbf{AC}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13};$$

$$\cos(\mathbf{AD}, \hat{\ } \mathbf{AC}) = \frac{-2}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{13}} = -\frac{1}{5\sqrt{26}};\ (\mathbf{AD}, \hat{\ } \mathbf{AC}) = \pi - \arccos\frac{1}{5\sqrt{26}}.$$ ▼

Дополнение

Двойное векторное произведение

Двойным векторным произведением векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называется векторное произведение векторного произведения двух первых векторов на третий вектор, то есть $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Из этого определения следует, что двойное векторное произведение перпендикулярно как к вектору $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, так и к вектору $\mathbf{c}$.

В силу того, что двойное векторное произведение перпендикулярно к вектору $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, оно ***компланарно*** с векторами, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и, следовательно, его можно разложить по векторам, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Можно показать, что справедлива формула

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Знания и умения, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Величина, скалярная величина, векторная величина. Геометрический вектор, орт, нулевой вектор, коллинеарность, компланарность, векторный многоугольник, длина вектора, направляющие косинусы. Сложение и вычитание векторов, умножение на скаляр, свойства линейных операций над векторами.
2. Линейная зависимость и независимость векторов.
3. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Координаты вектора.
4. Скалярное произведение векторов.
5. Векторное произведение векторов.
6. Смешанное произведение векторов.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы ненулевых векторов.
2. Единственность разложения вектора по базису.
3. Свойства скалярного произведения; вычисление через координаты векторов.
4. Свойства векторного произведения; вычисление через координаты векторов.
5. Свойства смешанного произведения; вычисление через координаты векторов.

Умения в решении задач

1. Находить сумму (разность) векторов.
2. Находить скалярное, векторное и смешанное произведение.
3. Определять косинус угла между векторами, направляющие косинусы.
4. Вычислять площади с помощью векторного произведения.
5. Вычислять объем параллелепипеда (или пирамиды) с помощью смешанного произведения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. – 90 с.
2. *Веретенников В. Н.* Руководство к решению задач индивидуального задания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. 25 с.
3. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Векторная алгебра. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. – 42 с.
4. *Веретенников В.Н.* Методические указания. Векторная алгебра. Индивидуальное домашнее задание. СПб: Изд. РГГМУ. 2004. − 20 с.
5. *Дадаян А. А., Масалова Е. С*. Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры. – Мн.: Выш. школа, 1981. – 224 с.
6. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А*. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов: Учебное пособие. СПб: Изд-во СПБГТУ, 2001, 56 с.
7. *Краснов М*. Л. *и др*. Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.
8. *Кузнецов Л. А*. Сб. заданий по высшей математике. Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк. 1994. – 206 с.
9. *Рябушко А. П. И др.* Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч. 1. – Мн.: Выш. шк, 1990. – 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Автор:
Веретенников Валентин Николаевич

Редактор И. Г. Максимова

Подписано в печать Формат Печать офсетная.
Печ. л. Тираж 300. Зак.№

195196, СПб, Малоохтинский пр., 98. РГГМУ.