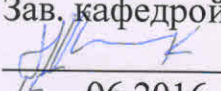


Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
(РГГМУ)

Допущена к защите
Зав. кафедрой к.г.н., доцент
 Н.Л. Плинк
15.06.2016

Кафедра комплексного управления
прибрежными зонами

**ВЫПУСКНАЯ
КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)**
**Моделирование наката длинной волны на
сухой берег**

Выполнила	А.К. Стокоз, гр. О-438
Руководитель	к.г.н., доцент Н.Л. Плинк

Санкт-Петербург 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
(РГГМУ)

Допущена к защите
Зав. кафедрой к.г.н., доцент
_____ Н.Л. Плинка
_____.06.2016

Кафедра комплексного управления
прибрежными зонами

ВЫПУСКНАЯ
КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)
Моделирование наката длинной волны на
сухой берег

Выполнила	А.К. Стокоз, гр. О–438
Руководитель	к.г.н., доцент Н.Л. Плинка

Санкт-Петербург 2016

Содержание

	Стр.
Введение	3
1 Основные положения теории мелкой воды	6
2 Линейная теория наката длинной волны на сухой берег	18
3 Численная модель наката длинной волны на сухой берег с использованием подвижного уреза	25
4 Результаты моделирования распространения длинной волны с учетом возможности затопления сухого берега	34
4.1 Верификация модели	35
4.2 Моделирование наката	43
Заключение	50
Список использованных источников	52

Введение

Возникновение длинных волн в океане связано с различными природными процессами, такими как приливы, штормовые нагоны, сейшевые колебания и волны цунами. При подходе к берегу волны вследствие уменьшения глубины трансформируются, а высота их увеличивается. Поэтому длинные волны, слабо заметные в открытом океане, при подходе к берегу могут причинять значительный экономический ущерб и человеческие жертвы. Достаточно вспомнить недавнее Индоокеанское цунами (декабрь, 2004 года), когда в результате разрушений, вызванных подводным землетрясением в районе острова Суматра и образовавшейся волны цунами, погибло более 140 тысяч человек и пострадало более 5 миллионов человек. Это цунами признано самым катастрофическим цунами среди зарегистрированных явлений такого типа. В соответствии с данными Центра геофизических данных NOAA [1] в XX веке было зарегистрировано 141 цунами, 123 из которых вызвало ущерб. Штормовые нагоны хотя и не имеют таких трагических последствий, но происходят гораздо чаще. И поэтому также представляют для побережья значительную угрозу. Например, во время урагана «Катрина», произошедшем в 2005 году погибло 1200 человек и, практически, полностью был разрушен город Новый Орлеан.

Защита населения и обеспечение нормального функционирования морской и прибрежной экономики является одной из задач комплексного управления прибрежными зонами. Одним из направлений управления рисками является смягчение последствий (ущерба), который может быть вызван стихийным бедствием. В случае управления рисками затопления сухого берега, эта задача требует определения зоны затопления первоначально сухого берега. Для определения зоны затопления могут использоваться различные методы: гидравлическое моделирование, анализ

данных наблюдений, палеоданные и даже традиционные знания. Однако наиболее доступным и технологичным инструментом для оценки зоны затопления является математическое моделирование, позволяющее оценить параметры затопления для волн с высотой или направлением подхода различной обеспеченности. Параметры затопления являются наиболее важной характеристикой, которые необходимы для разработки превентивных мер по уменьшению риска значительного ущерба, что определяет актуальность этой задачи.

С математической точки зрения оценка затопления сухого берега в результате подхода длинной волны (например, волны цунами), формулируется как задача наката волны на сухой берег. Математическое решение задачи наката осложняется возможностью обрушения волны и перестройки волнового режима за счет превращения ее в ударную волну, что существенно осложняет процесс математического моделирования. Однако с учетом последующего усвоения результатов оценки величины заплеска в системе управления рисками, задача может быть упрощена и сформулирована как оценка предельного заплеска, соответствующего случаю распространения волны по сухому берегу без обрушения. Обрушение, если оно и произойдет (условия обрушения будут рассмотрены в работе) приведет к уменьшению величины заплеска, что с точки зрения управления рисками должно привести к уменьшению ущерба ниже прогнозируемого уровня. Таким образом, задачей расчета является получение предельных размеров зоны затопления в случае подходы волны, имеющей заданные параметры (высоту, длину и т.п.), т.е. определения зоны, которая не может быть затоплена.

Целью исследований, выполненных в рамках подготовки бакалаврской выпускной работы, является разработка численной модели распространения длинной волны в канале переменного сечения с учетом возможности затопления сухого берега. Для осуществления поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. знакомство с выводами теории мелкой воды;
2. изучение основ линейной теории наката;
3. освоение навыков программирования и численной реализации математической модели;
4. математическая постановка задачи, допускающая задавать береговую границу, совпадающую с подвижным урезом воды;
5. численная реализация модели;
6. выполнение серии численных расчетов, направленных на верификацию модели путем сравнения результатов расчетов с имеющимися аналитическими решениями.

1 Основные положения теории мелкой воды

Длинными волнами, или волнами мелкого моря, называются такие возмущения свободной поверхности, длина волны которых больше глубины водоема больше чем в два раза. В этом предельном случае длинная волна, в отличит от короткой волны, становится бездисперсионной и ее фазовая скорость зависит только от глубины:

$$c = \sqrt{gh} \quad (1.1)$$

где c – фазовая скорость, м/с;
 g – ускорение свободного падения, м/с²;
 h – глубина, м.

Принимая во внимания характер распространения волн, выведем систему уравнений движения длинных волн.

Уравнение движения воды выражается из уравнения Навье-Стокса. При условии несжимаемой жидкости уравнение движения дополняется уравнением неразрывности, описывающим закон сохранения массы.

Получается система уравнений (1.2), решение которой приведет к системе уравнений движения длинных волн.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\vec{V}$ – вектор скорости элементарного объема воды, м/с;
 $\vec{F}$ – вектор внешних сил;
 ρ – плотность, кг/м³;
 P – гидростатическое давление, Па;
 μ – коэффициент вязкости, Па·с.

Из уравнения движения следует, что изменение скорости элементарного объема воды находится под влиянием объемных и поверхностных сил. Первый член в правой части уравнения движения характеризует изменение перемещения воды за счет внешних сил; второй член представляет собой силу гидростатического давления; а третий отвечает за изменение скорости посредством вязкости.

Для дальнейших расчетов систему уравнений необходимо преобразовать.

Заранее отметим, что оси x и y расположены на плоскости поверхности жидкости, а ось z направлена вверх. С основными обозначениями и направлениями осей можно ознакомиться на рисунке 1.1.

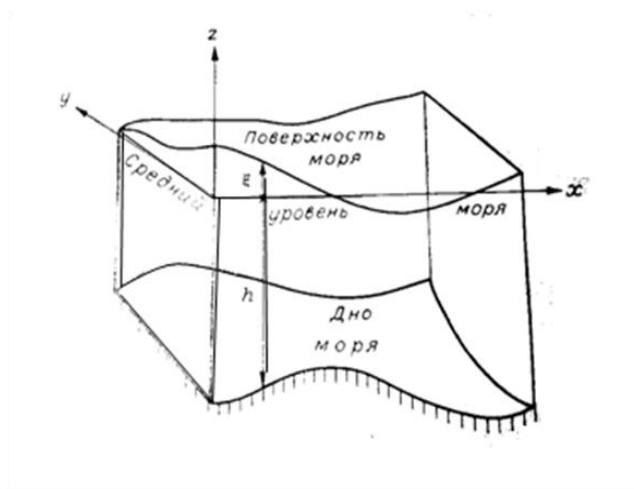


Рисунок 1.1 – Оси координат и основные обозначения [2]

В уравнении движения в лапласиане $\nabla^2 V$ достаточно одного слагаемого $\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$, так как ввиду относительной однородности океана по горизонтали горизонтальными слагаемыми тензора вязких напряжений можно пренебречь. В качестве внешних сил $\vec{F}$ принимаем силу тяжести g и силу Кориолиса $-2\omega \times \vec{V}$, характеризующую перемещение частиц воды за счет вращения Земли с угловой скоростью $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

В уравнении неразрывности можно пренебречь членом $\frac{d\rho}{dt}$ в связи с тем, что в естественных условиях изменение плотности морской воды незначительно и не превышает десятых долей процента [3].

Получаем модифицированную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\omega \times \vec{V} = g - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}, \\ \nabla \vec{V} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.3) может описывать различные типы течений, возникающие в океане. Учитывая баротропный характер движений, связанных с поверхностными длинными волнами построим интегральную модель, для чего уравнения почленно проинтегрируем по глубине с использованием граничных условий (1.4) на поверхности и на дне. Первое условие является кинематическим, и характеризует поведение частиц на свободной поверхности. Вертикальная скорость включает в себя локальное и адвективное слагаемые. Второе представляет собой условие прилипания частиц ко дну.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} &= w, \quad \text{при } z = \xi(x, y, t) \\ u = v &= 0, \quad \text{при } z = -h(x, y)\end{aligned}\tag{1.4}$$

где ξ – возмущение свободной поверхности, изменяющееся во времени и пространстве, м;
 h – глубина, различная в разных точках пространства, м.

Рассмотрим проекцию уравнения движения из системы (1.3) на ось x .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \Omega v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x}\tag{1.5}$$

где Ωv – главная часть силы Кориолиса,

Главная часть силы Кориолиса получена путем небольших преобразований и с учетом малости вертикальной скорости:

$$(2\omega \times \vec{V})_x = 2\omega_y w - 2\omega_z v \approx -2\omega_z v = -2\omega \sin\varphi v = -\Omega v\tag{1.6}$$

где φ – широта места, град.

$$\Omega = 2\omega \sin\varphi$$

Слагаемые в левой части уравнений (1.5) согласно правилу дифференцирования интеграла с переменными пределами имеют следующий вид:

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} u dz - \left[u \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]_{z=\xi},\tag{1.7}$$

$$\int_{-h}^{\xi} u \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u^2 dz - \int_{-h}^{\xi} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left[u^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{z=\xi} - \left[u^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{z=-h} \quad (1.7)$$

$$\int_{-h}^{\xi} v \frac{\partial u}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} uv dz - \int_{-h}^{\xi} u \frac{\partial v}{\partial y} dz - \left[uv \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]_{z=\xi} - \left[uv \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=-h}$$

Применив для соотношений (1.7) граничное условие (1.4) при $z = -h$, члены $\left[u^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{z=-h}$ и $\left[uv \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=-h}$ обращаются в нуль.

Кроме того появляются новые члены $\left. \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\xi}$ и $\left. \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-h}$, которые обозначим как $\tau_x^{(1)}$ и $\tau_x^{(2)}$ соответственно. Давление на поверхности $P|_{z=\xi}$ принимается равным атмосферному P_a .

Уравнение (1.5) после интегрирования принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} uv dz - \left[u \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]_{z=\xi} \\ - \int_{-h}^{\xi} u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + \int_{-h}^{\xi} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ = \Omega \int_{-h}^{\xi} v dz - \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial P}{\partial x} dz + \tau_x|_{-h}^{\xi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из граничного условия на поверхности следует, что третий член в левой части уравнения обращается в $-uw|_{z=\xi}$. С помощью уравнения неразрывности из четверного слагаемого получаем $\int_{-h}^{\xi} u \frac{\partial w}{\partial z}$, что при сложении

с пятым дает $uw|_{-h}^{\xi}$. Таким образом, в левой части полученного уравнения (1.8) комбинация последних трех членов равна нулю.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} uv dz = \Omega \int_{-h}^{\xi} v dz - \frac{1}{\rho} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial P}{\partial x} dz + \tau_x|_{-h}^{\xi} \quad (1.9)$$

После интегрирования уравнения (1.5) произошел переход от скорости $u(x, y, z, t)$ к новой переменной – полному потоку $U(x, y, t)$ (интегрированной по вертикали скорости).

$$\int_{-h}^{\xi} u dz = U \quad (1.10)$$

Длинные волны имеют характерные особенности, отличающие их от остальных видов волнового движения. Воспользуемся предположением о том, что градиенты давления вызываются только изменениями гидростатического давления [2]. Для дальнейшего преобразования уравнения движения воспользуемся законом гидростатики (1.11).

$$P = \rho g \xi + P_a \quad (1.11)$$

Приняв закон гидростатики, допускаем, что вертикальная скорость движения частиц много меньше горизонтальной.

Путем дифференцирования уравнения гидростатики (1.11) получаем соотношение применимое для решения второго члена в правой части уравнения (1.9), характерное для случая движения длинных волн.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial P_a}{\partial x} \quad (1.12)$$

Принимая во внимание условие (1.10) и соотношение (1.12), уравнение (1.5) преобразуется в конечный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} uv dz = \\ = \Omega V - g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{(h + \xi)}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \tau_x^{(1)} - \tau_x^{(2)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

где U — полный поток по оси x , $\text{м}^2/\text{с}^2$.

Для приведения проекции уравнения движения из системы (1.3) на ось y к виду (1.13) выполняются аналогичные операции.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} v^2 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} uv dz = \\ = \Omega U - g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{(h + \xi)}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \tau_y^{(1)} - \tau_y^{(2)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Проецирование уравнения движения из системы (1.3) на ось z не производится, в связи с пренебрежением вертикальным ускорением и вертикальными скоростями.

Уравнение неразрывности из системы (1.3) также подвергается интегрированию по всей глубине. Получаем соотношения:

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \frac{\partial U}{\partial x} - u \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{z=\xi} - u \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{z=-h} \\ \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial v}{\partial y} dz &= \frac{\partial V}{\partial y} - v \frac{\partial \xi}{\partial y} \Big|_{z=\xi} - v \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{z=-h}\end{aligned}\tag{1.15}$$

Тогда, применив соотношения (1.15), уравнение неразрывности из системы (1.3) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = u \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{z=\xi} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \Big|_{z=\xi} - w \Big|_{z=\xi}\tag{1.16}$$

В конечном виде уравнение неразрывности выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0\tag{1.17}$$

Полученные уравнения движения (1.13) и (1.14) наряду с интегральными скоростями U и V содержат квадраты и произведения скоростей u^2 , v^2 и uv . Для достижения вида, удобного для численного расчета, оценим порядок величин всех членов уравнений (1.13), (1.14) и (1.17).

Соотношение характерных вертикального и горизонтального масштабов следует из уравнения неразрывности (1.3) и имеет вид:

$$\frac{w}{u} = \frac{H_{\text{хар}}}{L_{\text{хар}}} = \varepsilon\tag{1.18}$$

где $H_{\text{хар}}$ – характерный вертикальный масштаб;
 $L_{\text{хар}}$ – характерный горизонтальный масштаб;
 ε – безразмерный параметр.

Так как вертикальный масштаб считается много меньше горизонтального, величина $\varepsilon \ll 1$.

Характерный масштаб времени $T_{\text{хар}}$ связан с характерным горизонтальным масштабом следующим соотношением:

$$L_{\text{хар}} = cT_{\text{хар}} \quad (1.19)$$

где c – характерная скорость распространения возмущения.

Сделаем предположение, что $u \ll c$. Тогда можно оценить порядок членов в левой части уравнений движения (1.13).

$$o\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) \approx \frac{uH_{\text{хар}}}{T_{\text{хар}}} = uc \frac{H_{\text{хар}}}{L_{\text{хар}}} = uc\varepsilon \quad (1.20)$$

где $o(\)$ – характерное значение функции, стоящей в скобках.

$$o\left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u^2 dz\right) \approx o\left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\xi} uv dz\right) \approx u^2 \frac{H_{\text{хар}}}{L_{\text{хар}}} = u^2 \varepsilon \quad (1.21)$$

Из соотношений (1.20) и (1.21) следует, что величина третьего и четвертого членов левой части уравнения (1.13) много меньше первого, и ими можно пренебречь. Аналогичный вывод для уравнения (1.14).

Модифицированная система уравнений (1.3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = f_1 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} = f_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

где f_1 и f_2 – функции, не содержащие дифференцирование по ξ или линейные относительно нее.

Большое значение в оценке порядка членов уравнений имеет параметр c , к которому применяется единственное условие: величина c должна во много раз превышать скорость движения частицы жидкости. Логично будет предположить, что c соответствует фазовой скорости длиной волны и равна $\sqrt{gH}$, где $H = h + \xi$. Это соответствие нетрудно вывести из системы уравнений (1.22). Для этого система линеаризуется, глубина H принимается постоянной. Решив систему уравнений (1.22) получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (1.23)$$

Множитель gH в волновом уравнении (1.23) является квадратом скорости перемещения фронта волны. Предположение подтвердилось.

Вернемся к оценке порядков остальных членов уравнений (1.22), используя факт малости величины $\frac{u}{c}$.

Сила Кориолиса имеет порядок:

$$o(\Omega V) \approx 10^{-4} uH \quad (1.24)$$

Оценка силы, возникающей при наклоне свободной поверхности $gH \frac{\partial \xi}{\partial x}$, производится с использованием уравнения неразрывности. Порядок данной величины соответствует порядку (1.20). Вывод представлен ниже:

$$\begin{aligned} o\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) &= o\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \approx \frac{uH_{\text{хар}}}{L_{\text{хар}}}, \\ o(\xi) &\approx \frac{uH_{\text{хар}}}{c}, \\ o\left(gH \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) &\approx u c \varepsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

Следующий член $\frac{H}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x}$, характеризующий градиент атмосферного давления, имеет порядок:

$$o\left(\frac{H}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x}\right) \approx \varepsilon \quad (1.26)$$

Оценка силы вязкости на поверхности и у дна производится на основании эмпирических соотношений, например:

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &= k_1 \rho_a W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \\ \tau_x^{(2)} &= k_2 \rho_w \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

где k_1 и k_2 – эмпирические коэффициенты;
 ρ_a и ρ_w – плотность воздуха и воды соответственно, кг/м³;
 W – скорость ветра над водой, м/с;
 $\bar{u}$ и $\bar{v}$ – средняя скорость движения частиц жидкости по глубине, м/с.

В результате два последних члена уравнений (1.13), (1.14) имеют порядок:

$$\begin{aligned} o\left(\tau_x^{(1)}\right) &= 10^{-3} \\ o\left(\tau_x^{(2)}\right) &= 10^{-3}u^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Принимая во внимания результаты оценки величин членов уравнений (1.13), (1.14) и (1.17), получаем систему уравнений, применимую для исследования длинноволновых колебаний вязкой несжимаемой жидкости. Данную систему можно использовать для расчета сейш, приливов, цунами, нагонных явлений и других длинноволновых возмущений.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Omega V - g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{(h + \xi)}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \tau_x^{(1)} - \tau_x^{(2)} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \Omega U - g(h + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{(h + \xi)}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial y} + \tau_y^{(1)} - \tau_y^{(2)} \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

2 Линейная теория наката длинной волны на сухой берег

Линейная теория наката, предложенная Е.Н. Пелиновским в работе [4], является методом определения предельного заплеска длинной волны на берег. Основываясь на аналитическом решении уравнений мелкой воды, теория позволяет получить верхнюю оценку зоны затопления. Теория строится на предположении, что граница затопления определяется когда:

$$h(x) + \xi(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

где $h(x)$ – глубина (высота берега), м;
 $\xi(x, t)$ – высота волны на урезе, м.

Воспользуемся одномерными линеаризованными уравнениями мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -gh(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \end{cases} \quad (2.2)$$

где U – полный поток, м²/с;
 g – ускорение свободного падения, м/с²;
 $h(x)$ – глубина, м;
 ξ – возмущение свободной поверхности, м.

Система (2.2) путем несложных преобразований сводится к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Рассмотрим монохроматическую волну с постоянной частотой ω на акватории с постоянным уклоном дна $h = \alpha x$. В случае гармонической волны, она будет описываться соотношением (2.4). Начало координат совпадает с положением невозмущенного уреза воды.

$$\xi(x, t) = Re \xi(x) \exp(i\omega t) \quad (2.4)$$

где Re — знак действительной части комплексной функции

Путем замены переменных уравнение (2.3) можно привести к известному дифференциальному уравнению Бесселя.

$$\frac{d^2 \xi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\xi}{dz} + \xi = 0 \quad (2.5)$$

где ω — частота, c^{-1} ;

α — уклон дна.

$$z = \sqrt{4\omega^2 x / (g\alpha)}$$

Полное решение уравнения (2.5) записывается с помощью комбинации Бесселевых функций первого и второго родов.

$$\xi(x, t) = A J_0 \left(\sqrt{\frac{4\omega^2 x}{g\alpha}} \right) + B N_0 \left(\sqrt{\frac{4\omega^2 x}{g\alpha}} \right) \quad (2.6)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода;
 N_0 – функция Неймана;
 A и B – произвольные константы.

Функция Бесселя второго рода $N_0(x)$ имеет логарифмическую особенность и при $x = 0$ имеет бесконечные решения. Ввиду необходимости получения ограниченного решения константу B принимаем равную нулю.

Функция Бесселя первого рода при $x = 0$ принимает значение равное 1, поэтому константа A соответствует ξ_R , и имеет физический смысл подъема уровня, который будет иметь место на урзе в случае если там стоит стенка, что можно интерпретировать как высоту вертикального заплеска.

Для сращивания решения на урзе с параметрами подходящей волны (которые известны вдали от берега) используем асимптотическую формулу для J_0 :

$$J_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{при } z \gg 1 \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.6) получаем следующее выражение для поля:

$$\xi(x, t) \cong \xi_0(x) \left\{ \cos\left[\omega(t + \tau) - \frac{\pi}{4}\right] + \cos\left[\omega(t - \tau) + \frac{\pi}{4}\right] \right\} \quad (2.8)$$

где τ – набег фазы над наклонным дном,

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}} = \sqrt{\frac{4x}{g\alpha}};$$

$\xi_0(x)$ – переменная амплитуда волны,

$$\xi_0(x) = \frac{A}{g} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi g \alpha \sqrt{gh}}}.$$

Решение это соответствует стоячей волне и представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн.

Изменение амплитуды волны $\xi_0(x)$, распространяющейся на акватории с уклоном дна, подчиняется закону Грина:

$$\xi_0(x) \sim \sqrt[4]{\frac{1}{h}} \quad (2.9)$$

По линейному закону Грина высота волны стремится к бесконечности при малых глубинах, что не соответствует естественному явлению на урезе. Закон Грина перестает выполняться вблизи берега. Поэтому для определения высоты волны на урезе используются характеристики волнения на расстоянии l от берега до изобаты h_0 . Тогда решение уравнения (2.6) будет переписано:

$$\xi(x, t) = 2\pi \xi_0 \sqrt{\frac{2l}{\lambda_0}} J_0 \left(4\pi \frac{\sqrt{lx}}{\lambda_0} \right) \quad (2.10)$$

где ξ_0 – высота волны на расстоянии l от уреза, м;
 λ_0 – длина волны на расстоянии l от уреза, м,
 $\lambda_0 = 2\pi\sqrt{gh_0}/\omega$.

Из уравнения (2.10) можно получить формулу расчета высоты волны на урезе ξ_R :

$$\xi_R = 2\pi\xi_0 \sqrt{\frac{2l}{\lambda_0}} \quad (2.11)$$

Высота волны на урзе линейно зависит от начальной высоты волны ξ_0 , и как корень квадратный от начальной длины волны λ_0 , и расстояния l .

На область применения формулы (2.11) накладываются некоторые ограничения в связи с использованием асимптотической формулы (2.7): расстояние l должно быть достаточно большим, а соотношение $\xi_R/\xi_0 > 2$ [5].

На практике случается, что начальные условия задаются на недостаточном расстоянии от урза. Тогда асимптотическая формула (2.7) не может быть использована. Поэтому надо сопоставить высоту заплеска с высотой падающей волны. В работе [6] приводится соотношение, применимое для расчета высоты вертикального заплеска.

$$\xi_R = \begin{cases} D\xi_0 \sqrt{\frac{l}{\lambda_0}}, & l > 0.05 \lambda_0 \\ 2\xi_0, & l < 0.05 \lambda_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

где D – численный коэффициент, зависящий от формы волны.

В ходе реализации в работе [6] численных экспериментов был определен коэффициент D , который оказался равен 6.5. Условие перехода также было установлено в результате экспериментов. При недостаточном расстоянии l для определения заплеска используется условие твердой стенки.

Применим линейную теорию для определения величины горизонтального заплеска на сухой берег. Критерий x на берегу отрицательный, решение уравнения Бесселя (2.5) сводится к решению модифицированной функции Бесселя первого рода. Для сухого берега уравнение (2.10) имеет вид:

$$\xi(x, t) = 2\pi\xi_0 \sqrt{\frac{2l}{\lambda_0}} I_0 \left(4\pi \frac{\sqrt{l|x|}}{\lambda_0} \right) \quad (2.15)$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода.

Из уравнения (2.12), используя предположение (2.1), выводим соотношение для определения дальности заплеска:

$$\alpha L = 2\pi\xi_0 \sqrt{\frac{2l}{\lambda_0}} I_0 \left(4\pi \frac{\sqrt{lL}}{\lambda_0} \right) \quad (2.16)$$

где L – величина горизонтального заплеска, м.

$$L \cong \frac{2\pi\xi_0}{\alpha} \sqrt{\frac{2l}{\lambda_0}} = \frac{\xi_R}{\alpha} \quad (2.17)$$

В работе [4] приведены соотношения, при которых решение с помощью формулы (2.14) существует. На уклон дна накладываются ограничения:

$$\alpha > 14.03 \xi_0^{2/5} h_0^{3/5} \lambda_0^{-1} \quad (2.18)$$

Кроме того имеется закономерность для дальности заплеска:

$$L \leq L_{max} \cong 0.04 \frac{\lambda_0^2}{l} \quad (2.19)$$

Рассмотренная выше теория основана на линейном приближении. При нелинейном подходе форма волны несколько видоизменяется, ее передний склон становится более крутым. Исходя из выводов, рассмотренных в работе [7] вклад нелинейности имеет пренебрежительно малое влияние на предельные значения заплеска.

Но в рамках нелинейной теории не исключается явление обрушения. Оно возникает при сильной крутизне волны на урезе. После обрушения происходит потеря энергии, тогда дальность заплеска и высота наката уменьшаются.

Применяя линейную теорию наката следует учитывать критерий обрушения Br . Он определяется как отношение максимальной крутизны волны на урезе к уклону дна.

$$Br = \frac{\left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=0}}{\alpha} = \frac{\omega^2 \xi_R}{g \alpha^2} \quad (2.19)$$

В случае если крутизна волны на урезе больше уклона, или иными словами критерий больше 1, то происходит обрушение. Если критерий меньше 1, волна при накате «натыкается» на берег и происходит его постепенное затопление.

Для использования линейной теории наката, необходимо, чтобы расчеты были произведены в диапазоне не обрушивающихся волн.

3 Численная модель наката длинной волны на сухой берег с использованием подвижного уреза

Для получения простейшего решения задачи наката длинной волны, условия поставлены следующим образом: система уравнений одномерная, волна распространяется вдоль оси x , волна движется по направлению к берегу по нормали, уклон дна постоянный, дно неразмываемое.

Система уравнений мелкой воды (1.29), полученная в главе 1, используются в дальнейшем для описания распространения длинной волны и характеристик наката.

Исходя из оценки порядков членов уравнений движения длинных волн, приведенной в 1 главе, можно пренебречь некоторыми слагаемыми, в связи с их меньшим вкладом в изменчивость скорости движения волны по сравнению с остальными. После упрощения система уравнений (1.29) будет выглядеть следующим образом.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -gh \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -gh \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Расчет производится по линеаризованным уравнениям движения длинных волн, при этом для проведения расчетов были подобраны параметры волны и морфометрии таким образом, чтобы обрушения не происходило. Параметры волны были подобраны с учетом критерия обрушения.

Учитывая тот факт, что распространение волны задано вдоль оси x , будет произведен расчет характеристик по оси x , и система (3.1) примет свой окончательный вид:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -gh \frac{d\xi}{dx} \\ \frac{dU}{dx} = -\frac{d\xi}{dt} \end{cases} \quad (3.2)$$

Расчет значений полного потока и уровня свободной поверхности производится с использованием, так называемой «шахматной» конечно-разностной сетки, представленной на рисунке 3.1. По горизонтальной оси откладываются шаги по пространству ($i = 1, 2, \dots, M$) с интервалом Δx , а по вертикальной – шаги по времени ($k = 1, 2, \dots, T$) с интервалом Δt .

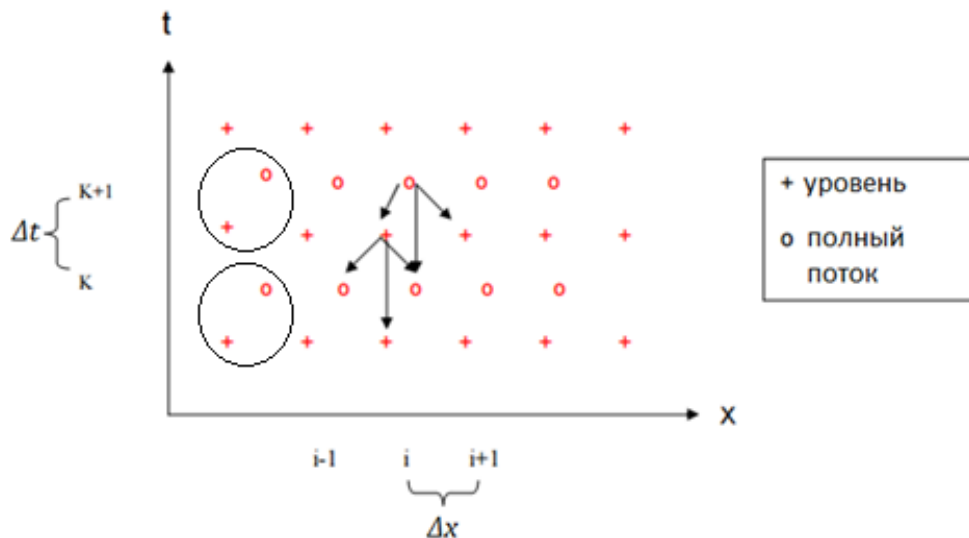


Рисунок 3.1 – «Шахматная» конечно-разностная сетка [8]

Следует отметить, что для корректного вычисления характеристик распространения длинной волны по выбранной конечно-разностной схеме, Данное ограничение называется условием Куранта.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c_{max} \quad (3.3)$$

где c_{max} – максимальная фазовая скорость в расчетной области, м/с.

Физический смысл условия Куранта заключается в том, что скорость распространения волн, не должна превышать вычислительную скорость на сетке. То есть волна не должна распространиться на расстояние, больше чем Δx за время равное временному шагу Δt [5].

Для численного решения системы дифференциальных уравнений мелкой воды (3.2), была произведена замена производных конечными разностями.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &\approx \frac{\Delta U}{\Delta t}; & \frac{d\xi}{dt} &\approx \frac{\Delta \xi}{\Delta t} \\ \frac{dU}{dx} &\approx \frac{\Delta U}{\Delta x}; & \frac{d\xi}{dx} &\approx \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя «шахматную» сетку, конечные разности (3.4) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{\Delta t} &= \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t}; & \frac{\Delta \xi}{\Delta t} &= \frac{\xi_i^{k+1} - \xi_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\Delta U}{\Delta x} &= \frac{U_i^k - U_{i-1}^k}{\Delta x}; & \frac{\Delta \xi}{\Delta x} &= \frac{\xi_{i+1}^k - \xi_i^k}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

А система уравнений (3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} + gh_i \frac{\xi_{i+1}^k - \xi_i^k}{\Delta x} = 0 \\ \frac{\xi_i^{k+1} - \xi_i^k}{\Delta t} + \frac{U_i^k - U_{i-1}^k}{\Delta x} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Неизвестными членами в системе уравнений (3.6) являются значения полного потока и уровня свободной поверхности на шаге $k + 1$. Выразив их, получаем конечные формулы, используемые в численном моделировании.

$$\begin{cases} U_i^{k+1} = U_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} gh_i (\xi_{i+1}^k - \xi_i^k) \\ \xi_i^{k+1} = \xi_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_i^k - U_{i-1}^k) \end{cases} \quad (3.7)$$

В начальный момент времени ($k = 1$) на поверхности нет возмущения уровня, волновые движения отсутствуют. Значения уровня и полного потока во всех точках расчетной области в начальный момент времени принимались равными нулю.

$$\begin{aligned} U_i^{k=1} &= 0 \\ \xi_i^{k=1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кроме начальных условий для решения задачи требуются задание граничных условий, которые задаются с учетом типа границы и условий постановки задачи. В данном случае есть твердая и жидкая физические границы. На твердой границе задается условия непротекания. Поскольку в начальный момент задаются нулевые начальные условия, то исходная волна должна входить через жидкую границу.

Таким образом, на жидкой границе задается колебание уровня, соответствующее падающей волне, которая в данном случае задавалась в виде половины синусоиды.

В связи с возможным отражением, в расчетной области может сформироваться волна, обратная падающей. В связи с этим на жидкой границе применяется условие, позволяющее реализовывать условия свободного излучения отраженной волны.

На жидкой границе применяется однородное граничное условие, учитывающее как входящую в область расчета падающую волну, так и выходящую из нее отраженную. Получим вид однородного граничного условия.

В общем виде уравнение для расчета возмущения уровня свободной поверхности представляет собой сумму падающей и отраженной волн. Так как ось x направлена по ходу движения падающей волны уравнение имеет следующий вид:

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (3.9)$$

где f — функция, описывающая форму падающей волны;
 ψ — функция, описывающая форму отраженной волны.

Произведя операцию дифференцирования по x и t , получаем систему уравнений (3.10).

$$\begin{cases} c \frac{d\xi}{dx} = -f' + \psi' \\ \frac{d\xi}{dt} = f' + \psi' \end{cases} \quad (3.10)$$

Поскольку f описывает форму падающей волны (распространяющейся к берегу), а ψ описывает излученную волну, то вычитая первое уравнение системы (3.10) из второго, получаем условие (3.11), которое в левой части содержит часть граничного условия, «отвечающее» за излучение, а правая - за входящую волну.

$$\frac{d\xi}{dt} - c \frac{d\xi}{dx} = 2f' \quad (3.11)$$

Падающая волна описывается синусоидой, и в дифференцированном виде выглядит как:

$$f' = A\omega \cos(\omega t^k) \quad (3.12)$$

A — амплитуда волны, м;

ω — частота волны, с^{-1} ;

t^k — момент времени на k -ом шаге, с.

Численная реализация граничного условия на жидкой границе проводится с использованием явно-неявной аппроксимации. Жидкая граница совпадает с первым шагом по пространству. В конечно-разностном виде (3.11) выглядит следующим образом:

$$\xi_{i=1}^{k+1} = \frac{\xi_{i=1}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} c \xi_{i=2}^{k+1} + 2\Delta t p A \omega \cos(\omega t^{k+1})}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (3.13)$$

где f' – производная по аргументу функция падающей волны;
 p – безразмерный индекс;

p - дельта функция для управления граничным условий на жидкой границе. В случае реализации вхождения волны, p принимает значение, равное единице. В случае отсутствия входящей волны, на жидкой границе реализуется условие полного излучения. В этом случае p равно нулю.

Твердая граница представляет собой передвигающуюся стенку, на которой используется условие непротекания и реализуется условие полного отражения. Твердая граница совпадает с шагом по пространству M . На ней выполняется граничное условие вида:

$$U_{i=M}^k = 0 \quad (3.14)$$

Основным блоком модели будет называться модель распространения волны с зафиксированной (неподвижной) твердой границей. В дальнейшем основной блок будет проверен с использованием аналитических методов.

Расчет параметров волны производится в следующем порядке:

- а) задание начальных условий;
- б) вычисление уровня свободной поверхности во внутренней расчетной области на шаге по времени $k + 1$;
- в) задание граничного условия на жидкой границе;
- г) вычисление значений полного потока во внутренней расчетной области на шаге по времени $k + 1$ с использованием ранее рассчитанных значений ξ^{k+1} ;
- д) задание граничного условия на жидкой границе.

Алгоритм расчета основного блока был оформлен в блок схему и представлен на рисунке 3.3.

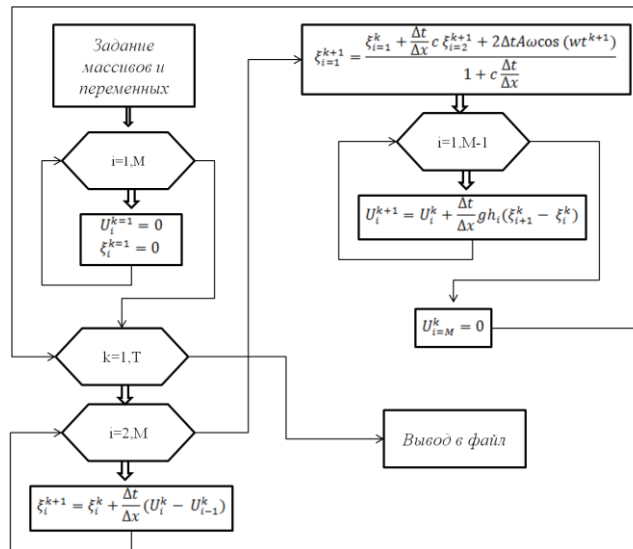


Рисунок 3.3 Алгоритм расчета основного блока модели

Решение задачи наката длинной волны на сухой берег реализуется наличием подвижной твердой стенки. Схематично выполнение данного условия представлено на рисунке 3.4. При подходе волны к берегу в заранее заданной точке M (расположенной до уреза воды) происходит повышение уровня свободной поверхности. Когда уровень в точке M начинает превышать высоту берега в точке $M + 1$, стенка передвигается на один шаг вперед (см. рисунок 3.4). Процесс наката продолжается до момента, когда полный поток принимает отрицательные значения, что является началом отката. Следовательно, зная максимально пройденное стенкой число шагов до начала отката, можно определить дальность заплеска волны.

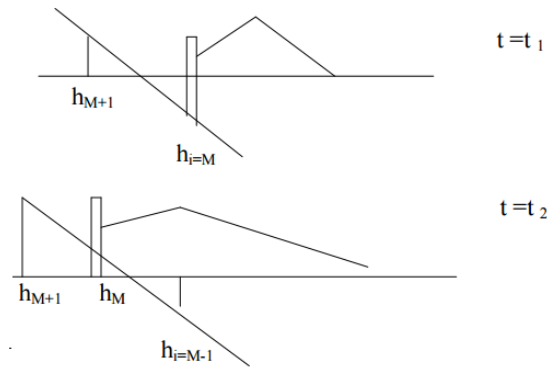


Рисунок 3.4 – Схематичное представление передвигающейся стенки

Расчет отката волны производится аналогично накату. Когда в точке M уровень воды становится меньше глубины в точке $M - 1$, происходит смещение твердой стенки на один шаг назад. Максимальное смещение твердой стенки вглубь акватории говорит о дальности осушки дна.

Алгоритм передвижения твердой границы был оформлен в блок сему и в общем виде выглядит как на рисунке 3.5.

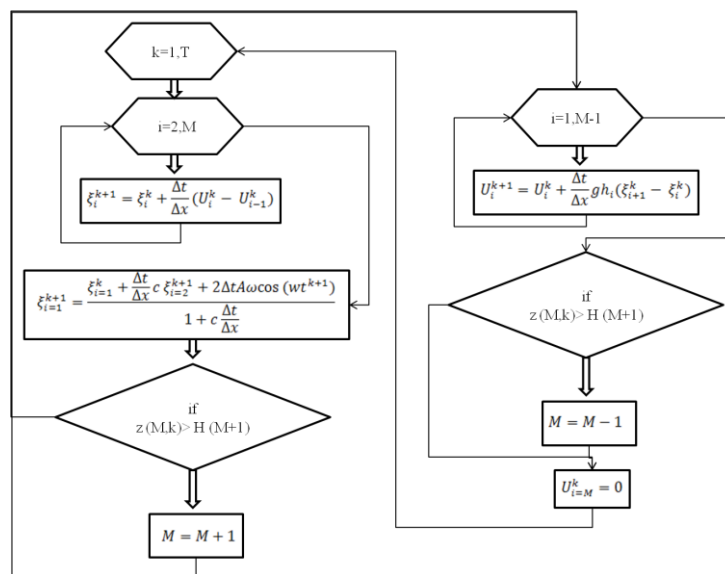


Рисунок 3.5 – Алгоритм выполнения условия подвижной твердой стенки

4 Результаты численного моделирования

Модель наката длинной волны на сухой берег была реализована на языке Fortran. Модель построена на основе конечно-разностных уравнений теории мелкой воды, учтены все граничные и начальные условия. Условие Куранта привело к использованию в модели шага по времени $\Delta t = 5$ с и шага по пространству $\Delta x = 250$ м.

Волна на жидкой границе задается в виде полусинусоиды. Схематичные изображения падающей волны представлены на рисунке 4.1, знак амплитуды определяется в зависимости от целей моделирования.

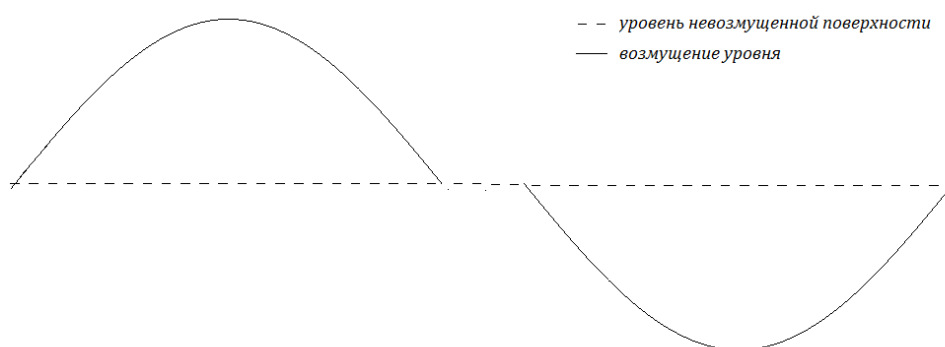


Рисунок 4.1 – Форма волн, заданных на жидкой границе; слева – положительной полярности, справа – отрицательной

В результате моделирования были получены значения возмущения свободной поверхности и полного потока во всех узлах расчетной области и построены графики изменения этих параметров по пространству в разные моменты времени.

Перед расчетом величины максимального заплеска, модель подверглась верификации.

4.1 Верификация модели

Проверка возможности использования численной модели для практических расчетов была выполнена на основе сравнения результатов численных расчетов, полученных с использованием предлагаемой модели, с известными аналитическими решениями. Было произведено три эксперимента для трех модельных типов морфометрии дна: плоское дно постоянной глубины, дно с постоянным уклоном и ступенчатое дно. Рассмотренные в работе рельефы дна представлены на рисунке 4.2

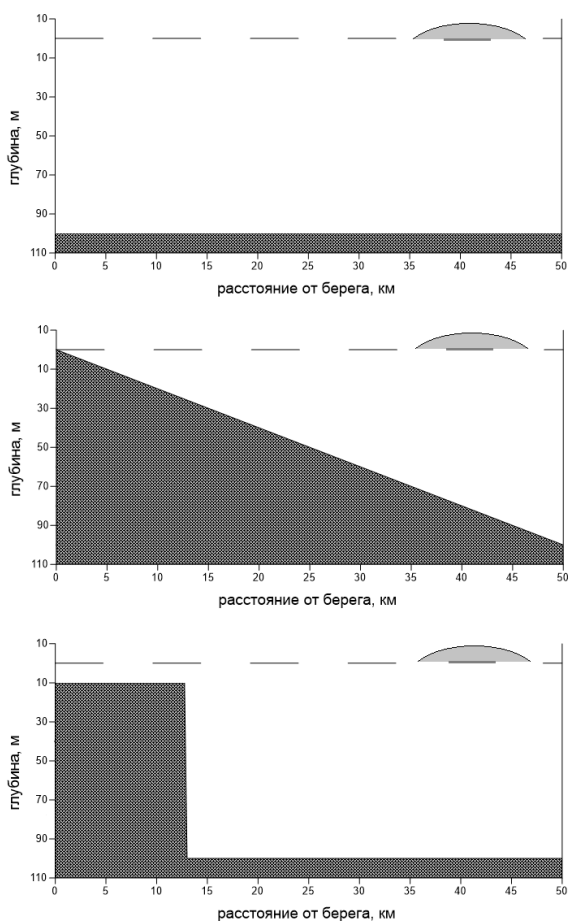


Рисунок 4.2 – Рассматриваемые рельефы дна, сверху вниз: дно постоянной глубины, дно постоянного уклона, ступенчатое дно.

Жидкая граница находится на расстоянии 50 км от уреза воды. Твердая граница представляет собой стенку, на которой реализуется условие полного непротекания. На рисунке 4.1 жидкая граница расположена на правой оси, твердая – на левой.

Для верификации модели, волна, входящая в акваторию через жидкую границу, имеет форму положительной полусинусоиды длиной 19 км и полупериодом 10 мин. Амплитуда волны составляет 2 м.

В ходе первого эксперимента было рассмотрено изменение характера возмущения свободной поверхности при постоянной глубине 100 м (см. рисунок 4.2). Результаты моделирования длинной волны на акватории с постоянной глубиной представлены на рисунке 4.3.

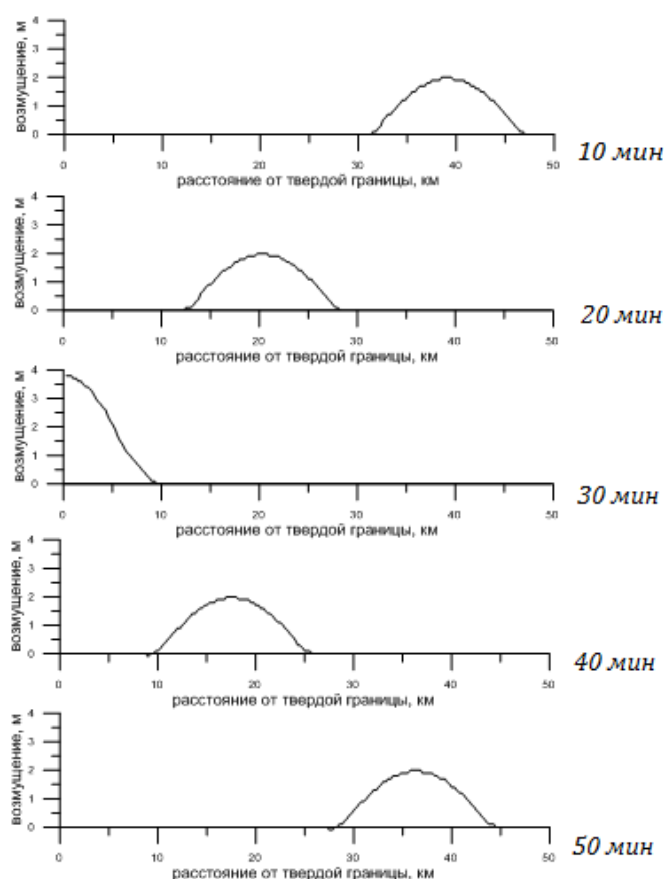


Рисунок 4.3 – Распространение волны в расчетной области с постоянной глубиной в разные моменты времени

Высота падающей волны 2 м не изменяется при движении волны в акватории (см. рисунок 4.3). Это явление обусловлено тем, что в использованной системе уравнения (3.1) силой трения пренебрегли из-за ее незначительного вклада.

Форма волны также не изменяется (см. рисунок 4.3) так как в расчетах была использована линеаризованная система уравнений (3.1).

Фазовая скорость волны, полученная по результатам моделирования, совпадает с теоретической, полученной по формуле (1.1), и составляет 31.3 м/с.

Твердая граница представляет собой стенку, на которой реализуется явление полного отражения. Амплитуда волны у стенки удваивается. Далее движение волны происходит в противоположном от твердой границы направлении. Направление движения волны определяется по знаку величины полного потока. Так как ось x задана в направлении от жидкой границы к твердой, то отрицательное значение полного потока свидетельствует о движении волны в сторону открытого моря.

В следующем эксперименте был использован модельный профиль дна в виде шельфа-ступеньки (см. рисунок 4.2). Результаты моделирования графически представлены на рисунке 4.4.

Глубина глубоководной части профиля дна составляет 100 м, мелководной – 10.5 м. Падающая волна начинает свое движение в глубоководной части. При достижении «ступеньки» волна проникает в мелководную часть. На границе между областями с разной глубиной должно выполняться условие неразрывности уровня и потока:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ u_1 h_1 = u_2 h_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

где ξ_1 и ξ_2 – возмущение свободной поверхности в глубоководной и мелководной частях бассейна, м;

u_1 и u_2 – скорость движения частиц в глубоководной и мелководной частях бассейна, м/с;

h_1 и h_2 – глубина в глубоководной и мелководной частях бассейна, м.

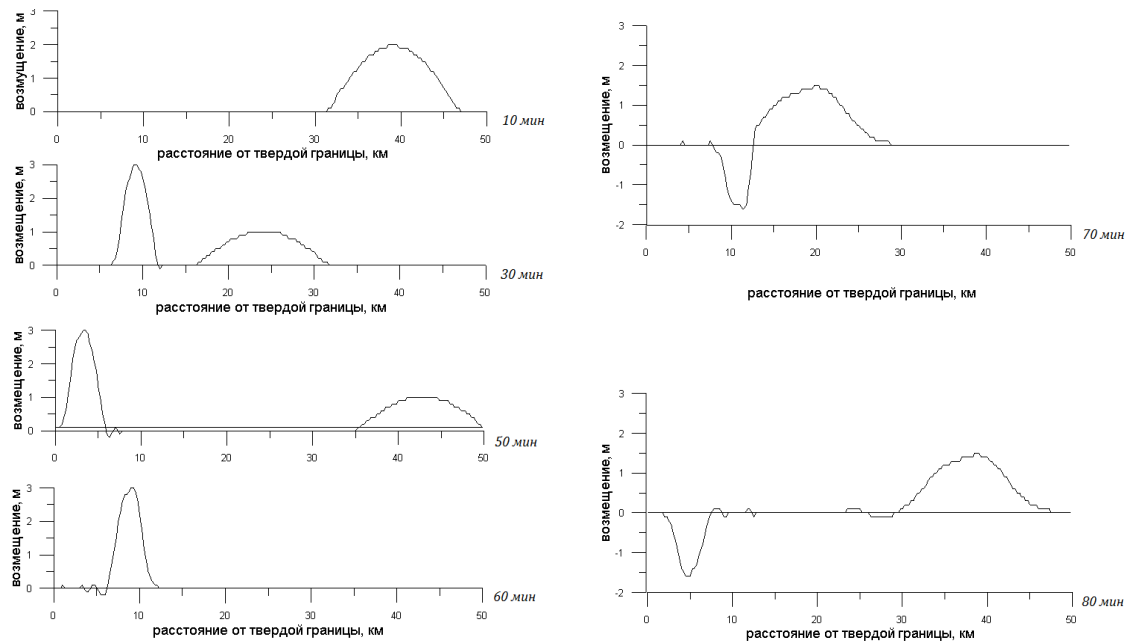


Рисунок 4.4 – Распространение волны в расчетной области со ступенчатым дном в разные моменты времени

В результате изменения глубины на бровке шельфа происходит частичное отражение падающей волны, что приводит к ее распадению на две волны: проходящую и отраженную. Интенсивность отражения можно описать с помощью коэффициента отражения, равного отношению амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей. Отразившись от уступа отраженная волны начинает распространяться в обратную сторону.

Из условия (4.1) можно получить соотношения между амплитудами падающей, проходящей и отраженной волн, т.е. амплитудные коэффициенты отражения r и прохождения T .

$$\begin{aligned} r &= \frac{\xi_{\text{отраж}}}{\xi_{\text{пад}}} \\ T &= \frac{\xi_{\text{прох}}}{\xi_{\text{пад}}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\xi_{\text{отраж}}$ – амплитуда отраженной волны, м;
 $\xi_{\text{пад}}$ – амплитуда падающей волны, м;
 $\xi_{\text{прох}}$ – амплитуда проходящей волны, м.

А в ходе преобразований возможно получить аналитические формулы для расчета коэффициентов отражения и пропускания с использованием значений перепада глубин на ступени.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \\ T &= 1 + r \end{aligned} \quad (4.3)$$

где h_1 – глубина в области из которой распространяется волна, м;
 h_2 – глубина в области куда распространяется волна, м.

Располагая полученными посредством моделирования значениями амплитуд волны, коэффициенты отражения и прохождения можно рассчитать с помощью формул (4.2). По данным расчетам амплитуда входящей волны составляет 2 м, амплитуда отраженной волны – 1 м, а проходящей – 3 м.

Рассчитанный по формуле (4.2) коэффициент отражения равен 0.5, а коэффициент пропускания – 1.5.

Зная глубины в глубоководной и мелководной частях профиля, представляется возможным рассчитать коэффициенты по формулам (4.3). При $h_1 = 100$ м и $h_2 = 10.5$ м коэффициент отражения равен 0.5, а пропускания 1.5. Рассчитанные по двум формулам значения коэффициентов совпадают. Модель учитывает эффект отражения на границе вертикального уступа.

Отражение может быть положительным и отрицательным. К положительному отражению приводит резкое повышение дна, а к отрицательному – понижение. В данном эксперименте при движении волны в сторону твердой границы (из глубоководной части в мелководную) происходит положительное отражение, отраженная волна распространяющаяся в направлении к жидкой границе имеет положительную амплитуда (см. рисунок 4.4). При отражении проходящей волны от твердой границы ее направление изменяется на противоположное. Движение волны происходит из мелководной части в глубоководную. При прохождении границы «ступеньки» происходит отрицательное отражение, и отраженная волна, распространяющаяся в сторону твердой границы, имеет отрицательную амплитуду.

Кроме всего прочего многократное отражение волны при прохождении «ступеньки» формирует стоячую волну в мелководной области, где она будет сохраняться некоторое время, пока не затухнет. Формирование стоячей волны с периодом собственных колебаний является результатом частичного захвата волновой энергии на шельфе в результате отражения.

В следующем эксперименте был рассмотрен характер распространения длинной волны в море с пологим дном постоянного уклона α . Результаты моделирования волны на акватории с постоянным уклоном дна представлены на рисунке 4.5.

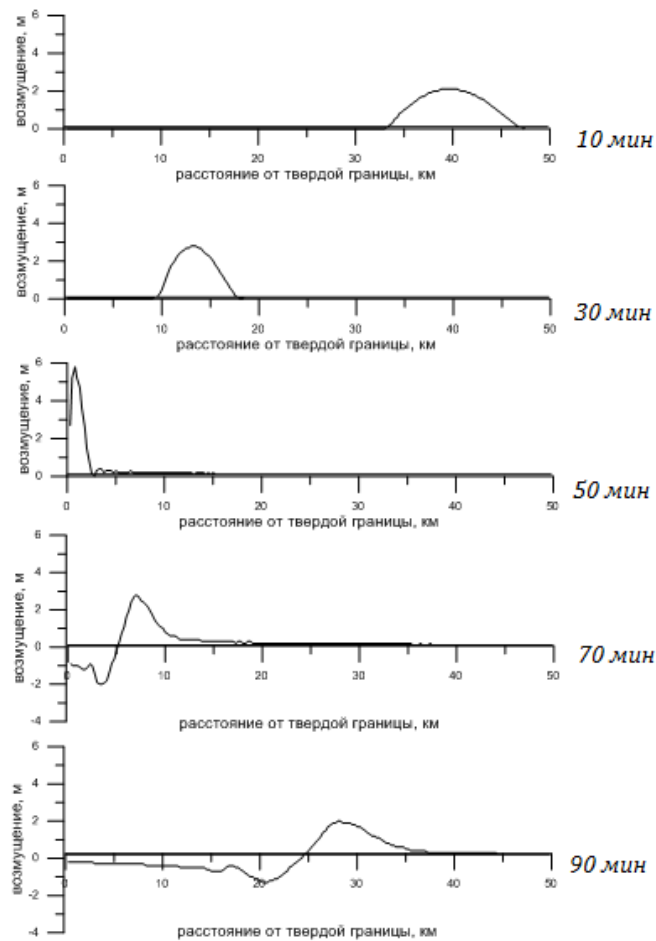


Рисунок 4.5 – Распространение волны в расчетной области с постоянным уклоном дна в разные моменты времени

С уменьшением глубины происходит увеличение амплитуды волны и уменьшение ее длины, согласно закону Грина (2.9). Проверка полученных результатов производится с использованием формулы Грина:

$$\xi = \xi_0 \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_2}} \quad (4.1)$$

где ξ – амплитуда волны на изобате h_1 , м
 ξ_0 – амплитуда волны на изобате h_2 , м
 h_1 – глубина области, откуда распространяется волны, м
 h_2 – глубина области, куда распространяется волна, м

Формула Грина отражает зависимость возмущения свободной поверхности на изобате с меньшей глубиной от возмущения на изобате с большей и от отношения глубин на этих изобатах.

Закон Грина успешно выполняется в модели. В качестве примера были использованы две точки на изобатах 100 м и 10.5 м. Высота волны в глубоководной части 1 м. По результатам численного моделирования высота волны в мелководной части составляет 1.8 м. Результат, полученный после применения формулы (4.1), соответствует аналитическому.

Отражения волны на пологом склоне при движении в сторону уменьшения глубины не происходит. Данный процесс был рассмотрен в работе Каджиуры [9], основываясь на его выводах, считаем, что коэффициент отражения мал, так как элементы рельефа соизмеримы с длиной волны.

После отражения волны на твердой границе начинается ее движение в противоположном от стенки направлении, возникает «размазанное» отражение, на рисунке 4.5 оно выглядит как «хвост» тянущийся за противоположно направленной волной. С течением времени уровень возвращается к нормальному состоянию.

Верификация основного блока численной модели прошла успешно. Результаты моделирования соответствуют результатам, полученным аналитическими методами. В дальнейшем представляется возможным реализация модели наката длинной волны на берег.

4.2 Модель наката длинной волны на сухой берег

Модель наката, как было описано в главе 3, реализуется с использованием подвижной твердой границы. Накат длинной волны производится на сухой берег. Расчет выполнен в соответствии с ограничениями, наложенными на применение линейной теории наката.

Для моделирования наката была задана волна в форме полусинусоиды длиной 63 км (длина волны – 125 км) и длительностью 33 мин. Амплитуда падающей волны задается равной 2 м. Было произведено два эксперимента по определению максимального заплеска с волнами положительной и отрицательной амплитудами (см. рисунок 4.1).

Характеристики волны и дна, используемые при расчетах, были заданы с учетом критерия обрушения. Критерий рассчитывался с использованием формулы (2.20) и при заданных условиях равен 0.5.

Вычисление максимального заплеска волны в форме положительной полусинусоиды представляет большой интерес. По результатам моделирования были построены графики распространения волны в акватории, представленные на рисунке 4.6.

При приближении волны к урезу происходит увеличение амплитуды волны в соответствии с законом Грина. После того как высота волны на заранее заданной точке M превышает высоту берега в точке $M + 1$ происходит сдвиг твердой границы на один шаг. Подробно процесс передвижения твердой стенки был описан в главе 3. Откат происходит после достижения волной максимального заплеска.

При заданных характеристиках волны предельная величина вертикального заплеска составила 8.5 м, а дальность заплеска – 4.25 км. Волна достигла максимального заплеска примерно через 1 час 15 минут после прохождения жидкой границы.

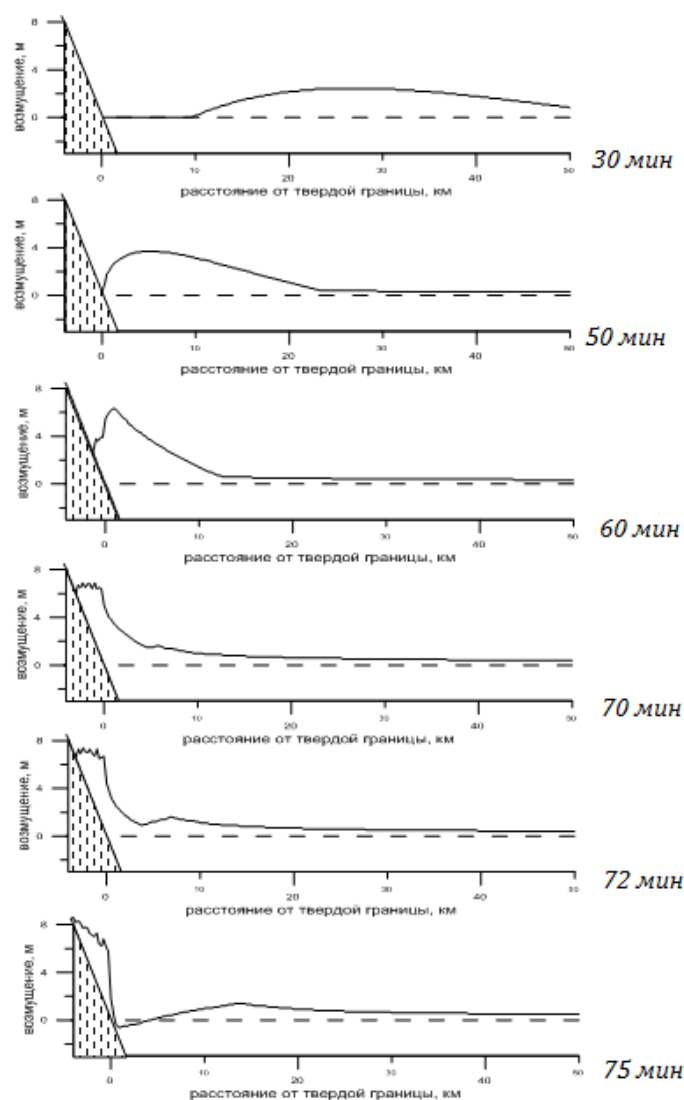


Рисунок 4.6 – Распространение волны в акватории с пологим дном и ее накат на сухой берег

Проверим полученные в ходе моделирования результаты с помощью соотношений линейной теории наката.

Воспользуемся асимптотической формулой (2.14). В связи с тем, что отношение расстояния l , на котором были заданы характеристики волнения, к длине волны λ_0 больше 0.05, используется первое соотношение: $\xi_R = D\xi_0\sqrt{\frac{l}{\lambda_0}}$.

По формуле выходит, что высота вертикального заплеска равна 8.2 м. На каждом шаге по пространству происходит изменение глубины на 0.5 м,

поэтому разницу между результатами моделирования и расчета, равная 0.3 м, можно считать незначительной.

Величину горизонтального заплеска представляется возможным проверить соотношением (2.17), полученное значение составляет 4.1 км. Разница между двумя рассчитанными разным способом величинами составляет всего 150 м и не превышает шага по пространству.

После достижения точки максимального наката волны переходит в стадию отката. Результаты численного моделирования фазы отката в случае положительного начального возмущения представлены на рисунке 4.7.

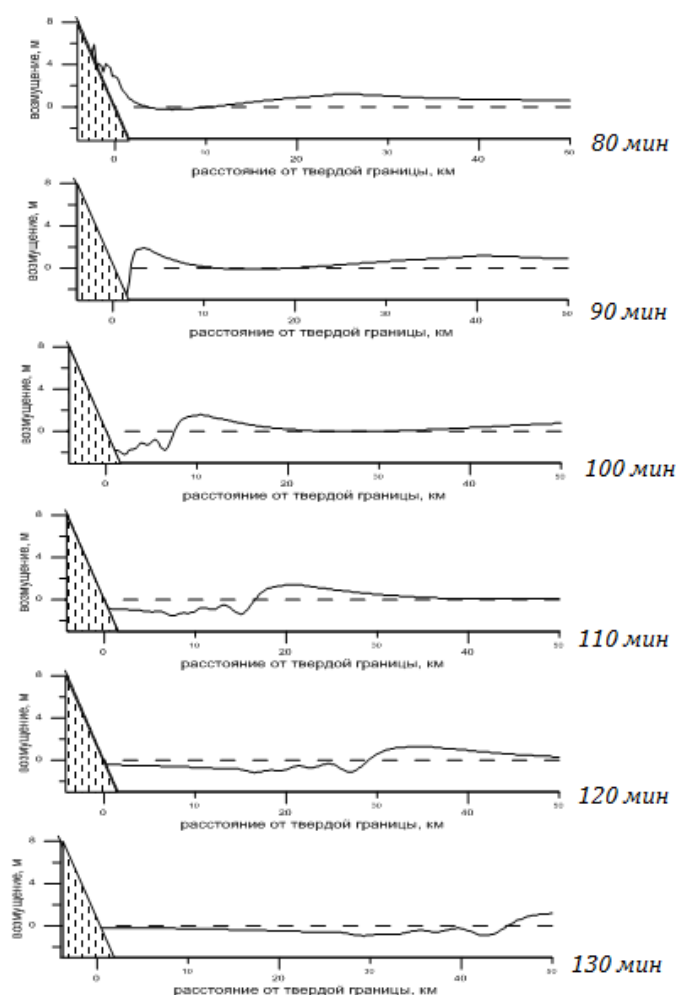


Рисунок 4.7 – Откат волны от берега и ее распространение в сторону открытого моря

Расчет отката волны также производился с использованием процедуры, моделирующей перемещение уреза в рамках единого алгоритма. Процесс расчета описан в главе 3. Как видно из графиков при откате волны от берега происходит осушка дна, на расстояние 1.3 км (меньше дальности заплеска). При распространении волны от берега происходит «размазанное» отражение, характерное для пологого дна (см. подглаву 4.1). В дальнейшем уровень свободной поверхности на акватории возвращается к своему исходному состоянию.

Выход волны из расчетной области произошел через 2 часа 20 минут после ее формирования на жидкой границе.

По результатам моделирования был построен график колебания подвижной твердой границы. В работе [11] Пелиновским с соавторами также были представлены подобные графики. Полученный график на рисунке 4.8 сопоставим с графиками в работе [11].

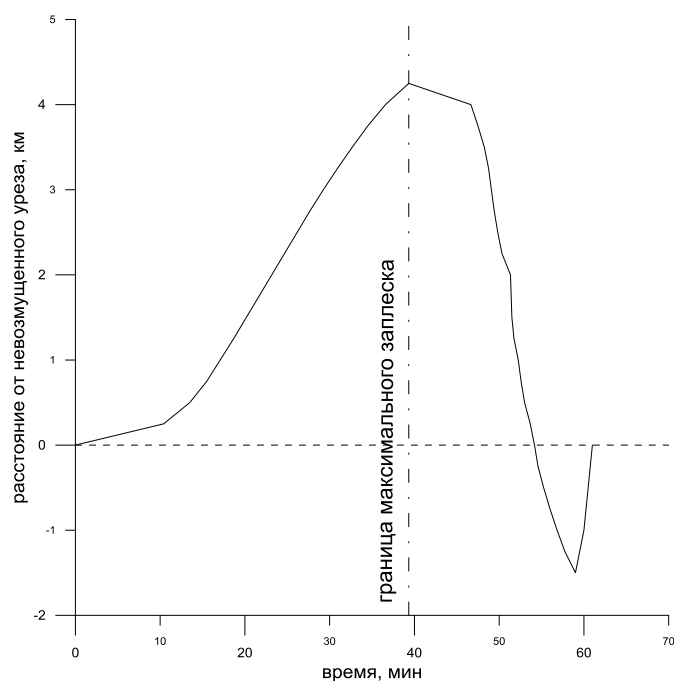


Рисунок 4.8 – Перемещение подвижной твердой границы (перемещение уреза) для волны в виде положительной полусинусоиды

Наблюдается постепенное передвижение твердой границы вглубь суши и более резкое в обратном направлении. В связи с тем, что в уравнениях мелкой воды силой трения пренебрегли, то подобная форма колебания твердой стенки может быть обосновано, например, влиянием силы тяжести *g*.

Кроме волны с положительной амплитудой в работе был рассмотрен случай распространения волны в виде отрицательной денивеляции уровня. На рисунке 4.9 представлены результаты численного моделирования наката длинной волны в виде отрицательной полусинусоиды.

Получить удовлетворительные результаты расчета характеристик волны с отрицательной амплитуды представляет некоторую трудность, к тому же в естественных условиях это явление встречается крайне редко.

Из графиков (см. рисунок 4.9) видно как отрицательная волна подходит к берегу. При приближении к урезу происходит значительное понижение возмущения свободной поверхности и возникает осушка дна. Вода отступает от уреза на 3.8 км.

В дальнейшем часть волны, отраженная от берега, направляется в сторону открытого моря, подобно положительной волне амплитуда уменьшилась, но знак сохранился. А в области уреза в это время происходит поднятие уровня свободной поверхности и постепенный накат на берег. Предельная дальность заплеска составила 2 км, вдвое меньше чем при подходе волны с положительной амплитудой. Но, несмотря на дальность, волне требуется больше времени, чтобы достичь его – примерно 1 час 40 минут после формирования на жидкой границе.

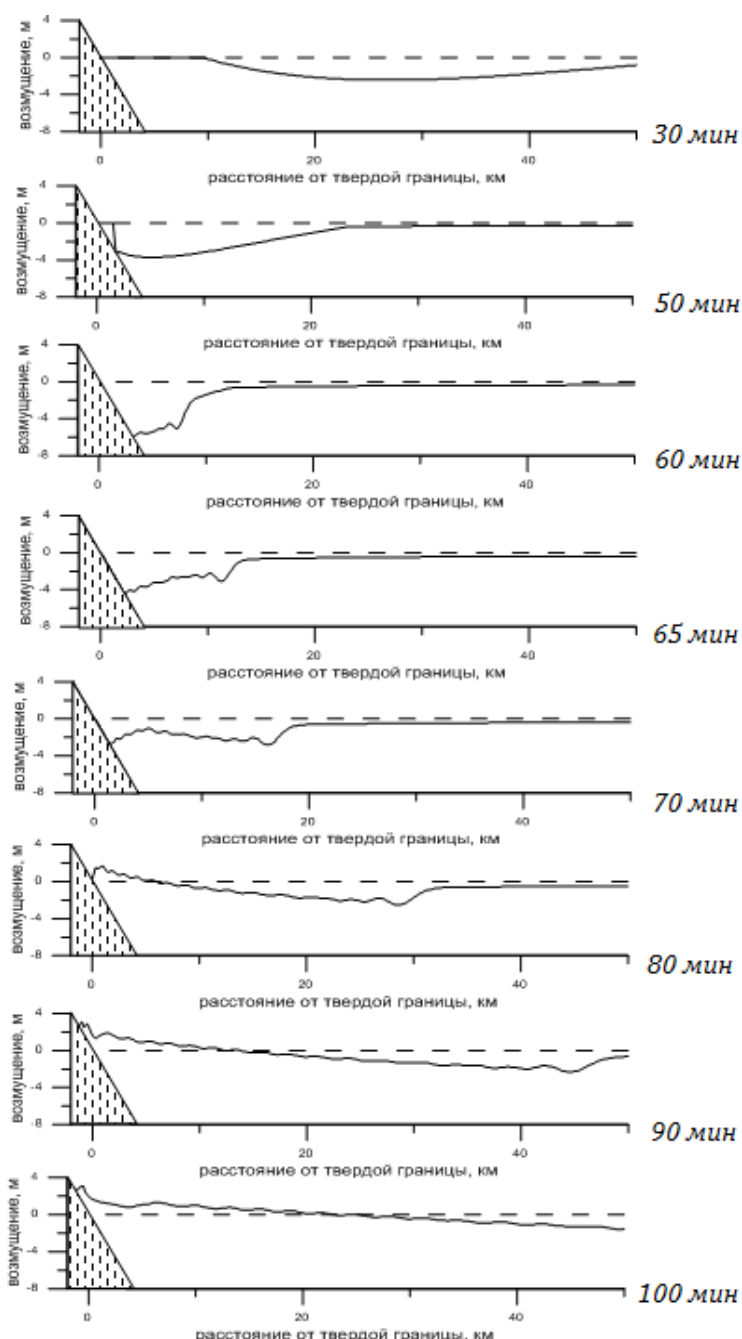


Рисунок 4.9 – Накат на сухой берег длинной волны в виде отрицательной денивелизации уровня

В результате данного эксперимента также был построен график колебания твердой границы, который представлен на рисунке 4.10. Аналогично предыдущему случаю (см. рисунок 4.8) накат волны происходит медленнее отката.

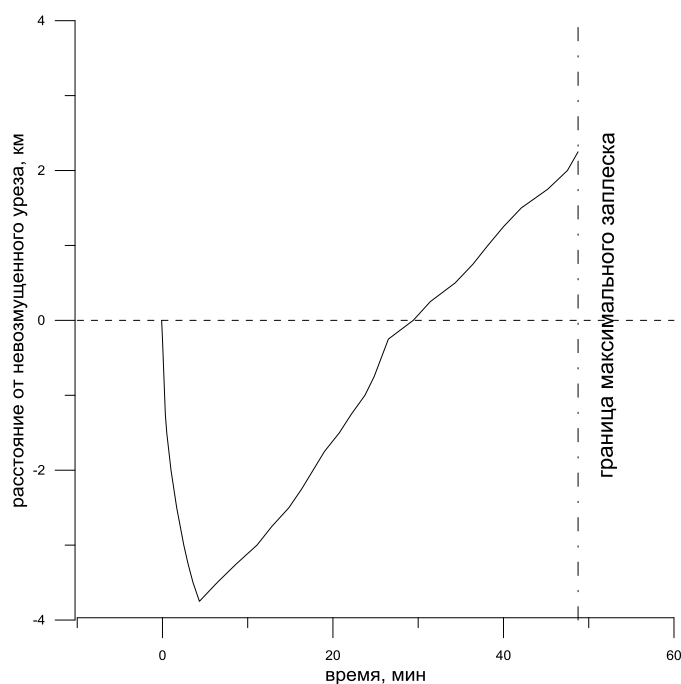


Рисунок 4.10 – Перемещение подвижной твердой границы (перемещение уреза) для волны **в виде** отрицательной полусинусоиды

Динамика движения уреза воды в случае наката положительной и отрицательной волны, в целом, соответствует общим принципам гидродинамики, а полученные из расчета величины зоны затопления и осушки совпадают с аналитическими оценками. Таким образом, разработанная численная модель может быть использована для практических расчетов.

Заключение

Оценка движения уреза воды, вызванного длинноволновыми процессами, является неотъемлемой частью процесса управления рисками проявления негативных явлений в прибрежной зоне. Причем практическое значение имеет изучение как процесса наката волны и последующего затопления сухого берега, так и его осушка. Использование математического моделирования позволяет не только компенсировать недостаток данных о проявлении длинных волн на побережье, но и спрогнозировать зоны затопления (осушки) при различных ситуациях и условиях подхода длинных волн, что определяет актуальность темы данной работы.

Основным результатом выпускной квалификационной работы является численная реализация модели распространения длинной волны в канале переменного сечения с использованием подвижной береговой границы, моделирующей движение уреза воды. Разработанная модель может быть использована для оценки величины зоны затопления и осушки, в том числе возникающих в результате воздействия морских стихийных бедствий таких как штормовые нагоны и цунами.

Необходимым этапом разработки любой численной модели является процесс ее верификации. В данной работе проверка численной модели основана на сравнении результатов численных расчетов с использованием различных типов модельной морфометрии дна с известными аналитическими решениями. Процесс верификации подробно описан в работе. Анализ результатов расчетов показал, что общие закономерности распространения волны, характеристики трансформации волны в случае переменного рельефа дна, оценки величины зоны затопления в случае постоянного уклона дна совпадают с аналитическими решениями, что подтверждает возможность

использования разработанной численной модели для выполнения практических расчетов.

В ходе работы над дипломной бакалаврской работой были изучены дополнительные разделы динамики океана, связанные с накатом волны на сухой берег, получены практические навыки программирования на языке «Фортран», освоены основы численных методов.

В дальнейшем хотелось бы продолжить работу над моделированием распространения длинных волн, привести модель к двумерному виду, а также перейти от интегральных скоростей к их вертикальному распределению.

Список использованных источников

1. Global Historical Tsunami Database [электронный ресурс]/ NOAA National Geophysical Data Center – Режим доступа: https://www.ngdc.noaa.gov/hazard/tsu_db.shtml
2. Вольцингер Н.Е. Основные океанологические задачи теории мелкой воды [текст]/ Н.Е. Вольцингер, Р.В. Пясковский – Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1968 – 300 с.
3. Динамика океана [текст]/ Под редакцией Ю.П. Дорониной – Л.: Гидрометеоздат, 1980 – 302 с.
4. Мазова Р.Х. Линейная теория набегания волн цунами на берег. Препринт № 25 [текст]/ Р.Х. Мазова, Е.Н. Пеленовский – Горький: ИПФ ФН СССР, 1981 – 16 с.
5. Практикум по динамике океана [текст]/ Под редакцией А.В. Некрасова, Е.Н. Пелиновского – СПб.: Гидрометеоздат, 1992 – 318 с.
6. Плинка Н.Л. Методология учета колебаний уровня при комплексном управлении прибрежными зонами / Н.Л. Плинка, М.В. Кашарский, Нгуен Хонг Лан // Сборник научных трудов РГГМУ. Колебания уровня в морях. – 2003. – С. 5 – 20.
7. Вольцингер Н.Е. Длинноволновая динамика прибрежной зоны [текст]/ Н.Е. Вольцингер, К.А. Клеванный, Е.Н. Пелиновский – Л.: Гидрометеоздат, 1989 – 271 с.
8. Long Wave Theory [электронный ресурс]/ Case study – Режим доступа: <http://eu-comet2.rshu.ru/?p=outputs>
9. Kajiura K. The leading wave of a tsunami / Kajiura K // Bulletin of the Earthquake Research Institute. – 1963. – Vol. 41. – pp. 535 – 571.
10. Некрасов А.В. Приливные волны в окраинных морях [текст]/ А.В. Некрасов – Л.: Гидрометеоздат, 1975 – 247 с.

11. Диденкулова И.И. Накат длинных уединённых волн различной полярности на плоский откос / И.И. Диденкулова, Е.Н. Пелиновский, О.И. Диденкулов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2014. – том 50. - № 5. – с. 604 – 611