Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. Веретенников, Ю.Б. Ржонсницкая, Е.А. Бровкина

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК [514.742+517.3](075/ 8)
ББК 22.161.1я73
В31

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

Рецензент: Петрова В.В. доцент каф. высшей матема-тики и теоретической механики РГГМУ

Веретенников В. Н., Ржонсницкая Ю. Б., Бровкина Е.А.
В31 Теория поля. Учебное пособие / Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. – 88 с.

ISBN 978-5-86813-547-7

Пособие является двенадцатым выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометео-рологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам. Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать доста-точно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту вы-даются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязатель-ным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

ISBN 978-5-86813-547-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта. Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами теории поля, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля

Понятие поля **лежит** в основе многих представлений современной гидрометеорологии. ***Векторный анализ*** **является** средством изучения гидрометеорологических полей. При рассмотрении гидрометеорологических явлений **встречаются** величины трех видов: ***скалярные***, ***векторные*** и ***тензорные***.

> В общем случае ***полем*** величины u **называется** область Ω трехмерного пространства, с каждой точкой которой в каждый момент времени **связано** определенное значение величины u.

Поэтому u **есть** функция точки M и времени t. **Заметим**, что областью Ω **может быть** и все трехмерное пространство.

- Если величина u ***скалярная***, т.е. вполне **характеризуется** своим числовым значением (температура, давление и т.д.), то и ***поле*** **называется** ***скалярным***.
- Если u **есть** ***вектор*** (сила, скорость и т.д.), то соответствующее ***поле*** **называется** ***векторным***.
- Если u – ***тензор*** (напряженность, проводимость и т.д.), ***поле*** **называется** ***тензорным***.

Поле величины u **называется** ***стационарным***, или ***установившимся***, если u **не зависит** от времени t. В противном случае оно **называется** ***неустановившимся***.

Пример скалярного поля

Пусть данная область **заполнена** газом, температура которого есть функция точки и времени. Однако со временем **может наступить** тепловое равновесие, в результате которого температура в каждой точке области **стабилизируется** во времени. Температура **станет** функцией лишь точки, ***поле*** температуры **станет** ***стационарным***.

Примеры векторных полей

Пусть область Ω (например, озеро) **заполнена** жидкостью, причем скорость течения $v(M)$ **не зависит** от времени и **является** функцией точки наблюдения M. Поставив в соответствие каждой точке M области Ω ***вектор*** $v(M)$, **получим** ***векторное поле***, называемое ***полем*** скоростей ***стационарного*** потока жидкости.

Пусть в некоторой области пространства **распределено** некоторое вещество. Тогда на материальную точку с ***единичной*** массой **действует** сила тяготения, зависящая от местоположения точки. Эти силы **образуют** ***векторное поле***, называемое ***полем тяготения***, или ***гравитационным полем***, соответствующим данному распределению масс.

Пример тензорного поля

Примером ***тензорного поля*** **является** ***поле тензора упругих напряжений тела***, с каждой точкой которого **связано** определенное значение ***тензора напряжения***. При этом в каждой системе координат ***тензор*** в данной точке **можно представлять** ***системой*** девяти чисел (в то время как ***скаляр*** **можно представить** одним числом, а ***вектор*** – ***системой*** трех чисел).

1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1.1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня

Скалярное поле **задается** ***скалярной*** функцией точки $u = \varphi(M)$. Если **выбрать** ***систему декартовых*** координат $(x; y; z)$, то каждая точка M **будет иметь** координаты $x; y; z$ и функция точки $\varphi(M)$ **станет** функцией трех независимых переменных

$$u = \varphi(x; y; z). \tag{1.1}$$

Всегда **будем предполагать** эту функцию непрерывно дифференцируемой в рассматриваемой области.

Основным вопросом исследования ***скалярного поля*** **является** вопрос об изменении функции при переходе из одной точки пространства в другую.

Определение. ***Поверхностью уровня скалярного поля*** **называется** ***множество*** точек, в которых функция $\varphi(M)$ **принимает** одно и то же значение.

Через каждую точку M_0 области Ω **проходит** ***единственная поверхность уровня***. Ее уравнение в выбранной ***системе*** координат **имеет** вид

$$\varphi(x;y;z) = \varphi(x_0;y_0;z_0) = C. \tag{1.2}$$

Следовательно, ***поверхности уровня***, отвечающие различным значениям C, заполняют всю область, в которой определено ***поле***, и никакие две ***поверхности уровня***, отвечающие различным значениям C, **не имеют** общих точек. Задание всех ***поверхностей уровня*** с указанием соответствующих значений C **равносильно** заданию самого ***поля***.

Пример 1.1. **Найти** ***поверхности уровня скалярного поля*** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

▲ Согласно определению, уравнением ***поверхности уровня*** **будет**

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C, \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 = C^2 \ (C > 0).$$

Это уравнение ***сферы*** $(C \neq 0)$ с центром в начале координат.

▼

Указанный способ изображения ***поля*** особенно **удобен**, если речь **идет** о ***поле***, заданном в плоской области G двух переменных. Такое ***поле*** **описывается** функцией двух переменных

$$\boxed{u = \varphi(x;y).} \tag{1.3}$$

Плоское ***поле*** **можно характеризовать** с помощью ***линий уровня – множества*** точек плоскости, в которых функция $\boxed{\varphi(x;y)}$ **имеет** одно и то же значение.

Уравнение ***линии уровня*** –

$$\boxed{\varphi(x;y) = C = const.} \tag{1.4}$$

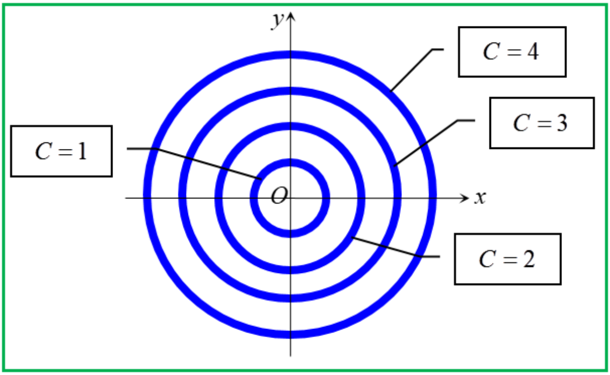
С помощью ***линий уровня*** **изображается** рельеф местности на топографических картах

(путем задания ***поля*** для высот точек местности над уровнем моря).
В случае ***поля*** температур на плоскости ***линии уровня*** **называются *изотермами***, в
случае ***поля*** давления – ***изобарами*** и т.д.

Пример 1.2. **Найти *линии уровня скалярного поля*** $u = x^2 + y^2$.

▲ ***Линии уровня*** **задаются** уравнениями

$$x^2 + y^2 = C \ (C > 0)$$



.
Рисунок, к примеру, 1.2

Придавая C различные вещественные значения, **получим *концентрические окружности*** с центром в начале координат. ▼

1.2. Производная по направлению

Пусть **имеется *скалярное поле***, определяемое функцией $u = \varphi(M)$. **Проследим** за изменением ***скалярной*** величины $\varphi(M)$ при перемещении точки $M(x; y; z)$ в каком-либо заданном направлении, которое **определено *единичным вектором***

$$\vec{\ell}^{o} = \{\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma\}, \text{(рис. 1.1)}$$

где $\alpha, \beta, \gamma -$ углы, образованные им соответственно с координатными осями.

Возьмем другую точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z)$ так, чтобы ***вектор*** $\mathbf{MM_1}$ **был коллинеарен *вектору*** $\vec{\ell}^{o}$.

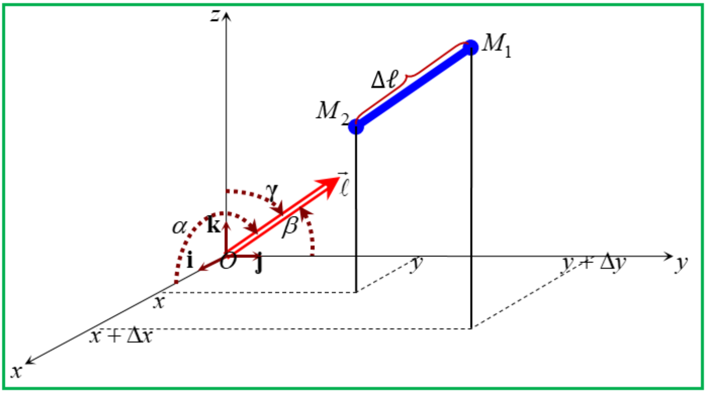


Рис. 1.1

Обозначим длину ***вектора*** $\mathbf{MM_1}$ через величину $\Delta\ell$, а приращение функции $\varphi(M_1)-\varphi(M)$, соответствующее перемещению $\Delta\ell$, через величину Δu. Отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(M_1)-\varphi(M)}{\Delta\ell} \qquad (2.1)$$

определяет *среднюю скорость* изменения ***скалярного поля*** на ***единицу*** длины по данному направлению ℓ.

Определение. Если при $\Delta\ell\to 0$ **существует** конечный предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta\ell}$, то его **называют** производной ***скалярной*** функции $u=\varphi(M)$ по данному направлению ℓ в данной точке M. **Обозначение**: $\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\ell}$.

Так что, по определению,

$$\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\varphi(M_1)-\varphi(M)}{\Delta\ell}, \mathbf{MM_1}\parallel\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad (2.2)$$

Это определение **не связано** с выбором системы координат, т.е. **носит *инвариантный*** характер. Производная ***скалярной*** функции $\varphi(M)$ по направлению $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ **характеризует** скорость изменения величины φ в точке M в направлении вектора $\vec{\boldsymbol{\ell}}$, что **следует** из определения. В каждой точке пространства **имеется *бесконечное множество*** различных направлений, поэтому функция $\varphi(M)$ в каждой точке **имеет *бесконечное множество*** производных, соответствующих различным направлениям.

Найдем выражение для производной по направлению в ***декартовой*** системе координат. Пусть функция $u = \varphi(M) = u(x; y; z)$ **определена** и **дифференцируема** в точке $M(x; y; z)$ области Ω. **Рассмотрим** значение $u(M)$ в точке

$$M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) \in \Omega.$$

Тогда полное приращение функции **можно записать** в следующем виде:

$$\Delta u = u(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - u(x; y; z) =$$

$$= \frac{\partial u(M)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где $\varepsilon_i \to 0$ $(1 \le i \le 3)$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$, а символы $\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}$ **означают**, что частные производные **вычислены** в точке M.

Разделим это равенство почленно на величину $\Delta \ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + z}$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta \ell} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta \ell}.$$

Отсюда, переходя к пределу

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cdot \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \ell}. \quad (2.3)$$

Здесь величины $\frac{\Delta x}{\Delta \ell}, \frac{\Delta y}{\Delta \ell}, \frac{\Delta z}{\Delta \ell}$ **есть** ***направляющие*** косинусы ***вектора***

$$\mathbf{MM_1} = \Delta x \cdot \mathbf{i} + \Delta y \cdot \mathbf{j} + \Delta z \cdot \mathbf{k}.$$

Так как ***векторы*** $\mathbf{MM_1}$ и $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ $\left(\mathbf{MM_1} \parallel \vec{\boldsymbol{\ell}}\right)$ **сонаправлены**, то их ***направляющие*** косинусы **одинаковы**: $\frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos\alpha\,, \frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \cos\beta\,, \frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \cos\gamma$, где $\vec{\ell}^o = \frac{\vec{\boldsymbol{\ell}}}{|\vec{\boldsymbol{\ell}}|} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$.

Так как точка $M_1 \to M$ и **остаётся** все время на ***прямой***, ***параллельной вектору*** $\vec{\boldsymbol{\ell}}$, то углы α, β, γ ***постоянны***. Поэтому

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos\alpha\,, \lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \cos\beta\,, \lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \cos\gamma. \qquad (2.4)$$

Окончательно, из равенств (2.3) и (2.4) **получаем**

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cdot\cos\gamma. \qquad (2.5)$$

Замечание. Из формулы (2.5) **видно**, что $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ **не зависит** от длины ***вектора***, а только отнаправления.

Для плоского ***поля*** $u = \varphi(M)$ производная по направлению ℓ в точке $M(x; y)$ **вычисляется** по формуле

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cdot\cos\beta, \qquad (2.6)$$

Из формул (2.5) и (2.6) **следует**, что производная по направлению **является** ***линейной комбинацией*** частных производных, причем ***направляющие*** косинусы **представляются** как бы весовыми множителями, показывающими вклад в производную частной производной. В частности, для плоского ***поля***

- $\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$;
- $\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial y}$ при $\alpha = \pi/2$ и $\beta = 0$.

Отсюда **следует**, что частные производные по x и y **являются** частными случаями производной по направлению.

Замечание. Понятие производной функции по направлению **является** обобщением понятия частной производной, потому что частные производные функции $u(x; y; z)$ **являются** производными этой функции в направлении соответствующих координатных осей.

Пример 2.1. **Найти** производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_1(2; 3; 6)$ по направлению к точке $M_2(-1; 1; 4)$.

▲ Так как частные производные функции u: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, то их значения в точке M_1: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{M_1} = \frac{2}{7}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{M_1} = \frac{3}{7}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{M_1} = \frac{6}{7}$.

Вектор $\mathbf{M_1M_2} = \{1; -2; -2\}$ **имеет** длину $|\mathbf{M_1M_2}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$. ***Единичный вектор***, совпадающий по направлению с ***вектором*** $\mathbf{M_1M_2}$, **равен** $\vec{\ell}^o = \frac{\mathbf{M_1M_2}}{|\mathbf{M_1M_2}|} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$. Его ***направляющие*** косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3};\ \cos\beta = -\frac{2}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тогда по формуле (2.5) **получаем** $\frac{\partial u(M_1)}{\partial \ell} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{21}$. ▼

Замечание. Формула (2.5) для вычисления производной по направлению ℓ в <u>данной</u> точке M **остается** в силе и тогда, когда точка M **стремится** к точке M_1 по ***кривой***, для которой ***вектор* l является *касательным*** в точке M.

Пример 2.2. Вычислить производную ***скалярного поля*** $u = \operatorname{arctg} xy$ в точке $M_0(1;1)$, принадлежащей ***параболе*** $y = x^2$, по направлению этой ***кривой*** (в направлении возрастания абсциссы).

▲ **Вычислим** значения частных производных функции u в точке M_0. **Имеем**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}; \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}_{M_0} = \frac{1}{2}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

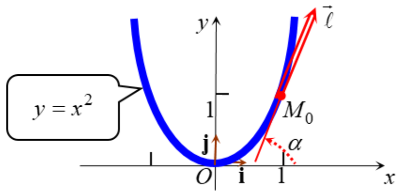


Рис. 2. 1

За направление ℓ ***параболы*** $y = x^2$ в точке $M_0(1;1)$ **берем** направление ***касательной*** к ***параболе*** в этой точке, задаваемое углом α, который ***касательная*** **составляет** с осью Ox (рис.2.1). Тогда **имеем**:

$$y'(x) = 2x, \operatorname{tg}\alpha = y'(1) = 2,$$

откуда ***направляющие*** косинусы ***касательной*** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

Подставив полученные значения в формулу (2.6), **имеем** $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$. ▼

1.3. Градиент скалярного поля

Пусть ***скалярное поле*** **определяется** ***скалярной*** функцией $u = u(x;y;z)$, которая **предполагается** дифференцируемой.

Определение. ***Градиентом скалярного поля*** $u = u(M)$ в <u>данной</u> точке M **называется *вектор***, обозначаемый символом $\text{grad}\, u(M)$ и определяемый равенством

$$\text{grad}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.1}$$

Ясно, что этот ***вектор*** **зависит** как от функции u, так и от точки M, в которой **вычисляется** ее производная. Если функция $u(x; y; z)$ **имеет** частные производные <u>1-го порядка</u>, то в каждой точке $M(x; y; z)$ эта функция **имеет** свой ***градиент***. Таким образом, ***скалярное поле*** $u(M)$ **порождает *векторное поле*** $\text{grad}\, u(M)$.

Связь между градиентом функции и производной по направлению

Выражение

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cdot\cos\gamma. \tag{2.5}$$

можно рассматривать как ***скалярное*** произведение двух ***векторов***:

единичного вектора, <u>определяющего направление, по которому **берется** производная</u> $\frac{\partial u\{M\}}{\partial \ell}$

$$\vec{\ell}^o = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}, \tag{3.2}$$

и <u>***вектора***, который **является *градиентом скалярного поля*** $u(M)$</u>.

Тогда формулу для производной по направлению **можно записать** в следующем виде:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u(M) \cdot \vec{\ell}^{o} \text{ или } \frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = \left(\operatorname{grad} u(M), \vec{\ell}^{o}\right). \tag{3.3}$$

Отсюда **вытекает**, что производная функции $u = u(x; y; z)$ по направлению ***вектора*** $\vec{\ell}$ **равна** проекции ***градиента*** этой функции на ***вектор*** $\vec{\ell}$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \ell} = pr_{\vec{\ell}} \operatorname{grad} u(M)..$$

1.3.1. Основные свойства градиента

Теорема 3.1. ***Градиент скалярного поля*** **перпендикулярен** к ***поверхности уровня*** (или к ***линии уровня***, если ***поле*** плоское).

▲ **Проведем** через произвольную точку M ***поверхность уровня*** $u = u(M) = \text{const}$ и **выберем** на этой поверхности гладкую ***кривую*** L, проходящую через точку M (рис. 3.1). Пусть $\vec{\ell}$ – ***вектор***, ***касательный*** к ***кривой*** L в точке M.

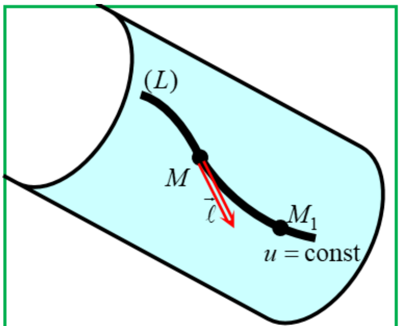


Рис. 3.1.

Так как на ***поверхности уровня*** $u(M) = u(M_1)$ для любой точки $M_1 \in L$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\substack{\Delta\ell \to 0 \\ (M_1 \to M \text{ по } L)}} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta \ell} = 0.$$

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{\ell}^{o}$. Поэтому $\operatorname{grad} u \cdot \vec{\ell} = 0$. Это **означает**, что ***векторы*** $\operatorname{grad} u$ и $\vec{\ell}$ **ортогональны**, $\operatorname{grad} u \perp \vec{\ell}$.

Итак, ***вектор*** $\operatorname{grad} u$ **ортогонален** к любой ***касательной*** к ***поверхности уровня*** в точке M. Тем самым он **ортогонален** к самой ***поверхности уровня*** в точке M. ▼

Теорема 3.2. ***Градиент*** **направлен** в сторону возрастания функции ***поля***.

▲ В **теореме 3.1** мы **доказали**, что ***градиент скалярного поля*** **направлен** по ***нормали*** к ***поверхности уровня***, которая **может быть ориентирована** либо в сторону возрастания функции $u = u(M)$, либо в сторону ее убывания.

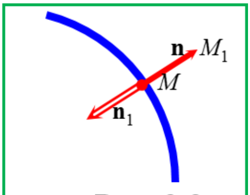


Рис. 3.2

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ ***нормаль*** к ***поверхности уровня***, ориентированную в сторону возрастания функции $u(M)$, и **найдем** производную функции $u = u(M)$ в направлении этой ***нормали*** (рис. 3.2). **Имеем** $\frac{\partial u}{\partial n} = \lim\limits_{\substack{\Delta\ell \to 0 \\ (M_1 \to M \text{ по } n)}} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta \ell} = 0$. Так как по условию $u(M_1) > u(M)$, то

$$u(M_1) - u(M) > 0 \text{ , и поэтому } \frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}^{o} \geq 0, \text{ то есть } \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}^{o} \geq 0.$$

Отсюда **следует**, что ***вектор*** $\operatorname{grad} u$ **направлен** в ту же сторону, что и выбранная нами ***нормаль*** $\boldsymbol{n}$, т.е. в сторону возрастания функции $u = u(M)$. ▼

Теорема 3.3. Длина ***градиента*** **равна** ***наибольшей*** производной по направлению в данной точке ***поля***,

$$\max\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (3.4)$$

(здесь $\max\frac{\partial u}{\partial \ell}$ **берется** по всевозможным направлениям в данной точке M ***поля***).

▲ **Имеем**

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{\ell}^o = |\operatorname{grad} u| \cdot 1 \cdot \cos\psi = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{\ell}} \operatorname{grad} u,$$

где ψ − угол между векторами $\vec{\ell}$ и $\operatorname{grad} u$. Так как ***наибольшее*** значение $\cos\psi$ **равно** 1, ***наибольшим*** значением производной $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ как раз и **является** $\operatorname{grad} u$.

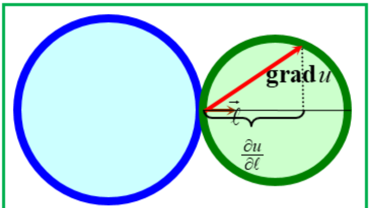


Рис.3.3

Рис.3.3 **дает** наглядную интерпретацию выражения производной по направлению как проекции $\operatorname{grad} u$ на это направление. ▼

Пример 3.1. **Найти** направление ***наибольшего*** изменения ***скалярного поля*** $u(M) = x^3 - x$ в точке $M_0(2;2;4)$, а также величину этого ***наибольшего*** изменения в указанной точке.

▲ Направление ***наибольшего*** изменения ***скалярного поля*** **указывается** ***вектором*** $\operatorname{grad} u(M)$. **Имеем**

$$\operatorname{grad} u(M) = yx^{y-1} \cdot \mathbf{i} + x^y \ln x \cdot \mathbf{J} + (-1) \cdot \mathbf{k},$$ так что $$\operatorname{grad} u(M_0) = 4\mathbf{i} + 4\ln 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Этот ***вектор*** **определяет** направление ***наибольшего*** возрастания ***поля*** в точке $M_0(2;2;4)$. Величина ***наибольшего*** изменения ***поля*** в этой точке **равна** $\max\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\mathrm{grad}\, u(M_0)| = \sqrt{4^2+(4\ln 2)^2+(-1)^2} = \sqrt{17+16\ln^2 2}$. ▼

1.3.2. Инвариантное определение градиента

Величины, характеризующие свойства изучаемого объекта и не зависящие от выбора системы координат, **называются *инвариантами*** данного объекта.

Например, длина ***кривой*** – ***инвариант*** этой ***кривой***, а угол ***касательной*** к ***кривой*** с осью Ox – не ***инвариант***.

Основываясь на доказанных выше трех свойствах ***градиента скалярного поля***, **можно дать** следующее ***инвариантное*** определение ***градиента***.

Определение. ***Градиент скалярного поля*** **есть**

1) ***вектор***, направленный по ***нормали*** к ***поверхности уровня***

2) в сторону возрастания функции ***поля*** и

3) **имеет** длину, равную ***наибольшей*** производной по направлению (в данной точке).

Пусть $\mathbf{n}^0$ – ***единичный вектор нормали***, направленный в сторону возрастания ***поля***. Тогда

$$\mathrm{grad}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial n}\cdot \mathbf{n}^0 \qquad (3.5)$$

1.3.3. Правила вычисления градиента

1. $\mathrm{grad}\, Cu(M) = C\mathrm{grad}\, u(M)$, где C – ***постоянное*** число.
2. $\mathrm{grad}\,(u_1+u_2) = \mathrm{grad}\, u_1 + \mathrm{grad}\, u_2$.

Приведенные формулы **получаются** непосредственно из определения ***градиента*** и свойств производных.

3. $\mathrm{grad}\,(u_1\cdot u_2) = u_2\mathrm{grad}\, u_1 + u_1\mathrm{grad}\, u_2$.

▲ $\mathrm{grad}\,(u_1\cdot u_2) = \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial z}\mathbf{k} =$

$$= \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\mathbf{k} =$$

$$= u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\mathbf{k}\right) + u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\mathbf{k}\right) =$$

$$u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2. \ \blacktriangledown$$

4. $\operatorname{grad}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2 \operatorname{grad} u_1 - u_1 \operatorname{grad} u_2}{u_2^2}, u_2 \neq 0.$ Доказательство аналогично свойству 3.

5. Пусть $F(u)$ – дифференцируемая ***скалярная*** функция. Тогда $\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u.$

▲ По определению ***градиента*** **имеем** $\operatorname{grad} F(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z}\mathbf{k}.$

Применим ко всем слагаемым ***правой*** части правило дифференцирования ***сложной*** функции. **Получим** $\operatorname{grad} F(u) = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + F'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = F'(u) \operatorname{grad} u.$▼

В частности,
$$\operatorname{grad} F(\mathbf{r}) = F'(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^0. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) **следует** из формулы $\operatorname{grad} \mathbf{r} = \mathbf{r}^0$.

1.4. Переменная векторная величина

Вектор-функция скалярного аргумента

Рассмотрим точку $M(x; y; z)$, движущуюся по некоторой ***линии*** L в пространстве (рис.4.1). Тогда каждому значению времени t **соответствует** определенная длина и направление ***радиус-вектора*** $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ этой точки, а также ее скорости $\mathbf{v}$, ускорения $\mathbf{w}$ и т.д.

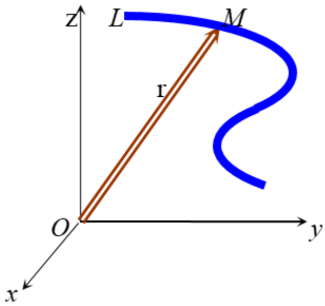


Рис.4.1

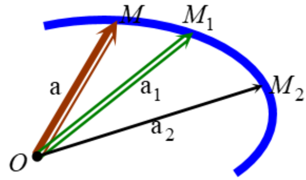


Рис.4.2.

Следовательно, каждый из этих ***векторов*** **можно рассматривать** как некоторую ***векторную*** функцию ***скалярного*** аргумента t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \mathbf{v} = \mathbf{v}(t), = \mathbf{w}(t)$.

Определение. Если каждому значению ***скалярного*** аргумента t из интервала $(\alpha; \beta)$ **соответствует** по некоторому закону определенный ***вектор*** $\mathbf{a}$, то **говорят**, что на интервале $(\alpha; \beta)$ **задана** ***вектор-функция скалярного*** аргумента t и **пишут**

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t). \tag{4.1}$$

Пусть ***вектор*** $\mathbf{a}$ **разложен** по координатным ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ***декартовой*** системы координат

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{4.2}$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ **есть** какая-либо ***векторная*** функция аргумента t, то ее координаты a_x, a_y, a_z

будут также некоторыми (***скалярными***) функциями этого аргумента:

$$a_x = a_x(t),\ a_y = a_y(t),\ a_z = a_z(t), \alpha < t < \beta. \tag{4.3}$$

Обратно, если координаты a_x, a_y, a_z ***вектора*** $\mathbf{a}$ **являются** функциями аргумента t, то функцией аргумента t **будет** и сам ***вектор*** $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \quad . \qquad (4.4)$$

Таким образом, задание одной ***вектор-функции*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ равносильно заданию трех ***скалярных*** функций (4.3) и обратно. При изменении аргумента t ***вектор*** $\mathbf{a}(t)$, вообще говоря, **меняет** длину и направление (а в некоторых случаях и точку приложения, как, например, ***вектор*** скорости).

Определение. ***Годографом вектор-функции*** $\mathbf{a}(t)$ **называется** ***множество*** точек, которое **прочерчивает** конец ***вектора*** $\mathbf{a}(t)$ при изменении аргумента t, когда начало ***вектора***, $\mathbf{a}(t)$ **помещено** в фиксированную точку O пространства.

- ***Годограф вектор-функции*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ **представляет** собой некоторую ***линию*** L в пространстве (рис.4.2).
- ***Годографом постоянного вектора*** **является** точка (конец ***вектора***).
- ***Годографом радиус-вектора*** $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ движущейся точки M **является** траектория этой точки.

Уравнение $\boldsymbol{r} = \mathbf{r}(t), \alpha < t < \beta,$ или $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)$, **называется** ***векторным*** уравнением ***кривой*** L.

Уравнения $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha < t < \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$ **называются** ***параметрическими*** уравнениями этой ***кривой***.

1.4.1. Предел и непрерывность вектор-функции скалярного аргумента

Пусть ***вектор-функция*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ **определена** в некоторой окрестности точки $t = t_0$, **быть может**, кроме самой этой точки.

Определение. ***Постоянный вектор*** $\mathbf{b}$ **называется** пределом ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(t)$ при $t \to t_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ **существует** $\delta > 0$, такое, что для всех $t \neq t_0$, удовлетворяющих условию $|t - t_0| < \delta$, верно неравенство $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$. В этом случае **пишут** $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}$.

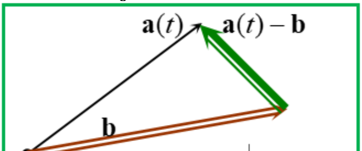


Рис.4.3.

Геометрически это **означает**, что при $t \to t_0$ длина ***вектора*** $\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}$ **стремится** к ***нулю***, т.е. что ***вектор*** $\mathbf{a}(t)$ при $t \to t_0$ **приближается** по своей длине и направлению к ***вектору*** $\mathbf{b}$ (рис. 4.3). Таким образом,

$$\left(\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) - \mathbf{b} = \mathbf{0}\right).$$

Пусть $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Тогда

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_x(t) - b_x)^2 + \left(a_y(t) - b_y\right)^2 + (a_z(t) - b_z)^2}.$$

Отсюда, если $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} a_x(t) = b_x$, $\lim\limits_{t \to t_0} a_y(t) = b_y$, $\lim\limits_{t \to t_0} a_z(t) = b_z$ и наоборот.

Свойства пределов вектор-функции

Если ***вектор-функции*** $\mathbf{a_1}(t)$ и $\mathbf{a_2}(t)$ **определены** в некоторой окрестности точки t_0, **существуют** пределы $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a_1}(t) = \mathbf{b}_1$, $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a_2}(t) = \mathbf{b}_2$, ***скалярная*** функция $f(t)$ **имеет** предел при $t \to t_0$, то **существуют** также пределы

- $\lim_{t \to t_0} (\mathbf{a_1}(t) + \mathbf{a_2}(t)) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2;$
- $\lim_{t \to t_0} f(t)\mathbf{a_1}(t) = \lim_{t \to t_0} f(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{a_1}(t);$
- $\lim_{t \to t_0} \mathbf{a_1}(t) \cdot \mathbf{a_2}(t) = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2;$
- $\lim_{t \to t_0} \mathbf{a_1}(t) \times \mathbf{a_2}(t) = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2.$

Пусть ***вектор-функция*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ **определена** на интервале $\alpha < t < \beta$ и $t_0 \in (\alpha; \beta)$.

Определение. ***Вектор-функция*** $\mathbf{a}(t)$ **называется** непрерывной при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0).$$

1.4.2. Производная вектор-функции по ее скалярному аргументу

Пусть ***вектор-функция*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ **определена** на интервале $\alpha < t < \beta$ и пусть ***кривая*** L **есть *годограф*** $\mathbf{a}(t)$. **Возьмем** какое-нибудь фиксированное значение аргумента $t \in (\alpha; \beta)$. Ему **отвечает** точка M ***кривой*** L.

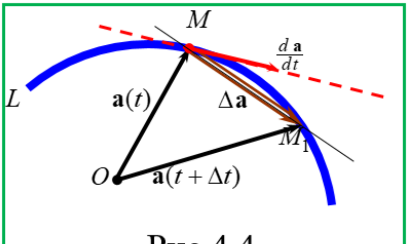


Рис.4.4.

Дадим t любое приращение Δt, но такое, что $t + \Delta t \in (\alpha; \beta)$. Тогда **получим *вектор*** $\mathbf{a}(t + \Delta t)$, который **определит** на ***кривой*** L некоторую точку M_1 (рис.4.4).

Рассмотрим приращение $\Delta\mathbf{a}$ ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(t)$, отвечающее приращению Δt аргумента

$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)$. **Составим** отношение $\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t)}{\Delta t}, \Delta t \neq 0$. Это новый ***вектор, коллинеарный вектору*** $\Delta\mathbf{a}$.

Определение. Если при $\Delta t \to 0$ разностное отношение $\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}$ **имеет** предел, то этот предел **называется** производной ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(t)$ по ее аргументу t в данной точке M.

Обозначение. $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$ или $\mathbf{a}'(t)$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t)-\mathbf{a}(t)}{\Delta t}. \tag{4.5}$$

В этом случае $\mathbf{a}(t)$ **называется** дифференцируемой в точке t. **Выясним** направление ***вектора*** $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$. Точка M_1 при $\Delta t \to 0$ **стремится** по ***годографу*** к точке M, и потому секущая MM_1 **стремится** к ***касательной*** к ***кривой*** L в точке M.

Следовательно, производная $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ **представляет** собой ***вектор, касательный*** к ***годографу*** функции $\mathbf{a}(t)$ в точке M. Направлен же ***вектор*** $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ в ту сторону, куда **перемещается** конец ***вектора*** $\mathbf{a}(t)$ по ***годографу*** при возрастании параметра t (рис.4.4). **Найдем** выражение для производной $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ в координатах. Пусть $\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}$. Тогда

$$\Delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t) = \Delta a_x(t)\mathbf{i} + \Delta a_y(t)\mathbf{j} + \Delta a_z(t)\mathbf{k}.$$

Деля обе части равенства на приращение $\Delta t \neq 0$, **получим**

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\mathbf{k}. \tag{4.6}$$

Если функции $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ **имеют** производную при выбранном значении t, то при $\Delta t \to 0$ каждое слагаемое в ***правой*** части равенства (4.6) **имеет** предел, так что **существует** и предел ***левой*** части, т.е. **существует** $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

Переходя в равенстве (4.6) к пределу при $\Delta t \to 0$, **получаем**

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k}. \tag{4.7}$$

Итак, если ***вектор*** $\mathbf{a}(t)$ **отнесен** к неподвижной системе координат, то его производная $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ **выражается** формулой (4.7). Таким образом, вычисление производной ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(t)$ **сводится** к вычислению производных ее координат.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ **есть** ***радиус-вектор*** движущейся в пространстве точки, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ – скорость этой точки в момент времени t: $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t)$.

Пример 4.1. **Найти** производную ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(t) = (\cos t - 1)\cdot\mathbf{i} + \sin^2 t\cdot\mathbf{j} + \operatorname{tg} t\cdot\mathbf{k}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

▲ Из формулы (4.7) **следует**, что $\mathbf{a}'(t) = -\sin t\cdot\mathbf{i} + \sin t\cos t\cdot\mathbf{j} + \frac{1}{\cos^2 t}\mathbf{k}$. Поэтому

$$\mathbf{a}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.▼$$

1.4.3. Правила дифференцирования

1. Если $\mathbf{c}$ – ***постоянный вектор***, то $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$.
2. Если ***векторы*** $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ **имеют** производную в точке t, то $\frac{d}{dt}\big(\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)\big) = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}$.
3. ***Постоянный*** числовой множитель **можно выносить** за знак производной

$$\frac{d\big(C\mathbf{a}(t)\big)}{dt} = C\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$$

(C – числовой ***постоянный*** множитель).

4. Производная от ***скалярного*** произведения ***векторов*** **выражается** формулой

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big) = \left(\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}\cdot\mathbf{b}(t)\right) + \left(\mathbf{a}(t)\cdot\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}\right).$$

Следствие. Если ***вектор*** $\mathbf{e}(t)$ ***единичный***, т.е. $|\mathbf{e}| = 1$, то $\boxed{\frac{d\mathbf{e}}{dt} \perp \mathbf{e}}$.

▲ В самом деле, если $\mathbf{e}$ – ***единичный вектор***, то $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1$. Беря производную по переменной t от обеих частей последнего равенства, **получим**

$$\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\cdot\mathbf{e}\right) + \left(\mathbf{e}\cdot\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right) = 0 \text{ или } 2\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\cdot\mathbf{e}\right) = 0, \text{ откуда } \frac{d\mathbf{e}}{dt} \perp \mathbf{e}.$$ ▼

5. Производная ***векторного*** произведения ***векторов*** **определяется** формулой

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\big) = \left(\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}\times\mathbf{b}(t)\right) + \left(\mathbf{a}(t)\times\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}\right)$$ (порядок сомножителей существенен).

1.5. Векторное поле

Векторные линии и их дифференциальные уравнения

Определение. Если в каждой точке $M(x;y;z)$ пространства или части пространства **определена** ***векторная*** величина

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z), \qquad (5.1)$$

то **говорят**, что там **задано** ***векторное поле*** $\mathbf{a}$.

Задание ***векторного поля*** **равносильно** заданию трех ***скалярных*** функций от трех переменных $P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)$.

Примером ***векторных полей*** **могут служить**: силовое ***поле*** **есть** ***поле*** некоторой силы F, ***поле*** скоростей $\mathbf{v}$ течения некоторой жидкости и др.

Для ***геометрической*** характеристики ***векторного поля*** **служат** ***векторные линии***.

Определение. ***Векторной линией векторного поля*** $\mathbf{a}$ **называется** ***кривая***, ***касательная*** к которой в любой точке M

имеет то же направление, что и ***вектор поля*** $\mathbf{a}$ в этой точке (рис.5.1).

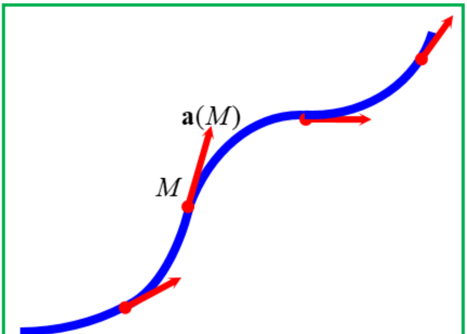


Рис.5.1

1.5.1. Дифференциальные уравнения векторных линий

Пусть ***векторное поле*** **определяется** ***вектор-функцией***

$$\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k},$$

где $P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z) -$ непрерывные функции переменных x, y, z, имеющие <u>ограниченные</u> частные производные <u>первого порядка</u>.

Пусть $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} -$ **есть** ***радиус-вектор*** текущей точки ***векторной линии векторного поля*** $\mathbf{a}$ ($t -$ параметр). Из определения ***векторной линии*** **следует**, что

вектор $\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ и

вектор касательной к этой ***кривой*** $\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$

должны быть коллинеарны в каждой точке ***векторной линии***. Условием ***коллинеарности векторов*** **является** <u>пропорциональность</u> их координат:

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}. \qquad (5.2)$$

Таким образом, мы **получили** для ***векторных линий*** систему дифференциальных уравнений в ***симметричной*** форме.

Допустим, что нам **удалось найти** два независимых интеграла системы (5.2):

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = C_1, \\ \varphi_2(x;y;z) = C_{2.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Система уравнений (5.3) **определяет** ***векторную линию*** как ***линию*** пересечения двух поверхностей. Произвольно меняя параметры C_1 и C_2, мы **получаем** ***семейство векторных линий*** как ***семейство*** с двумя степенями свободы.

Пример 5.1. **Найти** ***векторные линии векторного поля*** $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

▲ Данное ***поле*** **определено** и **дифференцируемо** во всем пространстве, так как функции

$P(x;y) = y, Q(x;y) = -x, R(x;y) = -2$ (проекции ***вектора*** **a**)

имеют непрерывные частные производные в любой точке. Дифференциальные уравнения ***векторных линий*** (5.2) для заданного ***поля*** **принимают** вид $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-2} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \vee \frac{dx}{y} = \frac{dz}{-2}$. Интегрируя уравнение $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow$

$$xdx + ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C^2 \ (C > 0).$$

Если **ввести** параметр t, **получим** $x = C\cos t\,, y = C\sin t.$ С учетом этого уравнение $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{2}$ **примет** вид

$$\frac{C\cos t dt}{C\cos t} = \frac{dz}{2} \Rightarrow dz = 2dt \Rightarrow z = 2t + C_1.$$

Таким образом, $\begin{cases} x = C\cos t, \\ y = C\sin t, \\ z = 2t + C_1 \end{cases}$ – ***параметрические*** уравнения ***векторных линий векторного поля*** **a**.

При фиксированном значении C **получаем** уравнение ***винтовой линии***, расположенной на ***цилиндре*** радиуса C с осью, совпадающей с Oz. Вдоль каждой ***векторной линии вектор*** **а имеет *постоянную*** длину, которая **определяется** выражением

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{y^2 + x^2 + 4} = \sqrt{(C\sin t)^2 + (C\cos t)^2 + 4} = \\ = \sqrt{4 + C^2}.$$

Если **считать** данное ***поле* а *полем*** скоростей текущей жидкости, то каждая частица **будет двигаться** вдоль своей траектории с ***постоянной линейной*** скоростью. ▼

Определение. ***Векторное поле*** **называется *плоским***, если все ***векторы* а *параллельны*** одной и той же плоскости и в каждой плоскости, ***параллельной*** указанной, ***векторное поле*** одно и то же.

Посмотрим, как ***плоское векторное поле*** **описывается** в координатах. Если указанную в определении плоскость (или любую ей ***параллельную***) **принять** за плоскость Oxy, то ***векторы плоского поля*** **не будут содержать** компоненты по оси Oz, и координаты ***векторов*** **не будут зависеть** от z:

$$\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j}. \tag{5.4}$$

Дифференциальные уравнения ***векторных линий плоского поля*** **можно записать**
в следующем виде

$$\frac{dx}{P(x;y)} = \frac{dy}{Q(x;y)} = \frac{dz}{0},$$

или $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x;y)}{P(x;y)}, \\ z = const. \end{cases}$ (5.5)

Отсюда **видно**, что ***векторные линии плоского поля*** **являются *плоскими кривыми***, лежащими в плоскостях, ***параллельных*** плоскости Oxy.

Пример 5.2. Для ***плоского поля*** $\mathbf{a} = (3x - y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **найти** уравнения ***семейства векторных линий*** и ***векторной линии***, проходящей через точку (1; 1).

▲ Данное поле **определено** и **дифференцируемо** для всех точек плоскости Oxy.

Так как $P(x;y) = 3x - y^2, Q(x;y) = y,$ то, согласно равенству (5.2), уравнение ***семейства векторных линий*** **определяется** ***общим*** решением дифференциального уравнения $\frac{dx}{3x-y^2} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow ydx - (3x - y^2)dy = 0.$ Если **считать** x искомой функцией, а y независимой переменной, оно **может быть записано** в виде $x' - \frac{3}{y}x = -y.$ Полученное уравнение **является** ***линейным***. Его ***общее*** решение **имеет** вид

$$x = Cy^3 + y^2.$$

Оно **представляет** собой уравнение ***семейства векторных линий*** рассматриваемого ***поля***.

Выделим из полученного ***общего*** решения то, которое **будет выражать** уравнение ***векторной линии***, проходящей через точку $(1;1)$. Подставив в ***общее*** решение $x = 1, y = 1,$ **получим** $C = 0$. Итак, искомая ***векторная линия*** **есть** ***парабола*** $x = y^2$. ▼

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При рассмотрении многих вопросов гидрометеорологии **встречается** необходимость введения понятия интеграла от функции, заданной на некоторой ***линии***. Такие интегралы, называемые ***криволинейными***, **бывают** двух типов и **преобразуются** один в другой.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть ***кривая*** AB − ***дуга*** гладкой ***кривой***, на которой **определены** и **непрерывны** ***скалярная*** функция $F(M)$ и ***векторная*** функция $\mathbf{a}(M)$, имеющая проекции $P(M), Q(M), R(M)$на оси выбранной ***декартовой*** системы координат.

Рассмотрим разбиение ***кривой*** AB на части точками (рис.1.1) $A = A_0, A_1, A_2 \cdots, A_n = B$, координаты которых **обозначим** соответственно $(x_0; y_0; z_0), \big(x_1; y_1; z_1, (x_2; y_2; z_2), \cdots, (x_n; y_n; z_n)\big)$.

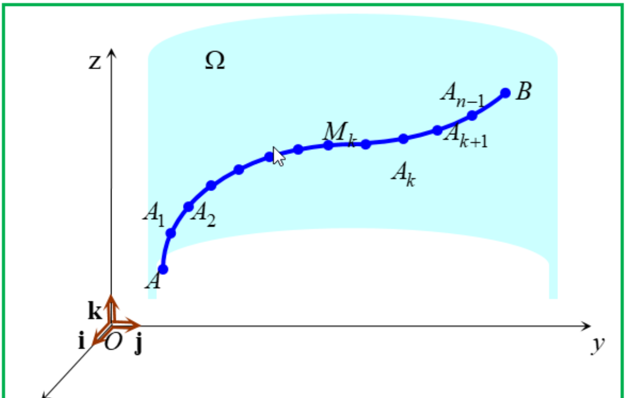


Рис.1.1

Выберем на каждой из ***элементарных дуг*** $A_k A_{k+1}$ произвольную точку $M_k(\tilde{x}_k; \tilde{y}_k; \tilde{z}_k)$ и **составим** суммы <u>двух</u> видов:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F(M_k)\Delta\ell_k \ (1.1)$$

где $\Delta\ell_k -$ длина ***дуги*** $A_k A_{k+1}$, и **назовем** ее ***интегральной суммой*** для функции $F(M)$ по длине

дуги кривой. Пусть $\lambda -$ ***наибольшая*** из длин ***частичных дуг***, т.е. $\lambda = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta\ell_k$;

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k),$$

(1.2)

где

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k \ (0 \le k \le n-1).$$

Определение. Если при $\lambda \to 0$ ***интегральная сумма*** (1.1) **имеет** конечный предел, ***не зависящий***
ни от способа разбиения ***кривой*** AB на части,
ни от выбора точек на каждой из ***дуг разбиения***,
то этот предел **называется** ***криволинейным интегралом 1-го рода*** от функции $F(M)$ по ***кривой*** AB (интеграл ***по длине дуги кривой***).

Обозначение $\int\limits_{AB} F(M)d\ell$ или $\int\limits_{AB} F(x;y;z)d\ell$ (точка $M(x;y;z)$ **лежит** на ***кривой*** AB).

В этом случае функция $F(M)$ **называется** интегрируемой вдоль ***кривой*** AB,
кривая AB **называется** ***контуром*** (или ***путем***) интегрирования, A – начальной, B – конечной точками интегрирования.
Таким образом, по определению

$$\int\limits_{AB} F(M)d\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(M_k)\Delta\ell_k. \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. Если функция $F(M)$ **непрерывна** вдоль гладкой ***кривой*** AB, то **существует** ***криволинейный*** интеграл $\int\limits_{AB} F(M)d\ell$.

Геометрический смысл криволинейного интеграла 1-го рода

Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} F(M)d\ell$ при $F(M) \ge 0$ численно **равен** площади куска ***цилиндрической*** поверхности, которая **составлена** из ***перпендикуляров*** к плоскости Oxy, восстановленных в точках M ***кривой*** AB и имеющих переменную длину $F(M)$ (рис.1.2). В частности, если AB – ***не кривая***, а отрезок ***прямой*** $[a;b]$, расположенной на оси Ox, то $F(x;y) = F(x), \Delta\ell_k = \Delta x_k$ и ***криволинейный*** интеграл **будет** обычным определенным интегралом.

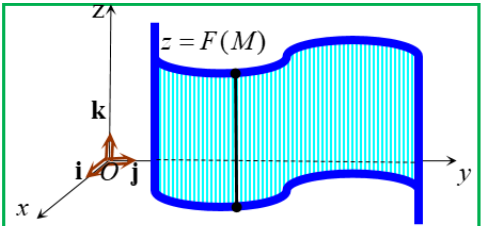


Рис.1.2.

Наконец, если положить $F(M) \equiv 1$, то **получим** ***криволинейный*** интеграл $\int_{AB} d\ell$ значение, которого **есть** длина ***кривой*** AB.

Сумма (1.2) **называется** ***интегральной суммой*** по координатам для ***векторной*** функции $\mathbf{a}(M)$.

<u>Отличие</u> ***интегральной суммы*** (1.2) от ***интегральной суммы*** (1.1) **состоит** в том, что значение функции в фиксированной точке ***элементарной дуги*** **умножается** <u>не на длину этой дуги</u>, а на <u>ее проекцию</u>, на соответствующую координатную ось.

Определение. Если при $\lambda \to 0$ сумма (1.2) **имеет** <u>конечный</u> предел, не зависящий
ни от <u>способа разбиения</u> ***кривой*** AB,
ни от <u>выбора точек $(\tilde{x}_k;\tilde{y}_k;\tilde{z}_k)$</u> на ***элементарных дугах***,
то этот предел **называется** ***криволинейным интегралом 2-го рода*** от ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(M)$ по ***кривой*** AB.

Обозначение $\int_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ или

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Так что по определению

$$\int_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (P(\tilde{x}_k;\tilde{y}_k;\tilde{z}_k)\Delta x_k + Q(\tilde{x}_k;\tilde{y}_k;\tilde{z}_k)\Delta y_k + R(\tilde{x}_k;\tilde{y}_k;\tilde{z}_k)\Delta z_k). \qquad (1.4)$$

Физическое истолкование интеграла (1.4)

Например, это ***работа силы*** $\mathbf{a}(M)$ вдоль ***дуги*** AB.

Теорема 1.2. Если в некоторой области Ω, содержащей ***кривую*** AB, функции

$$P(x;y;z), Q(x;y;z), R(x;y;z)$$

непрерывны, то ***криволинейный интеграл 2-го рода*** $\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ **существует**.

Пусть $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} -$ ***радиус-вектор*** точки $M(x;y;z)$. Тогда $d\mathbf{r} = \boldsymbol{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz,$ и ***подынтегральное*** выражение $P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ в формуле (1.4) **можно представить** в виде ***скалярного*** произведения ***векторов*** $\mathbf{a}(M)$ и $d\mathbf{r}$.

Так что интеграл 2-го рода от ***вектор-функции*** $\mathbf{a}(\boldsymbol{M}) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ по ***кривой*** AB **можно записать** коротко так: $\int_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$.

2. СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Свойства **вытекают** из их определения и **доказываются**. Следуя той же логической схеме, как в случае ***двойных*** или ***определенных*** интегралов.

2.1. Общие свойства криволинейных интегралов

Линейность

1. ***Постоянный*** множитель **можно выносить** за знак ***криволинейного*** интеграла.
2. ***Криволинейный*** интеграл от ***алгебраической*** суммы функций **равен** соответствующей сумме интегралов от слагаемых.

3. Если для каждой из функций $F(M)$ и $G(M)$ **существуют** ***криволинейные*** интегралы по ***кривой*** AB, то для функции $C_1F(M)+C_2G(M)$, где C_1 и C_2 – любые ***постоянные***, также **существует** ***криволинейный*** интеграл по ***кривой*** AB

$$\int\limits_{AB}\big(C_1F(M)+C_2G(M)\big)d\ell = C_1\int\limits_{AB}F(M)d\ell + C_2\int\limits_{AB}G(M)d\ell.$$

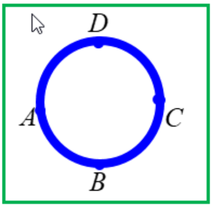
Если **существуют** ***криволинейные*** интегралы $\int\limits_{AB}\mathbf{a_1}\cdot d\mathbf{r}$ и $\int\limits_{AB}\mathbf{a_2}\cdot d\mathbf{r}$, то при любых вещественных C_1 и C_2 **существует** и интеграл $\int\limits_{AB}(C_1\mathbf{a_1}+C_2\mathbf{a_2})\cdot d\mathbf{r}$, причем

$$\int\limits_{AB}(C_1\mathbf{a_1}+C_2\mathbf{a_2})\cdot d\mathbf{r} = C_1\int\limits_{AB}\mathbf{a_1}\cdot d\mathbf{r} + C_2\int\limits_{AB}\mathbf{a_2}\cdot d\mathbf{r}.$$

Аддитивность

1. Если ***путь*** интегрирования **разбит** на конечное число частей, то ***криволинейный*** интеграл по всему ***пути*** **равен** сумме ***криволинейных*** интегралов по всем его частям.
2. ***Криволинейный*** интеграл вдоль замкнутого ***контура*** **не зависит** от выбора начальной точки на этом ***контуре***.

▲ Действительно, если **принять** за начальную точку A, то в силу свойства ***аддитивности*** **получим** $\int\limits_{ABCDA} + \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CDA}$.



Если же за начальную точку **принять** C, то **получим** $\int\limits_{CDABC} + \int\limits_{CDA} + \int\limits_{ADC}$. Из равенства ***правых*** частей **следует** равенство их ***левых*** частей, и свойство 5 **установлено**. ▼

2.2. Свойства для криволинейных интегралов 1-го рода

1. Величина ***криволинейного*** интеграла 1-го рода **не зависит** от направления ***пути*** интегрирования:

$$\int\limits_{AB} F(M)d\ell = \int\limits_{BA} F(M)d\ell,$$

что **следует** из определения.

(*В **интегральной сумме*** (1.1) величины $\Delta\ell_k$ обязательно ***положительны***, независимо от того, какую точку ***кривой*** AB **считать** начальной, а какую конечной).

2. Если $F(M) \geq 0$ на ***кривой*** AB, то $\int\limits_{AB} F(M)d\ell > 0$.

3. Если функция $F(M)$ **интегрируема** на ***кривой*** AB, то функция $|F(M)|$ также **интегрируема** на AB, и при этом

$$\left|\int\limits_{AB} F(M)d\ell\right| \leq \int\limits_{AB} |F(M)d\ell|.$$

Формула среднего значения

4. Если функция $F(M)$ **непрерывна** вдоль ***кривой*** AB, то на этой ***кривой*** **найдется** точка M_C такая, что $\int\limits_{AB} F(M)d\ell = F(M_C)\cdot \ell_{AB}$, где ℓ_{AB} – длина ***кривой*** AB. Т.е. ***криволинейный*** интеграл 1-го рода **равен** произведению среднего значения ***подынтегральной*** функции на длину ***пути*** интегрирования.

2.3. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. ***Криволинейный*** интеграл 2-го рода (в отличие от ***криволинейного*** интеграла 1-го рода) **зависит** от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) **проходится** ***кривая*** AB. Он **меняет** знак при изменении направления движения по ***кривой***, т.е.

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

▲ Действительно, изменив направление обхода ***кривой***, мы, соответственно, **изменим**, знаки проекций Δx_k на Δy_k в суммах (1.2), и, следовательно, сами суммы и их пределы ***изменят*** знак. ▼

В случае, когда ℓ замкнутая ***кривая***, т.е. когда точка B **совпадает** с точкой A, из двух возможных направлений обхода замкнутого ***контура*** ℓ **условимся называть** ***положительным*** то направление, при котором область, лежащая внутри этого ***контура***, **остается** ***слева*** по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода **условимся называть**

отрицательным. ***Криволинейный*** интеграл по замкнутому ***контуру*** ℓ, пробегаемому в ***положительном*** направлении, часто **обозначают** символом $\oint Pdx + Qdy + Rdz$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

3.1. Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода

Пусть ***кривая*** AB **задана** ***параметрическими*** уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_0 \le t \le t_1$, причем точке A **соответствует** значение $t = t_0$, а точке $B -$ значение $t = t_1$.**Будем предполагать**, что функции $x(t)$ и $y(t)$ **непрерывны** на отрезке $[t_0; t_1]$ вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$, и **выполнено** неравенство $\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 > 0$.

Тогда дифференциал ***дуги кривой*** **вычисляется** по формуле

$$d\ell = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt \text{ и } \int_{AB} F(x; y) d\ell = \int_{AB} F\left(x(t); y(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt.$$

В частности, если ***кривая*** AB **задана** ***явным*** уравнением $y = f(x), a \le x \le b$, причем функция $f(x)$ **непрерывно диффе-**

ренцируема на отрезке $[a;b]$ и точке A **соответствует** значение $x=a$, а точке $B-$ значение $x=b$, то, принимая x за параметр, **получаем**

$$\int\limits_{AB} F(x;y)d\ell = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{AB} F\big(x;f(x)\big)\sqrt{1+f'(x)}dx.$$

Пусть функция $F(M)$ **задана** вдоль некоторой пространственной ***кривой*** AB, которая **задана** ***параметрическими*** уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \ t_0 \le t \le t_1 \\ z=z(t), \end{cases}$.Тогда ***криволинейный*** интеграл <u>1-го рода</u> от функции F, взятый вдоль этой ***кривой***, **можно свести** к определенному интегралу при помощи формулы:

$$\int\limits_{AB} F(x;y;z)d\ell =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{AB} F\big(x(t);y(t);z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}dt.$$

3.2. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть ***кривая*** AB **задана** ***параметрическими*** уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t_0 \le t \le t_1$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ **непрерывны** на отрезке $[t_0;t_1]$ вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$, причем изменение параметра t от t_0 до t_1 **соответствует** движение точки $M(x;y)$ по ***кривой*** AB от точки A к точке B. Если в некоторой области G, содержащей ***кривую*** AB, функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ **непрерывны**, то ***криволинейный*** интеграл <u>2-го рода</u> $\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ **сводится** к следующему определенному интегралу

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy = \int_{t_0}^{t_1}\Big(P\big(x(t);y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\Big)dt. \quad (3.1)$$

Таким образом, вычисление ***криволинейного*** интеграл <u>2-го рода</u> **также может быть сведено** к вычислению определенного интеграла.

Пример 3.1. **Вычислить** ***криволинейный*** интеграл $\boldsymbol{J} = \int\limits_{AB} (xy-1)dx + x^2ydy$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$

1) по ***прямой*** $2x + y = 2$. 2) по ***дуге параболы*** $4x + y^2 = 4$. 3) по ***дуге эллипса*** $x = \cos t\,, y = 2\sin t$.

$$▲\ \boldsymbol{J} = \left\{\begin{matrix} AB - \text{прямая: } 2x + y = 2, \\ y = 2 - 2x, dy = -2dx, \\ x_A = 1, x_B = 0 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \big(x(2-2x) + x^2(2-2x)(-2)\big)dx = \int_0^1 (2x - 6x^2 + 4x^3 - 1)dx =$$

$$= (x^2 - 2x^3 + x^4 - x)\Big|_0^1 = 1.$$

$$\boldsymbol{J} = \left\{\begin{matrix} AB - \text{парабола: } 4x = 4 - y^2, \\ x = 1 - \dfrac{y^2}{4}, dx = -\dfrac{y}{2}dy, \\ y_A = 0, y_B = 2 \end{matrix}\right\}$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\left(\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)y - 1\right) + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 y\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8} + \frac{y}{2} + y - \frac{y^3}{2} + \frac{y^5}{16}\right)dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{40} + \frac{3y^2}{4} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^6}{96}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{17}{15}.$$

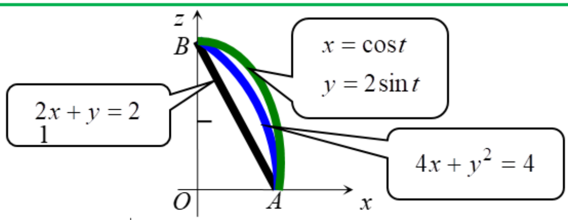


Рис. К задаче 3.1.

$$\boldsymbol{J} = \left\{\begin{matrix} AB - \text{эллипс:}\, x = \cos t\,, y = 2\sin t, \\ dx = -\sin t dt, dy = 2\cos t dt \end{matrix} \left|\frac{y}{t}\right|\frac{0}{0}\left|\frac{2}{\pi/2}\right. \text{ или } \left|\frac{x}{t}\right|\frac{\pi/2}{0}\left|\frac{0}{\pi/2}\right.\right\} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big((\cos t \cdot 2\sin t - 1)(-\sin t) + \cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t\big)dt$$

$$=$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, d(\sin t) = -4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, d(\cos t) =$$

$$\left(-\frac{2}{3}\sin^3 t - \cos t - \cos^4 t\, d\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}. \blacktriangledown$$

Рассмотренный интеграл **показывает**, что величина ***криволинейного*** интеграла <u>2-го рода</u>, вообще говоря, **зависит** от формы ***пути*** интегрирования.

3.3. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода

Рассмотрим направленную ***дугу*** пространственной ***линии*** с <u>началом</u> в точке A и <u>концом</u> в точке B. ***Касательную*** в любой точке M дуги AB **будем** также **считать** направленной ***прямой***. Углы, образуемые ***касательной*** с координатными осями Ox, Oy, Oz, **обозначим** соответственно α, β, γ. ***Вектор*** $\overrightarrow{dl} = \{dx; dy; dz\}$, где $dl -$ дифференциал длины ***дуги***, **направлен** по ***касательной***, поэтому $dx = \cos\alpha dl\,, dy = \cos\beta dl\,, dz = \cos\gamma dl$. Следовательно,

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\ell.$$

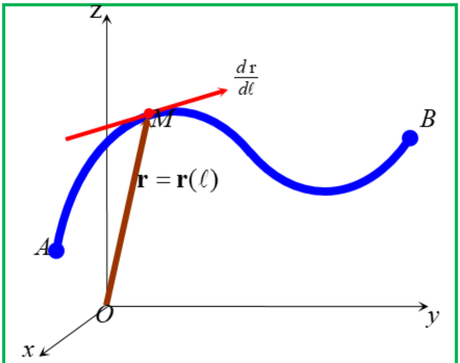


Рис. 3.1

Эта формула и выражает связь между ***криволинейными*** интегралами <u>2-го</u> и <u>1-го рода</u>. Если дуга AB **лежит** в плоскости Oxy, то $z = 0$ и формула **принимает** вид

$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)d\ell$. где $\alpha -$ угол между ***касательной*** и осью Ox.

Рассмотрим ***криволинейный*** интеграл <u>2-го рода</u> $\int_{AB} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$, где <u>ориентированная</u> ***кривая*** AB (A – <u>начальная</u> точка, B – <u>конечная</u> точка) **задана** ***векторным*** уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ (здесь ℓ – длина ***кривой***, отсчитываемая в том направлении, в котором <u>ориентирована</u> ***кривая*** AB) (рис.3.1).

Тогда $\frac{d\mathbf{r}}{d\ell} = \boldsymbol{\tau}$, или $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} d\ell$, где $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\ell)$ – ***единичный вектор*** к ***кривой*** AB в точке $M(\ell)$. **Имеем**

$$\int_{AB} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\, d\ell = \int_{AB} (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau})d\ell .$$

Заметим, что последний интеграл в этой формуле – ***криволинейный*** интеграл <u>1-го рода</u>. При изменении ориентации ***кривой*** AB ***единичный вектор касательной*** $\boldsymbol{\tau}$ **заменяется** противоположным ***вектором*** $(-\boldsymbol{\tau})$, что **влечет** изменение знака его ***подынтегрального*** выражения и, значит, знака самого интеграла.

4. ФОРМУЛА ГРИНА

Формула ***Грина*** **связывает** ***двойной*** интеграл по ***плоской*** области с ***криволинейным*** интегралом

$\int_{\ell} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ по ***контуру*** этой области ℓ.

Теорема 4.1. Если в <u>замкнутой</u> области G, <u>ограниченной</u> ***кусочно-гладким контуром*** ℓ, функции $P(x;y), Q(x;y)$ **непрерывны** и **имеют** непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, то **справедливо** равенство (формула Грина): $\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\ell} Pdx + Qdy$.

▲ **Предположим**, что ***контур*** ℓ **пересекает** ***прямыми***, ***параллельными*** осям координат не более чем в двух точках (***правильная*** область) и его уравнения **суть**

$$y = y_1(x) \text{ и } y = y_2(x) \text{при } a \le x \le b.$$

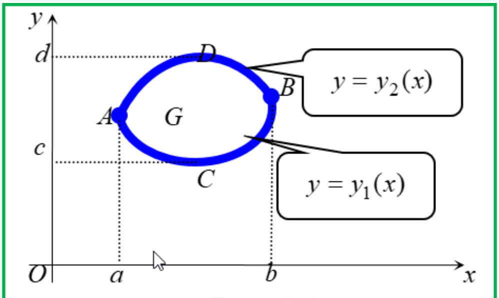


Рис.4.1.

Преобразуем ***двойной интеграл*** $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ следующим образом

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy \overset{(I)}{\cong} \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int\limits_a^b P(x;y)\Bigg|\begin{matrix} y = y_2(x) \\ \\ y = y_1(x)\end{matrix} dx \overset{(II)}{\cong}$$

$$\overset{(II)}{\cong} \int\limits_a^b P\big(x; y_2(x)\big)\,dx$$

$$-\int\limits_a^b P\big(x; y_1(x)\big)\,dx \overset{(III)}{\cong} -\int\limits_{ADB} P(x;y)dx$$

$$-\int\limits_{ACB} P(x;y)dx =$$

$$= -\int\limits_{BDA} P(x;y)dx - \int\limits_{ACB} P(x;y)dx \overset{(IV)}{\cong} -\oint\limits_{\ell} P(x;y)dx$$

где <u>обход</u> ***контура*** ℓ **совершается** в ***положительном*** направлении, т.е. <u>против часовой стрелки</u> (область G **остается** ***слева***).

Переход (I) **выполнен** по правилу вычисления ***двойного интеграла*** путем сведения его
к ***повторному*** интегралу.

Преобразование (II) **выполнено** по формуле ***Ньютона-Лейбница***,
переход (III) **основывается** на формуле вычисления ***криволинейного*** интеграла <u>2-го рода</u>,
переход (IV) **содержит** два преобразования – в <u>первом</u> из интегралов **изменено** направление <u>обхода</u> ***контура*** ADB на DBA в связи, с чем **изменен** знак <u>1-го</u> слагаемого, затем оба интеграла **объединены** согласно свойству 5 ***криволинейных*** интегралов. **Имеем**

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_{\ell} P(x;y)dx.$$

Аналогично **получим** $\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_{\ell} Q(x;y)dy$, где <u>обход</u> ***контура*** ℓ также **совершается** в ***положительном*** направлении. Вычитая почленно, **получим** формулу ***Грина***

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_\ell Pdx+Qdy. \ ▼$$

Замечание 1. Если обход ***контура*** ℓ **совершается** в ***отрицательном*** направлении, т.е. по часовой стрелке (область **остается** ***справа***), то формула ***Грина*** **принимает** вид $\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy=\oint\limits_\ell Pdx+Qdy$.

Замечание 2. Формула ***Грина*** **дает** возможность **вычислять** площадь области с помощью ***криволинейного*** интеграла.

▲ Действительно, если $P(x;y)=-y, Q(x;y)=x$, то формула **перепишется** так:

$$2S=2\iint\limits_G dxdy=\oint\limits_\ell xdy-ydx$$

откуда $S=\frac{1}{2}\oint\limits_\ell xdy-ydx$, где обход ***контура*** ℓ **совершается** против часовой стрелки. ▼

5. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Уточним области, которые **будем рассматривать**.

Определение. ***Плоская*** область G **называется** ***односвязной***, если каков бы ни был замкнутый ***контур*** ℓ, лежащий внутри этой области, ограниченная этим ***контуром*** часть плоскости целиком **принадлежит** области G.

Образно говоря, ***односвязная*** область **означает**, что область **не имеет** «дыр».

Пусть в ***плоской*** области G **заданы** непрерывные функции $P(x;y), Q(x;y)$ и M_0M- гладкая ***дуга***, лежащая в области G. **Рассмотрим** вопрос о независимости от ***пути*** интеграла

$$\int\limits_{M_0M} P(x;y)dx+Q(x;y)dy.$$

Теорема 5.1. Пусть функции $P(x;y), Q(x;y)$ **определены** и **непрерывны** вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$

и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой замкнутой ***односвязной*** области G. Тогда следующие четыре условия **эквивалентны**, т.е. выполнение любого из них **влечет** за собой выполнение остальных трех:

1. для любой замкнутой ***кусочно-гладкой кривой*** ℓ, расположенной в области G,

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy = 0. \tag{I}$$

2. для любых двух точек M_0 и M области G значение интеграла

$$\int_{M_0 \alpha M} Pdx + Qdy = \int_{M_0 \beta M} Pdx + Qdy \tag{II}$$

не зависит от выбора ***пути*** интегрирования, целиком лежащего в области G.

3. выражение $Pdx + Qdy$ **представляет** собой полный дифференциал некоторой функции,

определенной в области G. Иными словами, **существует** такая функция $F(x; y)$, определенная в области G, что

$$dF = Pdx + Qdy; \tag{III}$$

4. в каждой точке области G **выполнено** условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{IV}$$

▲ Логическая схема доказательства такова: **докажем**, что из условия (I) **следует** условие (II), из условия (II) − условие (III), из (III) **следует** (IV), а из (IV) **следует** (I).

1. $I \Rightarrow II$. **Рассмотрим** в области G два произвольных ***пути***, соединяющих точки M_0 и M: $M_0 \alpha M$ и $M_0 \beta M$ − любые две ***кусочно-гладкие кривые***.

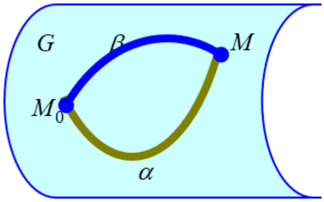


Рис. 5.1

В сумме они **составляют** <u>замкнутую</u> ***кривую*** $\ell = M_0\alpha M \cup M_0\beta M$, расположенную в области G. Согласно условию

1) $\oint\limits_{\ell} Pdx + Qdy = 0$, но

$$\oint\limits_{\ell} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0\alpha M} Pdx + Qdy + \int\limits_{M\beta M_0} Pdx + Qdy$$
$$= \int\limits_{M_0\alpha M} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0\beta M} Pdx + Qdy.$$

Следовательно, $\int\limits_{M_0\alpha M} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0\beta M} Pdx + Qdy$, т.е. условие 2) **выполняется**.

2. $II \Rightarrow III$. Пусть интеграл $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$ **не зависит** от <u>выбора</u> ***пути*** интегрирования,

а **зависит** только от точек M_0 и M. Тогда, если точку M_0 **зафиксировать** $M_0 = M_0(x_0; y_0)$, то этот интеграл **будет** некоторой функцией координат x и y точки $M = (x; y)$:

$$\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = F(x; y).$$

Покажем, что функция $F(x; y)$ **дифференцируема** и что

$$dF = Pdx + Qdy. \tag{5.1}$$

Для этого достаточно **доказать**, что в каждой точке M области G **существуют** частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x; y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x; y). \tag{6.2}$$

Так как функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны в области G, то из (6.2) **следует** дифференцируемость функции $F(x;y)$ и равенство (6.1).

Для доказательства существования частной производной функции $F(x;y)$ в точке $M(x;y)$:

$$\begin{aligned}\Delta_x F &= F(x+\Delta x;y) - F(x;y)\\ &= \int_{M_0C} Pdx + Qdy - \int_{M_0M} Pdx + Qdy\\ &= \int_{MC} Pdx + Qdy,\end{aligned}$$

где точка C **имеет** координаты $(x+\Delta x;y)$. Так как по условию интеграл **не зависит** от вида ***кривой***, то ***путь*** от точки $M(x;y)$ до точки $C(x+\Delta x;y)$ **возьмем** в виде ***прямой***. Тогда

$$\Delta_x F = \int_{MC} Pdx + Qdy = \int_{MC} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} P(x;y)dx.$$

Применяя к последнему интегралу **теорему о среднем**, **получаем**

$$\Delta_x F = P(x+\theta\Delta x;y)\Delta x, 0<\theta<1,$$

Откуда $\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x;y), 0<\theta<1$. Следовательно, $\frac{\partial F}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x;y) = P(x;y)$, поскольку по условию функция $P(x;y)$ **непрерывна**.

Аналогично **доказывается**, что $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y)$. Таким образом, условие (III) **установлено**.

3. $III \Rightarrow IV$. Пусть в области G **определена** функция $F(x;y)$ такая, что $dF = Pdx + Qdy$.

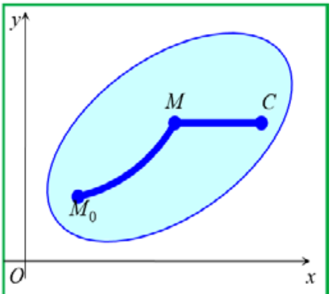


Рис 5.2

Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x;y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y)$ и по **теореме о равенстве смешанных производных**
$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, т.е. **получено** требуемое равенство (IV).

4. $IV \Rightarrow I$. Пусть *выполнено* условие (IV) и пусть ℓ − ***кусочно-гладкая кривая***, лежащая в области G и <u>ограничивающая</u> область $\tilde{G}$. Тогда, применяя формулу ***Грина*** к области $\tilde{G}$, **получаем**

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy = \iint_{\tilde{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

В силу условия (IV) интеграл ***справа*** **равен** ***нулю***. Следовательно,

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy = 0$$

для всякого <u>замкнутого</u> ***контура*** ℓ, лежащего в области G. ▼

Обобщение теоремы на случай трехмерного пространства

Аналогично **можно доказать** при соответствующих условиях ***равносильность*** следующих четырех условий:

I. $\oint_{\ell} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz = 0.$

II. $\int_{M_0 \alpha M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{M_0 \beta M} Pdx + Qdy + Rdz.$

III. **Существует** функция $F(x;y;z)$ такая, что

$$dF = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Именно

$$F(x;y;z)=\int\limits_{M_0M}Pdx+Qdy+Rdz.$$

IV.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial z},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

6. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Пусть в области Ω **определена** ***векторная*** функция $\mathbf{a}(M)$ с проекциями $P(M), Q(M)$ и $R(M)$ на соответствующие координатные оси ***декартовой*** системы. Пусть ℓ − ***кривая***, проходящая в области Ω.

Определение. ***Работой векторного поля*** $\mathbf{a}(M)$ вдоль ***пути*** ℓ **называется** величина интеграла

$$\int\limits_{\ell}\mathbf{a}dr=\int\limits_{\ell}Pdx+Qdy+Rdz. \tag{6.1}$$

Если ***контур*** ℓ **представляет** замкнутую ***линию***, то ***работа векторного поля*** **называется** ***циркуляцией вектора*** вдоль этого замкнутого ***контура***.

Циркуляция **характеризует** ***вращательную способность поля*** на ***контуре*** ℓ.

Определение. ***Векторное поле*** $\mathbf{a}(M)$ **называется** ***потенциальным*** в области Ω, если ***работа*** этого ***поля*** **не зависит** от ***пути***.

Условие ***потенциальности векторного поля***, указанное в определении, **равносильно** любому из условий:

1. ***циркуляция вектора*** $\mathbf{a}(M)$ вдоль каждого замкнутого ***контура***, принадлежащего области Ω, **равна** ***нулю***;
2. **имеют** место в области Ω тождества

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z};$$

3. выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ **есть** полный дифференциал некоторой функции $F(x;y;z)$ в области Ω.

Теорема 6.1. Для ***потенциальности векторного поля*** $\mathbf{a}(M)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathbf{a}=\operatorname{grad}F(M) \qquad (6.2)$$

▲ Действительно, если ***поле*** $\mathbf{a}(M)$ ***потенциально***, то $P=F'_x, Q=F'_y, R=F'_z$. Поэтому

$$\mathbf{a}=F'_x\mathbf{i}+F'_y\mathbf{j}+F'_z\mathbf{k}=\operatorname{grad}F.$$

Обратно, если выполнено условие (6.2), то

$$P=F'_x, Q=F'_y, R=F'_z$$

и

$$Pdx+Qdy+Rdz=dF.$$

Следовательно, ***поле потенциально***. ▼

При этом функция $F(M)$ **называется** ***потенциалом поля***; ее ***поверхности уровня*** **называются** ***эквипотенциальными*** поверхностями.

6.1. Вычисление криволинейного интеграла в потенциальном поле

Теорема 6.2. В ***потенциальном поле*** $\mathbf{a}(M)$ интеграл

$$\int_{M_1M_2}\mathbf{a}\cdot dr$$

равен разности значений ***потенциала*** $F(M)$ ***поля*** в конечной и начальной точке ***пути*** интегрирования,

$$\int_{M_1M_2}\mathbf{a}\cdot dr=F(M_2)-F(M_1).$$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории ***криволинейных*** интегралов.

1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ 1-го РОДА

Сформулируем определение поверхностного интеграла 1-го рода в ***общем*** случае. Пусть функция $F(M)$ **определена** на гладкой поверхности σ.

Разделим поверхность σ произвольными ***линиями*** на n ***элементарных*** частей $\Delta\sigma_k$ с площадями ΔS_k, ***наибольшую*** из этих площадей **обозначим** λ.

Выберем на каждом элементе $\Delta\sigma_k$ произвольную точку M_k и **вычислим** значение функции в этой точке $F(M_k)$.

Составим ***интегральную сумму*** функции $F(M)$ на поверхности σ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(M_k)\Delta S_k.$$

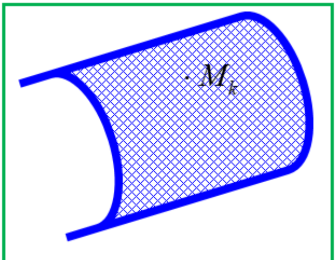


Рис.1.1

Определение. Если при $\lambda \to 0$ **существует** конечный предел ***интегральной суммы*** S_n, не зависящий от способа разбиения поверхности σ на ***элементарные*** части и от выбора точек M_k, то этот предел **называется** поверхностным интегралом 1-го рода от функции $F(M)$ по поверхности σ. **Обозначение**: $\iint\limits_{\sigma} F(M)\,dS$.

По определению **имеем**: $\iint\limits_{\sigma} F(M)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(M_k)\Delta S_k$.

(1.1)

Физическое истолкование

Например, это масса материальной поверхности с плотностью распределения вещества $F(M)$.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА

Для определения поверхностного интеграла 2-го рода нам **понадобятся** некоторые вспомогательные понятия.

Двусторонняя поверхность

На поверхности σ **фиксируем** точку M_0 и одно из направлений ***нормали*** к ней в этой точке, указав ***единичный вектор*** $\mathbf{n}$, отложенный из точки M_0.

Проведем через точку M_0 замкнутую ***линию*** $\boldsymbol{\ell}$, целиком лежащую на поверхности σ и не имеющую ***общих*** точек с границей поверхности σ.

Будем совершать обход ***линии*** $\boldsymbol{\ell}$ так, чтобы ***нормаль*** **изменялась** непрерывно. При этом ***вектор*** $\mathbf{n}$ в каждой точке M **будет иметь** вполне определенное направление (вообще говоря, отличное от направления в точке M_0). По возвращении в точку M_0 после совершения обхода **может оказаться**:

1. ***вектор*** $\mathbf{n}$ **принял** первоначальное направление;
2. ***вектор*** $\mathbf{n}$ **изменил** направление на противоположное направление.

Определение. ***Гладкая*** поверхность σ **называется** двусторонней, если обход по любому замкнутому ***контуру***, лежащему на поверхности σ и не имеющему ***общих*** точек с ее границей, **не меняет** направление ***нормали***.

Двусторонней поверхностью **является** всякая гладкая поверхность, определяемая уравнением

$$z = f(x; y.).$$

Действительно, выбрав направление ***нормального вектора*** $\mathbf{n}$ к ней так, чтобы он составил с осью Oz острый угол, **получим** одну сторону поверхности (***верхнюю***). Выбрав это направление так, чтобы вектор $\mathbf{n}$ **составил** с осью Oz тупой угол, **получим** другую сторону поверхности
(***нижнюю***).

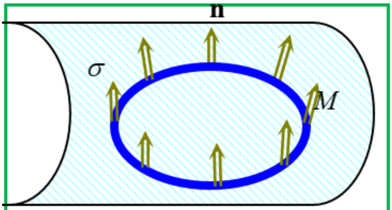


Рис.1.2

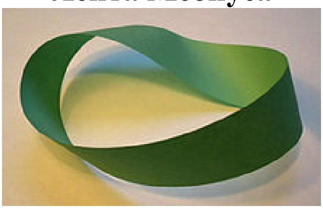
В частности, плоскость и всякая ее часть (***круг*** и т.п.) – двусторонняя поверхность.
Любая замкнутая поверхность, не имеющая точек самопересечения (***сфера***, ***эллипсоид*** и др.), также **является** двусторонней.
В самом деле, направив ***нормальный вектор*** внутрь объема, ограниченного этой поверхностью, **получим** одну сторону поверхности (***внутреннюю***), направив ***нормаль*** вне указанного объема, – другую сторону поверхности (***внешнюю***).

Двустороннюю поверхность **называют** также ориентированной, а выбор ее определенной стороны – ориентацией поверхности.

Определение. Если на поверхности **существует** замкнутая ***линия***, обход по которой **меняет** направление ***нормали***, то поверхность **называется** односторонней.

Простейшим примером односторонней поверхности **является** лист ***Мёбиуса***.

Лента Мёбиуса



Лента Мёбиуса

Лист Мёбиуса (лента Мёбиуса, петля́ Мёбиуса) – топологический объект, простейшая не ориентируемая поверхность с краем, односторонняя при вложении в обычное трёхмерное Евклидово пространство $\mathbf{R}^3$. Попасть из одной точки этой поверхности в любую другую можно, не пересекая края.

Лента Мёбиуса была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году. Модель ленты Мёбиуса может легко быть сделана: для этого надо взять достаточно вытянутую бумажную полоску и соединить концы полоски, предварительно перевернув один из них. В Евклидовом пространстве существуют два типа полос Мёбиуса в зависимости от направления закручивания: правые и левые (топологически они, однако, неразличимы).

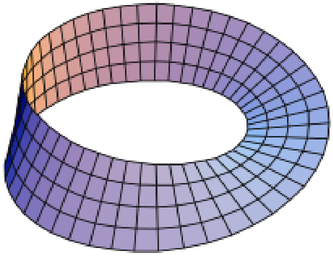
Свойства

Если разрезать ленту вдоль по линии, равноудалённой от краёв, вместо двух лент Мёбиуса получится одна длинная двухсторонняя (вдвое больше закрученная, чем лента Мёбиуса) лента, которую называют «Афганская лента». Если теперь эту ленту разрезать вдоль посередине, получаются две ленты, намотанные друг на друга.

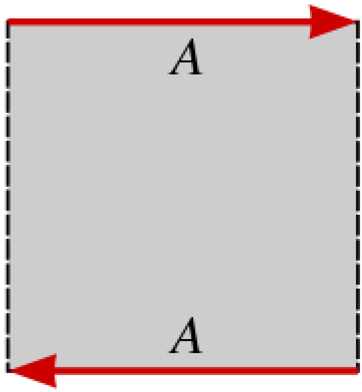
Если разрезать ленту Мёбиуса, отступая от края приблизительно на треть её ширины, то получаются две ленты, одна – более короткая лента Мёбиуса, другая – длинная лента с двумя полуоборотами (Афганская лента).

Другие комбинации лент могут быть получены из лент с двумя или более полуоборотами в них. Например, если разрезать ленту с тремя полуоборотами, то получится лента, завитая в узел трилистника. Разрез ленты с дополнительными оборотами даёт неожиданные фигуры, названные парадромными кольцами.

Уравнения



Параметрическое описание листа Мёбиуса.



Чтобы превратить квадрат в лист Мёбиуса, соедините края, помеченные ***A*** так, чтобы направления стрелок совпали.

Одним из способов представления листа Мёбиуса как подмножества $\mathbf{R}^3$ является параметризация:

$$x(u, \quad v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,$$

$$y(u,\ v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u,$$

$$z(u, v) = \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2},$$

где $0 \le u < 2\pi$ и $-1 \le v \le 1$. Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости $x-y$ с центром в $(0, 0, 0)$. Параметр u пробегает вдоль ленты, в то время как v задает расстояние от края.

В цилиндрических координатах (r, θ, z), неограниченная версия листа Мёбиуса может быть представлена уравнением: $\log r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, где функция логарифма имеет произвольное основание.

Свойства

- Топологически лист Мёбиуса может быть определен как факторпространство квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ для $0 \le x \le 1$.
- Лист Мёбиуса – не ориентируемая поверхность с краем.
- Лист Мёбиуса – это также пространство нетривиального расслоения над окружностью со слоем отрезок.
- Ленту Мебиуса, возможно, поместить в пространство $\mathbf{R}^3$ с границей, являющейся идеальным кругом.

Идея состоит в следующем: пусть **C** будет единичным кругом в плоскости *xy* в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Соединив антиподные точки на множестве **C**, то есть, точки под углами θ и $\theta + \pi$ дугой круга, получим, что для угла θ между 0 и $\frac{\pi}{2}$ дуги лежат выше плоскости *xy*, а для других θ ниже (причём в двух местах дуги лежат в плоскости *xy*).

Тем не менее, любой диск, который приклеивается к граничной окружности, неизбежно пересечёт ленту Мебиуса.

Открытые вопросы

1. Каково минимальное k такое, что из прямоугольника с меньшей стороной 1 и большей стороной k можно свернуть несамопересекающуюся ленту Мёбиуса (бумагу мять не разрешается), (доказанная оценка снизу $\frac{\pi}{2}$, сверху $\sqrt{3}$).

2. Существует ли формула, описывающая лист Мёбиуса, получающийся путем складывания плоского листа бумаги? (вышеуказанные формулы описывают поверхность, которую нельзя сложить из листа бумаги, так как она имеет отрицательную

кривизну; спрашивается, можно ли аналогичным образом описать поверхность нулевой кривизны?).

Сложнее найти форму, которая при этом минимизирует упругую энергию изгиба. Эта задача, впервые поставленная Садовским в 1930 году, была недавно решена. Однако решение не описывается алгебраической формулой, и маловероятно, что такая формула вообще существует. Чтобы найти пространственную равновесную форму бумажной ленты Мёбиуса, необходимо решить краевую задачу для системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Лист Мёбиуса служил вдохновением для скульптур и для графического искусства. Эшер был одним из художников, кто особенно любил его и посвятил несколько своих литографий этому математическому объекту. Одна из известных – лист Мёбиуса II, показывает муравьёв, ползающих по поверхности ленты Мёбиуса.

Лист Мёбиуса является эмблемой известной серии научно-популярных книг «Библиотечка „Квант“».

Искусство и технология

Международный символ переработки представляет собой Лист Мёбиуса.

Он также постоянно встречается в научной фантастике, например, в рассказе Артура Кларка *«Стена Темноты»*. Иногда научно-фантастические рассказы (вслед за физиками-теоретиками) предполагают, что наша Вселенная может быть некоторым обобщённым листом Мёбиуса.

Также кольцо Мёбиуса постоянно упоминается в произведениях уральского писателя Владислава Крапивина, цикл «В глубине Великого Кристалла». В рассказе «Лист Мёбиуса» автора А. Дж. Дейча, бостонское метро строит новую линию, маршрут которой становится настолько запутанным, что превращается в ленту Мёбиуса, после чего на этой линии начинают исчезать поезда. По мотивам рассказа был снят фантастический фильм «Мёбиус» режиссёра Густава Москера. Также идея ленты Мёбиуса используется в рассказе М. Клифтона «На ленте Мёбиуса».

Философский трактат Кирилла Мозгалевского «Путешествие в Пандемониум или Наваждение 13-го» написан в виде ленты Мёбиуса – произведение начинается и заканчивается одинаковым отрывком, а примерно в середине повествования этот же отрывок перекручивается. Именно по ленте Мёбиуса главный герой попадает в потусторонний мир.

С лентой Мёбиуса сравнивается течение романа современного русского писателя Алексея А. Шепелёва «Echo». Из аннотации к книге: «„ Echo “– литературная аналогия кольца Мёбиуса: две сюжетные линии – „мальчиков“ и „девочек“ – переплетаются, перетекают друг в друга, но не пересекаются».

Лента Мёбиуса также встречается в эссе Харуки Мураками «Облади Облада» из книги-сборника «Радио Мураками», выпущенного в 2010 году, где лента Мёбиуса образно сравнивается с бесконечностью. В 1987 году советский джазовый пианист Леонид Чижик записал альбом «Лента Мёбиуса», в который вошла и одноимённая композиция. В 2010 году севастопольская рок-группа Kimberley выпустила песню «Meeting Moebius», содержание которой отсылает к концепции ленты Мёбиуса.

Существуют технические применения ленты Мёбиуса. Полоса ленточного конвейера выполняется в виде ленты Мёбиуса, что позволяет ему работать дольше, потому что вся поверхность ленты изнашивается равномерно. Также в системах записи на непрерывную плёнку применяются ленты Мёбиуса (чтобы удвоить время записи). Во многих матричных принтерах красящая лента также имеет вид листа Мёбиуса для увеличения её ресурса.

Лента Мёбиуса и знак бесконечности

Многие считают, что лист Мёбиуса является прародителем символа бесконечности. Однако по имеющимся историческим сведениям символ ∞ стал использоваться для обозначения бесконечности за два столетия до открытия ленты Мёбиуса.

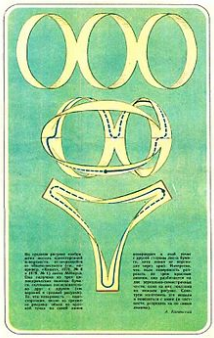
Существует также версия, что в качестве знака бесконечности используется символическое изображение ленты Мёбиуса, поскольку она отражает диалектическую модель Вселенной, заключающуюся в единстве и двойственности бытия.

Вариации и обобщения

- Близкой односторонней поверхностью является бутылка Клейна. Бутылка Клейна может быть получена путём склеивания двух лент Мёбиуса по краям. В обычном трёхмерном евклидовом пространстве сделать это, не создавая самопересечения, невозможно.
- Другое похожее множество – проективная плоскость. Если проколоть отверстие в проективной плоскости, тогда то, что останется, будет листом Мёбиуса. С другой стороны, если приклеить диск к ленте Мёбиуса, совмещая их границы, то результатом будет проективная плоскость.

Поверхность Кипенского

Поверхность Кипенского получается из трёх цилиндрических полосок бумаги, склеенных последовательно друг с другом. То, что поверхность односторонняя, видно из среднего рисунка, обход по синей линии возвращает к этой точке с другой стороны бумаги, хотя линия не переходит через край. Интересно, что, если поверхность разрезать по красным линиям, она разбивается на две зеркально-симметричные части. Одна из них показана на нижнем рисунке. Такой вариант поверхности был придуман А. В. Кипенским.



Односторонняя поверхность А. В. Кипенского

Эту поверхность (лист Мёбиуса) следующим образом: взяв полоску бумаги *ABCD*, склеим ее так, чтобы точка *A* совпала с точкой *C*, точка *B* совпала с точкой *D*, т.е. перед склеиванием повернуть на 180°. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное направление.

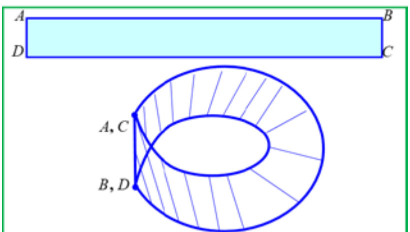


Рис.1.3

Пусть σ − гладкая двусторонняя поверхность. **Фиксируем** ту сторону этой поверхности, которая **направлена** выбранным ***единичным вектором нормали*** к поверхности $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$.
Пусть в каждой точке поверхности σ **определена** ***векторная*** функция точки $\mathbf{a}(M)$, имеющая непрерывные проекции $P(M), Q(M), R(M)$ на координатные оси.

Разобьем поверхность каким-либо способом на элементы $\Delta\sigma$ с площадями ΔS_k и **обозначим** наибольшую из этих площадей через символ λ. На каждом элементе **выберем** произвольную точку M_k и **рассмотрим** сумму $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}(M_k) \cdot \mathbf{n}^0(M_k)\Delta S_k$, где $\mathbf{a}(M_k)$ − значение ***вектора*** $\mathbf{a}(M)$ в точке M_k; $\mathbf{n^0}(M_k)$ − ***единичный вектор нормали*** в этой точке; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0}$ − ***скалярное*** произведение этих ***векторов***.

Определение. Если при $\lambda \to 0$ **существует** предел ***интегральной суммы*** $\tilde{S}_n$, не зависящий от ***способа деления*** σ на элементы $\Delta\sigma_k$ и **выбора** точек M_k, то этот предел **называется** поверхностным интегралом 2-го рода от ***векторной*** функции $\mathbf{a}(M) = \{P(M); Q(M); R(M)\}$ по выбранной стороне поверхности. **Обозначение**: $\iint\limits_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{n}^{\mathbf{0}}\, dS$.

Итак, по определению

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{n}^{\mathbf{0}}\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}(M_k) \cdot \mathbf{n}^0(M_k)\Delta S_k. \tag{2.1}$$

Из определения **следует**, что при изменении стороны поверхности поверхностный интеграл 2-го рода **меняет** лишь знак. Действительно, если **изменить** направление $\mathbf{n}$ на противоположное, то **изменит** знак сумма $\tilde{S}_n$ и ее предел (2.1).

Обозначим ***направляющие*** косинусы ***вектора*** $\mathbf{n^0}$, соответствующего выбранной стороне поверхности, через $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$. ***Интегральную сумму*** **можно записать** в виде

$$\tilde{S}_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(P(M_k)\cos\alpha + Q(M_k)\cos\beta + R(M_k)\cos\gamma)\Delta S_k,$$

(2.2)

перейдя к пределу при $\lambda \to 0$ согласно (2.1) **получим**

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{n}^{\mathbf{0}}\,dS = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

(2.3)

Замечание 1. Если dS − ***бесконечно малый*** элемент площади поверхности, то выражения $\cos\alpha dS,\ \cos\beta dS,\ \cos\gamma dS$ **представляют** собой проекции элемента dS на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy; поэтому мы **обозначим** их $dydz, dxdz$ и $dxdy$ соответственно.

Если ***интегральную сумму*** $\tilde{S}_n$ **представить** в виде $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_n(M_k)\,\Delta S_k,$ где $a_n(M_k)$ − проекции ***вектора*** $\mathbf{a}(M)$ на ***нормаль*** $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}(M)$, и **перейти** в этом равенстве к пределу, то **получим** следующую формулу связи между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода:

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{n}^{\mathbf{0}}\,dS = \iint_{\sigma} a_n(M)\,dS.$$

(2.5)

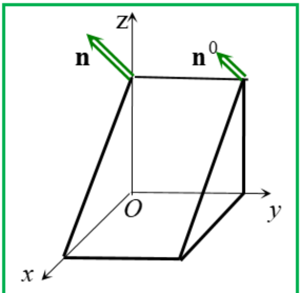


Рис.2.1

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Линейность

1. ***Постоянный*** множитель **можно выносить** за знак интеграла.

2. Поверхностный интеграл от ***алгебраической*** суммы функций **равен** соответствующей сумме интегралов от слагаемых.

Аддитивность

3.Если поверхность разбита на конечное число частей, то интеграл по всей поверхности **равен** сумме интегралов по всем ее частям.

4. Меньшей функции **соответствует** меньший интеграл, т.е. из неравенства, $F(M) \leq G(M)$ которое **выполняется** на поверхности σ $\iint_{\sigma} F(M)dS \leq \iint_{\sigma} G(M)\,dS$ и, например,

$$\iint_{\sigma} F(M)dxdy \leq \iint_{\sigma} G(M)\,dxdy, \text{ если } \cos\left(\widehat{\mathbf{n}, Oz}\right) > 0.$$

Теорема о среднем

Если функция $F(M)$ **непрерывна** на поверхности σ (с площадью S), то на поверхности σ **имеется** такая точка, что $\iint_{\sigma} F(M)dS = F(M)S$..

Все эти свойства поверхностных интегралов **вытекают** из их определения и **выводятся** так же, как свойства определенных, ***кратных*** и ***криволинейных*** интегралов.

4. ПОТОК ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Рассмотрим сначала частный случай ***поля*** скоростей **v** течения жидкости. Выделим в ***поле*** некоторую поверхность σ.

Потоком жидкости через поверхность σ **называется** количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Этот ***поток*** легко **вычислить**, если скорость течения ***постоянна*** ($\mathbf{v} = \text{const}$), а поверхность σ $-$ ***плоская***. В этом случае ***поток*** жидкости **равен** объему ***цилиндрического тела*** с ***параллельными основаниями*** и образующими длины $|\mathbf{v}|$, так как за ***единицу*** времени каждая частица **перемещается** на величину **v** (рис.4.1).

$$\Pi = Sh,$$

где S − площадь ***основания***, $h = pr_n\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^0$ высота ***цилиндра*** и $\mathbf{n}$ − ***нормаль*** к его ***основанию***, $|\mathbf{n}^0| = 1$.

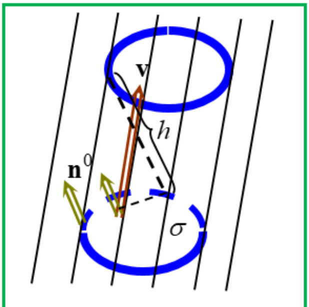


Рис.4.1

Итак, при ***постоянной*** скорости $\mathbf{v}$ ***поток*** жидкости через ***плоскую*** поверхность σ **равен**

$$\mathbf{n}^0\Pi = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^0)\cdot S. \tag{4.1}$$

Назовем ***потоком*** жидкости через гладкую поверхность σ интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}(M_k)\cdot\mathbf{n}^0(M_k)\Delta S_k.$$

Интеграл **дает** ***общее*** количество жидкости, протекающей через поверхность σ в сторону выбранной ***нормали*** $\mathbf{n}^0$, отнесенное к ***единице*** времени.

Пусть в области Ω **дана** ***векторная*** функция точки $\mathbf{a}(M)$ с непрерывными проекциями
$P(M), Q(M)$ и $R(M)$ на координатные оси.

Определение. ***Потоком вектора*** (***векторного поля***) $\mathbf{a}$ через поверхность σ **называется** поверхностный интеграл от проекции ***вектора*** $\mathbf{a}$ на ***нормаль*** к поверхности $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{a}\cdot$

$$\mathbf{n}^0 dS$$

$\left(\text{или } \iint\limits_{\sigma} a_n dS, \text{или } \iint\limits_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{dS}, \text{где } a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 \text{ и } \boldsymbol{dS} = \mathbf{n}^0 dS\right).$

(4.2)

Ясно, что интеграл (4.2) **существует**, если ***вектор*** $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ **непрерывен**. То есть, непрерывны его координаты $P(x; y; z), Q(x; y; z), R(x; y; z)$ и поверхность $\sigma -$ гладкая, т.е. **имеет** непрерывно меняющуюся ***касательную*** плоскость.

4.1. Свойства потока вектора через поверхность

Линейность

1.
$$\iint\limits_{\sigma} \left((C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{n}^0\right) dS = C_1 \iint\limits_{\sigma} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}^0 dS + C_2 \iint\limits_{\sigma} \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{n}^0 dS, \qquad (4.3)$$

где C_1 и C_2 $-$ ***постоянные*** числа.

Аддитивность

2. Если поверхность σ разбита кусочно-гладкой ***кривой*** на две части σ_1 и σ_2,
$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_{\sigma_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS + \iint\limits_{\sigma_2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS.$$

Это свойство **позволяет** распространить понятие ***потока*** на кусочно-гладкие поверхности σ.

Зависимость потока от ориентации поверхности (от ориентации вектора нормали к поверхности)

3. Понятие ***потока*** **вводится** только для двусторонних поверхностей. **Будем считать**, что если в одной точке такой поверхности направление ***вектора нормали*** уже **выбрано**, то в любой другой ее точке **берется** тот ***вектор нормали***, который **получается** из выбранного *вектора* при непрерывном перемещении точки по поверхности (без перехода через границу). В частности, на *замкнутой* поверхности во всех точках **берется** либо ***внешняя нормаль***, либо ***внутренняя*** (***внутренняя нормаль*** **направлена** внутрь тела, ограниченного замкнутой поверхностью).

Обозначим через символ σ^{+} $-$ ту сторону поверхности σ, на которой **выбран *вектор нормали*** $\boldsymbol{n}_{+} = \boldsymbol{n}$, а через символ σ^{-} $-$ сторону поверхности σ, на которой **берется *вектор нормали*** $\boldsymbol{n}_{-} = \boldsymbol{n}$. Тогда **получим**

$$\iint_{\sigma_{-}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^{0} dS = -\iint_{\sigma_{+}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^{0} dS, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{n}_{-}^{\mathbf{0}} = -\mathbf{n}_{+}^{\mathbf{0}}$. Таким образом, при изменении ориентации поверхности (при изменении направления ***вектора*** $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}$ к поверхности σ) ***поток вектора*** **меняет** знак на противоположный знак.

4.2. Поток вектора через незамкнутую поверхность (вычисление поверхностных интегралов)

Укажем некоторые способы вычисления ***потока вектора*** через незамкнутые поверхности.

4.2.1. Метод проектирования на одну из координатных плоскостей.

Пусть поверхность σ однозначно **проектируется** на область G_{xy} плоскости Oxy. В этом случае поверхность σ **можно задать** уравнением вида

$$z = f(x;y). \tag{4.5}$$

Для нахождения ***направляющих*** косинусов ***нормали*** $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}$ к поверхности σ **запишем** уравнение (4.5) в виде $F + f(x;y) - z = 0$ и **найдем** $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} = -1$. **Получим**

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Орт $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}$ ***нормали*** к поверхности σ **находится** по формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \tag{4.6}$$

Если в формуле (4.6) **берется** знак «+», то угол γ между осью Oz и ***нормалью*** $\mathbf{n^0}$ – острый; если же знак «–», то угол γ – тупой. Так как элемент площади dS этой поверхности **равен**

$$dS = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy, \tag{4.7}$$

то вычисление ***потока*** Π через выбранную сторону поверхности σ **сводится** к вычислению ***двойного интеграла*** по формуле

$$\Pi = \iint_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = \iint_\sigma \left.\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x;y)} dx\,dy. \tag{4.8}$$

Символ $\left.\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n^0}}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x;y)}$ **означает**, что при вычислении в ***подынтегральной*** функции **надо** вместо z всюду **поставить** $f(x;y)$.

4.2.2. Метод проектирования на все координатные плоскости

Пусть поверхность σ однозначно **проектируется** на все три координатные плоскости. **Обозначим** через G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} проекции поверхности σ на плоскости Oxy, Oxz, Oyz. В этом случае уравнение $F(x;y;z)=0$ поверхности σ однозначно **разрешимо** относительно каждого из аргументов, т.е.

$$x = x(y;z), y = y(x;z), z = z(x;y). \tag{4.9}$$

Тогда ***поток вектора***

$$\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

через поверхность σ, ***единичный вектор нормали*** к которой равен $\mathbf{n}^0 = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, **можно записать** так:

$$\Pi = \iint_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS =$$

$$= \iint (P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma)dS. \quad (4.10)$$

Известно, что

$$\cos\alpha\, dS = \pm dydz, \cos\beta dS = \pm dxdz, \cos\gamma dS = \pm dxdy, \quad (4.11)$$

причем знак в каждой из формул (4.11) **выбирается** таким, каков знак $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на поверхности σ. Подставляя соотношения (4.9) и (4.11) в формулу (4.10), **получаем**, что

$$\Pi = \pm\iint_{\sigma_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz \pm \iint_{\sigma_{xz}} Q(x;y(x;z);z)dxdz \pm$$

$$\pm\iint_{\sigma_{xy}} R\big(x;y;z(x;y)\big)dxdy.$$

4.3. *Поток вектора через замкнутую поверхность* Теорема Остроградского-Гаусса

Формула ***Остроградского-Гаусса*** **связывает** ***тройной интеграл*** по трехмерной области с поверхностным интегралом по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула **является** аналогом формулы ***Грина***, которая, как известно, **связывает** ***криволинейный*** интеграл по замкнутой ***кривой*** с ***двойным интегралом*** по ***плоской*** области, ограниченной этой ***кривой***.

Теорема 4.1. Если в некоторой области пространства $\mathbf{R}^3$ координаты ***вектора***

$$\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

непрерывны и **имеют** непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, то **имеет** место следующая формула

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \tag{4.12}$$

Или ***поток вектора* а** через любую <u>замкнутую</u> <u>кусочно-гладкую</u> поверхность σ, лежащую в <u>данной</u> области, **равен *тройному интегралу*** от величины $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ по области Ω, <u>ограниченной</u> поверхностью σ

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv. \tag{4.13}$$

Здесь $\mathbf{n}^0 -$ орт <u>внешней</u> ***нормали*** к поверхности, а символ $\oiint$ означает ***поток*** через <u>замкнутую</u> поверхность σ.

▲ **Рассмотрим** сначала ***вектор* а**, имеющий только <u>одну</u> компоненту $\mathbf{a} = R(x; y; z)\mathbf{k}$, и **предположим**, что <u>гладкая</u> поверхность σ **пересекается** каждой ***прямой***, ***параллельной*** оси Oz, не более чем в двух точках. Тогда поверхность σ **разбивается** на две части σ_1 и σ_2, однозначно проектирующиеся на некоторую область G_{xy} плоскости Oxy (рис.4.2).

Рассмотрим ***тройной интеграл*** от функции R'_z по области Ω и **преобразуем** его, как указано ниже, в ***двойной интеграл*** и, наконец, в поверхностный интеграл <u>2-го рода</u>:

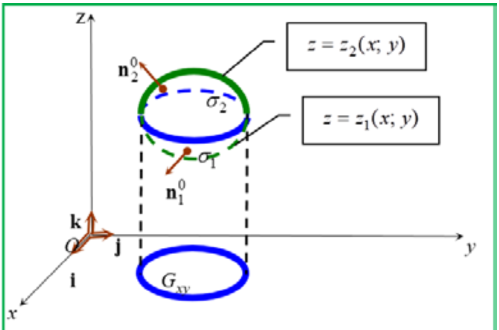


Рис.4.2

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv \overset{(I)}{\triangleq} \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \overset{(II)}{\triangleq} \iint\limits_{G_{xy}} \Big(R\big(x;y;z_2(x;y)\big)$$

$$- R\big(x;y;z_1(x;y)\big)\Big)\, dxdy \overset{(III)}{\triangleq}$$

$$\overset{(III)}{\triangleq} \iint\limits_{\sigma_2} R(x;y;z)dxdy - \iint\limits_{\sigma_1} R(x;y;z)dxdy \overset{(IV)}{\triangleq}$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\sigma_1} R(x;y;z)dxdy = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z)dxdy.$$

Преобразование (I) **основано** на правиле вычисления ***тройных интегралов***,

(II) – на формуле ***Ньютона- Лейбница***, (III) – на формуле (4.10), (4.11); в результате **получаются** интегралы по ***верхним*** сторонам поверхностей σ_1 и σ_2. Затем интегралы **объединены** в <u>один</u> интеграл по <u>внешней</u> стороне поверхности σ. Аналогично **получим**

$$\iiint\limits_{\Omega} Q'_y dv = \iint\limits_{\sigma} Qdxdz, \iiint\limits_{\Omega} P'_x dv = \iint\limits_{\sigma} Pdxdz. \tag{4.15}$$

сложив эти три равенства, **придем** к так называемой формуле ***Остроградского-Гаусса*** (в координатной форме) (4.12), где поверхностный интеграл **берется** по <u>внешней</u> стороне поверхности σ. ▼

5. ДИВИРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ
Соленоидальные (трубчатые) поля

Пусть **дано** ***векторная*** функция точки $\mathbf{a}(M)$, проекции которой $P(M), Q(M)$ и $R(M)$ на координатные оси **имеют** частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$.

Определение. ***Дивергенцией***, или ***расходимостью, вектора*** $\mathbf{a}(M)$ **называется** ***скалярная*** функция, определяемая равенством

$$\mathrm{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5.1}$$

С помощью понятий ***дивергенции вектора*** и ***потока вектора*** формула ***Остроградского-Гаусса*** **может быть записана** в ***векторной*** форме

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint_{\sigma} a_n dS = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{a} dv. \tag{5.2}$$

Эта формула **может быть сформулирована** так: ***поток вектора*** **a** через замкнутую поверхность в направлении внешней ***нормали*** **равен** интегралу от ***дивергенции*** этого ***вектора***, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.

Инвариантное (по отношению к выбору системы координат) определение ***дивергенции вектора*** **получим** с помощью формулы (5.2). Пусть $\sigma -$ замкнутая поверхность. **Рассмотрим** ***поле*** скоростей **v** течения жидкости и **вычислим** ***поток*** жидкости через поверхность σ. Если он ***положителен***, то это **означает**, что из той части пространства, которая ограничена поверхностью σ, **вытекает** больше жидкости, чем **втекает** в нее. В этом случае говорят, что внутри σ **имеются** ***источники*** (выделяющие жидкость). Напротив, если ***поток отрицателен***, то внутрь σ **втекает** больше жидкости, чем **вытекает** из нее. В этом случае говорят, что внутри σ **имеются** ***стоки*** (поглощающие жидкость). Тем самым, величина $\Pi = \iint_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS$

позволяет судить о природе части ***векторного поля***, заключенного внутри поверхности σ, а именно, о наличии ***источников*** или ***стоков*** внутри нее и их ***производительности*** (***мощности***).

Понятие о ***потоке вектора*** через замкнутую поверхность **приводит** к понятию ***дивергенции***, или ***расходимости поля***, которое **дает** некоторую количественную характеристику ***поля*** в каждой его точке.

Пусть M − изучаемая точка ***поля***. **Окружим** ее поверхностью σ произвольной формы, например, ***сферой***, достаточно малого радиуса. Область, ограниченную поверхностью σ, **обозначим** через Ω, а ее объем через V. **Напишем** для области Ω формулу ***Остроградского-Гаусса*** (5.2) и по **теореме о среднем** для ***тройного интеграла*** **получим** $\operatorname{div}\mathbf{a}(M_C)V_\Omega = \iint\limits_\sigma a_n dS$.

Отсюда **следует**, что

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \lim_{(\sigma)\to M}\frac{\iint\limits_\sigma a_n dS}{V_\Omega}, \tag{5.3}$$

т.е. ***дивергенция вектора*** в каждой точке ***поля*** M есть предел отношения ***потока*** этого ***вектора*** через ***бесконечно малую*** замкнутую поверхность, окружающую точку M, к величине объема области, ограниченной этой поверхностью точку M.

Дивергенция векторного поля **есть *скалярная*** величина (числитель и знаменатель дроби ***правой***
части формулы (5.3) **суть** ***скалярные*** величины).

Если $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) > 0$, то в точке M **расположен** ***источник***,

Если $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) < 0$, то в точке M − ***сток***.

Формула (5.3) **позволяет сделать** следующее заключение: ***дивергенция поля*** $\mathbf{a}$ в точке M **есть** ***объемная плотность потока вектора*** $\mathbf{a}$ в этой точке.

Эта формула **дает** ***инвариантное определение дивергенции***, не связанное с выбором системы
координат – все величины, входящие в формулу (5.3), **определяются** непосредственно самим
полем и от координатной системы **не зависят**.

5.1. *Правила вычисления дивергенции*

1. ***Дивергенция*** **обладает** свойством ***линейности***

$$\operatorname{div}(C_1\mathbf{a}_1+\cdots+C_n\mathbf{a}_n)=C_1\operatorname{div}\mathbf{a}_1+\cdots+C_n\operatorname{div}\mathbf{a}_n, \tag{5.4}$$

где $C_1,\ C_1,\cdots,\ C_n$ **–** ***постоянные*** числа.

▲ Пусть $\mathbf{a}=P(x;y;z)\mathbf{i}+Q(x;y;z)\mathbf{j}+R(x;y;z)\mathbf{k}$ и C **–** ***постоянное*** число. Тогда

$$\operatorname{div}\ C\mathbf{a}=\operatorname{div}(CP\mathbf{i}+CQ\mathbf{j}+CR\mathbf{k})=C\frac{\partial P}{\partial x}+C\frac{\partial Q}{\partial y}+C\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$=C\operatorname{div}\ \mathbf{a}.$$

Если $\mathbf{a}_1=P_1\mathbf{i}+Q_1\mathbf{j}+R_1\mathbf{k},\mathbf{a}_2=P_2\mathbf{i}+Q_2\mathbf{j}+R_2\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=\operatorname{div}\big((P_1+P_2)\mathbf{i}+(Q_1+Q_2)\mathbf{j}\big)+(R_1+R_2)\,\mathbf{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial R_1}{\partial z}+\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}+\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)=\operatorname{div}\ \mathbf{a}_1+\operatorname{div}\ \mathbf{a}_2.\blacktriangledown$$

2. ***Дивергенция постоянного вектора*** **равна** ***нулю***

$$\operatorname{div}\ \mathbf{c}=0. \tag{5.5}$$

3. ***Дивергенция*** произведения ***скалярной*** функции $F(M)$ на ***вектор*** $\mathbf{a}(M)$ **вычисляется** по формуле

$$\operatorname{div}\ F\mathbf{a}=F\operatorname{div}\ \mathbf{a}+\operatorname{grad}F\cdot\mathbf{a} \tag{5.6}$$

▲ В самом деле,

$$\operatorname{div}(F\mathbf{a}) = \operatorname{div}(FP\mathbf{i} + FQ\mathbf{j} + FR\mathbf{k}) = \frac{\partial(FP)}{\partial x} + \frac{\partial(FQ)}{\partial y} + \frac{\partial(FR)}{\partial z} =$$

$$F\frac{\partial P}{\partial x} + F\frac{\partial Q}{\partial y} + F\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}P + \frac{\partial F}{\partial y}Q + \frac{\partial F}{\partial z}R$$

$$= F \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} F \cdot \mathbf{a}.$$

▼

5.2. Трубчатое (соленоидальное) поле и его свойства

Если во всех точках некоторой области Ω ***дивергенция векторного поля***, заданного в этой области, **равна** ***нулю***

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0, \tag{5.7}$$

то **говорят**, что в этой области ***поле соленоидальное*** (или ***трубчатое***).

Из формулы ***Остроградского-Гаусса*** **вытекает**, что в ***трубчатом поле поток вектора*** через любую поверхность σ, лежащую в этом ***поле***, **равен** ***нулю***

$$\iint_{\sigma} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = 0. \tag{5.8}$$

Рассмотрим в области, где **задано** ***поле вектора*** **a**, какую-нибудь площадку σ (рис.5.1).

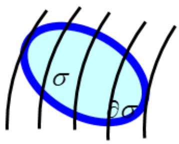


Рис.5.1

Назовем ***векторной трубкой совокупность векторных линий***, проходящих через границу $\delta\sigma$ этой площадки.

Пусть σ_1 − некоторое сечение ***векторной трубки***. **Выберем *вектор нормали*** $\mathbf{n}_1$ к сечению σ_1
так, чтобы он **был направлен** в ту же сторону, что и ***вектор*** $\mathbf{a}$ ***поля***.
Теорема 5.1. В ***трубчатом поле поток вектора*** $\mathbf{a}$ через любое сечение ***векторной трубки*** один и тот же.
▲ Пусть σ_1 и σ_2 − непересекающиеся сечения одной и той же ***векторной трубки***. Надо
доказать, что $\iint\limits_{\sigma_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS = \iint\limits_{\sigma_2} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2^0 dS$. **Обозначим** через σ_3
часть поверхности ***векторной***
трубки, заключенную между сечениями σ_1 и σ_2. Поверхности σ_1 и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ вместе **образуют** <u>замкнутую</u> поверхность σ (рис.5.2).

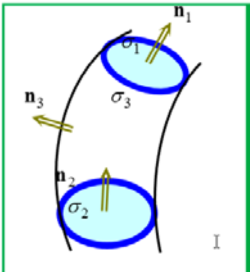


Рис.5.2

Так как по условию ***поле вектора*** $\mathbf{a}$ − ***трубчатое***, то

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0 dS = 0. \qquad (5.9)$$

В силу ***аддитивности потока*** соотношение (5.9) **можно переписать** так:

$$\oiint\limits_{\sigma_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS + \oiint\limits_{\sigma_2} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2^0 dS + \oiint\limits_{\sigma_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS = 0. \qquad (5.10)$$

В точках поверхности σ_3, составленной из ***векторных линий***, **имеем** $\mathbf{n}_3^0 \parallel \mathbf{a}$, так что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_3^0 = 0$ на поверхности σ_3, и значит, последний интеграл в ***левой*** части (5.10) **равен *нулю***. Если в интеграле по поверхности σ_2 **изменить** направление ***нормали***, то **приходим** к равенству

$$\oiint_{\sigma_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS = \oiint_{\sigma_2} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2^0 dS. \ ▼$$

Пусть поверхность σ **имеет** ориентированный замкнутый ***контур*** ℓ своей границей. **Будем говорить**, что поверхность σ **натянута** на ***контур*** ℓ. ***Вектор нормали*** **a** к поверхности σ **будем ориентировать** так, чтобы из конца ***нормали*** обход ***контура*** ℓ **был виден** против часовой стрелки.

Теорема 5.2. В ***трубчатом поле поток вектора*** **a** через любую поверхность, ***натянутую*** на данный ***контур***, один и тот же:

$$\oiint_{\sigma_1} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1^0 dS = \oiint_{\sigma_2} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2^0 dS. \tag{5.11}$$

6. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ
Ротор вектора. Теорема Стокса

Пусть в некоторой области Ω **задано** непрерывное ***векторное поле***

$$\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

и замкнутый ориентированный ***контур*** ℓ.

Определение. ***Циркуляцией вектора*** **a** по замкнутому ***контуру*** ℓ **называется** ***криволинейный*** интеграл 2-го рода от ***вектора*** **a** по ***контуру*** ℓ

$$\text{Ц} = \oint_\ell \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \oint_\ell (Pdx + Qdy + Rdz). \tag{6.1}$$

Здесь $d\mathbf{r}$ – ***вектор***, длина которого **равна** дифференциалу ***дуги*** ℓ, а направление **совпадает** с направлением ***касательной*** к ***контуру*** ℓ, определяемым ориентацией ***контура*** (рис.6.1);

символ $\oint$. **означает**, что интеграл **берется** по замкнутому ***кон-туру*** ℓ.

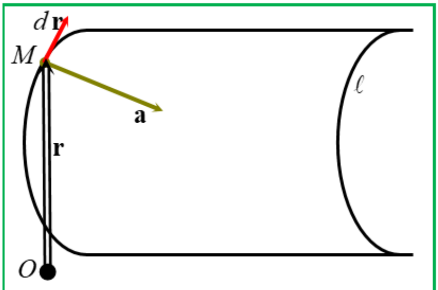


Рис.6.3

6.1. Ротор (вихрь) векторного поля

Рассмотрим ***поле вектора*** $\mathbf{a} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$, функции P, Q, R которого **непрерывны** и **имеют** непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Определение. ***Ротором вектора*** $\mathbf{a}(M)$ **называется** ***вектор***, обозначаемый символом $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и определяемый равенством

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}, \tag{6.2}$$

или, в символической, удобной для запоминания форме, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Этот ***определитель*** **раскрывают** по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки **понимаются** как операции дифференцирования, **например**,

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot Q=\frac{\partial Q}{\partial x}, \mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Q & R\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\cdot R-\frac{\partial}{\partial z}\cdot Q\right)=\mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right).$$

Определение. Если в некоторой области Ω **имеем** $\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$, то ***поле вектора*** **a** в области Ω **называется** ***безвихревым***. Так как $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ – ***вектор***, то мы **можем рассматривать** ***векторное поле*** – ***поле ротора вектора*** **a**. Предполагая, что координаты ***вектора*** **a** **имеют** непрерывные частные производные второго порядка, **вычислим** ***дивергенцию вектора*** $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. **Получим**

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}=0,$$

т.е. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$. Таким образом, ***поле вектора*** $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ ***соленоидальное***.

6.2. Формула Стокса

Формула ***Стокса*** **связывает** ***поверхностный*** и ***криволинейный*** интегралы. Пусть поверхность σ **обладает** следующими свойствами:

- это ***гладкая*** (или ***кусочно-гладкая***) поверхность, ограниченная ***гладким*** (или ***кусочно-гладким***) ***контуром*** ℓ,
- ***прямые***, ***параллельные*** координатным осям, **пересекают** σ не более чем в одной точке,
- поверхность двусторонняя.

Выберем ту сторону σ, на которой **выполняется** условие $\cos\gamma=\cos(\mathbf{n}^0;\hat{}Oz)>0$.

Обозначим через λ проекцию ℓ на плоскость Oxy, через G – проекцию σ наплоскость Oxy. Пусть поверхность σ **задана** уравнением $z=f(x;y)$ в области G. ***Направляющие*** косинусы ***нормали*** $\mathbf{n}^0$ **найдем** так же, как ранее

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \cos\beta$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \cos\gamma$$

$$= \frac{-1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Отсюда **следует**, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma = -\cos\alpha, \frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma = -\cos\beta, \qquad (6.3)$$

На поверхности σ **заданы** непрерывно дифференцируемые функции $P(M), Q(M)$ и $R(M)$. **Преобразуем *криволинейный*** интеграл в ***двойной*** интеграл, а затем ***поверхностный***:

$$\int_\ell P(x;y;z)dx \overset{(I)}{\cong} \int_\ell P\big(x;y;f(x;y)\big)dx \overset{(II)}{\cong} \int_\lambda P\big(x;y;f(x;y)\big)dx \overset{(III)}{\cong}$$

$$-\iint_G \left(P'_y + P'_z \cdot z'_y\right) dxdy \overset{(IV)}{\cong}$$

$$\overset{(IV)}{\cong} -\iint_\sigma \left(P'_y + P'_z \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos\gamma dS \overset{(V)}{\cong} \iint_\sigma \left(P'_z\cos\beta - P'_y\cos\gamma\right) dS.$$

Здесь равенство (I) **основано** на том, что ***кривая*** ℓ **лежит** на поверхности σ, и поэтому для всех точек ℓ **выполнено** соотношение между координатами $z = f(x;y)$.

Переход (II) **основан** на том, что ***подынтегральная*** функция **зависит** лишь от x и y, и поэтому согласно правилу вычисления ***криволинейного*** интеграла, его величина **не изменится** при замене ***контура*** ℓ на его проекцию λ.
Переход (III) **основан** на формуле ***Грина*** в случае $Q = 0$.
Переход (IV) **основан** на формуле $\iint\limits_{\sigma} P(x;y;z)\cos\gamma dS = \iint\limits_{\sigma} P\big(x;y;f(x;y)\big)dxdy$.
Переход (V) **выполнен** с помощью <u>второй</u> из формул (6.3).
Аналогично **получим**

$$\iint\limits_{\ell} Qdy = \iint\limits_{\omega} (Q'_x\cos\gamma - Q'_z\cos\alpha)\,dS,\ \iint\limits_{\ell} Rdz = \iint\limits_{\omega} \left(R'_y\cos\gamma - R'_x\cos\beta\right)dS.$$

Сложив эти равенства, **придем** к соотношению

$$\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz = \left(\iint\limits_{\sigma} \left(R'_y - Q'_z\right)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + \left(Q'_x - P'_y\right)\cos\gamma\right)dS. \quad (6.4)$$

Перейдем к ***поверхностному*** интегралу <u>2-го рода</u>, положив

$$\cos\alpha\, dS = dydz, \cos\beta\, dS = dydz, \cos\gamma\, dS = dxdy.$$

Получим формулу ***Стокса*** в координатной форме

$$\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy. \quad (6.5)$$

Пусть $\mathbf{n}^0 = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ **есть *нормаль*** к поверхности σ, соответствующая выбранной стороне поверхности. Тогда ***подынтегральная*** функция ***правой*** части равенства (6.4) **представляет *скалярное*** произведение ***векторов*** $\mathbf{n}^0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, а вся правая часть равенства (6.4) **равна *потоку вектора*** $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через поверхность σ. Формула ***Стокса*** (6.4) **можно представить** в ***векторной*** форме.

Теорема 6.1 (Стокса). ***Циркуляция вектора*** **a** вдоль <u>ориентированного</u> <u>замкнутого</u> ***контура*** ℓ **равна *потоку ротора*** этого ***вектора*** через любую поверхность σ, натянутую на контур ℓ;

при этом направление обхода ***контура*** **должно быть согласовано** с выбором стороны поверхности

$$\oint_{\ell} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS. \tag{6.6}$$

6.3. Инвариантное определение ротора поля

Из **теоремы Стокса можно получить** ***инвариантное*** определение ***ротора поля***, не связанное с выбором системы координат.

Теорема 6.2. Проекция ***ротора*** **a** на любое направление **не зависит** от выбора системы координат и **равна** поверхностной плотности ***циркуляции вектора*** **a** по ***контуру*** площади, ***перпендикулярной*** этому направлению

$$\operatorname{pr}_{\mathbf{n}} \operatorname{rot} \mathbf{a}\Big|_M = \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0\Big|_M = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oint_{\ell} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{d}\mathbf{r}}{S}.$$

Здесь σ – площадь этой площадки; ℓ – ***контур*** площадки, ориентированный так, чтобы обход ***контура*** **был виден** из конца ***вектора*** **n** против хода часовой стрелки; $\sigma \to M$ **означает**, что площадка σ **стягивается** к точке M, в которой **рассматривается** ***вектор*** $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, причем ***вектор нормали*** **n** к этой площадке **остается** все время одним и тем же (рис.6.2).

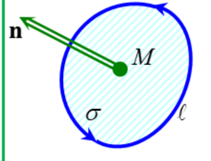


Рис.6.2

При стягивании площадки σ к точке M средняя точка $M_{\text{ср}}$ тоже **стремится** к точке M и, в силу предполагаемой непрерывности частных производных от координат ***вектора*** $\mathbf{a}$ (а значит, и непрерывности $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$), мы **получаем**

$$\lim_{\sigma\to M}\frac{\oint\limits_{\ell}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{S}=\lim_{\sigma\to M}(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0)\Big|_{M_{\text{ср}}}=(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^0)\Big|_{M}.$$

Поскольку проекция ***вектора*** $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$ на произвольное направление **не зависит** от выбора системы координат, то и сам ***вектор*** $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$ ***инвариантен*** относительно этого выбора. Отсюда **получаем** следующее ***инвариантное*** определение ***ротора поля***.

Определение. ***Ротор поля*** **есть** ***вектор***, длина которого **равна** ***наибольшей*** поверхностной плотности ***циркуляции*** в данной точке, направленный **перпендикулярно** той площадке, на которой эта ***наибольшая*** плотность ***циркуляции*** **достигается**. При этом ориентация ***вектора*** $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$ **согласуется** с ориентацией ***контура***, при которой ***циркуляция положительна***, по правилу правого винта.

6.4. Физический смысл ротора

Пусть твердое тело **вращается** вокруг неподвижной оси ℓ с ***угловой*** скоростью ω.

Не нарушая общности, **можно считать**, что ось ℓ **совпадает** с осью Oz.

Пусть $M(\mathbf{r})$ – изучаемая точка тела, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, ***Вектор угловой*** скорости в нашем случае **равен** $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$, **вычислим** ***вектор*** $\mathbf{v}$ ***линейной*** скорости точки M.

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}=-y\omega\mathbf{i}+x\omega\mathbf{j}.$$

Отсюда

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\-y\omega&x\omega&0\end{vmatrix}=2\omega\mathbf{k}=2\boldsymbol{\omega}.$$

Итак, ***вихрь*** скоростей вращающегося твердого тела **одинаков** во всех точках ***поля***, **параллелен** оси вращения и **равен** ***угловой*** скорости вращения.

6.5. Правила вычисления ротора

1. ***Ротор*** **постоянного** ***вектора*** **с равен** ***нулевому вектору***, $\operatorname{rot}\mathbf{c} = 0$.
2. ***Ротор*** **обладает** свойством ***линейности***

$$\operatorname{rot}(C_1\mathbf{a}_1 + \cdots + C_n\mathbf{a}_n) = C_1 \operatorname{rot}\mathbf{a}_1 + \cdots + C_n \operatorname{rot}\mathbf{a}_n,$$

где $C_1, \cdots, C_n$ − ***постоянные*** числа.
3. ***Ротор*** произведения ***скалярной*** функции $F(M)$ на ***векторную*** функцию $\mathbf{a}(M)$

$$\operatorname{rot}(F\mathbf{a}) = F \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad} F \times \mathbf{a}.$$

7. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

- вычисление $\operatorname{grad} F$ для ***скалярного поля*** $F = F(x; y; z)$,
- $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ для ***векторного поля*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x; y; z)$.

Эти операции **могут быть записаны** в более простом виде с помощью символического оператора ∇ («набла»):

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (7.1)$$

Оператор ∇ (оператор ***Гамильтона***) **обладает** как дифференциальными, так и ***векторными***
свойствами.

Формальное умножение, например, умножение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $u(x; y)$, **будем понимать**, как частное дифференцирование: $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}$.

В рамках ***векторной*** алгебры формальные операции над оператором ∇ **будем проводить** так, как если бы он был ***вектором***. Используя этот формализм, **получим** следующие основные формулы:

1. Если $u = u(x; y; z) -$ ***скалярная*** дифференцируемая функция, то по правилу умножения ***вектора*** на ***скаляр*** **получим** $\boldsymbol{\nabla} u = \operatorname{grad} u$.
2. Если $\mathbf{a} = P(x; y; z)\mathbf{i} + Q(x; y; z)\mathbf{j} + R(x; y; z)\mathbf{k}$, где $P, Q, R -$ дифференцируемые функции, то по формуле для нахождения ***скалярного*** произведения **получим** $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{a}$.
3. Вычисляя ***векторное*** произведение $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}$, **получим** $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Из ***распределительного*** свойства для ***скалярного*** и ***векторного*** произведения **получаем**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b}, \text{ т.е.} \operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a}. + \operatorname{div} \mathbf{b}\,,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b}, \text{ т.е. } \operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}.$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной. Учебно-методическое пособие – СПб. РГГМУ, 2008. − 254 *с*.

2. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А*. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов (для студентов технических направлений бакалавриата): Учебное пособие. СПб. Изд-во СПбГПУ, 2001, 56 *с*.

3. *Краснов М. Л. и др*. Вся высшая математика: Учебник. Т. 4. − М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352с

Оглавление

Учебное издание

Веретенников В.Н., Ржонсницкая Ю.Б., Бровкина Е.А.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 27.06.2022. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,5. Тираж 5 экз. Заказ № 1254.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.