

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сикан А.В., Дрегваль М.С., Винокуров И.О.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ»

для студентов заочного обучения

Направление: 05.03.05 Прикладная гидрометеорология
Профиль: Прикладная гидрология

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

УДК 556.48

Сикан А.В., Дрегваль М.С., Винокуров И.О.

Учебное пособие по дисциплине «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации» / А.В. Сикан, М.С. Дрегваль, И.О. Винокуров. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. – 48 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с программой дисциплины «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации». Предназначено для студентов заочной формы обучения. Даются рекомендации по освоению теоретической части курса и выполнению контрольных работ.

© Сикан А.В., Дрегваль М.С., Винокуров И.О., 2021.

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2021.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основной задачей дисциплины «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации» является ознакомление студентов с методами обработки и анализа гидрометеорологической информации, используемых в российской и мировой гидрологической практике. В процессе изучения дисциплины студенты должны освоить теоретический материал и практические приемы статистической обработки данных гидрометеорологических наблюдений.

Изучив дисциплину, студенты должны уметь решать широкий круг инженерных задач, возникающих при проведении водохозяйственных и гидроэнергетических расчетов, при гидротехническом и дорожном проектировании, при составлении гидрологических прогнозов и т. д.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Студенты-заочники самостоятельно прорабатывают теоретическую часть курса согласно программе и выполняют три контрольные работы. В период экзаменационной сессии студенты слушают лекции по ключевым вопросам дисциплины.

К экзамену по дисциплине студенты допускаются только после получения зачета по всем контрольным работам, представленным в установленный срок.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Сикан А.В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007.–279 с.

Дополнительная

2. Методические рекомендации по оценке однородности гидрологических характеристик и определению их расчетных значений по неоднородным данным. – СПб: Нестор-История. 2010.–162 с.
3. *Рождественский А.В., Чеботарев А.И.* Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 424 с.
4. Свод правил СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. – М.: Стройиздат, 2004. – 72 с.

УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КУРСА

Введение

Вводная часть ставит своей целью познакомить студентов с задачами дисциплины.

Необходимо разобраться, почему такие гидрологические характеристики как расход воды (среднегодовой, максимальный, минимальный), слой стока за половодье или паводок, сроки замерзания и вскрытия водоемов могут рассматриваться как *случайная величина*, а для их определения используются методы математической статистики и теории вероятностей.

Следует ознакомиться с историей развития и применения вероятностных методов в российской и мировой гидрологической практике.

Вопросы для самопроверки

1. Обоснуйте необходимость применения методов математической статистики и теории вероятностей в практике гидрологических расчетов.
2. Назовите работы, ставшие основополагающими в развитии стохастической гидрологии.

1. Некоторые сведения из теории вероятностей

В этом разделе приводятся сведения из теории вероятностей, необходимые для дальнейшего изучения дисциплины.

После изучения материала, изложенного в разделе студенты должны четко представлять – в чем различие между *детерминированной* и *случайной* величинами, знать определение *случайной величины*, понимать, в чем отличие дискретной и непрерывной *случайных величин*.

Следует обратить особое внимание на то, что исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является закон распределения, который аналитически может выражаться в виде интегральной или дифференциальной функций распределения.

Необходимо знать определения интегральной функции распределения, дифференциальной функции распределения и функции обеспеченностей.

Студенты должны иметь четкое представление о том, вероятность чего характеризуют интегральная функция распределения и функция обеспеченностей и как эти две функции связаны между собой.

Нужно знать, что основные свойства случайной величины могут быть описаны с помощью нескольких числовых характеристик (*пара-*

метров распределения). При этом следует обратить внимание на то, что в гидрологической практике наиболее часто используются следующие из них: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии. Необходимо знать определения этих характеристик, и как они связаны со статистическими моментами случайной величины.

Иногда в практике гидрологических расчетов вместо случайной величины X удобнее использовать другую случайную величину Y , полученную из X на основе элементарных преобразований. Наиболее часто производится переход от исходной величины к *модульным коэффициентам* и к *стандартной нормированной величине*. Необходимо знать – как выполняются эти процедуры.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайной величиной и как эта модель используется в практике гидрологических расчетов?
2. Приведите определения интегральной функции распределения, функции обеспеченностей и функции плотности вероятности.
3. Как связаны между собой интегральная функция распределения и функция обеспеченностей? Вероятность чего характеризует каждая из этих функций?
4. Перечислите основные числовые характеристики случайной величины и дайте их определения.
5. Что такое модульный коэффициент?
6. Что такое стандартная нормированная случайная величина? Как изменится среднее значение и дисперсия, если провести нормировку ряда?
7. Что такое квантиль распределения?

2. Аналитические функции распределения, используемые в гидрологии

Целью изучения этого раздела является знакомство с наиболее часто применяемыми в гидрологической практике аналитическими кривыми обеспеченностей.

Следует обратить особое внимание на такие типы распределения как *нормальное; логнормальное; Гумбеля; Пирсона III типа; Крицкого-Менкеля*. Необходимо знать основные характеристики этих кривых обеспеченностей (количество параметров, область изменения аргумента, степень асимметричности), иметь представление о достоинствах и недостатках каждой из этих кривых.

Студенты должны знать, что представляют собой клетчатка вероятностей, для чего она используется. Особое внимание следует обра-

тить на клетчатку вероятностей, спрямляющую нормальный закон распределения (клетчатка с умеренной асимметричностью).

Вопросы для самопроверки

1. Для чего в практике гидрологических расчетов используются аналитические кривые обеспеченностей?
2. Назовите 4-5 аналитических кривых обеспеченностей используемых в гидрологии. Какие параметры распределения необходимо знать для построения каждой из этих кривых?
3. Как различаются по структуре таблицы координат аналитических кривых обеспеченностей Пирсона III типа и Крицкого-Менкеля?

3. Построение кривых обеспеченностей и оценка параметров по эмпирическим данным

При решении многих практических задач функция распределения случайной величины не может быть определена теоретическим путем. В таких случаях используются результаты наблюдений за случайной величиной, позволяющие (при достаточном их числе и надлежащей обработке) определить с известной степенью достоверности вид функции распределения и оценить ее числовые характеристики. Для решения такого рода задач используются методы математической статистики.

При изучении данного раздела студенты знакомятся с такими фундаментальными понятиями математической статистики как *генеральная совокупность, выборка, статистические оценки* числовых характеристик.

Необходимо знать, что такое *статистические оценки* числовых характеристик, какие требования к ним предъявляются, изучить методы их расчета. Особое внимание следует обратить на *метод моментов* и *метод наибольшего правдоподобия*.

Следует проанализировать формулы расчета погрешностей выборочных параметров распределения, разобраться – что влияет на величину этих погрешностей.

Студенты должны освоить технику построения эмпирических кривых обеспеченностей. Знать формулу для расчета эмпирической обеспеченности.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения генеральной совокупности и выборки. Что называют объемом выборки?

2. В чем отличие истинных числовых характеристик случайной величины и числовых характеристик, рассчитанных по выборке?
3. Какие требования предъявляются к оценкам числовых характеристик?
4. От чего зависит погрешность расчета числовых характеристик?
5. Перечислите методы расчета оценок числовых характеристик? Каковы их достоинства и недостатки?
6. Как производится расчет оценок числовых характеристик методом моментов?
7. Какой метод рекомендуется нормативными документами в качестве основного для расчета оценок параметров распределения гидрологических рядов?
8. Как рассчитать и построить эмпирическую кривую обеспеченностей?

4. Интервальное оценивание параметров и проверка статистических гипотез

Изучение раздела необходимо начать с рассмотрения трех теорем математической статистики, суть которых заключается в определении закона распределения случайной величины, являющейся функцией других случайных величин.

Студенты должны получить представление о таких теоретических распределениях, как распределение χ^2 (хи-квадрат), t -распределение (Стьюдента), F -распределение (Фишера). Указанные распределения наряду с нормальным распределением широко используются при построении интервальных оценок.

Необходимо разобраться, что такое *интервальная оценка* параметров распределения, в чем ее отличие от точечной оценки. Студенты должны уметь построить интервальную оценку математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.

В разделе вводятся понятия *статистической гипотезы*, *нулевой гипотезы* и *альтернативной гипотезы*. Для проверки гипотез используются специальные тесты, называемые *критериями*. Иными словами, критерий – это правило, позволяющее принять или отвергнуть гипотезу. Здесь необходимо обратить особое внимание на такие понятия, как *доверительный интервал* (область принятия гипотезы), *критическая область* (область опровержения гипотезы), *доверительная вероятность* и *уровень значимости*.

Студенты должны знать для чего в гидрологической практике используются критерии *случайности*, критерии *однородности* и критерии *согласия*. А так же чем отличаются параметрические и непараметрические критерии.

Особое внимание следует обратить на проверку однородности гидрологических рядов. Необходимо уметь пользоваться такими параметрическими критериями как *критерий Стьюдента* (для проверки значимости различия средних значений двух выборок) и *критерий Фишера* (для проверки значимости различия дисперсий двух выборок).

Вопросы для самопроверки

1. Что называют интервальной оценкой параметра распределения?
2. Что такое статистическая гипотеза? Для чего и как формулируются нулевая и альтернативная гипотезы?
3. Что такое доверительный интервал, критическая область, доверительная вероятность, уровень значимости?
4. Как проводится проверка однородности гидрологического ряда с использованием критерия Стьюдента?
5. Как проводится проверка однородности гидрологического ряда с использованием критерия Фишера?

5. Статистический анализ зависимости между гидрологическими переменными

При чтении этого раздела необходимо уяснить: в чем различие функциональных и стохастических связей и почему при описании гидрологических явлений мы, как правило, имеем дело со стохастическими зависимостями.

При изучении стохастических связей зависимую переменную обычно называют *предиктантом*, а независимые – *предикторами*. Если независимая переменная одна, а связь является линейной, то можно построить график связи вида $y = f(x)$ и провести в поле точек прямую линию: $y = ax + b$. Изменяя параметры уравнения a и b можно менять положение аппроксимирующей прямой. Линия, относительно которой наблюдается наименьший разброс точек, называется *линией регрессии*, а соответствующее ей аналитическое выражение – *уравнением регрессии*.

Студенты должны знать: какой метод используются для расчета параметров a и b , как называются эти параметры, и как они связаны с основными числовыми характеристиками исследуемых рядов.

Необходимо иметь четкое представление о том, что характеризует коэффициент парной корреляции, в каком диапазоне значений он может изменяться, при каком коэффициенте корреляции уравнение линейной регрессии можно использовать для практических расчетов.

Студенты должны иметь представление о построении многофакторных связей с использованием аппарата множественной линейной корреляции.

Требуется знать: как оценивается надежность уравнения линейной регрессии в случае парной и множественной корреляции.

Вопросы для самопроверки

1. Какой метод используется для расчета параметров уравнения регрессии?
2. Что характеризует коэффициент парной корреляции? В каком диапазоне значений он может изменяться?
3. Как в уравнении линейной регрессии $y = ax + b$ называются коэффициенты a и b ?
4. Можно ли использовать аппарат линейной корреляции для описания нелинейных зависимостей?
5. Когда уравнение регрессии считается надежным и его можно использовать для практических расчетов?
6. В каком диапазоне значений может изменяться коэффициент множественной корреляции?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

В процессе изучения курса студенты-заочники выполняют 3 контрольные работы. Студенты должны выполнить расчеты, оформить комментарии к расчетам, написать выводы.

В качестве исходных данных для выполнения контрольных работ используются минимальные 30-суточные летне-осенние (или зимние) расходы воды за период 30-50 лет в одном створе наблюдений. Не следует использовать данные по зарегулированным рекам и рекам, где имеет место межбассейновая переброска стока. Площадь водосбора реки в расчетном створе должна быть в пределах 500-30000 км².

Данные выписываются из справочников серии «Государственный водный кадастр. Многолетние данные о режиме и ресурсах поверхностных вод суши» (МДС).

Вместо минимальных расходов воды в качестве исходных данных допускается использовать ряды среднегодовых или максимальных расходов, если по роду своей профессиональной деятельности студент занимается исследованием этих видов стока.

Выбор исходных данных осуществляется каждым студентом в индивидуальном порядке по согласованию с преподавателем кафедры инженерной гидрологии.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Методы расчета оценок параметров распределения

Требуется рассчитать оценки параметров распределения методом моментов, методом наибольшего правдоподобия и графоаналитическим методом.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

В настоящих Указаниях в качестве исходных данных используется ряд среднегодовых расходов по реке Воложба – д. Воложба.

Исходные данные оформляются в виде таблицы и прилагаются к работе (табл.1.1).

Кроме того, в каждой работе должны быть представлены сведения о том, где находится река (региональная принадлежность) и ее основные гидрографические характеристики (табл.1.2).

Таблица 1.1

Среднегодовые расходы воды р. Воложба – д. Воложба

№ п/п	Год	Расход, м ³ /с	№ п/п	Год	Расход, м ³ /с
1	1936	9,61	28	1963	9,70
2	1937	<u>6,89</u>	29	1964	10,1
3	1938	8,66	30	1965	10,4
4	1939	7,37	31	1966	17,2
5	1940	8,48	32	1967	12,1
6	1941	8,16	33	1968	14,3
7	1942	12,4	34	1969	15,6
8	1943	11,8	35	1970	9,10
9	1944	6,94	36	1971	9,37
10	1945	10,7	37	1972	7,58
11	1946	11,8	38	1973	7,27
12	1947	8,87	39	1974	10,4
13	1948	10,4	40	1975	8,62
14	1949	10,8	41	1976	12,5
15	1950	11,2	42	1977	13,0
16	1951	9,74	43	1978	13,5
17	1952	16,1	44	1979	8,99
18	1953	<u>18,1</u>	45	1980	9,30
19	1954	11,0	46	1981	12,4
20	1955	15,9	47	1982	14,8
21	1956	13,1	48	1983	14,2
22	1957	17,4	49	1984	14,5
23	1958	14,4	50	1985	11,2
24	1959	11,0	51	1986	13,6
25	1960	7,86	52	1987	12,8
26	1961	11,5	53	1988	11,6
27	1962	16,3			

Таблица 1.2

Региональная принадлежность и основные гидрографические характеристики реки Воложба – д. Воложба

Региональная принадлежность	ОГХ или МДС	Длина ряда	Площадь водосбора, F км ²	Длина реки, км ²	Уклон реки, ‰	Озерность, %
Северо-Запад РФ	ОГХ т.2	53	1330	108	1,68	1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для выполнения работы студенты должны изучить теоретический материал по учебнику [1]. Необходимо проработать следующие разделы: 3 (вводная часть); 3.2 (вводная часть); 3.2.1-3.2.2; 3.2.3 (вводная часть); 3.2.3.1; 3.3.

После изучения теоретического материала студенты должны знать ответы на следующие вопросы:

1. В чем отличие истинных числовых характеристик случайной величины и числовых характеристик, рассчитанных по имеющемуся ряду?
2. Какие требования предъявляются к оценкам параметров распределения?
3. Перечислите методы расчета оценок параметров распределения? Каковы их достоинства и недостатки?
4. Что такое начальные и центральные статистические моменты? Чем отличаются теоретические и эмпирические статистические моменты?
5. Какой метод рекомендуется нормативными документами в качестве основного для расчета оценок параметров распределения гидрологических рядов?

РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ

1.1. МЕТОД МОМЕНТОВ

Для исследуемого ряда рассчитать среднее значение, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии методом моментов по формулам (1.1-1.3); оценить погрешности полученных характеристик.

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n}, \quad (1.1)$$

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n - 1}}, \quad (1.2)$$

$$C_s = \frac{n \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{(n-1)(n-2)C_v^3} \quad (1.3)$$

Для выполнения расчетов заполняется вспомогательная таблица 1.3. Переменная k в таблице 1.3 – модульный коэффициент, который определяется по формуле:

$$k_i = \frac{Q_i}{Q} \quad (1.4)$$

Таблица 1.3

Вспомогательная таблица для расчета основных статистических характеристик ряда среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба.

№ п/п	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	k	$(k-1)$	$(k-1)^2$	$(k-1)^3$
1	9,61	0,8341	-0,1659	0,0275	-0,0046
2	6,89	0,5980	-0,4020	0,1616	-0,0649
3	8,66	0,7517	-0,2483	0,0617	-0,0153
4	7,37	0,6397	-0,3603	0,1298	-0,0468
5	8,48	0,7361	-0,2639	0,0697	-0,0184
6	8,16	0,7083	-0,2917	0,0851	-0,0248
7	12,4	1,0763	0,0763	0,0058	0,0004
...
48	14,2	1,2325	0,2325	0,0541	0,0126
49	14,5	1,2586	0,2586	0,0669	0,0173
50	11,2	0,9721	-0,0279	0,0008	0,0000
51	13,6	1,1805	0,1805	0,0326	0,0059
52	12,8	1,1110	0,1110	0,0123	0,0014
53	11,6	1,0069	0,0069	0,0000	0,0000
Сумма	610,61	53,0	0,00	3,320	0,339
Среднее	11,52	1,00	0,00		

После заполнения и обработки таблицы 1.3 рассчитываются требуемые статистические характеристики.

Для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$\bar{Q} = 11,52; \quad C_v = \sqrt{\frac{3,320}{53-1}} = 0,25; \quad C_s = \frac{53 \cdot 0,339}{(53-1)(53-2)(0,253)^3} = 0,42;$$

Относительные погрешности полученных числовых характеристик рассчитываются по формулам:

$$\varepsilon_{Q,\%} = \frac{C_v}{\sqrt{n}} 100\% , \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{1}{n + 4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}} 100\% , \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{C_s,\%} = \frac{1}{C_s} \sqrt{\frac{6}{n} (1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)} 100\% . \quad (1.7)$$

Результаты расчета представить в виде таблицы (табл.1.4).

Таблица 1.4

Основные числовые характеристики и их погрешности ряда среднегодовых расходов воды; р. Воложба – д. Воложба

Числовая характеристика	Значение	Относительная погрешность, %
Среднее значение, \bar{Q}	11,5	3,4
Коэффициент вариации, C_v	0,25	10,0
Коэффициент асимметрии, C_s	0,42	95

1.2. МЕТОД НАИБОЛЬШЕГО ПРАВДОПОДОБИЯ

При расчете оценок параметров распределения методом наибольшего правдоподобия необходимо заранее знать для какой аналитической кривой производится расчет. В данной работе в качестве расчетной используется кривая обеспеченностей Крицкого-Менкеля.

1.2.1. Расчет статистик λ_1 , λ_2 и λ_3

Для вычисления статистик λ_1 , λ_2 и λ_3 заполняется вспомогательная таблица 1.5. Расчет статистик λ_1 , λ_2 и λ_3 производится по формулам:

$$\lambda_1 = \bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n}, \quad \lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg(k_i)}{n-1}, \quad \lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \lg(k_i)}{n-1}, \quad (1.8-1.10)$$

где \bar{Q} – среднее значение; k_i – модульные коэффициенты; n – длина ряда.

Таблица 1.5

Вспомогательная таблица для расчета статистик λ_1, λ_2 и λ_3

№ п/п	Год	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	k	$\lg(k)$	$k \lg(k)$
1	1936	9,61	0,8341	-0,07876	-0,06570
2	1937	6,89	0,5980	-0,22327	-0,13352
3	1938	8,66	0,7517	-0,12397	-0,09319
4	1939	7,37	0,6397	-0,19402	-0,12412
5	1940	8,48	0,7361	-0,13309	-0,09796
6	1941	8,16	0,7083	-0,14980	-0,10610
7	1942	12,4	1,0763	0,03193	0,03437
8	1943	11,8	1,0242	0,01039	0,01065
...
46	1981	12,4	1,0763	0,03193	0,03437
47	1982	14,8	1,2846	0,10877	0,13973
48	1983	14,2	1,2325	0,09080	0,11191
49	1984	14,5	1,2586	0,09988	0,12571
50	1985	11,2	0,9721	-0,01227	-0,01193
51	1986	13,6	1,1805	0,07205	0,08505
52	1987	12,8	1,1110	0,04572	0,05080
53	1988	11,6	1,0069	0,00297	0,00299
Сумма		610,61		-0,721	0,713

Как видно из таблицы 1.5 для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$\lambda_1 = \bar{Q} = \frac{610,61}{53} = 11,52; \quad \lambda_2 = \frac{-0,721}{52} = -0,0139; \quad \lambda_3 = \frac{0,713}{52} = 0,0137.$$

1.2.2. Определение статистических характеристик ряда

Метод наибольшего правдоподобия для кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля позволяет определить в явном виде только среднее значение.

Коэффициент вариации (C_v) и отношение коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации (C_s/C_v) определяются по специаль-

ным номограммам в зависимости от статистик λ_2 и λ_3 . Фрагмент такой номограммы показан на рис 1.

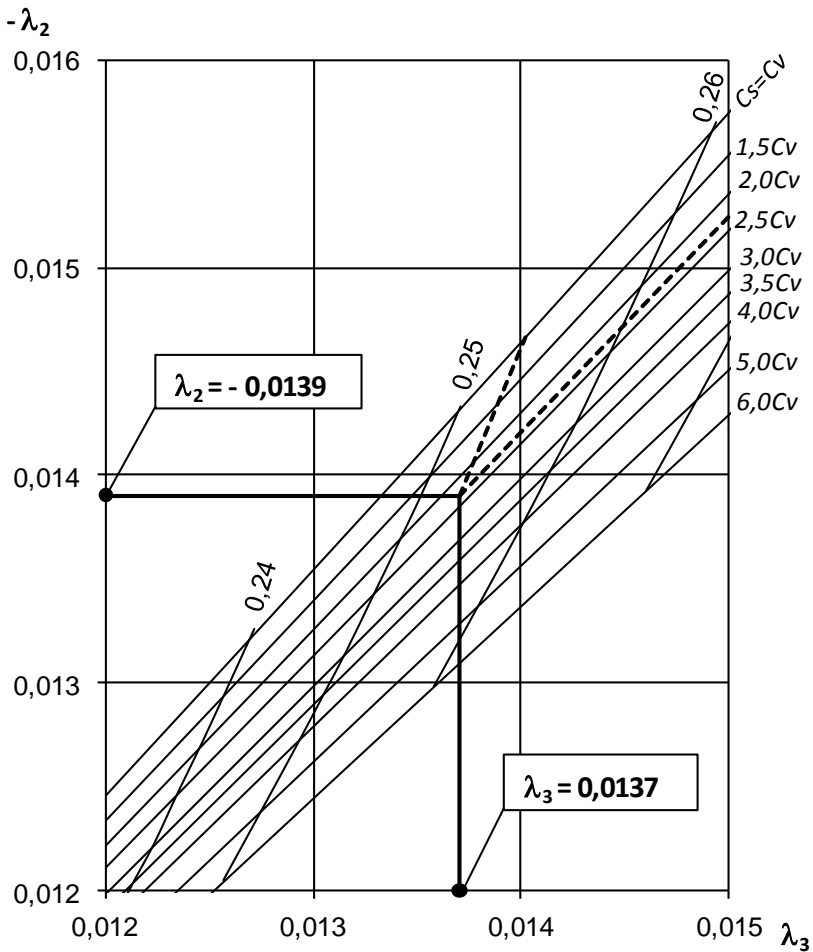


Рис 1. Фрагмент номограммы для вычисления параметров трехпараметрического гамма-распределения (Крицкого-Менкеля) C_v и C_s методом приближенного наибольшего правдоподобия.

Крупномасштабные номограммы входят в состав «Атласа расчетных гидрологических карт и номограмм», который является приложением к Пособию [4]. Мелкомасштабные номограммы для значений $C_v = 0,2-1,6$ представлены в приложении 1 настоящих указаний.

Как видно на рисунке 1 для реки Воложба – д. Воложба $C_v = 0,25$; $C_s/C_v = 2,3$. И, следовательно, $C_s = 2,3 \times 0,25 = 0,58$.

1.2.3. Оценка относительных погрешностей расчета статистических характеристик

Оценка относительных погрешностей среднего значения и коэффициента асимметрии производится с использованием тех же формул что и в методе моментов. Используются соответственно формулы 1.5 и 1.7.

Относительная погрешность для коэффициента вариации рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_{C_v, \%} = \sqrt{\frac{3}{2n(3 + C_v^2)}} 100\% . \quad (1.11)$$

Для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$\varepsilon_{Q, \%} = \frac{0,25}{\sqrt{53}} 100\% = 3,4\% ;$$

$$\varepsilon_{C_v, \%} = \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 53 \cdot (3 + 0,25^2)}} 100\% = 9,6\% ;$$

$$\varepsilon_{C_s, \%} = \frac{1}{0,58} \sqrt{\frac{6}{53} (1 + 6 \cdot 0,25^2 + 5 \cdot 0,25^4)} 100\% = 68,5\% .$$

1.3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД (МЕТОД КВАНТИЛЕЙ)

В российской гидрологической практике при реализации графоаналитического метода в качестве опорной кривой принято использовать кривую обеспеченностей Пирсона III типа. Методика разработана Г. А. Алексеевым и опубликована в 1960 году.

1.3.1 Построение эмпирической кривой обеспеченностей

Исходный ряд расходов воды ранжируется – расходы располагаются в порядке убывания (табл.1.6). Затем для каждого значения ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность по формуле:

$$P = \frac{m}{n+1} 100\% , \quad (1.12)$$

где m – порядковый номер расхода в ранжированном ряду; n – длина ряда.

Таблица 1.6

Расчет ординат эмпирической кривой обеспеченностей среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба, $\bar{Q} = 11,5 \text{ м}^3/\text{с}$

№ п/п	Расходы воды, $Q \text{ м}^3/\text{с}$	Ранжированные расходы воды, $Q_R \text{ м}^3/\text{с}$	$k = \frac{Q_R}{Q}$	$P \%$
1	9,61	18,1	1,57	1,85
2	6,89	17,4	1,51	3,70
3	8,66	17,2	1,49	5,56
4	7,37	16,3	1,41	7,41
5	8,48	16,1	1,40	9,26
6	8,16	15,9	1,38	11,1
7	12,4	15,6	1,35	13,0
...
45	9,30	8,62	0,75	83,3
46	12,4	8,48	0,74	85,2
47	14,8	8,16	0,71	87,0
48	14,2	7,86	0,68	88,9
49	14,5	7,58	0,66	90,7
50	11,2	7,37	0,64	92,6
51	13,6	7,27	0,63	94,4
52	12,8	6,94	0,60	96,3
53	11,6	6,89	0,60	98,1

В таблице 1.6 рассчитывается также столбец модульных коэффициентов (столбец 4). Строить эмпирические и аналитические кривые обеспеченностей можно как в расходах, так и в модульных коэффициентах. В данной работе требуется строить кривые обеспеченностей в модульных коэффициентах.

Кривые обеспеченностей строятся на специальной бумаге – клетчатке вероятностей. Существует несколько видов клетчатки вероятностей. В данной работе используется наиболее распространенная в России клетчатка – с умеренной асимметричностью. Эта клетчатка спрямляет закон нормального распределения. Поскольку для гидрологических рядов характерна небольшая положительная асимметрия, то на этой клетчатке они будут иметь выпуклость направленную вниз (рис.2).

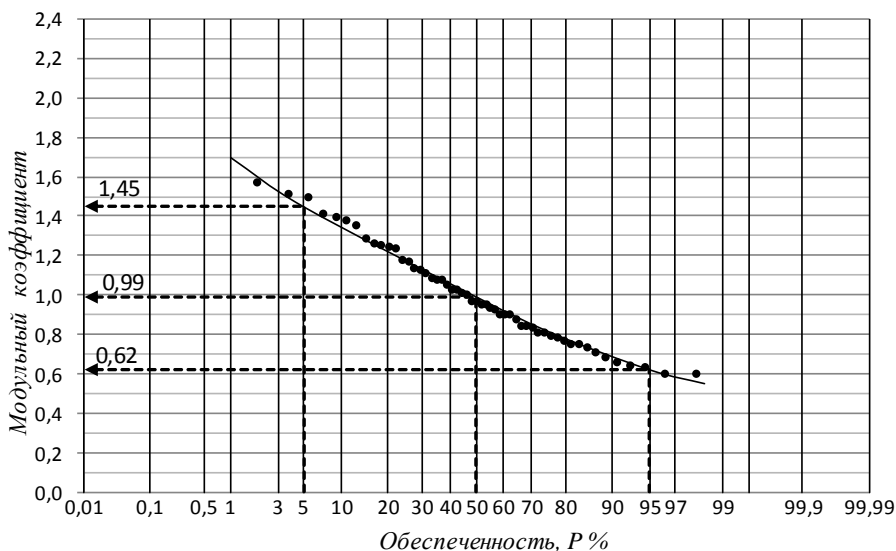


Рис 2. Сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба

При построении эмпирической кривой обеспеченностей необходимо учитывать следующее:

а) вертикальный масштаб следует выбирать таким образом, чтобы максимальное значение модульного коэффициента (в примере $k_{\max} = 1.57$) не попадало на верхний край клетчатки вероятностей; это необходимо, чтобы оставалась возможность строить аналитические кривые в области малых обеспеченностей.

б) ноль отсчета для модульных коэффициентов должен совпадать с нижним краем клетчатки вероятностей, так как расходы воды могут быть только положительными.

в) шкала обеспеченностей на клетчатке вероятностей имеет неравномерный масштаб и при нанесении точек следует учитывать цену делений в каждом интервале.

1.3.2 Построение сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей и определение трех опорных ординат

В поле эмпирических точек от руки проводится сглаживающая линия (рис. 2). Эту линию называют сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей.

По сглаженной эмпирической кривой для опорных обеспеченностей $P = 5\%$, $P = 50\%$ и $P = 95\%$ определяются модульные коэффициенты $k_{5\%}$, $k_{50\%}$ и $k_{95\%}$ (рис.2).

Умножая модульные коэффициенты на среднее значение, получаем расходы воды Q_5 , Q_{50} , Q_{95} .

Если кривая обеспеченностей строится не в модульных коэффициентах, а в расходах, то значения Q_5 , Q_{50} , Q_{95} определяются непосредственно по сглаженной эмпирической кривой.

Для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$k_{5\%} = 1,45; k_{50\%} = 0,99; k_{95\%} = 0,62; Q_5 = 1,45 \cdot 11,5 = 16,7;$$

$$Q_{50} = 0,99 \cdot 11,5 = 11,4; Q_{95} = 0,62 \cdot 11,5 = 7,13.$$

1.3.3 Расчет параметров распределения

Расчет осуществляется в следующей последовательности:

1. Рассчитывается коэффициент скошенности:

$$S = \frac{Q_5 + Q_{95} - 2 \cdot Q_{50}}{Q_5 - Q_{95}}. \quad (1.13)$$

Для реки Воложба – д. Воложба $S = 0,11$.

2. По таблице (приложение 2) в зависимости от коэффициента скошенности определяются коэффициент асимметрии и нормированные ординаты кривой Пирсона III типа t_5 , t_{50} , и t_{95} .

Для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$C_s = 0,40, t_5 = 1,75, t_{50} = -0,07, t_{95} = -1,52.$$

3. Рассчитывается среднеквадратическое отклонение по формуле

$$\sigma = \frac{Q_5 - Q_{95}}{t_5 - t_{95}}. \quad (1.14)$$

Для реки Воложба – д. Воложба $\sigma = \frac{16,7 - 7,13}{1,75 - (-1,52)} = 2,93$.

4. Рассчитывается новое среднее значение \bar{Q}_r по формуле

$$\bar{Q}_r = Q_{50} - \sigma \cdot t_{50} \quad (1.15)$$

Для реки Воложба – д. Воложба получаем:

$$\bar{Q}_r = 11,4 - 2,93 \cdot (-0,07) = 11,6.$$

5. Определяется коэффициент вариации по формуле

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{Q}_r}. \quad (1.16)$$

Для реки Воложба – д. Воложба $C_v = 2,93/11,6 = 0,25$.

6. Определяется соотношение C_s/C_v .

Для реки Воложба – д. Воложба $C_s/C_v = 0,40/0,25 = 1,6$.

1.3.4 Анализ надежности расчета

При использовании графоаналитического метода абсолютные и относительные погрешности параметров распределения не определяются. Считается, что расчет проведен корректно, если выполняется условие:

$$|\bar{Q} - \bar{Q}_r| < 0,02 \cdot \bar{Q}. \quad (1.17)$$

где \bar{Q} – среднее значение, определенное по методу моментов, \bar{Q}_r – среднее значение, определенное графоаналитическим методом.

ВЫВОДЫ

Для выполнения анализа заполняется сводная таблица 1.7.

Таблица 1.7

Значения статистических характеристик среднегодовых расходов воды, рассчитанные разными методами, р. Воложба – д. Воложба

Метод расчета	Стат. характеристика				Погрешность, %		
	\bar{Q}	C_v	C_s	C_s/C_v	\bar{Q}	C_v	C_s
моментов	11,5	0,25	0,42	1,7	3,4	10,0	95
наибольшего правдоподобия	11,5	0,25	0,58	2,3	3,4	9,6	69
графоаналитический	11,6	0,25	0,40	1,6	–	–	–

В выводах следует сравнить значения параметров распределения, полученные разными методами. Описать достоинства и недостатки каждого из методов. Отметить какой из методов нормативные документы рекомендуют в качестве основного.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Исследование законов распределения и расчет расходов воды различной обеспеченности

Требуется построить на клетчатке вероятности эмпирическую кривую обеспеченностей и аналитические кривые нормального закона распределения, логнормального, Пирсона III типа, Крицкого – Менкеля.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1. В качестве исходных данных используются тот же ряд, что и в работе № 1.
2. Числовые характеристики, рассчитанные в работе № 1 (среднее значение, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии, отношение коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации).

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для выполнения работы студенты должны изучить теоретический материал по учебнику [1]. Необходимо проработать следующие разделы: 1.5; 2.1; 2.3-2.6; 2.8-2.9, 3.1(второй метод).

После изучения теоретического материала студенты должны знать ответы на следующие вопросы:

1. Что такое нормированная случайная величина? Как изменятся среднее значение и дисперсия, если провести нормировку ряда?
2. Что такое модульный коэффициент?
3. Что такое клетчатка вероятностей? Что представляет собой клетчатка вероятностей с умеренной асимметричностью?
4. Как рассчитать и построить эмпирическую кривую обеспеченностей?
5. Для чего в практике гидрологических расчетов используются аналитические кривые обеспеченностей?
6. Какие параметры распределения необходимо знать для построения каждой из рассмотренных аналитических кривых обеспеченностей?

7. Как различаются по структуре таблицы ординат аналитических кривых обеспеченностей Пирсона III типа и Крицкого – Менкеля?
8. Дайте краткую характеристику каждой из рассмотренных аналитических кривых обеспеченностей (количество параметров, ОДЗ, наличие асимметрии, достоинства и недостатки).

2.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ

Необходимо построить эмпирическую кривую обеспеченностей по методике, описанной в пункте 1.3.1.

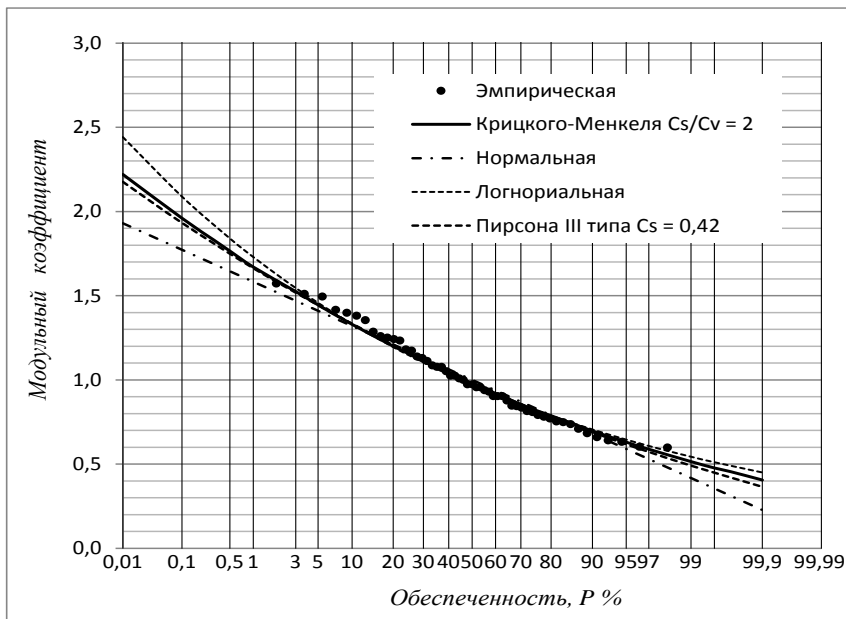


Рис.3. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба ($\bar{Q} = 11,5$; $C_v = 0,25$; $C_s/C_v = 2$).

2.2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для расчета ординат аналитической кривой нормального закона распределения необходимо знать среднее значение исследуемого ряда

и коэффициент вариации. Эти параметры были рассчитаны в работе № 1. В рассмотренном примере $\bar{Q} = 11,5$, $C_v = 0,25$.

Расчет сводится в табл. 2.1. В первом столбце таблицы задаются опорные обеспеченности (одинаковые для всех). Для каждой опорной обеспеченности P выписываются нормированные ординаты кривой обеспеченностей нормального закона распределения t_p (приведены в Приложении 2).

Таблица 2.1

Расчет координат аналитической кривой обеспеченностей нормального закона распределения для среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба; $\bar{Q} = 11,5$; $C_v = 0,25$

$P \%$	t_p	k_p	Q_p
0,01	3,72	1,93	22,2
0,1	3,09	1,77	20,4
1	2,33	1,58	18,2
5	1,64	1,41	16,2
10	1,28	1,32	15,2
20	0,84	1,21	13,9
30	0,52	1,13	13,0
50	0,00	1,00	11,5
70	-0,52	0,87	10,0
80	-0,84	0,79	9,09
90	-1,28	0,68	7,82
95	-1,64	0,59	6,79
99	-2,33	0,42	4,80
99,9	-3,09	0,23	2,62

В зависимости от t_p рассчитываются модульные коэффициенты по формуле:

$$k_p = t_p C_v + 1 \quad (2.1)$$

Переход от модульных коэффициентов расчетной обеспеченности к расходам расчетной обеспеченности производится по формуле:

$$Q_p = k_p \bar{Q} \quad (2.2)$$

По данным столбцов 1 и 3 (табл. 2.1) строится аналитическая кривая обеспеченностей нормального закона распределения. При пра-

вильном расчете и построении график на клетчатке вероятностей должен иметь вид прямой линии (см. рис.3).

2.3. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ ЛОГАРИФИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Преобразовать исходный ряд по формуле $z_i = \ln(Q_i)$. Для ряда z_i определить среднее значение и среднеквадратическое отклонение, с этой целью заполняется вспомогательная табл. 2.2.

Таблица 2.2

**Вспомогательная таблица для расчета статистических характеристик ряда z_i
р. Воложба – д. Воложба**

№ п/п	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$z = \ln(Q)$	$z - \bar{z}$	$(z - \bar{z})^2$
1	9,61	2,263	-0,150	0,0225
2	6,89	1,930	-0,483	0,2331
3	8,66	2,159	-0,254	0,0646
4	7,37	1,997	-0,415	0,1726
5	8,48	2,138	-0,275	0,0757
6	8,16	2,099	-0,314	0,0983
7	12,4	2,518	0,105	0,0110
...
50	11,2	2,416	0,003	0,0000
51	13,6	2,610	0,197	0,0389
52	12,8	2,549	0,137	0,0187
53	11,6	2,451	0,038	0,0015
Сумма	610,6	127,9	0,000	3,344
Среднее	11,5	2,413	0,000	

Для ряда р. Воложба – д. Воложба получаем:

$$\bar{Q} = 11,5, \quad \bar{z} = 2,41; \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{3,344}{53-1}} = 0,254.$$

Дальнейший расчет сводится в табл. 2.3, в первый столбец таблицы записываются опорные обеспеченности.

Для каждой опорной обеспеченности P из таблицы (Приложение 2) выписать нормированные ординаты кривой обеспеченностей нормального закона распределения t_p .

Расчет координат аналитической кривой обеспеченностей логнормального закона распределения для среднегодовых расходов воды
р. Воложба – д. Воложба; $\bar{Q} = 11,5$, $\bar{z} = 2,41$, $\sigma_z = 0,25$

$P \%$	t_p	z_p	Q_p	k_p
0,01	3,72	3,35	28,5	2,48
0,1	3,09	3,19	24,4	2,12
1	2,33	3,00	20,1	1,75
5	1,64	2,83	16,9	1,47
10	1,28	2,74	15,4	1,34
20	0,84	2,62	13,8	1,20
30	0,52	2,54	12,7	1,10
50	0,00	2,41	11,1	0,97
70	-0,52	2,28	9,8	0,85
80	-0,84	2,20	9,0	0,78
90	-1,28	2,08	8,0	0,70
95	-1,64	1,99	7,3	0,64
99	-2,33	1,82	6,2	0,53
99,9	-3,09	1,63	5,1	0,44

В зависимости от t_p рассчитать значения z_p :

$$z_p = t_p \sigma_z + \bar{z} \quad (2.3)$$

Для р. Воложба – д. Воложба при обеспеченности $P = 0,01 \%$ получаем $z_{0,01} = 0,254 \cdot 3,72 + 2,41 = 3,35$ и т. д.

В зависимости от z_p , рассчитать расходы расчетных обеспеченностей по формуле

$$Q_p = \exp(z_p) \quad (2.4)$$

Для р. Воложба – д. Воложба при обеспеченности $P = 0,01 \%$ получаем $Q_{0,01} = \exp(3,35) = 28,5$ и т. д.

Переход от расходов к модульным коэффициентам осуществляется по формуле

$$k_p = \frac{Q_p}{\bar{Q}} \quad (2.5)$$

Для р. Воложба – д. Воложба при обеспеченности $P = 0,01\%$ получаем

$$k_{0,01} = \frac{28,5}{11,5} = 2,48 \quad \text{и т. д.}$$

По данным столбцов 1 и 5 табл. 2.3 на клетчатке вероятностей построить аналитическую кривую обеспеченностей логнормального закона распределения.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ ПИРСОНА III ТИПА

Для расчета ординат аналитической кривой Пирсона III типа необходимо знать среднее значение исследуемого ряда, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии. Эти параметры были рассчитаны в работе №1. В рассмотренном примере $\bar{Q} = 11,5$, $C_v = 0,25$, $C_s = 0,42$. Расчет сводится в таблицу 2.4.

Таблица 2.4

Расчет координат аналитической кривой обеспеченностей Пирсона III типа для среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба; $\bar{Q} = 11,5$, $C_v = 0,25$, $C_s = 0,42$

$P \%$	t_p	k_p	Q_p
0,01	4,65	2,21	25,4
0,1	3,69	1,95	22,4
1	2,62	1,67	19,2
5	1,76	1,45	16,7
10	1,32	1,33	15,3
20	0,82	1,2	13,8
30	0,47	1,12	12,9
50	-0,07	0,98	11,3
70	-0,57	0,86	9,89
80	-0,85	0,79	9,09
90	-1,23	0,7	8,05
95	-1,51	0,63	7,25
99	-2,02	0,51	5,87
99,9	-2,51	0,40	4,60

В первом столбце таблицы задаются опорные обеспеченности.

Для каждой опорной обеспеченности P из таблицы (прил.1 учебника [1]) в зависимости от C_s выписываются нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа t_p .

Если расчетное значение C_s в таблице отсутствует, то выполняется интерполяция по указанной таблице.

Затем по формуле (2.1) рассчитываются модульные коэффициенты.

Переход от модульных коэффициентов расчетной обеспеченности к расходам расчетной обеспеченности производится по формуле (2.5).

По данным столбцов 1 и 3 на клетчатке вероятностей строится аналитическая кривая обеспеченностей Пирсона III типа.

2.5. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ КРИЦКОГО-МЕНКЕЛЯ

Для расчета ординат аналитической кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля необходимо знать среднее значение исследуемого ряда, коэффициент вариации и отношение коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации (C_s/C_v). Эти параметры были рассчитаны в работе №1.

В рассмотренном примере $\bar{Q} = 11,5$, $C_v = 0,25$, $(C_s/C_v) = 1,68$. Учитывая большую погрешность коэффициента асимметрии, значение C_s/C_v рекомендуется округлить до целых значений. Для реки Воложба – д. Воложба принято $C_s/C_v = 2$.

Расчет сводится в таблицу 2.5. В первую строку таблицы задаются опорные обеспеченности.

Таблица 2.5

Расчет координат аналитической кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля для среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба;
 $\bar{Q} = 11,5$, $C_v = 0,25$, $C_s/C_v = 2$

$P, \%$	0,01	0,1	1	5	10	20	30	50	70	80	90	95	99	99,9
k_p	2,22	1,96	1,67	1,45	1,33	1,20	1,11	0,98	0,86	0,79	0,70	0,63	0,52	0,40
Q_p	25,5	22,5	19,2	16,7	15,3	13,8	12,8	11,3	9,89	9,09	8,05	7,25	5,98	4,60

Для каждой опорной обеспеченности P из таблицы (прил.2 учебника [1]) в зависимости от соотношения (C_s/C_v) и коэффициента вариации выписываются модульные коэффициенты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля k_p . Если расчетное значение C_v в таблице отсутствует, то выполняется интерполяция по указанной таблице.

Переход от модульных коэффициентов к расходам расчетной обеспеченности производится по формуле (2.5).

По данным строк 1 и 3 на клетчатке вероятностей строится аналитическая кривая обеспеченностей Крицкого-Менкеля (рис.3).

ВЫВОДЫ

В выводах следует произвести сравнение всех рассмотренных кривых. Проанализировать, где между ними наблюдается наибольшее расхождение. Оценить, какая из аналитических кривых обеспеченностей лучше соответствует эмпирическим точкам.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Проверка гидрологических рядов на однородность

Требуется выполнить проверку однородности ряда с использованием параметрических критериев Фишера и Стьюдента и непараметрических критериев Диксона и Смирнова – Граббса.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1. В качестве исходных данных тот же ряд, что и в работах № 1, № 2.
2. Числовые характеристики, рассчитанные в работе № 1 (среднее значение, среднеквадратическое отклонение, дисперсия).

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для выполнения работы студенты должны изучить теоретический материал по учебнику [1]. Необходимо проработать следующие разделы: 4.1 - 4.5; 4.6 (вводная часть); 4.6.1; 4.6.2.

После изучения теоретического материала студенты должны знать ответы на следующие вопросы:

1. Что такое статистическая гипотеза? Для чего и как формулируются нулевая и альтернативная гипотезы?
2. Как проводится проверка однородности гидрологических рядов с использованием критерия Стьюдента?
3. Как проводится проверка однородности гидрологических рядов с использованием критерия Фишера?
4. С помощью каких критериев проводится анализ эмпирических точек, резко отклоняющихся от аналитической кривой обеспеченностей в области больших и малых значений?

РАСЧЕТНАЯ ЧАСТЬ

3.1 ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО РЯДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ФИШЕРА И СТЬЮДЕНТА

Расчет числовых характеристик является корректным только в том случае, если ряд однороден. То есть в течение всего периода наблюдений условия формирования стока не изменялись.

Для проверки однородности гидрологических рядов используются специальные тесты – *критерии однородности*.

В данной работе для проверки однородности используются два параметрических критерия: критерий Стьюдента и критерий Фишера. Критерий Стьюдента позволяет провести проверку ряда на однородность по среднему значению, а критерий Фишера – по дисперсии.

Требуется провести проверку ряда на однородность при уровне значимости $2\alpha = 5\%$.

Для выполнения работы исходный ряд разбивается на две приблизительно равные части и для каждой части ряда рассчитываются среднее значение, среднеквадратическое отклонение и дисперсия (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Основные статистические характеристики среднегодовых расходов воды по первой и второй частям ряда р. Воложба – д. Воложба

Выборка	Длина вы- борки	Среднее зна- чение	СКО	Дисперсия
I часть ряда	26	11,2	3,13	9,80
II часть ряда	27	11,9	2,70	7,27
Весь ряд	53	11,5	2,91	8,47

3.1.1 Проверка однородности гидрологического ряда по дисперсии (критерий Фишера)

Рассчитать эмпирическое значение критерия Фишера:

$$F^* = \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.1)$$

где D_1 и D_2 – дисперсии по одной и другой частям ряда, причем в числитель следует ставить большую из двух дисперсий.

Для р. Воложба – д. Воложба получаем: $F^* = 9,80 / 7,27 = 1,35$.

Эмпирическое значение статистики Фишера сравнивается с теоретическим F_T при уровне значимости $2\alpha = 5\%$. Теоретическое значение статистики Фишера определяется по таблице F -распределения (приложение 3) в зависимости от принятого уровня значимости и числа степеней свободы ν_1 и ν_2 :

$$\nu_1 = n_1 - 1, \quad (3.2)$$

$$\nu_2 = n_2 - 1, \quad (3.3)$$

где n_1 – длина выборки с большей дисперсией; n_2 – длина выборки с меньшей дисперсией.

Для р. Воложба – д. Воложба получаем:

$\nu_1 = 26 - 1 = 25$, $\nu_2 = 27 - 1 = 26$, $F_T = 2,17$. Поскольку в данном случае эмпирическое значение статистики Фишера меньше теоретического:

$$(F^* = 1,35) < (F_T = 2,17),$$

то можно считать различие в дисперсиях по отдельным частям ряда незначительным. В этом случае говорят, что гипотеза об однородности ряда по критерию Фишера при уровне значимости $2\alpha = 5\%$ *не опровергается*.

3.1.2 Проверка однородности гидрологического ряда по среднему значению (критерий Стьюдента)

Рассчитать эмпирическое значение критерия Стьюдента:

$$t^* = \left[\frac{(\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \right] \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \quad (3.4)$$

где n_1 и n_2 – длина первой и второй частей ряда; \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 – средние значения по первой и второй частям ряда; σ_1 и σ_2 – средне-квадратические отклонения по первой и второй частям ряда.

Для рассматриваемого примера получаем:

$$t^* = \frac{(11,2 - 11,9)\sqrt{(26 \cdot 27)/(26 + 27)}}{\sqrt{\frac{(26-1)(3,13)^2 + (27-1)(2,70)^2}{26 + 27 - 2}}} = -0,87.$$

Эмпирическое значение статистики Стьюдента сравнивается с теоретическим t_τ при уровне значимости $2\alpha = 5\%$.

Теоретическое значение статистики Стьюдента определяется по таблице t -распределения (Приложение 4) в зависимости от принятого уровня значимости и числа степеней свободы ν :

$$\nu = n - 1, \quad (3.5)$$

где n – общая длина исследуемого ряда.

Для р. Воложба – д. Воложба получаем:

$$\nu = 53 - 1 = 52; \quad t_\tau = 2,007.$$

Поскольку в данном случае эмпирическое значение статистики Стьюдента по абсолютной величине меньше теоретического

$$(|t^*| = 0,87) < (t_\tau = 2,007),$$

то можно считать различие в средних значениях по отдельным частям ряда незначительным.

В этом случае говорят, что гипотеза об однородности ряда по критерию Стьюдента при уровне значимости $2\alpha = 5\%$ *не опровергается*.

По результатам проверки ряда на однородность с использованием критериев Фишера и Стьюдента составляется сводная таблица (табл.3.2).

Результаты проверки ряда на однородность по критериям Фишера и Стьюдента для среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба при уровне значимости $2\alpha = 5\%$.

Критерий	Значение статистики		Нулевая гипотеза	
	эмпирическое	теоретическое	содержание	результат
Фишера	1,35	2,17	$D_1 = D_2$	не опровергается
Стьюдента	- 0.87	2,007	$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$	не опровергается

3.2 ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО РЯДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ДИКСОНА И СМИРНОВА–ГРАББСА

Построение эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей позволяет выявить точки, резко отклоняющиеся от аналитической кривой в области больших и малых значений. В этой ситуации необходимо выяснить, относится ли данная точка к той же генеральной совокупности, что и остальные члены выборки или нет.

В первом случае отклонение можно объяснить тем, что данный гидрологический ряд содержит значение очень редкой повторяемости, во втором – ряд следует признать неоднородным.

Для анализа таких ситуаций в СП 33-101-2003 включены два дополнительных критерия однородности – критерий Диксона и критерий Смирнова – Граббса.

Требуется провести проверку ряда на однородность при уровне значимости $\alpha = 5\%$ с использованием непараметрических критериев Диксона и Смирнова – Граббса

При использовании указанных критериев исходный ряд ранжируется в возрастающем порядке: $Q_1 < Q_2 < \dots < Q_n$ (табл.3.3).

Таблица 3.3

Исходный и ранжированный (в возрастающем порядке) ряды среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба

№ п/п	Год	Расход воды Q_i , м ³ /с	
		Исходный ряд	Ранжированный ряд
1	1936	9,61	6,89
2	1937	6,89	6,94
3	1938	8,66	7,27
...
51	1986	13,60	17,20
52	1987	12,80	17,40
53	1988	11,60	18,10

Затем определяются значения Q_1 , Q_2 , Q_{n-1} , Q_n , а также среднее значение ряда и среднеквадратическое отклонение (табл. 3.4). Эти характеристики используются в дальнейшем для расчета статистик Диксона и Смирнова – Граббса.

Таблица 3.4

Вспомогательная таблица для расчета статистик Диксона и Смирнова – Граббса

Q_1	Q_2	Q_{n-1}	Q_n	\bar{Q}	σ^*
6,89	6,94	17,40	18,10	11,5	2,91

3.2.1 Проверка однородности гидрологического ряда по критерию Диксона

Статистики критерия Диксона для максимального и минимального членов выборки имеют вид:

$$D_{\max}^* = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_n - Q_1}, \quad (3.6)$$

$$D_{\min}^* = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 - Q_n}. \quad (3.7)$$

Гипотеза об однородности ряда по критерию Диксона не опровергается, если

$$D^* < D_\alpha, \quad (3.8)$$

где D^* – эмпирическое значение статистики Диксона; D_α – теоретическое значение статистики Диксона, определяемое по приложению 10 учебника [1] в зависимости от уровня значимости α %, коэффициента асимметрии C_s , длины выборки n и коэффициента автокорреляции $r(1)$ (в данной работе принять: $r(1) = 0$) (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Теоретические значения статистики Диксона для ряда среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба

n	α	$r(1)$	C_s	Теоретическое значение статистики Диксона	
				D_{\max}	D_{\min}
53	5 %	0	0,42	0,28	0,15

Для рассматриваемого примера получаем:

$$D_{\max}^* = \frac{18,10 - 17,40}{18,10 - 6,89} = 0,062; \quad D_{\min}^* = \frac{6,89 - 6,94}{6,89 - 18,10} = 0,004.$$

Так как в данном случае

$$(D_{\max}^* = 0,062) < (D_{\max} = 0,28),$$

$$(D_{\min}^* = 0,004) < (D_{\min} = 0,15),$$

то гипотеза об однородности ряда по критерию Диксона не опровергается при уровне значимости 5 % .

3.2.2 Проверка однородности гидрологического ряда по критерию Смирнова – Граббса

Статистики критерия Смирнова – Граббса для максимального и минимального членов выборки имеют вид:

$$G_{\max}^* = \frac{Q_n - \bar{Q}}{\sigma^*}, \quad (3.9)$$

$$G_{\min}^* = \frac{\bar{Q} - Q_1}{\sigma^*}, \quad (3.10)$$

где \bar{Q} – среднее значение; σ^* – выборочное среднеквадратическое отклонение.

Гипотеза об однородности ряда по критерию Смирнова-Граббса не опровергается, если

$$G^* < G_\alpha, \quad (3.11)$$

где G^* – эмпирическое значение статистики Смирнова – Граббса; G_α – теоретическое значение статистики Смирнова – Граббса, определяемое по приложению 11 учебника [1] в зависимости от уровня значимости α %, коэффициента асимметрии Cs , длины выборки n и коэффициента автокорреляции $r(1)$ (в данной работе принять: $r(1) = 0$) (табл. 3.6).

Для рассматриваемого примера получаем:

$$G_{\max}^* = \frac{18,10 - 11,5}{2,91} = 2,26; \quad G_{\min}^* = \frac{11,5 - 6,89}{2,91} = 1,59$$

Таблица 3.6

Теоретические значения статистики Смирнова – Граббса для ряда среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба

n	α	$r(1)$	Cs	Теоретическое значение статистики Смирнова – Граббса	
				D_{\max}	D_{\min}
53	5 %	0	0,42	3,44	2,46

Так как в данном случае

$$(G_{\max}^* = 2,26) < (G_{\max} = 3,44),$$

$$(G_{\min}^* = 1,59) < (G_{\min} = 2,46),$$

то гипотеза об однородности ряда по критерию Смирнова – Граббса не опровергается при уровне значимости 5% .

По результатам проверки ряда на однородность с использованием критериев Диксона и Смирнова – Граббса составляется сводная табл. 3.7.

Таблица 3.7

Результаты проверки ряда на однородность по критериям Диксона и Смирнова – Граббса для среднегодовых расходов воды р. Воложба – д. Воложба при уровне значимости $\alpha = 5\%$.

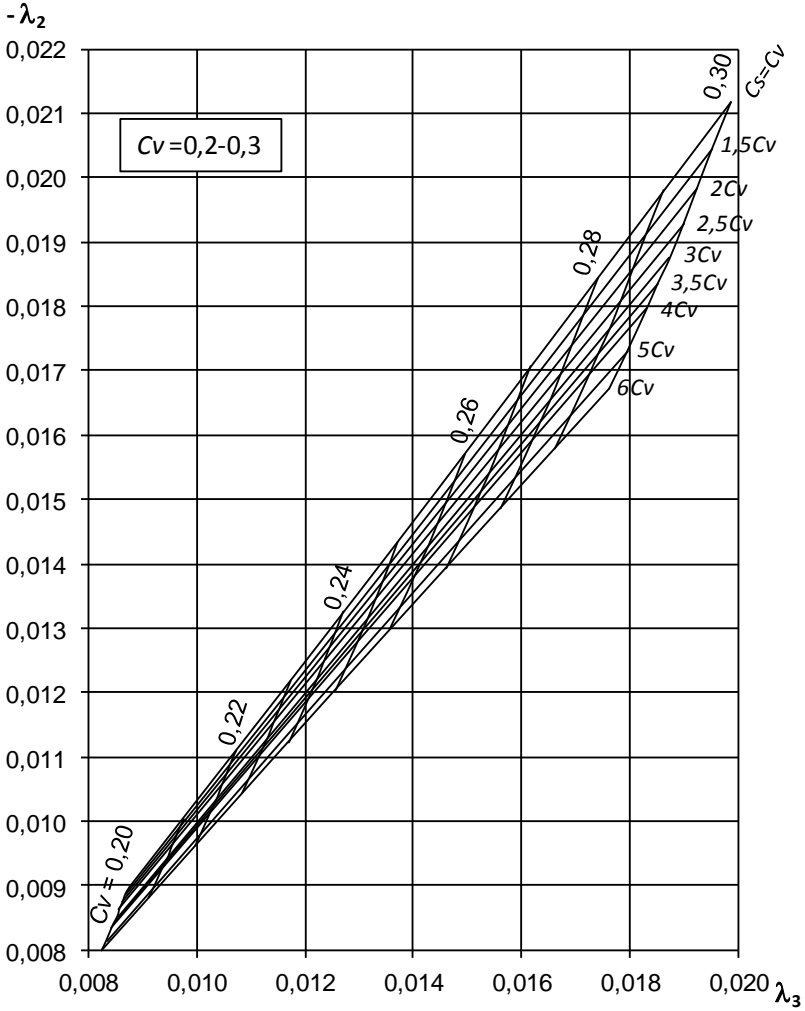
Критерий	Значение статистики		Нулевая гипотеза	
	эмпирическое	теоретическое	содержание	результат
Диксона для Q_{\max}	0,062	0,28	$Q_{\max} \in Q$	Не опр.
Диксона для Q_{\min}	0,004	0,15	$Q_{\min} \in Q$	Не опр.
Смирнова – Граббса для Q_{\max}	2,26	3,44	$Q_{\max} \in Q$	Не опр.
Смирнова – Граббса для Q_{\min}	1,59	2,46	$Q_{\min} \in Q$	Не опр.

ВЫВОДЫ

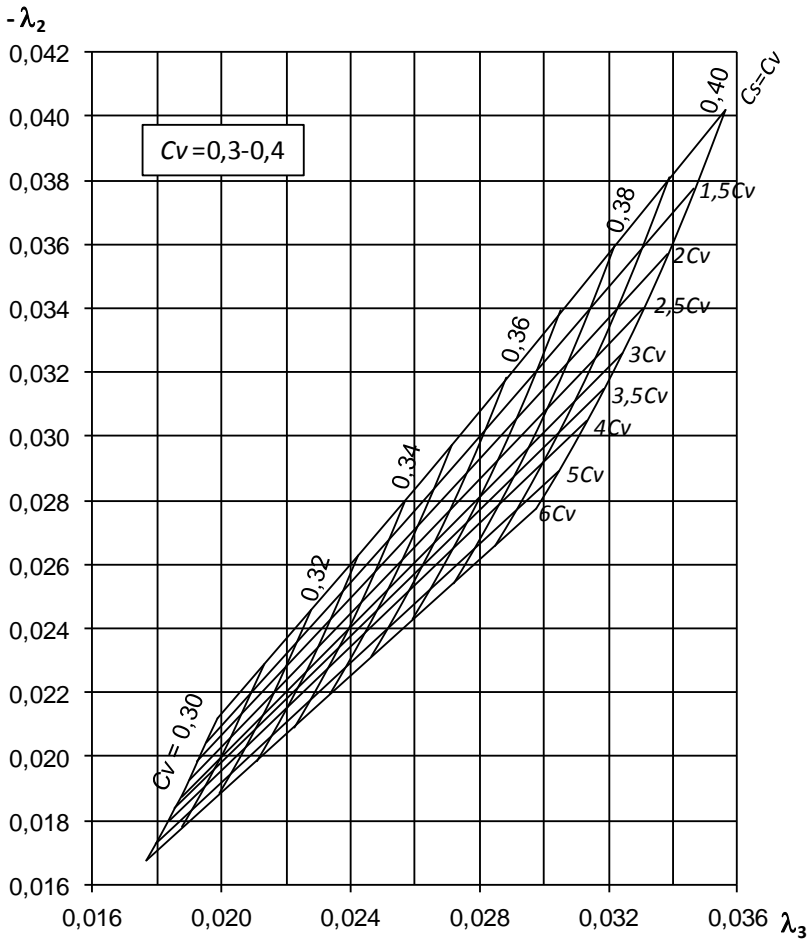
В выводах следует отметить особенности оценок параметров.

При анализе однородности четко сформулировать для каждого критерия нулевую гипотезу и пояснить, какие результаты дала проверка этой гипотезы.

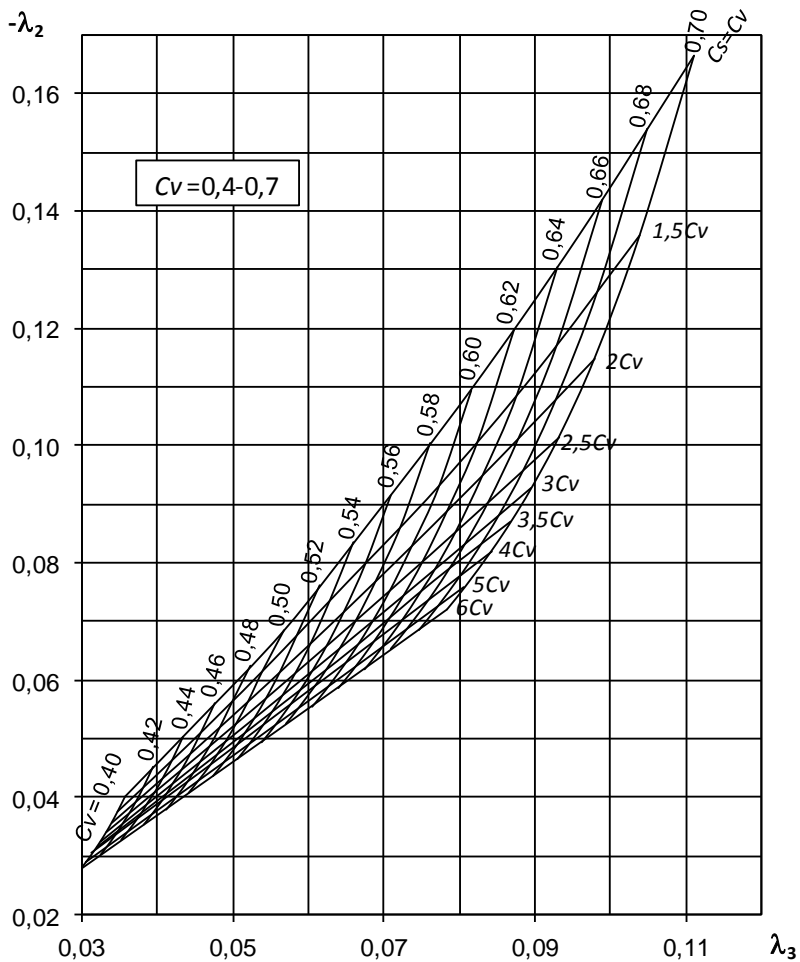
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого – Менкеля C_v и C_s методом наибольшего правдоподобия при $C_v = 0,20-0,30$



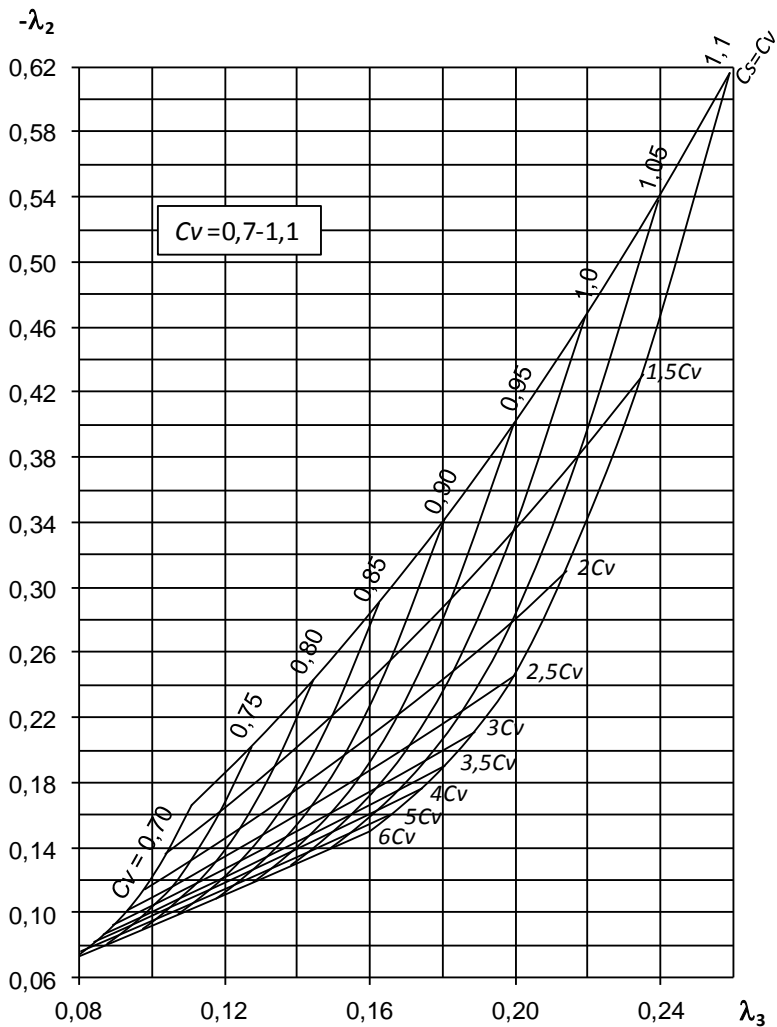
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого – Менкеля Cv и Cs методом наибольшего правдоподобия при $Cv = 0,30-0,40$



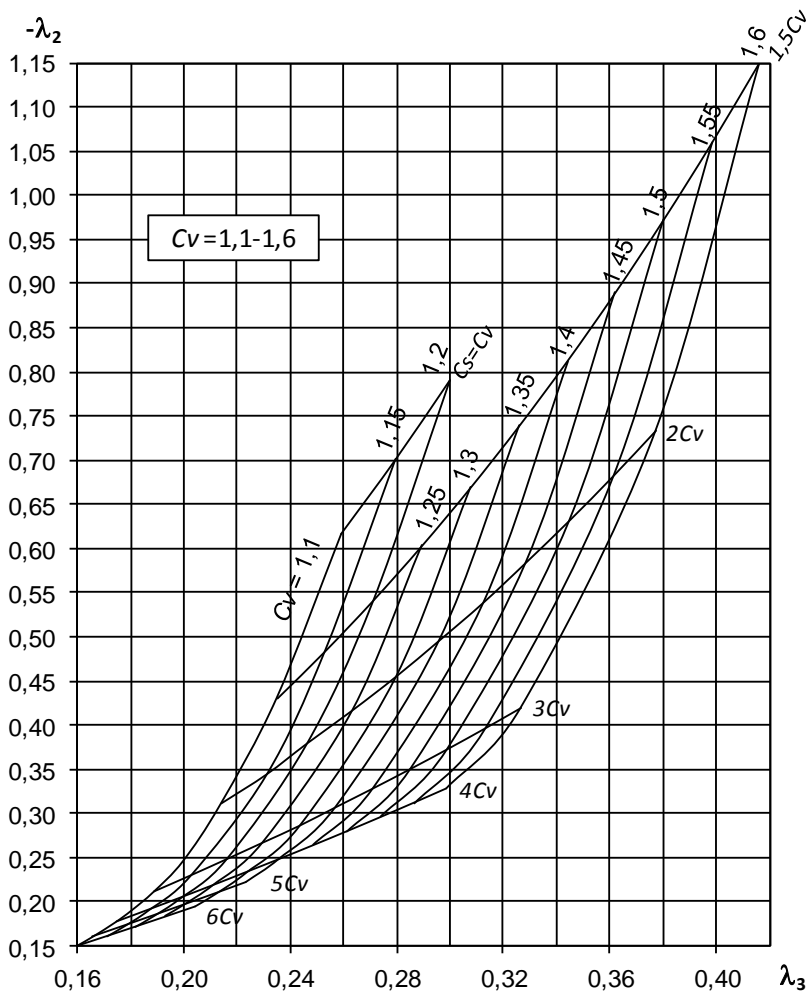
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого – Менкеля C_v и C_s методом наибольшего правдоподобия при $C_v = 0,40-0,70$



Номограмма для определения параметров распределения Крицкого – Менкеля C_v и C_s методом наибольшего правдоподобия при $C_v = 0,70-1,1$



Номограмма для определения параметров распределения Крицкого – Менкеля C_v и C_s методом наибольшего правдоподобия при $C_v = 1,1-1,6$



Нормированные ординаты кривой обеспеченностей нормального закона распределения

$P, \%$	t_p	$P, \%$	t_p	$P, \%$	t_p
0,01	3,72	20	0,84	90	- 1,28
0,1	3,09	25	0,67	95	- 1,64
0,5	2,58	30	0,52	97	- 1,88
1	2,33	40	0,25	97,5	- 1,96
2	2,02	50	0,00	98	- 2,02
2,5	1,96	60	- 0,25	99	- 2,33
3	1,88	70	- 0,52	99,5	- 2,58
5	1,64	75	- 0,67	99,9	- 3,09
10	1,28	80	- 0,84	99,99	- 3,72

F-распределение (Фишера), $2\alpha = 5\%$

ν_2	Число степеней свободы ν_1							
	8	10	15	20	30	60	120	∞
8	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,78	3,73	3,67
9	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,45	3,39	3,33
10	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,20	3,14	3,08
11	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	3,00	2,94	2,88
12	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,85	2,79	2,72
13	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,72	2,66	2,60
14	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,61	2,55	2,49
15	3,20	3,05	2,86	2,76	2,64	2,52	2,46	2,40
16	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,45	2,38	2,32
17	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,38	2,32	2,25
18	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,32	2,26	2,19
19	2,96	2,82	2,62	2,51	2,38	2,27	2,20	2,13
20	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,22	2,16	2,09
21	2,87	2,73	2,53	2,42	2,31	2,18	2,11	2,04
22	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,14	2,08	2,03
23	2,81	2,67	2,47	2,36	2,24	2,11	2,04	1,97
24	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	2,08	2,01	1,94
25	2,75	2,61	2,41	2,30	2,18	2,05	1,98	1,91
26	2,72	2,59	2,39	2,28	2,16	2,03	1,95	1,88
27	2,71	2,57	2,34	2,25	2,13	2,00	1,93	1,85
28	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,98	1,91	1,83
29	2,67	2,53	2,32	2,21	2,09	1,96	1,89	1,81
30	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,94	1,87	1,77
40	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,80	1,72	1,74
60	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,67	1,58	1,48
120	2,30	2,16	1,95	1,82	1,69	1,53	1,43	1,31
∞	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,39	1,27	1,00

Распределение Стьюдента, $2\alpha = 5\%$

Число степеней свободы, ν	t_p	Число степеней свободы, ν	t_p	Число степеней свободы, ν	t_p
1	12,71	14	2,145	32	2,036
2	4,302	15	2,131	34	2,032
3	3,182	16	2,119	36	2,028
4	2,776	17	2,110	38	2,024
5	2,571	18	2,101	40	2,021
6	2,446	19	2,093	50	2,009
7	2,365	20	2,086	60	2,000
8	2,306	21	2,079	80	1,990
9	2,262	22	2,074	100	1,984
10	2,228	24	2,064	200	1,972
11	2,201	26	2,055	300	1,968
12	2,179	28	2,048	400	1,966
13	2,160	30	2,042	500	1,964

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ.....	3
ЛИТЕРАТУРА.....	3
УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ.....	4
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	10
Контрольная работа №1.....	10
Контрольная работа №2.....	23
Контрольная работа №3.....	31
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	40