Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. И. Беликова Е. А. Бровкина И. В. Зайцева

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Санкт-Петербург
2026

УДК 510.3+519.115.4(075.8)
ББК 22.18я73
Б43

Р е ц е н з е н т – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры аудиовизуальных систем и технологий
Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения
Е. Н. Бегун

Беликова Г. И. **Введение в дискретную математику** : учеб. пособие / Г. И. Беликова, Е. А. Бровкина, И. В. Зайцева. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2026. – 96 с.

Данное учебное пособие – это введение в дискретную математику, которое является необходимым фундаментом для дальнейшей успешной работы в области прикладной информатики и программирования. В пособии представлены такие классические разделы математики, как комбинаторика, множества, логика, отношения, функции, булева алгебра и булевы функции. Каждая глава, кроме теоретической части, содержит достаточное количество примеров. Поскольку в дискретной математике часто используются термины латинского и греческого происхождения, усвоение которых может быть затруднительным, в конце учебника есть этимологический и толковый словарь, который поможет быстрее освоить соответствующую терминологию. Кроме того, во всех главах учебника есть ряд необходимых определений, знание которых полезно для будущей работы. Такие определения выделены отдельным разделом в конце книги. В каждой главе есть упражнения для самостоятельной работы. Ответы к упражнениям с подробным разбором процесса их решения представлены в конце учебного пособия.

Публикуется в авторской редакции.

ISBN 978-5-7422-9321-7

Оглавление

Предисловие

Математика – это часть духовной культуры человека.
В. Успенский «Апология математики»

Дискретная математика предназначена для работы с конечными множествами, целыми числами и логическими структурами. В этом разделе математики используются комбинаторика, теория множеств, математическая логика, теория алгоритмов и др.

Дискретная математика развивалась постепенно, объединяя различные разделы классической математики с новыми идеями. Можно считать, что эта дисциплина прошла к настоящему времени два этапа.

Первый – XVII-XVIII вв. Это время связано с трудами Якоба Бернулли, Блез Паскаля, Леонардо Эйлера и Готфрида Лейбница.

Второй – XIX-XX вв. В этот период существенно расширился круг математиков, куда вошли английские, французские и американские учёные: Эварист Галуа, Джон Венн, Бенджамин Пирс, Георг Кантор, Анри Пуанкаре, Бертран Рассел, Алан Тьюринг, Готлоб Фреге, Клод Шеннон, Морис Карно, и др.

В XX веке большой вклад в теорию множеств, математическую логику и теорию алгоритмов внесли наши российские выдающиеся математики. Среди них: Андрей Колмогоров и воспитанники знаменитого мат-меха Петербургского университета: Андрей Марков-младший, Николай Шанин, Григорий Цейтин и Юрий Матиясевич.

В настоящее время базовыми разделами дискретной математики являются: комбинаторика, теория множеств, общая алгебра, математическая логика, теория графов, теория алгоритмов, теория автоматов, теория кодирования и сетевое планирование. Дискретная математика – основа современных компьютерных наук и технологий.

Сегодня дискретная математика является важной частью математического образования. Для того, чтобы освоение такой интересной и весьма полезной дисциплины стало успешным, необходимо, чтобы начальный курс лекций был достаточно простым и кратким. Надеемся, что это учебное пособие соответствует таким требованиям. Вторая часть будет включать другие разделы дискретной математики.

Особая благодарность Кириллу Салову и Елизавете Барашевой – первым слушателям этого курса. Они являются студентами 5-го курса РГГМУ (2025) и скоро станут специалистами в области информационной безопасности. Кирилл и Лиза вдумчиво относились к содержанию всех лекций и активно работали на всех практических занятиях.

Глава 1. Комбинаторика

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Элементы комбинаторных рассуждений можно найти в работах древнегреческих, китайских и арабских математиков. Омар Хаям (1048–1131) – великий персидский поэт, астроном, философ и математик знал и использовал комбинаторику. В XVI–XVII веках итальянский математик Тарталья и французские математики Паскаль и Ферма внесли большой вклад в развитие этого раздела математики. В 1668 г. был опубликован первый научный труд по комбинаторике «Рассуждения о комбинаторном искусстве», созданный гениальным немецким математиком Лейбницем. Он ввёл в математику сам термин "комбинаторика". В настоящее время комбинаторику используют в теории графов, теории групп, теории вероятностей и др.

Комбинаторика – это раздел математики, связанный с решением задач выбора, по заданным условиям, элементов из некоторого конечного множества. Объединения таких элементов называются ***соединениями*** или ***выборками***. Методы комбинаторики дают возможность составлять различные соединения из элементов заданных множеств и вычислять количество таких выборок. Рассмотрим виды соединений и формулы для нахождения их количества.

<u>РАЗМЕЩЕНИЕ – ARRANGEMENT</u>

<u>Определение 1.</u> ***Размещением из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$*** называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из $m \le n$ различных элементов исходного множества.

Число всех размещений из n элементов по m обозначается в виде A_n^m .

<u>ПЕРЕСТАНОВКА – PERMUTATION</u>

<u>Определение 2.</u> ***Перестановкой из $\boldsymbol{n}$ элементов*** конечного множества называется любой упорядоченный набор, в который входят по одному разу все элементы исходного множества.

Число всех перестановок из n элементов обозначается как P_n.

<u>СОЧЕТАНИЕ – COMBINATION</u>

<u>Определение 3.</u> ***Сочетанием из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$*** называется любое неупорядоченное подмножество, состоящее из $m \le n$ различных элементов исходного множества.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается в виде C_n^m.

<u>ПРАВИЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СУММЫ</u>

В комбинаторике используют следующие простые, почти очевидные и полезные утверждения.

1. <u>Правило произведения.</u> Предположим, что необходимо выполнить последовательно k операций. Известно, что первая операция может быть выполнена n_1 способом, вторая – n_2 способами, $\cdots$, k-ая – n_k способами.

Количество N способов совершить все k операций вычисляется по формуле

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdots \cdot n_k.$$

2. Правило суммы. Предположим, что операции A и B взаимно исключают друг друга. Операцию A можно осуществить n способами, а операцию B – m способами. В этом случае существует $n + m$ способов провести операцию A или операцию B:

$$N = n + m.$$

Правило суммы распространяется на любое конечное число операций.

1.2. КОЛИЧЕСТВО СОЕДИНЕНИЙ

ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ

Теорема 1. Число размещений из n элементов по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1}$$

Доказательство. На 1-е место можно поместить n способами любой из n элементов. После этого останется $(n-1)$ элемент, любой из которых можно поместить на 2-е место $(n-1)$ способами, 3-е место можно заполнить $(n-2)$ способами и т.д. Очевидно, что последнее m-е место заполнится

$$n - (m-1)$$

способами. Согласно правилу произведения m элементов можно расположить

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \big(n-(m-1)\big)$ способами, поэтому верна формула

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \big(n-(m-1)\big)\frac{(n-m)!}{(n-m)!} \Rightarrow A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Эта формула справедлива для любых натуральных чисел, если $m \le n.$ В случае $m = n$ в знаменателе появляется $0!,$ что означает количество перестановок нуля, но перестановка нуля не даёт новую перестановку, она может быть только одна, поэтому $0! = 1.$ Если использовать формальный подход, то $1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1.$

ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Если в размещениях из n элементов по m некоторые из элементов или все могут оказаться одинаковыми, то они называются ***размещениями с повторениями***. В таком размещении может содержаться до m одинаковых элементов. Размещения считаются различными, даже если они отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Теорема 2. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле

$$\bar{A}_n^m = (A_n^m)_r = n^m. \tag{2}$$

Доказательство. На 1-е место выборки можно поставить любой из элементов исходного множества. Строятся выборки с повторением, поэтому на 2-е место снова можно поставить любой элемент из исходного множества, и т.д. В выборке есть m мест. Каждое место в этой выборке можно заполнить n способами. Используя правило произведения, приходим к очень простой формуле (2). Другой вывод этой формулы можно посмотреть в разделе «КОРТЕЖ».

ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК

Теорема 3. Число перестановок n различных элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!. \qquad (3)$$

Доказательство. Если $m = n$, то размещения – это перестановки, поэтому

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Rightarrow P_n = n!.$$

ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ

Предположим, что есть множество, состоящее из n элементов. Среди них есть повторяющиеся элементы: один элемент повторяется k_1 раз, второй – k_2 раз, третий – k_3 раз и т.д., последний повторяется k_m раз. Ясно, что

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_m = n.$$

Теорема 4. Число различных перестановок с повторениями вычисляется по формуле

$$\bar{P}_n = (P_n)_r = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!}. \qquad (4)$$

Доказательство. Всего возможны $n!$ перестановок, среди которых K одинаковых:

$$K = k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!,$$

поэтому различных перестановок будет в K раз меньше. Из чего следует справедливость формулы (4).

ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ

Теорема 5. Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \qquad (5)$$

Доказательство. Число размещений A_n^m представим как произведение двух сомножителей; первый из них – число сочетаний из n по m, второй – число перестановок по m:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть в сочетаниях из n элементов по m есть одинаковые элементы. Такие сочетания называют ***сочетаниями с повторениями***. Напомним, что сочетания являются неупорядоченными выборками, поэтому, если выборки отличаются друг от друга только порядком, то они считаются одинаковыми. Повторы в них допускаются.

Теорема 6. Число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле

$$\bar{C}_n^m = (C_n^m)_r = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}. \qquad (6)$$

Доказательство. Порядок в наших выборках значения не имеет, а повторение одинаковых элементов возможно, поэтому можно сгруппировать вместе одинаковые элементы и отделить эти группы друг от друга точками (узлами). Очевидно, что число таких узлов равно $(m-1)$. Различные группы будут отличаться друг от друга и элементами, и количеством повторяющихся элементов. По правилу суммы сочетания будут выбираться из $n+m-1$. Далее можно использовать формулу числа сочетаний без повторения:

$$C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n+m-1-m)!} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}.$$

Для удобства использования построенных формул, объединим их в таблицу 1.

Таблица 1

	Порядок элементов важен	Порядок элементов важен	Порядок элементов не важен
Элементы не повторяются	Размещения без повторения $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	Перестановки без повторения $P_n = n!$	Сочетания без повторения $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$
Элементы повторяются	Размещения с повторением $\bar{A}_n^m = n^m$	Перестановки с повторением $\bar{P}_n = \frac{n!}{(n_1!\,n_2!\cdots n_m!)}$; $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$	Сочетания с повторением $\bar{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}$

1.3. СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

1. Число сочетаний из n элементов по m равно числу сочетаний из n элементов по $(n-m)$:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!},\ C_n^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \Rightarrow C_n^m = C_n^{n-m}.$$

2. Правило Паскаля. Для числа сочетаний C_n^m выполняется равенство

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m.$$

Доказательство.

$$C_n^{m-1} + C_n^m = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}\left(\frac{1}{(n-m+1)} + \frac{1}{m}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} = C_{n+1}^m \Rightarrow$$

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m.$$

3. Бином Ньютона. С помощью математической индукции было доказано следующее знаменитое равенство

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

На базе этой формулы построены следующие известные формулы.

Пусть $a = b = 1$, тогда

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n.$$

Если $a = 1, b = -1$, то

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Из последнего равенства сразу вытекает, что если $n = 2k$, то

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1};$$

если $n = 2k + 1$:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n.$$

Замечание. Интересным моментом в комбинаторике являются двойные факториалы, которые записываются в виде $n!!$ и определяются следующим образом.

Если n – чётное число, то двойной факториал равен самому числу n, умноженному на произведение всех натуральных чётных чисел меньших числа n.

Если n – нечётное число, то двойной факториал равен самому числу n, умноженному на произведение всех натуральных нечётных чисел меньших числа n.

Двойные факториалы вычисляются с помощью следующих формул.

$$1)\quad n = 2k \Rightarrow\ 2k!! = 2^k \cdot k!; \quad 2)\quad n = 2k+1 \Rightarrow\ (2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k \cdot k!}.$$

Вывод этих формул очень прост:

$$1)\quad 2k!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot 2k = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot \big(2 \cdot (k-1)\big) \cdot 2k;$$

$$2k!! = (2 \cdot 2 \cdot\ \dots\ \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot\ \dots\ \cdot (k-1) \cdot k) = 2^k \cdot k! \Rightarrow\quad 2k!! = 2^k \cdot k!.$$

$$2)\ \ (2k+1)\,!! = 2k!! \cdot (2k+1)!! \Rightarrow \quad (2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k \cdot k!}.$$

Двойные факториалы встречаются в прикладных комбинаторных расчётах.

1.4. ПРИМЕРЫ

Внимательное рассмотрение следующих примеров весьма полезно для развития комбинаторного мышления.

1. Сколько можно записать четырёхзначных чисел, используя без повторения все десять цифр?

РЕШЕНИЕ

Любое число зависит от составляющих её цифр и от порядка их вхождения в это число, поэтому исходные числа являются размещениями:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Среди таких чисел есть трёхзначные, у них на первом месте стоит 0. Их всего

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Искомое число четырёхзначных чисел равно разности

$$A_{10}^4 - A_9^3 = 4536.$$

---

2. Сколько есть способов так расставить десять книг на полке, чтобы определённые различные 4 книги стояли рядом?

РЕШЕНИЕ

Будем сначала рассматривать четыре отобранные книги как одну и вычислим число перестановок из семи книг

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Обратимся к определённой четвёрке книг. Их можно переставлять между собой P_4 способами

$$P_4 = 4! = 24.$$

Ответом на поставленный вопрос, согласно правилу произведения, является

$$P_7 \cdot P_4 = 5040 \cdot 24 = 120960.$$

---

3. Есть 10 белых и 5 чёрных шаров. Сколькими способами можно так выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 чёрных.

РЕШЕНИЕ

По условию 7 шаров составлены из 4-х белых и 3-х чёрных. Число способов выбора белых шаров равно

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = 210.$$

Число способов выбора чёрных шаров равно

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

По правилу умножения число всех способов равно

$$C_{10}^4 \cdot C_5^3 = 210.$$

---

4. Из города A в город B ведут 5 дорог, из города B в город C – только 3 дороги. Сколько путей ведут из A в C через город B?

<u>РЕШЕНИЕ</u>

По условию путь из А в B можно выбрать пятью способами, а из B в C – тремя. Согласно правилу произведения всего будет 3· 5 =15 путей.

---

5. Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не менее 3 человек и не больше 5-ти.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Число способов выбрать из 12-ти человек по 3:

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,9!} = 220.$$

Число способов выбрать из 12-ти человек по 4:

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\,8!} = 495.$$

Число способов выбрать из 12-ти человек по 5:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\,7!} = 792.$$

Выбор в первой подгруппе однозначно определяет выбор во второй, поэтому достаточно, опираясь на правило суммы, сосчитать общее число способов построения только одной подгруппы:

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507.$$

---

6. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают первые три места. Две команды, занявшие последние места, выбывают. Сколько есть разных вариантов результата первенства, если учитывать только положение первых трёх и последних двух команд?

<u>РЕШЕНИЕ</u>

Первые 3 места могут быть распределены A_{10}^3 способами. Из оставшихся 7-и команд две выбывают из следующего первенства. Выбывшие команды упорядочивать не надо, поэтому такой отбор может произойди C_7^2 способами. Согласно правилу произведения число разных результатов первенства равно

$$A_{10}^3 \cdot C_7^2 = 720 \cdot 21 = 15120.$$

7. Сколько существует вариантов опроса 11-ти студентов на одном занятии, если ни один из студентов не будет опрошен дважды, а порядок опроса может быть произвольным?

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим все возможные варианты:
– Ни один из студентов не был опрошен; этому случаю соответствует C_{11}^0.
– Опрошен только один студент; таких случаев может быть C_{11}^1.
– Опрошены два студента, тогда будет C_{11}^2 случаев.
– Для опроса трёх студентов существует C_{11}^3 варианта и т. д.
– Последний случай – могут быть опрошены все студенты; тогда C_{11}^{11}. По правилу суммы число всех возможных вариантов опроса равно

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{11}.$$

Можно рассуждать по-другому. Для каждого студента есть всего два случая: он будет опрошен или не будет. Всего 11 студентов. По правилу произведения общее число способов опроса равно

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11}.$$

---

8. Монету подбрасывают 5 раз. Сколько различных последовательностей из орлов и решек может получиться?

РЕШЕНИЕ

После каждого броска может быть два варианта: либо орёл, либо решка. По правилу произведения число различных вариантов бросания равно $2^5 = 32$.

---

9. Сколько есть способов выбора 4-х карт разного достоинства и разных мастей из полной колоды 36-и игральных карт?

РЕШЕНИЕ

В каждой масти есть карты одинакового достоинства – это 6, 7, 8, 9,10, валет, дама, король, туз. Пусть масти выбираемых карт идут в таком порядке: бубны, крести, пики, червы. Бубны можно выбрать 9-ю разными способами, крести – 8-ю, пики 7-ю, черви 6-ю. Согласно правилу произведения число способов выбрать из колоды четыре карты разных мастей и разного достоинства равно

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

---

10. За один день в группе проводится 5 уроков, а всего изучается 7 дисциплин. Сколько существует вариантов проведения занятий для этой группы?

РЕШЕНИЕ

Следует учесть, что в расписании дисциплины можно менять местами из 7-и дисциплин только 5, поэтому варианты расписания являются размещениями

$$A_7^5 = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

11. В партии 10 деталей, из них 4 с дефектом. Наудачу берут 3 детали. Сколько существует вариантов выбора 3-х деталей, из которых одна будет бракованной?

РЕШЕНИЕ

Число вариантов выбрать 2 стандартные детали равно C_6^2, а число вариантов выбрать одну дефектную деталь равно C_3^1. Используем правило произведения:

$$C_6^2 \cdot C_3^1 = \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{1!\,3!} = 60.$$

---

12. Из 10-и букв составлено слово "математика". Сколько перестановок можно составить из этих букв?

РЕШЕНИЕ

Буква м повторяется 2 раза, буква а – три раза, буква т – 2 раза, остальные буквы – по одному разу. Используем формулу вычисления числа перестановок с повторением:

$$\bar{P}_{10} = (P_{10})_r = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151200.$$

---

13. Сколькими способами можно так выбрать из 8-и книг 3 книги, чтобы в число отобранных книг входила одна определённая книга?

РЕШЕНИЕ

$$C_8^3 - C_7^3 = 21.$$

---

14. Дома есть фрукты: 3 апельсина, 3 банана, 2 груши. Сколькими способами можно выбрать на завтрак два фрукта разного вида?

РЕШЕНИЕ

Банан и апельсин выбираются $3{\cdot}3 = 9$ способами; апельсин и груша – $3{\cdot}2 = 6$ способами; банан и груша $3{\cdot}2 = 6$ – способами. Представленные способы различны, поэтому общее число способом равно сумме всех способов:

$$9 + 6 + 6 = 21.$$

---

15. Государственный регистрационный знак автомобиля, без кода города, составлен из трёх цифр и трёх букв русского алфавита. Сколько различных автомобильных номеров может выдать ГИБДД?

РЕШЕНИЕ

Каждую из трёх букв номера можно выбрать из 31-й буквы алфавита. Каждую из трёх цифр номера можно выбрать из 10-и цифр. Любой автомобильный номер составлен из трёх букв и трёх цифр. Согласно правилу произведения число различных номеров равно

$$31 \cdot 31 \cdot 31 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 29791000.$$

---

16. На танцевальный вечер пришли танцевать 5 девушек и 5 юношей. Сколько можно составить из них танцевальных пар?

РЕШЕНИЕ

Для 1-го юноши выбирается любая из пяти девушек. Для 2-го – любая из четырёх, для 3-го – любая из трёх и т.д. В результате получаем, что есть всего 5! вариантов подбора танцевальных пар:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

---

17. Пятеро друзей собираются путешествовать на пятиместной машине. Водительские права есть только у троих. Сколько существует вариантов разместиться друзьям в такой машине и отправиться в путешествие?

РЕШЕНИЕ

На место водителя может сесть один из трёх человек с правами. Остальные четыре места могут быть заняты 4! вариантами. Окончательно получаем, что число размещений друзей в машине равно

$$3 \cdot 4! = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

---

18. Сколько есть различных способов так рассадить 5-х девушек и 5-х юношей за круглый стол с 10-ю стульями, чтобы девушки и юноши чередовались?

РЕШЕНИЕ

Этот пример легко решается, если представить, что вокруг стола стоят разноцветные стулья. За голубым стулом идёт розовый, за розовым идёт голубой и т.д. Предположим. что юноши сели на голубые стулья, а девушки на розовые. Число таких способов рассадки равно $5! \cdot 5!$. Если юноши предпочтут розовые стулья, а девушки голубые, то добавятся ещё $5! \cdot 5!$ вариантов. Всего число вариантов рассадки молодёжи равно

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800.$$

---

19. Сколько существует способов образовать очередь из 7-и человек так, чтобы две подруги Настя и Катя стояли в этой очереди рядом?

РЕШЕНИЕ

Разобьём рассуждения на два шага. Сначала предположим, что одной из двух подруг нет, например, Оли. Тогда останется 6 человек, из которых можно образовать очередь $6!$ способами. Олю можно ввести в очередь только двумя способами, поставив её либо после подруги, либо перед подругой, поэтому общее количество способов удвоится:

$$2 \cdot 6! = 1440.$$

---

20. У студента есть 1 апельсин, 2 груши, 3 мандарина и 4 яблока. Он привык каждое утра есть один фрукт. Сколькими способами он будет использовать эти фрукты на завтрак?

РЕШЕНИЕ

Очевидно, что здесь надо использовать перестановки с повторениями:

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{(n_1!\, n_2! \cdots n_m!)} = \frac{10!}{(1!\, 2!\, 3!\, 4!)} = 12600.$$

1.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. У юноши есть 5 пиджаков, 8 рубашек, и 7 галстуков. Сколько различных нарядов можно составить из этих вещей?

2. У девушки есть 6 платьев, 5 юбок и 3 блузки. Сколько разных нарядов из своей одежды может подобрать девушка?

3. В холодильнике есть мороженое 6-ти разных наименований. На десерт можно взять либо одну любую порцию, либо две или три сразу. Сколько есть разнообразных вариантов в выборе мороженого?

4. Сколько можно составить четырёхзначных чисел, не превосходящих 6000, если использовать только нечётные цифры?

5. Рассмотрим множество S четырёхзначных чисел, состоящих из цифр 0, 1, 2, 3, 6. Ответьте на следующие вопросы.

(a) Какова мощность множества S ?

(b) Найдите мощность множества $B \subset S$, если все элементы B в своей записи не имеют повторяющихся цифр.

(c) Сколько чисел из множества B являются чётными?

(d) Сколько чисел из множества B больше 4000?

6. Хоккейная команда состоит из 18-ти игроков. Из них 11 входят в основной состав. Сколько есть вариантов сгруппировать основной состав?

7. Жюри из 5 женщин и 7 мужчин должно быть выбрано из 8 женщин и 11 мужчин. Сколько существует вариантов сформировать жюри?

8. Меню ресторана предлагает пять различных фирменных блюд. Компания посетителей ресторана состоит из 6-ти человек. Каждый из них заказывает одно фирменное блюдо. Сколько различных заказов от этой группы может получить официант?

9. В магазине продаются розы 4-х разных цветов. Сколько можно составить разных букетов из 12-и роз?

10. В магазине есть 4 вида новогодних открыток. Покупателю необходимо купить 5 открыток. Сколько вариантов выбора есть у покупателя?

11. Труппа театра состоит из 10-и актёров. Сколько существует способов выбрать из них по 4-е человека для участия в двух концертах для школьников?

Глава 2. Множества

У истоков теории множеств стоял чешский богослов, философ и математик Бернхард Больцано (1781–1848). Он дал первые определения конечным и бесконечным множествам.

Много понятий, связанных с множествами, ввёл немецкий математик Рихард Дедекинд (1831–1916). Но, создателем теории множеств является великий математик Георг Кантор (1845–1918). Он родился и до 11 лет жил в Петербурге, затем его семья переехала в Германию, поэтому он считается немецким математиком. Кантор всесторонне исследовал бесконечные множества и поставил теорию множеств на современную основу. Он первый ввёл в математику немецкое слово *menge–множество*, понятия: счётное и несчётное множества.

К 1890 г. появились приложения теории множеств в математическом анализе, геометрии и в других областях математики, после чего математическое сообщество стало рассматривать теорию множеств как самостоятельный раздел математики.

Развитие теории множеств привело к созданию новых символов-знаков. С помощью латинского слова *contineo – содержать* итальянский математик Джузеппе Пеано (1858–1932) придумал знак $\subset$ принадлежности одного множества другому. С помощью полуокружностей он ввёл знак $\cup$ объединения и знак $\cap$ пересечения множеств. Английский математик Бертран Рассел (1872–1970) преобразовал греческую букву ε в знак $\in$ принадлежности одного элемента некоторому множеству.

2.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных понятий математики. Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита, а элементы множества – строчными буквами. Если множество не содержит элементов, его называют пустым и обозначают символом $\emptyset$. Символом $\in$ обозначают отношение принадлежности. Запись $x \in X$ означает, что элемент x принадлежит множеству X.

Определение 1. ***Множество*** – это совокупность определённых объектов, которые называют ***элементами***.

Элементы множества могут быть разнообразны: буквы, числа, функции, точки, углы и т. д. Сами множества могут выступать в роли элементов другого множества, которое в этом случае называют ***семейством***.

Определение 2. Число элементов в конечном множестве X называют ***мощностью*** этого множества и обозначают как $|X| = n$.

Определение 3. Множество Y называют ***подмножеством*** множества X, если любой элемент из Y принадлежит X:

$$\forall\, x \in Y \Rightarrow x \in X \Rightarrow Y \subseteq X.$$

Если $Y \subseteq X$, но $X \neq Y$, множество Y называют ***собственным подмножеством*** X; в этом случае обозначение имеет вид $Y \subset X$.

В теории множеств принято считать, что множество – это подмножество самого себя: $X \subseteq X$. Такое правило называют ***рефлексивностью***.

Пустое множество $\emptyset$ – это тоже подмножество множества X.

Возможны два логически эквивалентных определения понятия равенства множеств.

Определение 4. Множества X и Y называют равными $X = Y$, если они имеют одинаковую мощность $|X| = |Y|$ и состоят из одинаковых элементов.

Определение 4'. Два множества называются равными, если каждое из них содержится в другом.

Из последнего определения следует, что для доказательства равенства множеств $A = B$ необходимо и достаточно проверить истинность двух ***импликаций***:

$$\{x \in A \Rightarrow x \in B\} \text{ и } \{x \in B \Rightarrow x \in A\}.$$

Пример. Даны два множества

$$A = \{n: \ \ n^2 - \text{нечётное натуральное число}\},$$
$$B = \{n: \ \ n - \text{нечётное натуральное число}\}.$$

Покажем, что эти множества равны. Возьмём $\forall \ \ n \in A$, тогда n^2 – нечётное натуральное число, значит n – тоже нечётное натуральное число и $n \in B$. Но, если n –нечётное натуральное число, то n^2 – нечётное натуральное число, поэтому $n \in A$. В силу произвольности выбора элемента n приходим к выводу

$$B \subset A \text{ и } A \subset B \Rightarrow A = B.$$

Обычно множества, которые используют в тех или иных задачах, являются подмножествами некоторого основного фиксированного множества U. Такое множество U называют ***универсальным*** (*universal*) ***множеством*** или ***универсумом***.

Примеры универ́сумов: множество всех точек геометрического пространства, множество всех отрезков на плоскости, числовые множества.

КЛАССИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел,
$\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел,
$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел,
$\mathbb{C}$ – множество компле́ксных чисел.

2.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

1. ***Перечисление элементов***: $M = \{a, b. c, \cdots, z\}$. Используется для множеств маленькой мощности.

Если множество имеет большую мощность или оно бесконечно, тогда способы задания этого множества основаны ***на принципе абстракции***.

Обратимся к способам, основанным на этом принципе.

2. Характеристическое свойство некоторого множества записывается в виде предложения $P(x)$, называемого ***предикатом***: $M = \{x\colon P(x)\}$. Предикатом $P(x)$ – может быть условие, выраженное в форме логического утверждения.

3. Элементы многих множеств могут быть построены с помощью ***порождающей процедуры*** f: $M = \{x\colon x \coloneqq f\}$; f – это процедура, которая в процессе работы строит элементы множества M.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ.

1) $M = \{x\colon x -$ нечётное целое число больше единицы$\}$;

2) $M = \{x\colon x -$ все гласные буквы английского алфавита$\}$;

3) $M = \{x\colon x^2 + x - 2 = 0\}$, $N = \{-2, 1\}$, $K = \{-2, -2, 1, 1\}$.

Три множества из 3-го примера равны друг другу: $M = N = K$, так как элементы не зависят от того, в каком порядке они заданы, сколько раз повторяются и каким способом они получены.

4) $M = \{2, 3, 4, 5\}$, $N = \{5, 7, 8\}$, $K = \{M, N\}$.

Множества M и N – это числовые множества, а элементами множества K являются непересекающиеся множества M и N. Можно сказать, что K – это ***семейство***.

Множество может быть задано также с помощью операций над множествами.

2.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. ***Объединением*** двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Множество C состоит из элементов, множества A или B и их общих элементов.

2. ***Пересечением (произведением)*** двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cap B = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Множество C состоит из элементов, принадлежащих двум множествам A и B.

3. ***Разностью*** двух множеств A и B называется множество

$$C = A \backslash B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Множество C состоит из тех элементов A, которые не принадлежат B. Для подмножества A некоторого ***универсума*** U разность $U \backslash A$ можно рассматривать как ***дополнение*** A до U. Такое дополнение обычно обозначают в виде

$$\bar{A} = \{x\colon (x \notin A)\}.$$

4. ***Симметричной разностью*** двух множеств A и B называется множество

$$C = A \,\Delta\, B = A \oplus B = \{x \colon x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x \colon x \in B \text{ и } x \notin A\}.$$
Симметричная разность состоит из элементов, лежащих либо в A, либо в B.

Пример 1. Даны три множества:

$$A = \{1, 3, 5, 7\};\ B = \{2, 4, 6, 8\};\ C = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

Построим множества $A \cup C,\ B \cap C,\ A \setminus C,\ B \,\Delta\, C$.

$$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 2, 4\};\quad B \cap C = \{2, 4\};\quad A \setminus C = \{7\};$$

$$B \,\Delta\, C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{6, 8\} \cup \{1, 3, 5\} = \{6, 8, 1, 3, 5\}.$$

Пример 2. Даны два множества:

$$A = \{x \colon 1 < x \le 12\} \text{ и } x \text{ – чётное целое число}\};$$

$$B = \{x \colon 1 < x \le 12\} \text{ и } x \text{ –целое число, кратное трём}\}.$$

Докажем, что $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Доказательство

Прежде всего отметим, что заданные множества A и B принадлежат универсуму U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},\ B = \{3, 6, 9, 12\} \Rightarrow A \cap B = \{6, 12\} \Rightarrow$$

$$\overline{(A \cap B)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\},\ \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} \Rightarrow$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} \Rightarrow$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Можно доказать, что последнее равенство верно для любых множеств A и B.

2.4. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ

Предположим, что задан некоторый универсум U и в нём есть три множества $A, B, C \subset U$. Для таких множеств справедливы следующие свойства (законы):

1. ***Идемпотентность***

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

2. ***Коммутативность***

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

3. ***Ассоциативность***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4. ***Дистрибутивность***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5. ***Законы де Моргана***

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\ \bar{B},\qquad \overline{A\cup B}=\bar{A}\ \cap\ \bar{B}.$$

6. ***Поглощение***

$$(A\cap B)\cup A=A,\qquad (A\cup B)\cap A=A.$$

7. ***Свойство нуля***

$$A\cup\emptyset=A,\qquad A\cap\emptyset=\emptyset.$$

8. ***Свойство единицы***

$$A\cup U=U,\qquad A\cap U=A.$$

9. ***Свойства дополнения***

$$A\cup\bar{A}=U,\ \ A\cap\bar{A}=\emptyset,\quad \bar{U}=\emptyset,\qquad \bar{\emptyset}=U;\ \ \bar{\bar{A}}=A.$$

10. ***Свойство разности***

$$A\backslash B=A\cap\bar{B}.$$

Очевидно, что в свойствах $1-6$, каждое второе тождество получится из первого, если заменить объединение $\cup$ на пересечение $\cap$. Такое соответствие тождеств называется ***законом двойственности***, а соответствующие тождества называют ***двойственными***.

Пример. Докажем, используя законы алгебры множеств, что для любых множеств A и B справедливо равенство

$$A\,\Delta\,B=(A\ \cup\ B\,)\cap\ \overline{(A\ \cap\ B\,)}.\qquad (1)$$

Доказательство. По определению симметричная разность – это

$$A\,\Delta\,B=(A\ \cap\ \bar{B}\,)\cup(\,B\ \cap\ \bar{A}\,).\qquad (2)$$

Докажем, что из 1-о равенства следует 2-е.

Согласно закону де Моргана

$$\overline{(A\ \cap\ B\,)}=(\bar{A}\ \cup\bar{B}\,),$$

поэтому $(A\ \cup\ B\,)\cap\ \overline{(A\ \cap\ B\,)}=(A\ \cup\ B\,)\cap\ (\bar{A}\ \cup\bar{B}\,)$.

Используем законы дистрибутивности и коммутативности:

$$(A\ \cup\ B\,)\cap\ (\bar{A}\ \cup\bar{B}\,)=\big((A\ \cup\ B\,)\cap\bar{A}\big)\cup\big((A\ \cup\ B\,)\cap\bar{B}\big)=$$

$$\big((A\cap\bar{A}\,)\cup(B\cap\bar{A})\big)\cup\big((\bar{B}\cap A)\cup(\bar{B}\ \cap B)\big)=\big(\emptyset\cup(B\cap\bar{A})\big)\cup\big((\bar{B}\cap A)\cup\emptyset\big)=$$

$$=(\bar{B}\cap A)\cup(B\cap\bar{A})=A\,\Delta\,B,$$ что и требовалось доказать.

2.5. МОЩНОСТЬ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Напомним, что число элементов в конечном множестве X называют мощностью этого множества и обозначают как $|X|=n$.

Следующие простые формулы дают возможность вычислить мощности объединения, разности и симметричной разности двух конечных множеств.

Мощность объединения. ***Формула включений и выключений***.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Доказательство. Множество $A \cup B$ состоит из трёх подмножеств:

$$A \backslash B,\ A \cap B,\ B \backslash A; \qquad A \cup B = A \backslash B\ \cup\ A \cap B \cup B \backslash A.$$

Запишем A и B в виде

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \quad \text{и} \quad B = (B \backslash A) \cup (A \cap B).$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$|A \backslash B| = m,\ \ |A \cap B| = p,\ \ |B \backslash A| = n.$$

Тогда мощности множеств A и B представимы в виде

$$|A| = m + p, \qquad |B| = n + p.$$

$$A \cup B = A \backslash B\ \cup\ A \cap B \cup B \backslash A \Rightarrow\ |A \cup B| =\ |A \backslash B| +\ |A \cap B|\ +\ |B \backslash A|,$$

$$|A \cup B| = m +\ p + n = (m + p\ ) +\ (n + p) - p \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

что и требовалось доказать.

С помощью математической индукции полученная формула обобщается на любое конечное число множеств. Например, можно доказать справедливость следующей формулы

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Мощность разности.

$$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|.$$

Мощность симметричной разности.

$$A\ \Delta\ B = A \oplus B\ =\ |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

Пример. Каждый из 63 студентов 1 курса изучает в университете математику и может дополнительно изучать специальный курс химии и специальный курс почвоведения. Известно, что 16 из них слушает спец. курс по химии, 37 – спец. курс почвоведения, 5 студентов посещают оба спец. курса.

Найдём сколько студентов не ходят на спец курсы. Для этого введём множества

$$A = \{\text{ студенты, слушающие спец. курс по химии}\},$$

$$B = \{\text{ студенты, слушающие спец. курс почвоведения}\}.$$

По условию $|A| = 16,\ |B| = 37,\ |A \cap B| = 5 \Rightarrow$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 37 - 5 = 48\ \Rightarrow$$

$$63 - 48 = 15 \text{ студентов не ходят на спецкурсы.}$$

Определение. Два множества A и B называются ***эквивалентными*** $A \sim B$, если они имеют одинаковую мощность.

Для выяснения эквивалентности множеств можно сосчитать количество элементов в каждом множестве, но такой способ обычно неудобен. Можно рассуждать иным способом. Если между всеми элементами множеств A и B есть взаимно-однозначное соответствие, тогда у множеств одинаковая мощность.

2.6. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Математика есть единая
симфония бесконечности.
Георг Кантор

Для приложений дискретной математики наиболее важны конечные множества. Характерным свойством любого конечного множества является известное с античных времён свойство: часть меньше целого. У бесконечных множеств такое свойство отсутствует, но понятия мощность и эквивалентность тоже используют при работе с бесконечными множествами. Мощность бесконечных множеств A часто обозначают как $card\ (A)$.

Г. Кантор – первый математик в истории человечества, который совершенно самостоятельно обнаружил уникальные свойства бесконечных множеств. Доказал, что не все бесконечные множества одинаково велики. Удивительно, но именно иррациональные числа так заполняют числовую ось, что она является непрерывной. Между любыми двумя сколько угодно близкими действительными числами есть бесконечное множество других действительных чисел.

Есть не меньше двух различных видов бесконечных числовых множеств. Например, ***счётная*** бесконечность рациональных чисел и ***несчётная*** бесконечность действительных чисел. Мощность счётного множества меньше мощности несчётного множества. Кантор (1874) доказал, что множество всех действительных чисел на отрезке $[0; 1]$ несчётно. Мощность такого множества он назвал ***континуум***, так как несчётные множества тесно связаны с математическим понятием *непрерывность*, а на латинском языке это слово пишется как *continuum*. В математике очень давно принято вводить математические понятия с помощью латинской терминологии.

Неизвестно существуют ли множества, мощность которых больше мощности счётного множества, но меньше мощности континуума. Есть только предположение – ***континуум-гипотеза*** Кантора, что таких множеств нет. В 1963 году американский математик Пол Коэн доказал, что на данном этапе развития математики "континуум-гипотеза" не может быть ни доказана, ни опровергнута.

Представим, без доказательства, несколько интересных теорем, связанных с бесконечными множествами.

Теорема 1. Если к бесконечному множеству F прибавить конечное или бесконечное множество B, то новое множество будет эквивалентно исходному бесконечному множеству F.

Теорема 2. Множество точек пространства независимо от его размерности имеет мощность континуум.

Теорема 3. Для любого множества есть множество большей мощности.

Теорема 4. Множество всех действительных функций, заданных на отрезке $[0; 1]$, имеет мощность большую, чем континуум.

Иногда можно услышать или прочесть такие выражения: *потенциальная бесконечность, актуальная бесконечность*. Возникает вопрос: "Что это такое"?

В математической логике эти понятия обычно не используются, но их можно встретить в философии. ***Потенциальная бесконечность*** – это процесс, который никогда не заканчивается, но в каждый момент включает в себя только конечное число элементов, которое всегда можно дополнить. ***Актуальная бесконечность*** – это бесконечное множество.

2.7. ГРУППЫ

Одним из видов множеств с одной алгебраической операцией является ***группа***. На основе этого понятия родилась теория групп, которая имеет широкую область применения и не только в математике.

Определение 1. Множество G называется ***группой***, если для него выполняются следующие условия.

1. В множестве определена одна алгебраическая операция.
2. Результат операции принадлежит множеству G – ***условие замкнутости.***
3. Заданная операция ***ассоциативна***:

$$\forall\, a, b, c \in G \;\Rightarrow\; (a * b) * c = a * (b * c).$$

4. В множестве есть ***нейтральный элемент*** e:

$$e * a = a * e = a.$$

5. Для любого элемента группы в ней существует ***обратный элемент***:

$$\forall\, a \in G \;\exists\, a^{-1} \in G \Rightarrow a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Перечисленные выше условия часто называют ***групповыми аксиомами***.

Если в группе определена операция сложения, такая группа называется ***аддитивной группой***. Если определена операция умножения, группа называется ***мультипликативной.***

Группа G называется ***коммутативной*** или ***абелевой***, если операция, определённая в этой группе, коммутативна: $\forall\, a, b \in G \;\Rightarrow\; a * b = b * a$.

Определение 2. Группы A и B называются ***изоморфными*** $A \cong B$ относительно тех операций, которые в них определены, если между элементами этих групп установлено следующее взаимно-однозначное соответствие:

$$a_i * a_k = a_l, \quad b_i * b_k = b_l \;\Longrightarrow\; a_i \mapsto b_i, \qquad a_k \mapsto b_k, \quad a_l \mapsto b_l.$$

Мощности ***изоморфных групп*** всегда одинаковы.

Изоморфные группы могут отличаться друг от друга только природой своих элементов и названиями операций в этих группах. Но всё, что доказано для одной из двух изоморфных групп, без использования природы их элементов, автоматически распространяется на другую изоморфную ей группу. Например, с помощью логарифмирования и благодаря изоморфизму процесс умножения величин заменяется на сложение.

ПРИМЕРЫ ГРУПП

1) К ***аддитивным группам*** относятся следующие множества: все целые числа, все рациональные числа, все действительные числа, все комплексные числа, все чётные числа, все векторы трёхмерного пространства, все матрицы одинаковой размерности.

2) К ***мультипликативным группам*** относятся: всё множество действительных чисел без нуля, все рациональные числа без нуля, все комплексные числа без нуля, множество невырожденных квадратных матриц.

3) ***Изоморфными группами*** являются множество векторов и множество их координат.

Определение 3. Множество G называется ***полугруппой***, если для него выполняются следующие условия.

1. В множестве определена одна алгебраическая операция.
2. Результат этой операции принадлежит множеству G – ***условие замкнутости.***
3. Заданная операция ***ассоциативна***:

$$\forall\, a, b, c \in G \;\Rightarrow\; (a * b) * c = a * (b * c).$$

2.8. ПОДГРУППЫ

Определение. Пусть множество A – группа, множество $B \subset A$ и является группой с той же операцией, что и в A. В этом случае B называется ***подгруппой***.

СВОЙСТВА

1. Пересечение двух подгрупп некоторой группы – это подгруппа из той же группы.
2. Объединение двух подгрупп является подгруппой только в случае, когда одна из них содержит другую.
3. Объединение ***возрастающей цепи*** подгрупп (предыдущая – подгруппа последующей) является подгруппой.
4. ***Тривиальная группа*** (несобственная подгруппа группы A) – ***нейтральный*** элемент этой группы..

ПРИМЕРЫ ПОДГРУПП

1) К аддитивным подгруппам аддитивной группы действительных чисел относятся: множество целых чисел и множество рациональных чисел.

2) К мультипликативным подгруппам мультипликативной группы относятся: множество диагональных матриц, множество матриц с положительным определителем и множество ортогональных матриц A $(A^T = A^{-1})$.

3) Аддитивная группа целых чисел – это подгруппа группы рациональных чисел, а множество рациональных чисел – это подгруппа действительных чисел.

2.9. КОЛЬЦА

Определение. Множество R с двумя определёнными в нём операциями сложения и умножения, называется ***кольцом***, если выполняются следующие условия.

1. R – абелева (коммутативная) группа относительно сложения.
2. Выполняется ***условие замкнутости***: $\forall\ a, b \in G \ \Rightarrow\ a * b \in G$.
3. Выполняется закон дистрибутивности:

$$\forall\ a, b, c \in G \Rightarrow a * (b + c) = a * b + a * c.$$

Кольцо R называется ***ассоциативным***, если для $\forall\ a, b, c \in R$ верно равенство

$$(a * b) *\ c = a * (b *\ c).$$

Кольцо R называется ***коммутативным***, если для $\forall\ a, b \in R$ верно равенство

$$a * b = b * a.$$

Если выполняются оба равенства, кольцо называется ***ассоциативно- коммутативным.***

ПРИМЕРЫ КОЛЕЦ

1) Множество целых чисел с операциями сложения и умножения – это кольцо с единицей.

2) Множество квадратных матриц одинакового порядка с операциями сложения и умножения матриц – это некоммутативное кольцо с единичной матрицей E.

2.10. ПОЛЯ

Определение. ***Поле*** F – это особый класс колец. На поле заданы две бинарные ассоциативные и коммутативные операции – сложение и умножение, связанные между собой законом дистрибутивности. Значит, для $\forall\ a, b, c \in F$ выполняются следующие равенства.

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc),$$

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba,$$

$$c(a + b) = ca + cb.$$

В поле должен быть нулевой элемент i:

$$i + a = a, \qquad a + i = a.$$

Для каждого ненулевого элемента a в поле должен быть противоположный элемент $-a$:

$$a + (-a) = i.$$

В поле должен быть единичный элемент e, для которого $a \cdot e = a$.
Для каждого ненулевого элемента a в поле должен быть такой обратный элемент a^{-1}, что $a \cdot a^{-1} = e$.

Согласно определению поля его элементы образуют коммутативную группу относительно операции сложения, а все ненулевые элементы – коммутативную группу относительно умножения.

Примерами полей является множество рациональных чисел и множество действительных чисел.

2.11. УПРАЖНЕНИЯ

1. Перечислите элементы следующих множеств:

$$A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } 10 \leq x \leq 17\};\ B = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } x^2 < 24\};$$

$$C = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\};\quad D = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\}.$$

2. Определите с помощью предикатов следующие множества:

$$S = \{2, 5, 8, 11 \cdots\},\quad T = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \cdots\right\}.$$

3. Возьмём в качестве универсального множество $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ и его подмножества $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, t, v\}$, $C = \{p, s, t, u\}$.

Найдите элементы следующих восьми множеств.

$B \cap C$; $A \cup C$; $\bar{C}$; $A \cap B \cap C$; $\overline{(A \cup B)}$; $B \backslash C$; $B \triangle C$; $(A \cup B) \cap (A \cap C)$.

4. Даны подмножества целых чисел:

$$A = \{3n : n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq 4\};\ B = \{2n : n \in \mathbb{Z}\};\ C = \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ и } n^2 \leq 100\}.$$

Запишите через предикат множество $A \backslash B$.

Выразите через A, B, C подмножества D_1, D_2, D_3, D_4:

$D_1 -$ множество всех нечётных целых чисел;

$D_2 = \{-10, -8, -8 - 4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;

$D_3 = \{6n:\ n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq 2\}$;

$D_4 = \{-9, -7, -5 - 3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

5. С помощью алгебры множеств докажите следующие тождества:

(a) $\overline{(A \cap \bar{B})} \cup B = \bar{A} \cup B$; **(b)** $\overline{\left(\bar{A} \cap \overline{(B \cup C)}\right)} \cup B = A \cup B \cup C$;

(c) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \emptyset$;

(d) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$; **(e)** $A \triangle A \triangle A = A$.

Глава 3. Логика

Логика – наука о законах мышления человека и формах, в которых выражаются различные мыслительные операции. Само слово *логика* произошло от греческого $\lambda o\gamma o\zeta$ – *учение, наука*. Логика является и частью философии, и частью математики, один из разделов которой называется математической логикой, куда входит формальная логика. С её помощью можно проверить правильность или ошибочность рассуждений в математике и других науках независимо от их содержания.

Трактовка логики в древнегреческой философии представлена в работе «Органон» (335 г. до н. э.), автор – Аристотель (310–230 до н. э.). Он впервые сформулировал основные законы правильного мышления: закон ***тождества***, закон ***непротиворечивости***, закон ***исключённого третьего***. Через две тысячи лет добавился четвёртый закон ***достаточного основания***. Аристотель ввёл понятие ***логическая пропозиция***, которое затем стало логическим ***высказыванием*** или ***утверждением.***

Первые значительные попытки превращения логики в математическую науку осуществил немецкий учёный ***Готфрид Лейбниц*** (1646–1716). Большой вклад в современную математическую логику внёс немецкий математик и философ ***Готлоб Фреге*** (1848–1925). Он ввёл первые аксиомы логики высказываний и предикатов.

Особое место в развитии логики заняли английские математики. Они внесли большой вклад в основание формальной логики.

Огюстес де Морган (1806–1871) – шотландский математик и логик, профессор университетского колледжа в Лондоне.

Джордж Буль (1815–1864) – выдающийся английский математик и логик. В 1847 г. опубликовали его труд «Математический анализ логики». Буль первый стал рассматривать логику как алгебраическую систему.

Джон Венн (1834–1923) – английский математик, философ, логик и литератор. Преподавал логику и мораль в Кембридже, был членом Лондонского королевского общества и англиканским священником. Разработал специальные диаграммы, ставшие популярными только в XIX веке. В 1847 г. он первый стал применять символическую логику.

Чарльз Доджсон (***Льюис Кэрролл***) (1832–1898) – английский математик и писатель. Разработал графическую технику решения логических задач, которая оказалась гораздо удобнее диаграмм великого Леонарда Эйлера и Джона Венна. Доджсон написал двухтомник «Символическая логика», в котором изложил все свои достижения и умозаключения в области логики.

Бертран Рассел (1872–1970) – английский философ, логик, общественный деятель. Внёс большой вклад в математическую логику и теорию познания. Создал трёхтомный труд по логике и философии математики.

Алан Тьюринг (1912–1954) – выдающийся английский математик, который сделал большой вклад в логику, информатику и в создание искусственного интеллекта.

3.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Основным объектом математической логики является ***высказывание*** или ***утверждение*** – некоторое предложение, которое может быть классифицировано либо как истинное, либо как ложное. Рассмотрим этот важный объект логики подробнее.

Определение 1. ***Высказыванием*** называется утверждение, которое может принимать только два значения: истина – t ($true$) или ложь – f ($false$).

Каждое высказывание обычно обозначается некоторой буквой. Высказывания делятся на ***простые*** и ***составные***.

Определение 2. Высказывание называется ***простым*** или ***примитивным***, если оно не является комбинацией простейших высказываний.

Определение 3. Составное высказывание – это результат действия ***логических операций*** на простые высказывания. Истинность или ложность составного высказывания полностью определяется истинностью или ложью составляющих её простых высказываний.

Способы построения составных высказываний называются ***исчислением высказываний.***

3.2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И СВОЙСТВА

Для определения значения истинности составных высказываний следует разобраться со смыслом логических операций. Необходимым помощником в этом являются ***таблицы истинности.***

Всего есть 16 логических операций. Остановимся на пяти основных.

Определение 1. ***Отрицание высказывания*** p –это высказывание $\neg p$ (не p) (табл. 1).

Таблица 1

p	*не* $p = \neg p$
t	f
f	t

Если высказывание p истинно, то $\neg p$ ложно. Если высказывание p ложно, то $\neg p$ истинно.

Примеры.

1) Есть высказывание p : "На Марсе есть люди", тогда $\neg p$: "На Марсе нет людей".

2) Высказывание g : "Некоторых студентов не было на практике". Высказывание: "Некоторые студенты были на практике" не является отрицанием g. Эти два высказывания не отрицают друг друга, что невозможно для операции отрицания. Отрицанием g будет $\neg g$: "Все студенты были на практике".

Определение 2. ***Конъюнкцией*** или ***логическим умножением*** двух высказываний p и q называется операция, результатом которой является составное высказывание. Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе части составного высказывания (табл.2). Это определение согласуется со смыслом союза "и".

Обозначение конъюнкции может быть различным: $p \wedge q$, $p \& q$, $p \cdot q$.

Таблица 2

p	q	$p \wedge q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

Определение 3. ***Дизъюнкцией*** или ***логическим сложением*** высказываний p и q называется операция, в результате которой появляется составное высказывание. Оно будет истинным, если хотя бы одна из его частей истинна (табл.3).

Обозначение дизъюнкции может быть различным: $p \vee q$, $p + q$.

Таблица 3

p	q	$p \vee q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

Определение 4. Два составных высказывания называются ***логически эквивалентными*** или ***логически тождественными,*** если они построены из одинаковых простых утверждений, но разными способами. При этом, принимают одинаковые значения истинности на любом одинаковым наборе значений истинности своих компонент.

Логическое высказывание можно заменить на эквивалентное ему высказывание. Логическая эквивалентность высказываний обозначается значком $\Leftrightarrow$. Ниже (табл. 4) приведены примеры эквивалентных высказываний.

Таблица 4

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$\neg(\neg p = p) \Leftrightarrow p$	--------------------------
$p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$	$p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$
$p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Определение 5. ***Логическим следованием или импликацией*** называется операция, результатом которой является ***условное высказывание*** "если $p \cdots$ то q". Высказывание p называется ***предпосылкой*** (***посылкой***), а высказывание q – ***заключением*** (***результатом***). Для обозначения условного высказывания

используется символ ***импликации*** "⇒" или "→", благодаря чему условное высказывание записывается коротко в виде $p \Rightarrow q$ или $p \rightarrow q$.

Есть различные варианты прочтения $(p \Rightarrow q)$: "из p следует q", "p влечёт q", "p достаточно для q", " q необходимо для p ".

В логике условное высказывание $p \Rightarrow q$ считается ложным, только если предпосылка p истина, а заключение q ложно.

Таблица 5 – таблица истинности условного высказывания или импликации.

Таблица 5

p	q	$p \Rightarrow q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

Высказывание $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ называется ***противоположным*** или ***контрапозитивным*** к высказыванию $(p \Rightarrow q)$.

Пример 1. Покажем, что высказывание $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ логически эквивалентно высказыванию $(p \Rightarrow q)$.

Решение. Построим совместную таблицу высказываний (табл. 6).

Таблица 6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
t	t	f	f	t	t
t	f	f	t	f	f
f	t	t	f	t	t
f	f	t	t	t	t

Два последних столбца совпадают, поэтому $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Пример 2. Есть предложение: "Если завтра будет снег или дождь, то надо захватить зонт и надеть пальто или свитер". На основе этого предложения построим составное высказывание.

Решение. Введём обозначения:

a – "завтра будет дождь"; b – "завтра будет снег"; c – "захватить зонт";

d – "надеть пальто"; e – "надеть свитер".

Теперь легко написать составное высказывание, соответствующее исходному предложению:

$$a \vee b \Longrightarrow \big(c \wedge (d \vee e)\big).$$

Приоритет. В логике, как и в арифметике, у операций есть приоритет. Если не стоят дополнительно скобки для смены приоритета, то первой идёт операция отрицания, затем конъюнкция, за ней – дизъюнкция, далее – импликация.

Свойства операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции высказываний представлены в таблице 7.

Таблица 7

1	$p\wedge q = q \wedge p$	$p\vee q = q \vee p$	**коммутативность** – результат операции не зависит от порядка вхождения высказываний
2	$(p \wedge q) \wedge r =$ $= p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r =$ $= p \vee (q \vee r)$	**ассоциативность**– результат операции не зависит от порядка её выполнения
3	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$	**идемпотентность** – результат операции не меняет исходного высказывания
4	$p \wedge (q \vee r) =$ $= (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) =$ $= (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	**дистрибутивность** – результат операции 1 над результатом операции 2 с высказываниями равен результату операции 1 над каждым из высказываний операции 2
5	$p\wedge (p \vee q) = p$	$p\vee (p \wedge q) = p$	**поглощение** – бóльшая по числу высказываний конъюнкция (дизъюнкция) поглощается меньшей
6	$\neg(p \wedge q) =$ $= \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) =$ $\neg p \wedge \neg q$	**законы де Моргана** – отрицание конъюнкции (дизъюнкции) высказываний равно дизъюнкции (конъюнкции) отрицаний этих высказываний.
7	$\neg \neg p = p$	-----------	**инволюция** – отрицание отрицания высказывания равно исходному высказыванию
8	$p \wedge \neg p = f,$ $\neg f = t$	$p \vee \neg p = t,$ $\neg t = f$	законы дополнения
9	$p \wedge t = p,$ $p \wedge f = f$	$p \vee f = p,$ $p \vee t = t$	законы тождества

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Определепление 6. Высказывание называется ***тавтологией*** (тождественно истинным), если оно истинно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Определепление 7. Высказывание называется ***контрадикцией*** (противоречием), если оно ложно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Определепление 8. Высказывание называется ***удовлетворительным***, если оно хотя бы один раз истинно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Исчисление высказываний и теория множеств имеют дело с одинаковыми понятиями, но с различных точек зрения (табл. 8).

Таблица 8

Теория множеств	**Математическая логика**
множество	высказывание
объединение	дизъюнкция
пересечение	конъюнкция
дополнение	отрицание
универсальное множество	тавтология
пустое множество	противоречие

В математической логике, как и в теории множеств, справедлив принцип двойственности.

Принцип двойственности. Если в двух логически эквивалентных высказываниях заменить дизъюнкцию на конъюнкцию, тавтологию на противоречие и наоборот то полученные таким образом новые два высказывания также будут логически эквивалентны.

3.3. ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

Одним из основателей современной логики является известный немецкий математик Готлоб Фреге. Он родился в Померании в семье математика. Окончил Йенский университет, через два года защитил диссертацию по математике в Геттингёнском университете и стал профессором.

Фреге изобрёл и аксиоматизировал логику предикатов, изобрёл кванторы, которые теперь используются повсюду. Он был уверен, что математику можно свести к логике и посвятил этой идее книгу «Основы арифметики» (1884). В ней все арифметические понятия выведены автором на основе логики.

Идеи Фреге в области философии и логики поддерживал и распространял знаменитый английский учёный Бертран Рассел. Значимость вклада Фреге в логику многие математики сравнивают с вкладом самого Аристотеля. В англоязычном мире труды Фреге стали широко известны только после 2-й мировой войны благодаря тому, что многие немецкие философы и математики были вынуждены эмигрировать в США.

ПРЕДИКАТ

Определение 1. ***Предикатом*** называется высказывание или утверждение, содержащее переменные. Предикат принимает значения истины или лжи в зависимости от значений этих переменных.

Пример 1. Выражение "x – целое число, для которого верно $x = x^2$", является предикатом, так как оно истинно при $x = 0$ или $x = 1$ и ложно в других случаях.

При работе с предикатами можно использовать логические операции и логические символы, к которым относятся два квантора: $\forall$–квантор всеобщности и $\exists$ – квантор существования. Выражение "для всех" заменяется символом $\forall$, слово "найдётся" заменяется на символ $\exists$, $\overline{\exists}$ – "не найдётся". Включение кванторов в предикат превращает его в истинное или ложное высказывание.

Пример 2. Задан предикат $P(x)$: "x – целое число и $x^2 = 16$". Выразим словами высказывание $\exists\, x$: $P(x)$ и определим его истинное значение.

Решение. Последнее высказывание означает, что найдётся такое целое число x, которое, удовлетворяет равенству $x^2 = 16$. Высказывание верно при $x = 4$ или $x = -4$, поэтому высказывание $\exists\, x$: $P(x)$ истинно.

Пример 3. Задан предикат $P(x)$: "x – вещественное число и $x^2 + 1 = 0$". Выразим словами высказывание $\exists\, x$: $P(x)$ и определим его истинное значение.

Решение. Последнее высказывание означает, что найдётся такое действительное число x , для которого верно равенство $x^2 + 1 = 0$. Поскольку для $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, то высказывание $\exists\, x$: $P(x)$ ложно. Полученный результат можно коротко записать двумя способами:

$$\overline{\exists}\, x:\ P(x) \Leftrightarrow \forall x:\ \neg P(x).$$

В общем случае для любого предиката справедливы две пары логических эквивалентов:

$\overline{\exists}\, x$: $P(x) \Leftrightarrow \forall x$: $\neg P(x)$; не $\forall\, x$: $P(x) \Leftrightarrow \exists x$: $\neg P(x)$.

Пример 4. Высказывание $\forall\, x \in \mathbb{R}\quad \exists\, y \in \mathbb{R}$: $x + y = 0$ означает, что для любого действительного числа x найдётся единственное противоположное число $y = -x$, при котором равенство $x + y = 0$ станет верным. Это высказывание истинно.

Пример 5. Высказывание $\exists\, y \in \mathbb{R}\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$: $x + y = 0$ означает, что есть такое действительное число y , что для любого x верно равенство $x + y = 0$. Это высказывание ложно.

3.4. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Главным трудом великого Евклида (325 – 265 до н. э.) является его знаменитый труд «Начала», в котором он заложил фундамент современной математики. «Начала» – это образец математического трактата, в котором строго и с помощью аксиоматики изложены основные положения математической науки. Евклиду принадлежат два следующих великих нововведения:

1) Любое математическое утверждение истинно, если оно выводится с помощью последовательности логических шагов на основе того, что уже известно.

2) Процесс доказательства должен начинаться с исходных утверждений, которые доказывать не надо.

Необходимость доказательства появляется, когда надо установить истинность высказывания вида $(A \Rightarrow B)$. Главным инструментом в процессе построения правильного доказательства являются ***тавтологические импликации***.

Процесс доказательства можно формализовать следующим образом.

Выводом называется утверждение, которое для данного множества высказываний (***посылок***) $P_1, P_2, \cdots, P_n$ даёт возможность получить новое высказывание Q, называемое ***заключением***.

Вывод $P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$ считается правильным, если заключение истинно в случае истинности всех посылок: $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Доказана следующая теорема.

Теорема. Вывод $P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$ будет правильным только когда высказывание $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$ является тавтологией.

В математике есть несколько стандартных методов доказательства, куда входят: ***прямое рассуждение***, ***обратное рассуждение***, ***метод "от противного"*** и ***математическая индукция***.

1. Прямое рассуждение. Предполагаем, что высказывание A истинно и на основании этого показываем истинность высказывания B. Здесь используется истинность импликации $(A \Rightarrow B)$.Такой способ доказательства не работает, когда B ложно.

2. Обратное рассуждение. Предполагаем, что высказывание B ложно и на основании этого показываем ложность высказывания A. Здесь проверяется истинность импликации $(\neg B \Rightarrow \neg A)$, из чего следует истинность эквивалентной импликации $(B \Rightarrow A)$.

3. Метод "от противного". Предполагаем, что высказывание A истинно, а высказывание B ложно, используя логические рассуждения, приходим к противоречию. Такой метод доказательства тоже основан на том, что импликация $(A \Rightarrow B)$ принимает ложное значение только, если A истинно. а B ложно.

Пример 1. Докажем прямым рассуждением, что произведение двух нечётных чисел тоже всегда нечётное число.

Доказательство. Пусть x и y – нечётные числа: $x = 2m + 1, y = 2k + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow xy = (2m + 1)(2k + 1) = 2(2mk + m + k) + 1.$$

Из правой части последнего равенства вытекает, что xy – нечётное число.

Пример 2. Докажем обратным рассуждением, что если m^2 нечётно, то и число m нечётно.

Доказательство. Отрицанием высказывания о нечётности m^2 является высказывание " m^2 чётно". Высказывание о чётности m является отрицанием высказывания "m нечётно", поэтому покажем, что из чётности m следует чётность m^2:

$$m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2).$$

Пример 3. Докажем "методом от противного", что число $\sqrt{2}$ –является иррациональным числом, то есть его невозможно записать в виде несократимой рациональной дроби m/n.

Доказательство. Предположим обратное, тогда:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2n^2 = m^2.$$

Из последнего равенства следует, что m^2 – чётное число, значит m тоже чётное число:

$$m = 2k \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n = 2l.$$

Цепочка последних равенств приводит к чётности числа n.

Предположение, что $\sqrt{2}$ представимо в виде несократимой рациональной дроби m/n, привело к противоречию, поэтому $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

4. Метод математической индукции. Метод математической индукции успешно используется уже в течение нескольких столетий.

Выдающийся французский математик, механик, физик, литератор и философ Блез Паскаль в своём трактате об арифметическом треугольнике дал объяснение метода индукции. Французский математик Пьер Ферма – один из создателей аналитической геометрии, теории вероятностей, теории чисел и друг Паскаля, часто использовал метод индукции.

Современное формализованное изложение этого метода появилось в первой половине XIX в.

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧКЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Задан предикат $P(n)$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1) Проверяется истинность предиката $P(1),\ n = 1$.

2) Этот шаг называется индукционным переходом. В нём доказывается, что из истинности $P(n-1)$ следует истинность $P(n)$.

3) Происходит обобщение – полная математическая индукция:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \big((\forall i \in \{1,2,\cdots,n-1\})\quad P(n-1)\ \Rightarrow P(n)\big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ P(n).$$

Пример 4. Докажем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Пусть правая часть этого равенства – предикат $P(n)$. Если $n = 1$, тогда

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow P(1) \text{ – истинно.}$$

Предположим, что $P(k)$ истинно для некоторого натурального $k > 1$. Покажем, что тогда $P(k+1)$ истинно:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Последнее равенство говорит о справедливости импликации

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

Согласно принципу математической индукции предикат $P(n)$ является истинным при любых натуральных значениях числа n.

Пример 5. Докажем методом математической индукции, что $7^n - 1$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Доказательство. Рассмотрим предикат $P(n)$ = "$7^n - 1$ делится на 6". Если $n = 1$, то $7^1 - 1 = 6$. Очевидно, что значение $P(1)$ истинно. Предположим, что для некоторого натурального $k > 1$ $P(k)$ истинно. Перейдём к предикату $P(k+1)$:

$$7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + 7 - 1 = 7(7^k - 1) + 6.$$

Поскольку на предыдущем шаге индукции мы предположили, что $(7^k - 1)$ делится на 6, значит $7(7^k - 1) + 6$ тоже делится на 6, тогда верна импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Исходный предикат $P\ (n)$ является истинным для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 6. Последовательность целых чисел $z_1, z_1, \cdots, z_n$ задана рекуррентной формулой

$$z_1 = 1, \qquad z_{k+1} = z_k + 8k \qquad \text{при } k > 1.$$

Докажем, что формула общего члена этой последовательности имеет вид

$$z_n = (2n-1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Введём предикат $P(n)$: $z_n = (2n-1)^2$. Очевидно, что при $n = 1$ $P(1)$ истинно:

$$z_1 = 1 = (2 \cdot 1 - 1)^2.$$

Предположим, что для некоторого натурального $k > 1$ верна формула

$$z_k = (2k-1)^2.$$

Построим формулу для следующего члена последовательности:

$$z_{k+1} = z_k + 8k = (2k-1)^2 + 8k = 4k^2 - 4k + 1 + 8k = 4k^2 + 4k + 1 =$$

$$= (2(k+1)-1)^2 \Rightarrow z_{k+1} = (2(k+1)-1)^2.$$

Из последнего равенства вытекает истинность импликации $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Согласно методу индукции предикат $P(n)$ является истинным высказыванием при $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.5. УПРАЖНЕНИЯ

1. Есть три высказывания:

P: $\cdots$ Я умираю от жажды. Q: $\cdots$ Мой стакан пуст. R: Сейчас три часа.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, в которое входят P, Q, R.

(**a**) Я умираю от жажды и мой стакан не пуст.
(**b**) Сейчас три часа, а я умираю от жажды.
(**c**) Если сейчас три часа, то я умираю от жажды.
(**d**) Если я умираю от жажды, той мой стакан пуст.
(**e**) Если я не умираю от жажды, той мой стакан не пуст.

2. Есть два высказывания: P:⋯Розы красные. Q: Фиалки синие.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, в которое входят $P,\ Q$.

Если розы не красные, то фиалки не синие.

Розы красные или фиалки не синие.

Либо розы красные, либо фиалки синие.

3. С помощью таблиц истинности найдите тавтологии среди высказываний:

$$\neg\big(P \wedge (\neg P)\big); \qquad P \Rightarrow (\neg P); \qquad (P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

4. Покажите, что высказывание $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ логически эквивалентно высказыванию

$$((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R).$$

5. Пусть x:⋯"кошка"; $P(x)$: ⋯ " у x есть усы". Запишите каждое из следующих высказываний в символьной форме.

Усы есть у всех кошек.

Найдётся кошка без усов.

Не бывает кошек с усами.

6. Пусть x:⋯"человек", $P(x)$:⋯x высокий", $Q(x)$:⋯"x полный". Есть высказывание

$$\forall x \cdots \ (P(x) \wedge Q(x)).$$

Выберите, среди представленных ниже утверждений, отрицание заданного высказывания и запищите в символьной форме.

Найдётся невысокий и полный человек.

Нет высокого и худого человека.

Найдётся невысокий и худой человек.

7. Докажите методом математической индукции следующие два высказывания:

$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ для любого натурального числа n;

8. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$ задана рекуррентной формулой

$$x_1 = 1, \ \ x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k + 2}.$$

Вычислите значения $x_2,\ x_3,\ x_4$ и с помощью метода индукции докажите, что для любого $n \geq 1$ верна формула

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

9. Докажите, что высказывание $\neg\big(p \text{ и} (\neg\, q)\big)$ логически эквивалентно утверждению $\big((\neg\, p)$ или $q\big)$.

Глава 4. Отношения

Всё хорошее в конце концов
заканчивается, но только
не в математике.
Ричард Браун. «Математика за 30 секунд»

В конце XIX века немецкий математик Готлоб Фреге ввёл в логику понятие "отношение" и использовал его в создании логики предикатов, пытаясь свести математику к логике.

4.1. КОРТЕЖИ

Кортеж *(n-мерный вектор)* – это упорядоченный набор элементов или упорядоченное множество. Порядок элементов имеет значение, а элементы могут повторяться.

Пусть дано некоторое множество X. Возьмём множество натуральных чисел

$$N_n = \{1,2,\cdots,n\}$$

и зададим отображение N_n в X. Результат отображения - кортеж

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n),$$

длина которого равна n. Элемент x_k, $1 \le k \le n$, называют k-й компонентой или k-й координатой кортежа.

Кортежи длиной 2 называют парами, длиной 3 – тройками.

Кортеж, не содержащий ни одной компоненты, называется ***пустым***. Его длина равна нулю. Пустой кортеж обозначается как ( ).

Определение. Два кортежа $\alpha = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ и $\beta = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m)$ равны, если они имеют одинаковую длину и равны их компоненты с одинаковыми номерами:

$$n = m \text{ и } x_k = y_k \text{ для } \forall\, k \in [1; n].$$

ПРИМЕРЫ КОРТЕЖЕЙ.

1) $\alpha = (2^2, 3^2, 4^2)$, $\beta = \left(\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}\right) \Rightarrow \alpha = \beta$.

2) $\alpha = (a, b, c)$, $\beta = (a, b, c, a) \Rightarrow \alpha \ne \beta$.

3) Компонентами кортежа могут быть множества, кортежи и др.

$\alpha = (\{a, b\}, c, d)$, $\beta = (\{b, a\}, c, d) \Rightarrow \alpha = \beta$.

Эти кортежи равны, так как $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ – два одинаковых множества, а для множеств порядок вхождения элементов безразличен.

4) $\alpha = \big((a, b), c, d\big)$, $\beta = \big((b, a), c, d\big) \Rightarrow \alpha \ne \beta$.

В этом примере кортежи не равны, поскольку (a, b) и (b, a) – это два разных кортежа.

4. 2. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Обобщением понятия кортеж является кортеж, компоненты которого принадлежат множествам $X_1,\ X_2,\cdots,X_n$. Рассмотрим кортеж $\alpha=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$, компоненты которого $x_k\in X_k,\ \ \forall\, k\in[1;n]$. Для таких кортежей введено следующее понятие.

Множество, состоящее из таких кортежей, называется ***прямым (декартовым) произведением множеств*** $X_1,\ X_2,\cdots,X_n$. Его обозначают в виде

$$X_1\ \times\ X_2\times\ \cdots\times X_n.$$

ПРИМЕРЫ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1) Пусть $X_1=\{a,b,c\},\ X_2=\{1,2\}$. Прямое произведение $X_1\times\ X_2$ состоит из 6-и пар:

$$(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2).$$

2) Прямое произведение $X_2\ \times\ X_1$ тоже состоит их 6-и пар, но с иным порядком компонент:

$$(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(\ 1,c),(2,c)\Rightarrow X_1\ \times\ X_2\neq X_2\ \times\ X_1.$$

Если в прямом произведении хотя бы одно из множеств X_k является пустым, то прямое произведение – пустое множество:

$$X_1{\times}X_2\times\emptyset=X_2{\times}\emptyset\times X_1=\emptyset.$$

4. 3. МОЩНОСТЬ ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Обратимся к двум множествам

$$X=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}\Rightarrow|X|=n\ \text{ и }\ Y=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_m\}\Rightarrow|Y|=m.$$

Найдём мощность прямого произведения этих множеств. Такое произведение состоит из кортежей $\left(x_i,y_j\right)$, которые можно расположить в виде таблицы:

$$\begin{array}{c}(x_1,y_1)\ \ (x_1,y_2)\cdots(x_1,y_m)\\(x_2,y_1)\ \ (x_2,y_2)\cdots(x_2,y_m)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_n,y_1)\ \ (x_n,y_2)\cdots(x_n,y_m).\end{array}$$

Эта таблица состоит из n строк и m столбцов, поэтому мощность прямого произведения $|X\times Y|$ легко вычисляется по формуле

$$|X\times Y|=|X|\cdot|Y|=n\cdot m.$$

С помощью математической индукции доказывается, что мощность прямого произведения конечных множеств равна произведению мощностей всех сомножителей:

$$|X_1\times X_2\times\cdots\times X_k|=|X_1|\cdot|X_2|\cdot\ \cdots\cdot|X_k|.$$

Пример. Найдём количество всех кортежей длины k, составленных из элементов множества X, мощность которого равна m. Для этого используем последнюю формулу

$$|\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times X \cdots X \times X| = |X| \cdot |X| \cdot |X| \ \cdots |X| \cdot |X| = m^k.$$

Кортежи из этого примера являются размещениями с повторениями из m элементов по k, поэтому можно написать, что

$$\bar{A}_m^k = m^k.$$

4. 4. ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Во время работы с множествами часто приходится сравнивать между с собой сами множества. С помощью сравнений отыскиваются те или иные связи между множествами.

В дискретной математике кортежи тесно связаны с отношениями, которые определяются в терминах упорядоченных пар.

Определение 1. ***Бинарным отношением*** ρ или просто ***отношением*** ρ между двумя множествами A и B называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$: $\rho \subseteq A \times B$; прямым произведением может быть $A \times A = A^2$.

Далее в этой главе будут рассматриваться только бинарные отношения, поэтому полезно обратиться и к другому варианту определения.

Определение $1'$. Отношение (*relation*) ρ – это множество упорядоченных пар (a, b), в которых $a \in A$, $b \in B$, $\rho \subseteq A \times B$.

Если $(a, b) \in \rho$, говорят, что элемент a находится в отношении ρ с элементом b и обозначается как $a\rho b$:

$$(a, b) \in \rho = a\rho b.$$

Если $A = B$, то ρ – это отношение на множестве A.

СВОЙСТВА ОТНОШПЕНИЙ

Пусть некоторое отношение ρ задано на множестве A и элементы $a, b, \mathrm{c} \in A$. Перечислим важные свойства отношений.

1. Отношение ρ называется ***рефлексивным***, если каждый элемент $a \in A$ находится в этом отношении сам с собой: $a\rho a$ для любых $a \in A$.

2. Отношение ρ называется ***симметричным***, если из условия $a\rho b$ следует $b\rho a$. В противном случае отношение ***не симметрично***.

3. Отношение ρ называется ***транзитивным***, если из условий $a\rho b$ и $b\rho c$ следует условие $a\rho\mathrm{c}$.

4. Отношение ρ называется ***антисимметричным***, если из условий $a\rho b$ и $b\rho a$ обязательно следует условие $a = b$. В противном случае оно не антисимметрично.

ПРИМЕРЫ ОТНОШЕНИЙ

1) Отношение $\leq$ рефлексивно, поскольку $x \leq x$ для любого числа x.

2) Отношение $<$ не является рефлексивным.

3) Отношение подобия треугольников симметрично.

4) Отношение параллельности прямых симметрично.

5) Отношение делимости не симметрично: из делимости x на y не следует, что y делится на x.

6) Отношение $\leq$ транзитивно: если $x \leq y$ и $y \leq z$, тогда $x \leq z$.

7) Пусть на $A = \{1, 2, 3\}$ $\rho_1 = \{(2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ – транзитивно.

8) Отношение "быть отцом" не транзитивно: если x – отец y, а y – отец z, то x – не отец, а дедушка z.

9) Отношение $\leq$ антисимметрично: если $x \leq y$ и $y \leq x$, тогда $x = y$.

10) Отношение делимости антисимметрично на множестве натуральных чисел: если x делится на y и y делится на x, то $x = y$.

11) Отношение перпендикулярности прямых не антисимметрично: если прямая x перпендикулярна прямой y, значит прямая y перпендикулярна прямой x, но прямые не совпадают $x \neq y$.

Замечание. Отношения симметричности и антисимметричности не отрицают друг друга. Например, пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и есть два отношения ρ_1, ρ_2.

$\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ – отношение симметрично и антисимметрично.

$\rho_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ – отношение не симметрично и не антисимметрично.

4.5. ЗАМЫКАНИЕ СВОЙСТВ

Математика, как и искусство,
– это особый способ познания.
В. Успенский «Апология математики»

Если отношение ρ не обладает на множестве A некоторым необходимым свойством P, тогда отношение стоит продолжить до отношения ρ^*, в котором нужное свойство будет выполняться. Отношение ρ^* – минимальное множество, содержащее ρ; оно называется ***замыканием*** отношения ρ относительно необходимого свойства P. Формализованное определение замыкания отношения имеет следующий вид.

Определение. Отношение ρ^* называется замыканием отношения ρ относительно свойства P, если

1. ρ^* обладает свойством P;

2. $\rho \subset \rho^*$;

3. ρ^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего ρ и обладающего этим свойством.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Отношение ρ на этом множестве задано упорядоченными парами:

$$\rho = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}.$$

Это отношение не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно. Построим соответствующие замыкания.

Построение. Замыкание относительно рефлективности должно содержать пары вида (x, x). Значит, замыкание имеет вид

$$\rho^* = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \qquad (2, 2), (3, 3)\}.$$

Замыкание относительно симметричности должно содержать все пары симметричные исходным, значит

$$\rho^* = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \qquad (2,1), (3, 2)\}.$$

Обратимся к транзитивности. Отношение ρ содержит пары $(3, 1)$ и $(1, 2)$, поэтому в замыкании должна быть пара $(3, 2)$; пары $(2, 3)$ и $(3, 1)$ требуют пару $(2,1)$, а для пар $(3, 1)$ и $(1, 3)$ необходима пара $(3, 3)$:

$$\rho^* = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \ (3, 2), (2,1), (3, 3)\}.$$

Появилась пары $(2,1)$ и $(1, 2)$, значит добавляем пару $(2, 2)$. Теперь можно записать замыкание, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности:

$$\rho^* = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), \ (3, 2), (2,1), (3, 3), (2, 2)\} \text{ или}$$

$$\rho^* = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (2,1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

4.6. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И РАЗБИЕНИЕ

Определение 1. Отношение ρ на некотором множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если ρ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Можно сказать, что отношение эквивалентности близко к понятию равенства, так как эквивалентные элементы имеют некоторые одинаковые признаки.

Если ρ – отношение эквивалентности, $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, то

– для $\forall\, a \in A \Rightarrow (a, a) \in \rho$ – рефлексивно;

– если $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$ – симметрично;

– если $(a, b) \in \rho$, $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$ – транзитивно.

ПРИМЕРЫ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1) Отношение "$\cdots$имеет те же углы, что и$\cdots$" на множестве всех треугольников. Ясно, что треугольники эквивалентны относительно этого отношения только когда они подобны.

2) Отношение "$xy > 0$ на множестве ненулевых целых чисел, имеющих одинаковый знак".

3) Отношение "$\cdots$имеет тот же возраст$\cdots$" на заданном множестве людей. "Эквивалентные люди" принадлежат к одному возрастному эквивалентному классу.

Определение 2. P ***разбиением множества*** A называется семейство непустых подмножеств (классов) $\{A_i\}_{i=1}^{m}$, $A_i \in A$, имеющих следующие свойства.

1. Каждый элемент из A принадлежит только одному подмножеству из разбиения P:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m.$$

2. Разбиение P состоит из непересекающихся непустых подмножеств:

$$A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Предположим, что на множестве A задано отношение эквивалентности ρ, тогда все элементы A можно так разбить на непересекающиеся подмножества, что в каждом из них будут находиться только эквивалентные друг другу элементы. Такие разбиения множества называют ***классами эквивалентности***. Они играют важную роль при классификации различных систем.

Семейство всех классов эквивалентности из множества A по отношению к ρ обозначается как A/ρ. Элементы множества, попавшие в один и тот же класс эквивалентности, называются ***эквивалентными элементами***.

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗБИЕНИЯ

1) В качестве примера построения разбиения возьмём отношение ρ – быть одного цвета. Пусть множество $A = \{$лягушка, сажа, ёлка, апельсин, абрикос, крокодил, трава, уголь$\}$. В первый класс эквивалентности попадают (лягушка, крокодил, ёлка, трава), во второй – (апельсин, абрикос), в третий – (уголь, сажа).

2) Обратимся к множеству $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Рассмотрим отношение ρ – сравнимость по модулю 3: $x \in A$ и $y \in A \Rightarrow x - y$ должно делиться на 3. Проверим наше отношение на эквивалентность.

Решение. Проверим, что ρ в этом примере является отношением эквивалентности. Выберем из A класс $A_1 = \{1, 4, 7\}$:

$1 - 1 = 0,\ \ 1 - 4 = 3,\ \ 1 - 7 = -6,\ \ 4 - 7 = -3$ –любые модули разности элементов этого класса делятся на 3.

Выберем из A класс $A_2 = \{2, 5\}$ и класс $A_3 = \{3, 6\}$.

Благодаря заданному отношению ρ множество A разбилось на три непересекающихся класса эквивалентности:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3;\ \ A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ A_2 \cap A_3 = \emptyset,\ \ A_1 \cap A_3 = \emptyset.$$

4.7. ОТНОШЕНИЕ ЧАСТИЧНОГО ПОРЯДКА

Определение 1. Отношение ρ на множестве A называется отношением ***частичного порядка***, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно:

1. Для любого $a \in A \Rightarrow (a,a) \in \rho$ – рефлексивно;
2. Если $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$ – антисимметрично;
3. Если $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$ –транзитивно.

Замечание. В выражении "*частичного порядка"* используется слово *частичный,* потому что не для всех пар из множества $A \times B$ или $A \times A$ могут выполняться сразу все условия 1-3.

Определение 2. Множество A, на котором определено частично упорядоченное отношение, называется ***частично упорядоченным множеством***.

ПРИМЕРЫ ОТНОШЕНИЙ ЧАСТИЧНОГО ПОРЯДКА

1) Отношение подобия на множестве всех треугольников на плоскости.

2) Отношение параллельности на множестве прямых.

3) Отношение "быть одного цвета на множестве различных предметов".

4) Отношение равенства на произвольной системе множеств.

5) Пусть ρ – отношение $\leq$ на множестве $\mathbb{R}$. В таком случае ρ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, значит ρ – отношение частичного порядка.

6) Отношение включения (принадлежности) $\subseteq$ является отношением частичного порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно:

– $A \subseteq A$ для любого множества A – рефлексивно;
– $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ – антисимметрично;
– $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ – транзитивно.

7) Отношение " a делит b " – отношение частичного порядка на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Но если это отношение использовать на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, тогда оно не будет отношением частичного порядка, так как на $\mathbb{Z}$ нарушается свойство антисимметричности:

$$5/(-5)=(-5)/5=-1, \text{ но } 5 \neq -5.$$

Если ρ – отношение частичного порядка на множестве A, то при $x \neq y$ и действии отношения $x\rho y$ элемент x называется ***предшествующим***, а элемент y – ***последующим***. Произвольно выбранный элемент может иметь несколько предшествующих элементов.

Определение 3. Отношение частичного порядка называется ***линейным порядком*** на множестве A, если из любой пары элементов можно выделить только один предшествующий и один последующий. Такие отношения ещё называют ***цепью***.

Замечание. Бывают множества частично упорядоченные, в которых есть, но не все линейно упорядоченные подмножества.

4.8. ОБРАТНОЕ ОТНОШЕНИЕ, КОМПОЗИЦИЯ И СВОЙСТВА

Предположим, что ρ – отношение между множествами A и B. Тогда обратное для ρ отношение ρ^{-1} – это отношение между B и A. Оно состоит из тек же пар двух элементов, но сами элементы в каждой паре поменялись местами:

$$\rho^{-1} = \{\ (b,a): (a,b) \in\ \rho\ \}.$$

Пример. Пусть $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{x,y,z\}$, $\rho = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$, тогда

$$\rho^{-1} = \{(x,1),(y,2),(z,3)\}.$$

Для любого отношения ρ верно равенство $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$. Область определения ρ^{-1} равна области значений ρ, а область значений ρ^{-1} равна области определения ρ.

Есть три множества A, B, C и два отношения, одно из которых ρ из A в B, другое s из B в C. Отношение ρ – это подмножество декартова произведения $A \times B$. Отношение s – это подмножество декартова произведения $B \times C$.

С помощью этих отношений можно построить новое отношение, называемое ***композицией,*** оно обозначается как $\rho \circ s$. Эта композиция из A в C:

$$\rho \circ s = \{(a,c):\ \exists\ b \in B \Longrightarrow (a,b) \in \rho \text{ и } (b,c) \in s\ \}.$$

Из записи отношений $a\rho b$ и bsc следует, что в композиции $a(\rho{\circ}s)c$ сначала работает отношение ρ , затем s.

ПОСТРОЕНИЕ КОМПОЗИЦИИ

Пример. Если уже построены в виде матриц отношения $a\rho b$ и bsc, тогда отношение $a(\rho{\circ}s)c$ строится с помощью ***логического (булева) произведения*** матриц.

Таб$_p$

$a\rho b$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	0	0	0
a_2	0	0	1	1
a_3	0	1	0	0
a_4	0	0	0	0

Таб$_s$

bsc	c_1	c_2	c_3
b_1	1	0	0
b_2	0	0	1
b_3	0	1	0
b_4	0	1	0

M_ρ

1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	0

M_s

1	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	0

Умножаем логически матрицу M_ρ на матрицу M_s. Их логическим произведением является матрица композиции $M_{\rho\,\circ\,s}$: $M_\rho \cdot M_s = M_{\rho\,\circ\,s}$.

Таб$_{\rho\,\circ\,s}$

$a(\rho \circ s)c$	c_1	c_2	c_3
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1
a_4	0	0	0

$M_{\rho\,\circ\,s}$

1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Ответ: $\rho \circ s = \{(a_1, c_1), (a_2, c_2), (a_3, c_3)\}$.

Доказано, что композиция отношений, как и умножение матриц, обладает свойством ассоциативности.

Пусть заданы четыре множества A, B, C, D и три таких отношения ρ, s, t, что $A\rho B$, BsC, CtD; для композиции этих отношений выполняется свойство ассоциативности:

$$(\rho \circ s) \circ t = \rho \circ (s \circ t).$$

В общем случае композиция отношений не коммутативна: $\rho \circ s \neq s \circ \rho$.

Пример. На человеческом множестве определены два отношения: "кровные родственники супругов" и "супруги кровных родственников". Эти отношения различны.

4.9. УПРАЖНЕНИЯ

Математик изучает свою науку вовсе не потому, что она полезна. Он изучает её потому, что она прекрасна.

Лузин Н.Н. (1883–1950) знаменитый русский математик

1. Что можно сказать о непустых множествах A и B, если для них верно равенство

$$A \times B = B \times A?$$

2. Допустим, что множества A, B, C удовлетворяют соотношению

$$A \times B = A \times C.$$

Вытекает ли из этого, что $A = B$?

3. Пусть A, B, C – произвольные множества. Докажите следующие равенство

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

4. Пусть A, B, C – произвольные множества. Докажите следующие равенство

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

5. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

$$R = \{(x, y): 2x + y = 9\}; \quad S = \{(x, y): x + y < 7\}; \quad T = \{(x, y): y = x^2\}.$$

6. Пусть R –отношение uRv на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Для R выполняется услови $u + 2v$ – нечётное число. Представьте R как множество упорядоченных пар и в матричном виде.

7. Какие из приведённых ниже отношений, заданных на множестве целых чисел, рефлексивны, симметричны или транзитивны?

(a) "$x+y$ – нечётное число"; **(b)** "$x+y$ – чётное число";

(c) "xy – нечётное число"; **(d)** "$x+xy$ – чётное число".

8. Постройте упорядоченные пары, которые принадлежат отношениям R, S, заданным на множестве $\{x\colon\ x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 12\}$;

$$R = \{(x, y)\colon\ xy = 9\};\ \ S = \{(x, y)\colon\ 2x = 3y\}.$$

Постройте транзитивные замыкания отношений R и S.

9. На множестве целых чисел есть отношение xRy " $x^2 - y^2$ делится на 3". Покажите, что R является отношением эквивалентности и постройте классы эквивалентности.

10. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$, на этом множестве есть отношение R

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3,4)\}.$$

Постройте рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания R.

11. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на заданном множестве A опишите классы, на которые разбивается множество A.

(a) A – множество книг в библиотеке. R определяется условием xRy, если совпадают цвета переплётов книг.

(b) $A = \mathbb{Z}$, R задано условием: xRy, если $x - y$ является чётным числом.

(c) A – множество людей, xRy, если x и y одинакового пола.

(d) $A = \mathbb{R}^2$, R задано условием: $(a, b)R(c, d)$, когда $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

12. Есть три множества

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{1,2, 3, 4\}, \qquad C = \{x, y, z\}$$

и два отношения:

$$ARB, \ \ BSC.$$

Найдите композицию $R \circ S$ этих отношений.

Глава 5. Функции

Структура мироздания основана
на математике.

Архимед

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ

Путь к первому определению понятия *функция* проложили два французских математика Франсуа Виет (1540–1603) и Рене Декарт (1596–1650).

Слово *функция*, как математический термин. впервые появилось (1673) в рукописях немецкого математика Готфрида Лейбница. Он ввёл первые обозначения функции. В русской математической литературе появление этого термина относится к 1707 г. В ту пору функцию ещё не рассматривали как величину, зависящую от другой переменной. Швейцарский математик Иоганн Бернулли определил функцию (1718) как переменную величину, заданную аналитическим выражением, составленным из переменной x и постоянных величин. Позднее швейцарско-российский математик великий Леонард Эйлер определил функцию как произвольную зависимость одной величины от другой. Они ввёл понятия неявно заданной и параметрически заданной функции, а также функции, зависящей от нескольких переменных.

Общее определение функции в современной форме, но только для числовых функций ввёл наш гениальный Николай Лобачевский (1834) и знаменитый немецкий математик Рихард Дедекинд (1837).

К концу XIX в. понятие функции вышло за рамки числовых множеств. Сначала оно распространилось на векторные функции. Затем немецкий математик Готлоб Фреге ввёл логические функции (1879) и назвал их ***пропозициональными функциями.***

После появления теории множеств и полемики, связанной с этой теорией, а также с обсуждением понятия взаимно однозначного соответствия, немецкий математик Петер Дирихле и итальянский математик Джузеппе Пеано сформулировали универсальное определение функции без использования её аналитического вида. Это определение стало основой для современного понимания функции.

<u>Определение.</u> Пусть заданы два множества X и Y. ***Функцией*** f из X в Y называется бинарное отношение, которое каждый элемент множества X связывает с единственным элементом множества Y. Множество X называется областью определения или областью задания функции f, а множество Y – областью значений функции или образом.

Можно сказать, что функция f строит пары (x, y). Слово *функция* иногда заменяют словом ***отображение.*** В математике эти термины имеют одинаковый смысл.

<u>Пример 1.</u> Определим, какие из следующих отношений между множествами $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{1, 2, 3\}$ являются функциями из X в Y.

$U = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2)\}$. Отношение U – не функция, так как элементу a соответствует два разных элемента из множества Y.

$V = \{(a,1),(b,3),(c,2)\}$. Отношение V – функция.

$W = \{(a,1),(c,2)\}$. Отношение W – не функция, потому что элементу b не сопоставлен ни один элемент из множества Y.

Пример 2. Определим, какие из следующих отношений–функции.

Отношение на множестве $\mathbb{Z}$, заданное парами $\{(x, x^2): x \in \mathbb{Z}\}$, является функцией, так как у каждого числа есть только один квадрат.

Отношение на множестве $\mathbb{R}$, заданное парами $\{(x,y): x = y^2\}$. Это отношение не является функцией. Для доказательства обратимся к двум упорядоченным парам этого отношения: $(2,\sqrt{2}),(2,-\sqrt{2})$.

5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $f\colon X \longrightarrow Y$ называется ***инъективной*** или ***инъекцией***, или ***взаимно однозначной***, если для любой пары $x_1, x_2 \in X$ верно следующее соотношение

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Это определение эквивалентно соотношению

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Определение 2. Функция f называется ***сюръективной*** или ***сюръекцией***, или ***функцией на***. если для

$$\forall\, y \in Y \;\; \exists x \in X \Rightarrow y = f(x).$$

Определение 3. Функция f называется ***биективной*** или ***биекцией,*** если она инъективна и сюръективна.

Пример 1. Докажем, что функция $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, заданная формулой $f(x) = x^2$ не биективна.

$$x_1 = 2\,, x_2 = -2, f(x_1) = 4, f(x_2) = 4 \Rightarrow x_1 \neq x_2, \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Докажем, что функция не сюръективна. В области $\mathbb{Z}$ есть, например, числа 5, 7, 11, которые не являются значениями нашей функции $f(x) = x^2$.

Замечание. График дискретных функций состоит из изолированных точек.

Пример 2. Покажем, что функция $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ с формулой $f(x) = 4x + 5$, является биекцией.

Докажем, что $f(x)$ – инъекция. Предположим, что

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 5 = 4x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Докажем, что $f(x)$ – сюръекция:

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 4x + 5 \Rightarrow x = ((y-5))/4.$$

Последнее равенство является доказательством сюръективности исходной функции

5.3 ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ И КОМПОЗИЦИИ

Функция f состоит из пар $(x,\ y)$, где $y = f(x)$. Если функция обратима, то её обратная функция обозначается как f^{-1}, её пары – это (y, x), где $x = f^{-1}(y)$. Доказана следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы у функции $f(x)$ существовала обратная функция необходимо и достаточно, чтобы исходная функция была биекцией.

Пример 1. Задана следующая функция

$$A = \{x: x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \ \text{и} \quad f: A \longrightarrow A,\ f(x) = x/(x-1)\}.$$

Докажем, что эта функция является биекцией.

Доказательство. Предположим, что $f(x_1) = f(x_2)$, тогда

$$\frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Из последнего равенства следует инъективность функции. Перейдём к доказательству сюръективности. Пусть $y \in A$, выразим x через y

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow yx - y = x \Rightarrow x = \frac{y}{y-1} = f^{-1}(y).$$

Из последнего равенства следует сюръективность исходной функции. В представленном примере исходная функция обратна сама себе.

Доказана инъективность и сюръективность заданной функции, согласно определению функция – это биекция.

Замечание. Напомним, что в прямоугольной правосторонней декартовой системе координат графики взаимно обратных функций всегда симметричны относительно биссектрисы первого и четвёртого квадрантов (четвертей).

КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть заданы две функции: $f: X \longrightarrow Y$ и $g: Y \longrightarrow Z$. Область определения функции g совпадает с областью значений функции f. Сначала f действует на аргумент x, затем функция g действует на y – результат работы f. Такая процедура определяет новое отображение из множества X в множество Z.

Определение. ***Композицией функций*** f и g называется функция, которая любой элемент $x \in X$ отображает в элемент z:

$$z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) \in Z.$$

Можно составить композицию более чем из двух функций, например,

$$f: X \to Y; \quad g: Y \to Z; \quad h: Z \to V.$$

Композиция из этих функций записывается как $h \circ g \circ f$. Её образ имеет вид

$$v = h(z) = h(g(y)) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \in V.$$

ДВА СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИЙ

1. Композиция функций не коммутативна:
$$g \circ f \neq f \circ g.$$
2. Композиция функций ассоциативна:
$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Пример 2. Даны две функции

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2; \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4x + 5.$$

Построим четыре композиции: $g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ g,\ f \circ f$.

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2 + 5;$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(4x + 5) = (4x + 5)^2 = 16x^2 + 40x + 25;$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g(4x + 5) = 4(4x + 5) + 5 = 16x + 25;$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x^2) = x^4.$$

5.4. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Пусть задана функция: $f\colon X \to Y$, где X и Y – конечные дискретные множества с разными мощностями, причём $|X| > |Y|$. Согласно принципу Дирихле в этом случае хотя бы одно значение функции f появится более одного раза:

$$x_l \neq x_m \Rightarrow f(x_l) = f(x_m).$$

Принцип Дирихле имеет следующее обобщение. Если $|X| > k|Y|$, тогда существует такое значение функции f, которое она будет принимать не менее $(k + 1)$ раз.

Главная идея, на которой основан принцип Дирихле, основана на том, что функция f размещает некоторое количество элементов множества X в меньшее число клеток (элементов) множества Y.

Пример 1. В автобусе едет 15 человек. Покажите, что по крайней мере у двоих из них совпадает месяц их дней рождения.

Решение. Пусть множество A – количество человек в автобусе, множество B – число месяцев в году. Есть функция $f\colon A \to B$, которая сопоставляет каждому человеку из автобуса месяц его рождения. $|A| = 15, |B| = 12,\ |A| > |B|$.

По принципу Дирихле функция f должна иметь повторяющиеся значения, поэтому найдутся хотя бы 2 человека с одинаковым днём их рождения.

Пример 2. Какое наименьшее число фамилий должно быть записано в телефонном справочнике, чтобы в таком множестве хотя бы две фамилии начинались с одинаковых букв и заканчивались одинаковыми буквами?

Решение. Пусть A – множество фамилий в справочнике, B– множество пар букв из русского алфавита с учётом того, что русская фамилия не может начинаться с мягкого и твёрдого знаков и буквы "ы". Фамилия не может кончаться твёрдым знаком, поэтому B содержит $30 \cdot 32 = 960$ пар букв. Очевидно, что $|A| > |B|$. Телефонный справочник должен содержать не меньше 960 фамилий.

5.5. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Функция называется числовой, если её области определения и значений являются множеством или подмножеством действительных чисел. Таким функциям уделяется много внимания в школьной программе. Напомним только основные моменты, связанные с этими популярными функциями.

Есть три способа задания числовых функций: табличный, графический и аналитический (формульный).

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1. ***Область определения*** (задания) функции $f(x)$ должна быть не пустым множеством: $X \neq \emptyset$.

2. Функция f называется ***чётной***, если для $\forall\, x \in X$ верно

$$f(x) = f(-x).$$

3. Функция f называется ***нечётной***, если для $\forall\, x \in X$ верно

$$f(x) = -f(-x).$$

Если функция является чётной или нечётной, то её область задания всегда симметрична относительно начала декартовой системы координат.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат. График нечётной функции симметричен относительно начальной точки декартовой системы координат (поворотная симметрия).

Остальные функции называются функциями ***общего вида.***

4. Функция f называется ***монотонной*** в области задания X, если для любых $x_1,\ x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает одно из следующих неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f \text{ возрастает;} \\ f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f \text{ не убывает;} \\ f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f \text{ убывает;} \\ f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow f \text{ не возрастает.} \end{array}\right.$$

Если ни одно из этих неравенств не выполняется, функция f ***немонотонна***. Но, у немонотонной функции всегда можно выделить ***интервалы монотонности.***

5. Функция f называется ***ограниченной***, если для любого числа x из области определения функции существует такое положительное число M, что все значения этой функции будут не больше числа M:

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, M > 0\colon |f(x)| \le M.$$

6. Функция f называется ***периодической***, если для любого числа $x \in X$ существует такое число T, что

$$f(x) = f(x+T).$$

Число T называется ***минимальным периодом*** функции. Легко доказать, что у периодической функции есть бесконечно много периодов T_k. Они находятся по формуле

$$T_k = Tk, \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Следует заметить, что область определения периодической функции всегда не ограничена.

7. Число $x^* \in X$ называется корнем функции или нулём функции f, если выполняется равенство $f(x^*) = 0$.

Графическим образом корня функции является точка пересечения или касания графика функции с осью абсцисс.

Пусть $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$. Функции, заданные и изменяющиеся в множестве действительных чисел, могут иметь различное количество действительных корней, например:

$f(x) = e^x$ – не имеет корней;
$f(x) = \ln x$ – есть один корень;
$f(x) = x^2 + x + 1$– нет корней;
$f(x) = x^3 + 1$ – есть один корень;
$f(x) = \sin x$ – есть бесконечно много корней.

Числовые функции достаточно широко используются в программировании. Почти во всех языках программирования есть специальные библиотеки для вычисления ***встроенных функций***. С помощью мощных методов современной вычислительной математики в таких библиотеках с высокой степенью точности и скорости вычисляются любые элементарные функции, построенные на основе простейших элементарных функций

$$x^n,\ \sin x, \cos x\ , \tan x\ , \cot x\ , e^x, \ln x \text{ и т.д.}$$

Напомним, что ***элементарными функциями*** называются явно заданные функции, представленные одним аналитическим выражением, содержащим конечное число арифметических операций, операции возведения в степень, логарифмирования и композиций из таких функций.

5.6. УПРАЖНЕНИЯ

1. Является ли отношение "x – брат или сестра y" функцией на множестве всего человечества?

2. $A = \{0, 2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Какие из следующих отношений между множествами A и B являются функциями? Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны?

(a) {(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)}; **(b)** {(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)};

(c) {(2, 1), (4, 5), (6, 3)}; **(d)** {(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)}.

3. Какие из следующих функций являются инъекциями, сюръекциями или биекциями, если их области определения и значений совпадают с числовым множеством $\mathbb{Z}$?

(a) $f(n) = 2n + 1;$

(b) $g(n) = \begin{cases} n/2, \text{ если } n \text{ чётно}, \\ 2n, \text{ если } n \text{ нечётно}; \end{cases}$ **(c)** $h(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ n - 1, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$

4. Есть в математике функция, которая сопоставляет любому действительному числу x наибольшее целое число, не превосходящее x. Эта функция называется ***целой частью числа***, она обозначается как $\lfloor x \rfloor$.

Определите, является ли функция

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \in \mathbb{Z}$$

инъективной, сюръективной или биективной?

5. Функция $f: A \to B$ задана формулой $f(x) = 1 + 2/x$, где

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad B = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Докажите, что эта функция биективна и постройте обратную к ней функцию.

6. Заданы функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если }, x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Представьте аналитически композиции: $g \circ f, f \circ g, \ g \circ g$..

7. В одном селе живёт 79 семей, в каждой из которых есть два ребёнка.

Докажите, что найдётся по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей. Например, если в первой семье дети родились в марте и апреле, то и во второй семье – в марте и апреле.

Глава 6. Булева алгебра, булевы функции

Джордж Буль (1815–1864) – знаменитый и уникальный английский учёный. Его считают отцом информационного века.

Джордж самостоятельно освоил латинский, греческий, немецкий и итальянский языки. В 12 лет он уже делал переводы с классической латинской поэзии.

Родители Буля из-за бедности не смогли оплатить полный школьный курс обучения, поэтому он образовывал себя сам. В 16 лет стал работать помощником учителя в частной школе. Позже Буль открыл свою школу-интернат для молодых джентльменов. С 1849 г он уже был профессором математики.

В круг интересов Буля входили философия, логика, математический анализ и теория вероятностей. Отметим несколько его выдающихся трудов: «Логическое исчисление» и «Математический анализ логики или опыт исчисления дедуктивных умозаключений».

Идеи Буля не сразу стали понятными. В 1854 г. был опубликован его выдающийся труд «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей». Благодаря этой книге идеи Буля получили широкое признание в математическом сообществе. В конце XIX в. немецкий математик Готтлоб Фреге и итальянский математик Джузеппе Пеано во время работы над теорией множеств и отношений, независимо друг от друга формализовали идеи Буля и стали их использовать в математической логике. С тех пор булева алгебра тесно связана с теорией множеств и математической логикой.

Бурное развитие вычислительной техники и информационных систем в конце первой половины XX в. привело к необходимости использовать булеву алгебру.

Американский математик Клод Шеннон опубликовал (1938) работу «Символический анализ реле и переключательных цепей». В этой работе он показал применение булевой алгебры в проектировании электронных схем и аппаратуры.

В настоящее время Булева алгебра широко применяется в информатике, электронике и других областях, где необходим анализ и упрощение логических выражений. Творение Буля является основой для проектирования цифровых схем, для разработки алгоритмов, для анализа данных и в других областях.

6.1. БУЛЕВА АЛГЕБРА

Простейшая булева алгебра построена на множества $E_2 = \{0,1\}$, в котором определены три операции: $(\vee)$ – дизъюнкция, $(\wedge)$ – конъюнкция, $(\bar{\ })$ – отрицание. Результаты действия этих операций показаны в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

Таблица 2

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Такие таблицы называют ***таблицами истинности***.

В таблице 3 представлены свойства (законы) булевой алгебры.

СВОЙСТВА БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Таблица 3

Название закона	====================	====================
коммутативность	$p \vee q = q \vee p$	$p \wedge q = q \wedge p$
ассоциативность	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
дистрибутивность	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
идемпотентность	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
поглощение	$p \wedge (p \vee q) = p$	$p \vee (p \wedge q) = p$
законы де Моргана	$(\overline{p \wedge q}) = \bar{p} \vee \bar{q}$	$(\overline{p \vee q}) = \bar{p} \wedge \bar{q}$

Пример. Докажем справедливость равенства

$$(\overline{\bar{p} \wedge q}) \wedge (p \vee q) = p.$$

Доказательство. Преобразуем исходное выражение, используя указанные выше свойства: дистрибутивность и закон де Моргана.

$$(\overline{\bar{p} \wedge q}) \wedge (p \vee q) = (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q) = p \vee (\bar{q} \wedge q) = p \vee 0 = p.$$

Цепочка равенств привела к правильному результату.

6.2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ называется булевой, если её переменные и сама функция принимают значения из множества $E_2 = \{0,1\}$.

Булева функция от n переменных может быть задана таблицей истинности, в которой перечислены всевозможные булевы наборы из нулей и единиц. Для каждого набора указано значение функции на этом наборе (табл. 4). Наборы располагаются в таблице сверху вниз согласно двоичной системе счисления. Такие таблицы отличаются друг от друга только последним столбцом, в котором записываются соответствующие значения заданной функции.

Таблица 4

$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$	$f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$
$0 \cdots \cdots \cdots 0 \quad 0$	$f(0, \cdots \quad \cdots, 0)$
$0 \cdots \cdots \cdots 0 \quad 1$	$f(0, \cdots \quad \cdots, 1)$
$0 \cdots \cdots \cdots 1 \quad 0$	$f(0, \cdots \quad 1, 0)$
$\cdots \quad \cdots \cdots \cdots \cdots$	$\cdots \quad \cdots \cdots \cdots \cdots$
$1 \cdots \cdots \cdots 1 \cdots 1$	$f(1, \cdots \quad 1, 1)$

Таблица истинности содержит 2^n строк, каждая из которых соответствует определённой комбинации значений переменных. Число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}. Ниже представлены простейшие булевы функции $f(p)$ от одной переменной, их всего четыре (табл. 5).

Таблица 5

p	$f(p)=0$ константа	$f(p)=1$ константа	$f(p)=p$ тождество	$f(p)=q$ отрицание
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Далее (табл. 6) представлены простейшие булевы функции $f(p,q)$ от двух переменных.

Таблица 6

p	q	$p\wedge q$ конъюнкция	$p\vee q$ дизъюнкция	$p\to q$ импликация	$p\oplus q$ сумма по модулю два	$p\sim q$ эквивалентность
0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

6. 2. 1. ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Определение 1. Булева функция называется ***минтермом***, если она принимает значение 1 только на одном наборе значений её аргументов.

Пример 1. Функция $f(p,q,r)$ (табл. 7) является минтермом.

Таблица 7

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Из таблицы видно, что, если $p=0,\ q=r=1 \Rightarrow f(p,q,r)=1$. Выразим нашу функцию через логические операции. По определению конъюнкции выражение $p\wedge q\wedge r$ равно единице, только при $p=q=r=1$, поэтому $f(p,q,r)$ можно записать коротко и просто с помощью конъюнкции и отрицания переменной p:

$$f(p,q,r)=\bar{p}\wedge q\wedge r.$$

Выражение $\bar{p}\wedge q\wedge r$ называется ***элементарной конъюнкцией.*** Исходный минтерм представлен в виде элементарной конъюнкции.

Пример 2. Рассмотрим функцию трёх переменных $f(p,q,r)$ (табл. 8). Единицы последнего столбца таблицы соответствуют трём минтермам:

$$\bar{p}\wedge\bar{q}\wedge r,\quad \bar{p}\wedge q\wedge r,\quad p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r}.$$

Таблицу истинности функции $f(p,q,r)$ можно получить наложением таблиц истинности, представленных минтермов. Для этого обратимся к следующему свойству дизъюнкции.

Равенство

$$f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_k = 1$$

выполняется, если среди значений $f_1, f_2, \cdots, f_k$ есть хотя бы одна единица. Благодаря этому свойству исходная функция в последнем примере представима как дизъюнкция трёх минтермов:

$$f(p,q,r) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}).$$

Построенное равенство называется ***дизъюнктивной нормальной формой функции.***

Таблица 8

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Пример 3. Найдём дизъюнктивную нормальную форму булевой функции

$$f = (p \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r).$$

Для этого построим таблицу 9.

Таблица 9

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Записываем минтермы:

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad p \wedge \bar{q} \wedge r, \quad p \wedge q \wedge \bar{r}, \qquad p \wedge q \wedge r.$$

Искомая дизъюнктивная нормальная форма заданной функции имеет вид

$$f(p,q,r) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Перейдём от примеров к формулировке обобщающих теорем.

Теорема 1. Любую булеву функцию можно представить в дизъюнктивной нормальной форме.

Теорема 2. Любая булева функция может быть выражена в виде формулы, куда входят только операции дизъюнкция, конъюнкция и отрицание.

Определение 2. Множество функций, через которые можно выразить любую булеву функцию, называется ***полной системой функций.***

6. 2. 2. СУЩЕСТВЕННЫЕ И ФИКТИВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Определение 1. Говорят, что булева функция $f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ ***существенно зависит*** от переменной p_i, если существует такой набор значений

$$a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n, \text{ что}$$

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

В этом случае переменную a_i называют ***существенной переменной,*** в противном случае a_i – это ***несущественная или фиктивная переменная***.

Определение 2. Булевы функции f_1 и f_2 называются равными, если функцию f_1 можно получить из функции f_2 с помощью введения или удаления фиктивных переменных.

6. 2. 3. КАРТА КАРНО

Представленный далее метод значительно упрощает дизъюнктивную нормальную форму булевой функции. Прежде всего, упростим обозначения. В записи булевой функции будем опускать символ $\wedge$. Например, вместо

$$(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \text{ будем писать } \bar{p}\,\bar{q}\,r \vee \bar{p}\,q\,r \vee p\bar{q}\,\bar{r}.$$

Последнее выражение – это тоже дизъюнктивная нормальная форма, которую можно значительно упростить:

$$\bar{p}\,\bar{q}\,r \vee \bar{p}\,q\,r \vee p\bar{q}\,\bar{r} = (\bar{p}r\,\bar{q} \vee \bar{p}rq) \vee p\bar{q}\,\bar{r} = \bar{p}r(\bar{q} \vee q) \vee p\bar{q}\,\bar{r} = \bar{p}r \vee p\bar{q}\,\bar{r}.$$

После упрощения $\bar{p}\,\bar{q}\,r \vee \bar{p}\,q\,r \vee p\,\bar{q}\,\bar{r} = \bar{p}\,r \vee p\,\bar{q}\,\bar{r}.$

Упрощение аналитического вида булевых функций можно осуществлять с помощью способа, называемого картой Карно, изобретённого в середине XX века для разработки логических схем. Карта Карно даёт возможность сразу найти подходящие пары минтермов для превращения булевой функции в простое выражение.

Для булевой функции трёх переменных карта Карно состоит из трёх столбцов и двух строк. Столбцы обозначены дизъюнкциями из двух переменных p, q и их отрицаний, а строки обозначены третьей переменной и её отрицанием (табл.10).

Талица 10

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r				
$\bar{r}$				

Ячейки карты Карно соответствуют восьми минтермам, из которых могут быть построена булева функция трёх переменных. Если дана булева функция в нормальной дизъюнктивной форме, тогда в ячейки, соответствующие её минтермам, запишем цифру 1. Затем сгруппируем пары соседних ячеек, в которых уже стоят единицы. Такие ячейки соответствуют минтермам, из которых как раз состоит нормальная дизъюнктивная форма исходной булевой функции.

Пример 1. Упростим булеву функцию, заданную в следующей нормальной дизъюнктивной форме

$$f(p,q,r) = pqr \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r}.$$

Решение. Строим карту Карно (таб.11).

Талица 11

--	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	**1**	**1**		
$\bar{r}$	**1**	**1**	**1**	

По карте видно, что есть две пары соседних ячеек:

$$pqr \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r}.$$

Эта группа состоит четырёх минтермов. Обозначим её как A. Есть ещё одна пара соседних ячеек:

$$\bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}.$$

Пусть это будет группа B.

Перейдём к упрощению группы A:

$$pqr \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} = (p \vee \bar{p})qr \vee (p \vee \bar{p})q\bar{r} = qr \vee q\bar{r} = q(r \vee \bar{r}) = q.$$

Упрощаем группу B:

$$\bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} = \bar{p}\bar{r}(q \vee \bar{q}) = \bar{p}\bar{r}.$$

С помощью карты Карно исходная булева функция приобрела вид:

$$f(p,q,r) = q \vee \bar{p}\bar{r}.$$

Замечание. В процессе упрощения минтерм $\bar{p}q\bar{r}$ использовался два раза, но в исходном выражении он присутствует только один раз. Ошибки здесь нет, поскольку согласно закону идемпотентности для любой булевой функции верно равенство $f \vee f = f$.

Пример 2. Упростим булеву функцию

$$f(p,q,r) = \big((\overline{p \vee q}) \wedge r\big) \vee (\overline{p \vee r}).$$

Решение. Составим таблицу истинности для исходной функции (табл. 12).

Таблица 12

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Строим по этой таблице дизъюнктивную нормальную форму функции

$$f(p,q,r) = \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}.$$

Формируем карту Карно:

Талица 13

--	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r			**1**	
$\bar{r}$			**1**	**1**

По карте видно. что есть две пары соседних минтермов:

$$\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \ \text{ и } \ \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \Longrightarrow \bar{p}\bar{q}(\bar{r} \vee r) \vee \bar{q}\bar{r}(\bar{p} \vee p) = \bar{p}\bar{q} \vee \bar{q}\bar{r}.$$

Исходная функция преобразована к виду $f(p,q,r) = \bar{p}\bar{q} \vee \bar{q}\bar{r}$.

Описанный выше очень простой и элегантный метод изобрёл талантливый американский учёный Морис Карно (1924–2022). Он был и физиком, и математиком, и изобретателем.

6. 3. УПРАЖНЕНИЯ

Размышления – это разговор
души с самой собой.
Платон

1. Используя законы булевой алгебры, проверьте истинность следующих двух равенств:

$$\overline{(p \wedge \bar{q}\,)} \vee \bar{r} = \bar{p} \vee q \vee \bar{r}; \qquad \overline{\Big((p \wedge \bar{q}\,) \wedge \big(r \vee (p \wedge \bar{q}\,)\big)\Big)} = \bar{p} \vee q.$$

2. Заполните таблицу истинности булева выражения

$$(p \wedge (\bar{q} \vee r)) \vee (\,\bar{p} \wedge (q \vee \bar{r}))$$

и найдите его дизъюнктную нормальную форму.

3. Изобразите карту Карно булева выражения с дизъюнктной нормальной формой:

$$\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pqr.$$

Найдите упрощённую версию этой формы.

4. Найдите дизъюнктную нормальную форму булевой функции $f(p, q, r)$, заданной следующей таблицей истинности.

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

5. Найдите дизъюнктную нормальную форму булевой функции $f(p, q, r)$, таблица истинности которой имеет следующий вид.

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

6. Некоторая функциональная схема генерирует функцию

$$f(p, q, r) = \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r.$$

Упростите аналитический вид этой функции.

Заключение

Учебное пособие подошло к концу. В нём уделено внимание создателям тех разделов математики, которые стали фундаментом дискретной математики. В основном это были английские, французские и немецкие математики. Российская математическая школа внесла большой вклад на 3-ем этапе развития дискретной математики. Отметим здесь только следующих четверых знаменитых выпускников мат-меха нашего первого в России Санкт-Петербургского университета:

Андрей Андреевич Марков-младший (1903–1979), Николай Александрович Шанин (1919–2011), Григорий Самуилович Цейтин (1936–2022), Юрий Владимирович Матиясевич (р.1947).

Марков-младший – основатель знаменитой Петербургской школы математической логики и теории вычислимости. В области математической логики он решил две знаменитые задачи: "Проблема тождества для полугрупп" и "Проблема гомеоморфизма в топологии". Ввёл понятие *нормальные алгоритмы*. В настоящее время их называют алгоритмами Маркова. Заложил основы теории сложности алгоритмов. Последние 30 лет своей научной деятельности он интенсивно занимался приложением математической логики в теории вычислительных машин (компьютеров). Написал много научных работ в области криптографии.

Расцвет Петербургской школы математической логики и теории вычислимости наступил благодаря ученику Маркова, профессору Шанину. По воспоминаниям его студентов и коллег Шанин был замечательным и человеком, и математиком, и педагогом. Особенно интересны его курсы лекций: "Математическая логика", "Теория алгоритмов" и "Логика для философов". Его учеников можно встретить во многих странах.

Г. Цейтин – тоже ученик Маркова. Он был выдающимся российским учёным в области математической логики и теоретической информатики; один из основателей петербургской школы программистов и член Петербургского математического общества. Дипломная работа Цейтина по математической логике содержала настолько важные результаты, что была опубликована в «Докладах АН СССР». После защиты докторской диссертации он отошёл от математической логики, переключился на информатику и стал неформальным лидером в области программирования.

Матиясевич со студенческих лет принимал активное участие в научной работе школы математической логики и теории вычислимости. В шестидесятые годы XX века эта школа считалась одной из сильнейших школ в мире по математической логике. За большие научные результаты в таких областях как математическая логика, теория алгоритмов, теория чисел и дискретная математика, Матиясевича избрали действительным членом Российской академии наук и председателем Петербургского математического общества. Он является почётным доктором Парижского университета, членом Баварской академии наук и Американского математического общества.

Решения упражнений

1. КОМБИНАТОРИКА

1. Согласно правилу произведения $5\cdot 8\cdot 7=280$ разных костюмов.

2. Девушка может подобрать $5\cdot 3=15$ разных нарядов из пяти юбок и трёх блузок или просто надеть платье: 15+6=21.

3. Из одной порции мороженого можно сделать 6 десертов или из двух порций мороженного можно сделать $6\cdot 6=36$ десертов, или из трёх порций мороженного можно сделать $6\cdot 6\cdot 6=216$ десертов.

4. В старшем разряде таких чисел может стоять только одно из трёх нечётных цифр: 1, 3, 5. Оставшиеся разряды, их всего три, можно заполнять любыми нечётными цифрами, их всего пять: 1, 3, 5, 7, 9, поэтому существует $3\cdot 5^3=375$ четырёхзначных чисел, не превосходящих 6000 и содержащих только нечётные цифры.

5. **(a)** В старшем разряде такого числа может стоять любая из четырёх цифр: 1, 2, 3, 6, для остальных трёх разрядов добавляется ноль, поэтому легко вычисляется мощность множества S: $|S|=4\cdot 5^3=500$ чисел.

(b) В старшем разряде числового множества $B\subset S$ может находиться любая из цифр: 1, 2, 3, 6. Оставшиеся три разряда можно рассматривать как упорядоченную выборку без повторений из нуля и трёх ещё не задействованных цифр: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$. Вычисляем количество чисел в B: $|B|=4\cdot 24=96$.

(c) Числа в множестве B будут чётными, если они заканчиваются чётными цифрами 0 или 2, или 6. Если 0 – это последняя цифра чётного числа, то первые три можно выбрать $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ способами. Если последней цифрой будет 2 или 6, тогда первые три цифры можно выбрать $3\cdot 3\cdot 2=18$ способами.

По правилу сложения количество чётных чисел в множестве B равно

$$24+18+18=60.$$

(d) Для того, чтобы число из B было больше 4000, оно должно начинаться с цифры 4 или 5, или 6. Можно использовать только цифры 0, 1, 2, 3, 6. Значит, интересующие нас числа могут начинаться только с 6-и. Цифры в остальных разрядах можно написать $4\cdot 3\cdot 2=24$ способами.

6. Порядок отбора игроков в основной состав значения не имеет, а повторы запрещены, поэтому можно рассматривать основной состав как сочетание без повторов. Найдём число таких сочетаний:

$$C_{18}^{11}=\mathrm{C}(18,11)=\frac{18!}{11!\,7!}=31824.$$

7. Число способов выбрать женскую часть жюри равно

$$C_8^5=C(8,5)=\frac{8!}{5!\,3!}=56.$$

Число способов выбрать мужскую часть жюри равно

$$C_{11}^{7} = C(11,7) = \frac{11!}{4!\,7!} = 330.$$

Согласно правилу произведения существует $56 \cdot 330 = 18480$ различных составов жюри.

8. Каждый заказ можно рассматривать как неупорядоченную выборку с повторениями для шести объектов (человек). Повторение будет при выборе из пяти различных фирменных блюд. Число заказов – это число сочетаний с повторениями:

$$C(k+n-1, n-1), \text{ где } n = 5, k = 6.$$

Официант может получить различных заказов в количестве

$$C(10,5) = \frac{10!}{4!\,6!} = 210.$$

9. Каждый букет – это неупорядоченная выборка из 12 роз с повторениями четырёх разных цветов, поэтому

$$C(k+n-1, n-1), \text{ где } n = 4, k = 12.$$

Число всевозможных букетов равно

$$C(15,3) = \frac{15!}{12!\,3!} = 455.$$

10. Набор открыток – это неупорядоченная выборка с повторениями. Каждая выборка состоит из пяти открыток, а в магазине представлено всего 4 разных вида новогодних открыток, значит $n = 5$, $k = 4$,

$$C(5+4-1, 4-1) = C(8,3) = \frac{8!}{5!\,3!} = 56.$$

11.

$$\bar{P}_{10} = (P_{10})_r = \frac{10!}{4!\,4!\,2!} = 3150.$$

---

2. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$; $B = \{-4, -3, -2, -1\ 0, 1, 2, 3, 4\}$;

$$C = \emptyset; \quad D = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}.$$

2. $S = \{3n - 1\colon\ n \in \mathbb{N}\}$; $T = \left\{{}^{1}\!/_{(2^n - 1)}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. $B \cap C = \{t\}$; $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u\}$; $\bar{C} = \{\ q, r, v, w\}$; $A \cap\ B \cap\ C = \emptyset$;

$$\overline{(A \cup B)} = \{\ u, w\}; \quad B \backslash C = \{r, v\}; \quad B \vartriangle C = \{p, r, s, u, v\};$$

$$(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{p, s\}.$$

4. $A \backslash B = \{3(2n+1)\colon\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\}$; $D_1 = \overline{B}$; $D_2 = B \cap C$;

$$D_3 = A \cap\ B;\ \ D_4 =\ C \backslash B.$$

5 (a). Докажем, что $\overline{(A \cap \bar{B}\ )} \cup B =\ \bar{A} \cup B.$

Доказательство

$\overline{(A \cap \bar{B}\ )} \cup B = (\bar{A} \cup B) \cup B =$ (закон де Моргана и дополнения)

$= \bar{A} \cup B \cup B = \bar{A} \cup B.$ (закон ассоциативности)

5 (b). Докажем, что $\overline{\left(\bar{A} \cap \overline{(B \cup C\ }\right)} \cup B =\ A \cup B \cup C.$

Доказательство

$\overline{\left(\bar{A} \cap \overline{(B \cup C\ }\right)} = A \cup (B \cup C) =$ (закон де Моргана и дополнения)
$= A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$ (следствие из закона ассоциативности).

5 (c). Докажем, что $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \bar{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \emptyset.$

Доказательство

$$(B \cup (A \cup C)) \cap (\bar{B} \cup (A \cup C)) \cap \overline{(A \cup C)} = (B \cap \bar{B}) \cup (A \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} =$$

$$\emptyset \cup (A \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = (A \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \emptyset.$$

5 (d). Докажем, что $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C).$

Доказательство

$(A \backslash B) \backslash C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} =$ (по определению операции дополнения (разности))
$= A \cap (\bar{B}\ \cap \bar{C}) =$ (по закону ассоциативности)

$= A \cap (\overline{B \cup C}) =$ (по закону де Моргана)

$= A \backslash (B \cup C).$ (по определению операции дополнения)

5 (e). Докажем, что $A \triangle\ A \triangle A = A.$

Доказательство

$A \triangle A = (A \backslash A\ ) \cup (A \backslash A\ ) =$ (по определению симметричного вычитания)
$= (A \backslash A\ ) = A \cap \bar{A} = \emptyset.$ (по закону дополнения)
$A \triangle\ A \triangle A = A \triangle \emptyset = (A\ \backslash \emptyset\ ) \cup (\emptyset\ \backslash A\ ) = \left(A\ \cap \overline{\emptyset}\ \right) \cup (\emptyset\ \cap \bar{A}\ ) = A \cup \emptyset = A.$

---

3. ЛОГИКА

1. (**a**) $P \cap \neg Q$, (**b**) $R \cap P$, (**c**) $R \Rightarrow P$, (**d**) $P \Rightarrow Q$, (**e**), $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

2. (**a**) $\neg P \Rightarrow \neg Q$, (**b**) $P \cup \neg Q$, (**c**) $P \,\Delta\, Q$.

3. Составные высказывания, которые принимают истинные значения при любых истинных значениях своих компонент, называются ***тавтологиями.***

Найдём тавтологии в следующих составных высказываниях:

(**a**) $\neg(P \cap \neg P)$, (**b**) $P \Rightarrow \neg P$, (**c**) $\big(P \cap (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$.

Для этого построим две таблицы истинности

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \cap (P \Rightarrow Q)$	$\big(P \cap (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$
t	t	t	t	t
t	f	f	f	t
f	t	t	f	t
f	f	t	f	t

P	$\neg P$	$P \cap \neg P$	$\neg(P \cap \neg P)$	$P \Rightarrow \neg P$
t	f	f	t	f
f	t	f	t	t

Из этих таблиц следует. что высказывания (**a**) и (**c**) являются тавтологиями.

4. Докажем эквивалентность двух высказываний:

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \text{ и } (\neg P \Rightarrow R) \cap (Q \Rightarrow R).$$

P	$\neg P$	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \Rightarrow R$	$(Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$(\neg P \Rightarrow R) \cap (Q \Rightarrow R)$
t	f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	f	t	t	f	f	f
t	f	f	t	f	t	t	t	t
t	f	f	f	f	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	f	f	f	f
f	t	f	t	t	t	t	t	t
f	t	f	f	t	f	t	f	f

Два последних столбца таблицы одинаковы, значит два исходных составных высказывания логически эквивалентны.

5. Пусть x – это слово "кошка", предикат $P(x)$: "у кошки есть усы".
Запишем каждое из высказываний в символьной форме:

(**a**) усы есть у всех кошек: $\forall x$: $P(x)$;

(**b**) найдётся кошка без усов; $\exists x$: $\neg P(x)$;

(**c**) не бывает кошек с усами; $\forall x$: $\neg P(x)$.

6. Пусть x – слово "человек", $P(x)$: " x высокий", $Q(x)$: " x полный",
Отрицание утверждения $\forall x$: $\big(P(x) \cap Q(x)\big)$ имеет вид $\exists x$: $\big(\neg P(x) \cup \neg Q(x)\big)$.

7. Докажем с помощью индукции справедливость равенства

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$$

для любых натуральных чисел n.

Доказательство

Введём предикат $P(n)$: $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$.

$$P(1)=1\cdot(2\cdot 1-1)=1,$$

поэтому высказывание $P(1)$ истинно. Предположим, что $P(k)$ истинно при некотором натуральном числе $k>1$. Докажем, что тогда будет верным высказаэывание $P(k+1)$. Правая часть предполагаемого равенства при $n=k+1$.

$$1+5+9+\cdots+(4k-3)+(4(k+1)-3)=k(2k-1)+(4k+1)=$$

$$=2k^2+3k+1=(k+1)(2k+1)=(k+1)(2(k+1)-1).$$

Согласно принципу математической индукции справедливость формулы доказана.

8. Докажем, что если последовательность рациональных чисел $1, x_2, \cdots, x_n$ задана рекуррентной формулой

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{x_k+2},$$

то любой элемент этой последовательности можно вычислить по формуле

$$x_n=\frac{1}{2^n-1}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство

Пусть предикат $P(n)$:

$$x_n=\frac{1}{2^n-1}.$$

Если $n=1$, то $P(1)$ является истинным.

Предположим, что $P(k)$ верно при $\forall k\in\mathbb{N}$, тогда

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{x_k+2}=\frac{\frac{1}{2^k-1}}{\frac{1}{2^k-1}+2}=\frac{1}{2^{k+1}-1}\Rightarrow x_{k+1}=\frac{1}{2^{k+1}-1}.$$

Предположение об истинности $P(k)$ привело к истинности $P(k+1)$, поэтому $P(n)$ – верное высказывание при $\forall n\in\mathbb{N}$.

9. Докажем, что высказывание $\big(\neg(p \text{ и} (\neg q))\big)$ логически эквивалентно утверждению $\big((\neg p) \text{ или } q\big)$.

Доказательство

Заполним совместную таблицу истинности для составных высказываний:

$$r=\neg(p\wedge\neg q), \quad s=\neg p\vee q\,.$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	r	s
t	t	f	f	f	t	t
t	f	f	t	t	f	f
f	t	t	f	f	t	t
f	f	t	t	f	t	t

Два последних столбца таблицы совпадают, значит высказывания r и s эквивалентны: $r \Leftrightarrow s$.

---

4. ОТНОШЕНИЯ

1. Докажем, что если $A \times B = B \times A$, то $A = B$.

Доказательство

Элементы произведения $A \times B$ имеют вид $(a, b), a \in A,\ b \in B$. По условию результат произведения $B \times A$ тоже $(a, b),\ \ a \in B, b \in A$. Эти соотношения верны для $\forall\ a \in A,\ \forall\ \ b \in B$, поэтому справедливо равенство $A = B$.

2. Докажем, что если $A \times B = A \times C$, то $B = C$.

Доказательство

Множество $A \times C$ состоит из упорядоченных пар (a, c), $a \in A, c \in \text{C}$. По условию $A \times B = A \times C \Longrightarrow\ B \subset C$. Множество $A \times B$ состоит из упорядоченных пар (a, b), $a \in A,\ b \in B$. По условию $A \times C = A \times B$, поэтому $C \subset B$ и $B \subset C$ $\Longrightarrow\ B = C$.

3. Докажем справедливость формулы $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Доказательство

Пусть $x \in A \times (B \cap C)$, тогда $x = (a, t)$, где $a \in A,\ t \in (B \cap C) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow t \in B \text{ и } t \in C \Longrightarrow A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C).$$

Пусть $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$, тогда $x \in (A \times B)$ и $x \in (A \times C) \Longrightarrow x = (a, t)$, $a \in A,\ t \in (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \times (B \cap C) \Longrightarrow (A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.

Из определения равенства множеств следует, что

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

4. Докажем справедливость равенства $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Доказательство

Пусть $x \in (A \cup B) \times C$, тогда $x = (s, c)$, где $s \in (A \cup B), \text{c} \in C$. Элемент s принадлежит либо A, либо B, из чего следует

$$x = (s, c) \Longrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C) \Longrightarrow (A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C).$$

Пусть $x \in (A \times C) \cup (B \times C) \Longrightarrow x = (s, c)$, где $s \in (A \cup B) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \;\; x \in \big((A \cup B) \times C\big) \Longrightarrow (A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C.$$

В итоге, доказано, что два множества $(A \times C) \cup (B \times C)$ и $(A \cup B) \times C$ являются подмножествами друг друга, поэтому $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

5. $R = \{\, (1,7), (2,5), (3,3), (4,1) \,\}$; $T = \{(n, n^2\,) : n \epsilon \mathbb{N}\,\}$;

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2),$
$(3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$.

6. Отношение uRv на множестве $\{1,2,3,4\}$ с условием $u + 2v$ – нечётное число, представимо в виде следующих упорядоченных пар

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

Отношение R в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} t & t & t & t \\ f & f & f & f \\ t & t & t & t \\ f & f & f & f \end{pmatrix}.$$

7(a). Отношение не рефлексивно, поскольку $(x + x)$ всегда чётное число; оно симметрично, так как число $(x + y) = (y + x)$. Отношение не транзитивно, например, 1+4 и 4+3 – нечётные числа, а 1+3 – чётное число.

7(b). Отношение рефлексивно, поскольку $(x + x)$ всегда чётное число; оно симметрично, так как число $(x + y) = (y + x)$. Отношение транзитивно, так как сумма чисел одинаковой чётности всегда чётна.

7(c). Отношение транзитивно, так как из нечётности произведений xy, yz следует нечётность их сомножителей, поэтому произведение xz нечётно. Отношение симметрично, поскольку произведение чисел коммутативно: $xy = yx$; оно рефлексивно: x – нечётное число.

7(d). Отношение рефлексивно, так как $x + x^2 = x(x + 1)$ – произведение двух последовательных целых чисел, одно из них всегда чётно, второе нечётно, их произведение всегда будет чётным.

Рассмотрим подробнее транзитивность. Если $x + xy$ и $y + yz$ – чётные числа, то либо x – чётно, тогда $x + xz$ – чётно, либо x – нечётно, тогда переменные y, z тоже нечётны, поэтому $x + xz$ будет чётным числом. Приходим к выводу, что у исходного отношения есть свойство транзитивности.

Проверим на следующем примере наличие у отношения свойства симметричности.

$x = 2, y = 3 \Longrightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 8$ – чётное число.

$x = 3, y = 2 \Longrightarrow 3 + 3 \cdot 2 = 9$ – нечётное число.

Вывод очевиден: исходное отношение $x + xy$ не является симметричным.

8. $R = \{(1,9),(3,3),(9,1)\}$; $S = \{(3,2),(6,4),(9,6),(12,8)\}$.
Транзитивным замыканием отношений R и S являются соответственно отношения

$$R^* = R \cup \{(1,1),(9,9)\};\ \ S^* = S \cup \{(9,4)\}.$$

9. Прежде всего покажем, что заданное отношение является эквивалентным. Для этого докажем его рефлексивность, симметричность и транзитивность.
По условию $x^2 - y^2$ должно делится на 3. Пусть $x = y$, тогда $x^2 - x^2 = 0$ делится на 3, значит отношение рефлексивно. Оно симметрично, потому что $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2)$ тоже делится на 3. Пусть $(x^2 - y^2)$ и $(y^2 - z^2)$ делятся на 3, тогда $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)$ делится на 3, откуда следует транзитивность исходного отношения. Приходим к заключению, что исходное отношение является эквивалентным.

10. Дано множество $A = \{1,2,3,4\}$ и отношение

$$R = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,4)\}.$$

Построим замыкания этого множества относительно рефлексивности, симметричности и транзитивности.

<u>Построение</u>

$R_r^* = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,4),\ (1,1),(3,3),(4,4)\}$ замыкание рефлексивности;

$R_s^* = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,4),\ (3,2),(4,3)\}$ замыкание симметричности;

$R_t^* = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,4),\ (1,3),(2,4)\}$ замыкание транзитивности.

11. Опишем классы, на которые разбивается множество A в каждом из следующих случаев.

(a) A – множество книг в библиотеке. Отношение R определяется следующем условием. xRy – только если совпадают цвета переплётов книг.

Количество классов эквивалентности равно количеству различных цветов переплётов.

(b) $A = \mathbb{Z}$. R задано условием: xRy – только если $x - y$ является чётным числом.

Множество целых чисел разбивается на два класса эквивалентности: класс нечётных чисел (разность нечётных чисел – чётное число) и класс чётных чисел (разность чётных чисел – чётное число).

(c) A – множество людей, xRy – только если x и y одинакового пола.

Совершенно ясно, что человечество можно представить как объединение двух классов эквивалентности. К одному относятся женщины, к другому – мужчины.

(d) $A = \mathbb{R}^2$. Задано отношение R: $(a,b)R(c,d)$ в том случае, если

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Каждый класс эквивалентности геометрически представляет окружность с центром в начале декартовой системы координат и некоторым радиусом R. У каждой окружности свой радиус. Приходим к выводу, что существует бесконечное множество классов эквивалентности.

12. Есть три множества $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{x, y, z\}$ и два отношения: ρ_1 из A в B и ρ_2 из B в C.

$$\rho_1 = \{(a,1),(b,1),(c,2),(c,3),(c,4)\}\,;\, \rho_2 = \{(1,y),(2,z),(3,x),(4,z)\}.$$

Построим композицию отношений $\rho_1 \circ \rho_2$.

<u>Построение</u>

Таб_{ρ_1}

$A\rho_1 B$	1	2	3	4
a	1	0	0	0
b	1	0	0	0
c	0	1	1	1

Таб_{ρ_2}

$B\rho_2 C$	x	y	z
1	0	1	0
2	0	0	1
3	1	0	0
4	0	0	1

M_{ρ_1}

1	0	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1

M_{ρ_2}

0	1	0
0	0	1
1	0	0
0	0	1

Умножаем матрицу M_{ρ_1} на матрицу M_{ρ_2}. Их булевым произведением является матрица композиции:

$$M_{\rho_1} \cdot M_{\rho_2} = M_{\rho \circ s}.$$

$\text{Таб}_{\rho_1 \circ \rho_2}$

$a(\rho \circ s)c$	x	y	z
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	1

$M_{\rho_1 \circ \rho_2}$

0	1	0
0	1	0
1	0	1

<u>Ответ</u>: $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a,y),(b,y),(c,x),(c,z)\}$.

---

5. ФУНКЦИИ

1. Является ли отношение " x – брат или сестра y" функцией на множестве всего человечества?

<u>Ответ</u>: это не функция, поскольку есть семьи с несколькими братьями и сёстрами, есть семьи с единственным ребёнком.

2. Пусть $A = \{0, 2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Какие из следующих отношений между множествами A и B являются функциями? Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны?

(a) $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$. Это функция. Она не инъективна, так как переводит два разных элемента множества A в один и тот же элемент $3 \in B$. Эта функция не сюръективна, поскольку элемент $7 \in B$ не входит в множество значений функции.

(b) $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$. Это функция. Она инъективна, сюръективна, поэтому является биекцией.

(c) $\{(2, 1), (4, 5), (6, 3)\}$. Это не функция, так как у элемента $0 \in A$ нет соответствующего элемента в множестве B.

(d) $\{(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)\}$. Это не функция, так как элементу $0 \in A$ соответствует два элемента из множестве B: 3 и 7.

3. Разберёмся, какие из следующих функций являются инъекциями, сюръекциями, биекциями. Предполагается, что области определения и значений этих функций совпадают с множеством $\mathbb{Z}$.

(a) $f(n) = 2n + 1$. Пусть $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$, значит эта функция инъективна, но она принимает только нечётные значения, поэтому f – не сюръективна.

(b) $g(n) = \begin{cases} n/2, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ 2n, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$

Функция g не инъективна, так как есть случай $g(4) = g(1) = 2$. Область значений $g(n)$ совпадает со всем множеством целых чисел, поэтому функция сюръективна.

(c) $h(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ n - 1, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$

Проверим функцию h на инъективность:

$$h(n_1) = h(n_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 + 1 = n_2 + 1 \\ n_1 - 1 = n_2 - 1 \end{array}\right. \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Функция h – инъективна.

Проверим h на сюръективность. Если n – нечётное число, то $n - 1$ чётное, тогда по определению функции h

$$h(n - 1) = (n - 1) + 1 = n.$$

Если n – чётное число, то $n + 1$ нечётное, тогда по определению функции h

$$h(n + 1) = (n + 1) - 1 = n.$$

Поскольку n– любое целое число, приходим к выводу, что h – сюръективна.

4. Определим, является ли функция

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

инъективной и сюръективной.

Функция g не инъективна; например, $g(0) = g(1) = 0$.

Функция g – сюръективна:

$$g(2n) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

5. Функция $f\colon A \to B$ задана формулой $b = f(a) = 1 + 2/a$, где

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad B = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Докажем, что эта функция биективна. Сначала обратимся к инъективности.

$$f(a_1) = 1 + 2/a_1\,, f(a_2) = 1 + 2/a_2, \text{если } f(a_1) = f(a_2) \ \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Функция инъективна.

Переходим к сюръективности:

$$b = 1 + 2/a \ \Rightarrow a = \frac{2}{b-1}.$$

Последнее равенство не выполняется только для $b = 1$, но это число не входит в область значений функции поэтому функция сюръективна. Приходим к выводу, что наша функция является биекцией.

Обратная функция:

$$f^{-1}\colon B \to A, \qquad f^{-1}(b) = a = \frac{2}{b-1}.$$

6. Заданы две функции $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если}\,, x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Представим аналитически следующие композиции: $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} (2x+1)^2, & \text{если}\,, x \geq 0, \\ x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$(g \circ f) = g\big(f(x)\big) = 2\,x^2 + 1.$$

$$(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = \begin{cases} g(2x+1), & \text{если } x \geq 0, \\ g(-x), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Longrightarrow \; g(2x+1) = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3;$$

$$x < 0 \Longrightarrow -x \geq 0 \Longrightarrow \; g(-x) = 2(-x) + 1 = 1 - 2x;$$

$$(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = \begin{cases} 4x+3, & \text{если } x \geq 0, \\ 1-2x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

7. В одном селе живёт 79 семей, в каждой из которых есть два ребёнка.

Докажем, что найдётся по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей. Например, если в первой семье дети родились в январе и мае, то и во второй семье – в январе и мае.

Доказательство

Пусть A – множество семей, проживающих в селе, B – множество различных пар месяцев. Введём функцию $f\colon A \longrightarrow B$, которая каждой семье сопоставляет пару месяцев, в которые родились их дети. Число упорядоченных пар месяцев равно $12 \cdot 12 = 144$. В 12 из этих пар входят одинаковые названия месяцев, в оставшиеся 132 названия разные. Порядок вхождения названий месяцев, в такие пары безразличен, поэтому число пар $|B|$ с различными месяцами равно

$$12 \cdot 12 = 144; \; 144 - 12 = 132; \;\; 132/2 = 66; \; |B| = 12 + 66 = 78.$$

$$|A| = 79 \Longrightarrow |A| > |B|\,.$$

По принципу Дирихле, найдутся две семьи, в которых дети родились в одни и те же месяцы.

---

6. БУЛЕВА АЛГЕБРА И БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. Проверим истинность двух равенств

(a) $\overline{(p \wedge \bar{q}\,)} \vee \bar{r} = \bar{p} \vee q \vee \bar{r}$; **(b)** $\overline{\Big((p \wedge \bar{q}\,) \wedge \big(r \vee (p \wedge \bar{q}\,)\big)\Big)} = \bar{p} \vee q.$

Используем закон де Моргана и закон ассоциативности и очевидное равенство $(\overline{\bar{q}}) = q$. Приходим к равенствам

$$\textbf{(a)} \; \overline{(p \wedge \bar{q}\,)} \vee \bar{r} = (\bar{p} \vee q) \vee \bar{r} = \bar{p} \vee q \vee \bar{r}.$$

$$\textbf{(b)} \; \overline{\Big((p \wedge \bar{q}\,) \wedge \big(r \vee (p \wedge \bar{q}\,)\big)\Big)} = \overline{(p \wedge \bar{q}\,)} \vee \overline{\big(r \vee (p \wedge \bar{q}\,)\big)} =$$

$$= (\bar{p} \vee q) \vee \big(\bar{r} \wedge \overline{(p \wedge \bar{q}\,)}\big) = (\bar{p} \vee q) \vee \big(\bar{r} \wedge (\bar{p} \vee q)\big) =$$

$$= \big((\bar{p} \vee q) \vee \bar{r}\big) \wedge (\bar{p} \vee q) = (\bar{p} \vee q) = \bar{p} \vee q.$$

2. Построим таблицу истинности булева выражения

$$f = \big(p \wedge (\bar{q} \vee r)\big) \vee \big(\,\bar{p} \wedge (q \vee \bar{r})\big).$$

p	q	r	$\bar{q} \vee r$	$q \vee \bar{r}$	$p \wedge (\bar{q} \vee r)$	$\bar{p} \wedge (q \vee \bar{r})$	f
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

С помощью таблицы строим дизъюнктивную нормальную форму:

$$f = \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \ \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \ p\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee \ pqr.$$

3. Построим карту Карно заданного булева выражения, представленного в дизъюнктной нормальной форме:

$$\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pqr.$$

Карта Карно

--	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	**1**	**1**	**1**	
$\bar{r}$	**1**			

Карта Карно имеет две пары соседних единиц, поэтому

$$\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pq = (\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr) \vee (pq\bar{r} \vee pqr).$$

Строим упрощённый вид полученной формы:

$$(\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr) \vee (pq\bar{r} \vee pqr) = \bar{p}r(\bar{q} \ \vee q) \vee \ pq(\bar{r} \vee r) = \bar{p}r \vee \ pq.$$

<u>Ответ</u>: $f = \bar{p}r \vee \ pq$.

4. Построим дизъюнктную нормальную форму булевой функции $f(p, q, r)$ по заданной таблице истинности, затем построим карту Карно и упростим дизъюнктную нормальную форму этой функции.

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Согласно заданной таблице, дизъюнктная нормальная форма булевой функции $f(p,q,r)$ имеет следующий вид

$$f=\bar{p}\bar{q}\bar{r}\vee\bar{p}q\bar{r}\vee p\bar{q}r\vee pqr.$$

Карта Карно

-	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	**1**			**1**
$\bar{r}$		**1**	**1**	

две, если последний столбец $p\bar{q}$ сделать первым или первый столбец pq превратить в последний. Упрощаем полученные пары минтермов:

$$\bar{p}\bar{q}\bar{r}\vee\bar{p}q\bar{r}=\bar{p}\bar{r}(\bar{q}\vee q)=\bar{p}\bar{r};\quad p\bar{q}r\vee pqr=pr(\bar{q}\vee q)=pr.$$

$$f=\bar{p}\bar{q}\bar{r}\vee\bar{p}q\bar{r}\vee p\bar{q}r\vee pqr=\bar{p}\bar{r}\vee pr.$$

<u>Ответ</u>: $f=\bar{p}\bar{r}\vee pr$.

5. Найдём дизъюнктную нормальную форму булевой функции $f(p,q,r)$ со следующей таблицей истинности и упростим форму с помощью карты Карно.

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Карта Карно

-	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r			**1**	
$\bar{r}$	**1**	**1**	**1**	

$$f(p,q,r)=pq\bar{r}\vee\bar{p}q\bar{r}\vee\ \bar{p}\bar{q}r\vee\bar{p}\bar{q}\bar{r}=q\bar{r}(p\vee\bar{p})\vee\bar{p}\bar{q}(r\vee\bar{r})=q\bar{r}\vee\bar{p}\bar{q}.$$

<u>Ответ</u>: $f=q\bar{r}\vee\bar{p}\bar{q}$.

Толковый и этимологический словарь

А

АБАК – от греческого $\alpha\beta\alpha\xi$ – *доска, стол.* Так называлось древнейшее счётное приспособление.

АБСОЛЮТНЫЙ – от латинского *absolutus* – безусловный.

АБСТРАКЦИЯ – от латинского *abstractio* – высшая форма обобщения.

АВТОМОРФИЗМ – термин составлен из греческих слов $\alpha\upsilon\tau o\varsigma$ – *сам* и $\mu o\rho\varphi\eta$ – *форма. Автоморфный* – не изменяющий свою форму. Автоморфизм – изоморфизм из множества M на M (изоморфизм на себя).

АДДИТИВНОСТЬ – от латинского слова *additivus* – *прибавляемый.*

АКСИОМА – от греческого $\alpha\chi\iota o\mu\alpha$ – *признание, почёт, общепринятое положение.* В Россию это слово пришло в Петровские времена из латинского языка. В XVIII веке вошло в словари русского языка.

АЛГЕБРА. Первое сочинение по алгебре (ал-джабра) написал знаменитый персидский математик, астроном, географ и историк IX в. Мухамед ибн Муса аль-Хорезми. Современная алгебра – это математическая наука, которая включает несколько разделов, каждый из которых тоже называется алгеброй и посвящён изучению операций над элементами определённого множества, все элементы которого имеют одинаковую уникальную структуру. Название каждой алгебры совпадает с названием изучаемого множества.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА – такое множество действительных чисел, которые могут быть корнями алгебраических уравнений.

АЛГОРИТМ. В работе «Об индийском числе» персидский учёный ал- Хорезми изложил десятичную систему исчисления. Латинский перевод этой работы начинался со слов "Dixit Algorithmi – сказал ал-Хорезми". Таково происхождение слова *алгоритм.* В средневековой Европе этим словом называли десятичную систему. Лейбниц (1684) назвал алгоритмом порядок действий для получения результата. Современный смысл слова *алгоритм* закрепился только в XIX веке.

АЛЬТЕРНАТИВА – от французского *alternative* – *попеременный.* Выбор одной из нескольких исключающих друг друга возможностей.

АНАЛИЗ – от греческого $\alpha\eta\alpha\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma$ – *решение.* Встречается у Платона и Евклида.

АНТИ – от греческого: $\alpha\nu\tau\iota$ – *наоборот.* Эта приставка входит во многие математические термины.

АРГУМЕНТ – от латинского *argumentum* – *знак, признак, довод*.

АССОЦИАТИВНОСТЬ – от латинского слова *associatio* – *объединение.*

Б

БАЗИС – от греческого $\beta\alpha\sigma\iota\varsigma$ *– основа.*

БЕСКОНЕЧНОСТЬ. В математике это понятие появилось в 1525 г. благодаря великому немецкому художнику Альберту Дюреру. Знак ∞ стал математическим в 1655 г. Его ввёл английский математик Джон Валлис. В Римской империи так обозначали число 1000.

БИ – латинская приставка, которая означает удвоение.

БИЕКЦИЯ – взаимно-однозначное отображение одного множества в другое.

БИНАРНЫЙ – от латинского *binaries – двойной.* Состоящий из двух частей или комонент. Двоичная система счисления.

БИНАРНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ – это отображение $X \times X \to X$. Любой упорядоченной паре элементов множества X ставится в соответствие однозначно определённый элемент этого же множества.

В

ВЕЛИЧИНА. Этим словом называют параметр, функцию, коэффициент и другие математические объекты, если они могут принимать числовые значения.

ВЫВОД – процесс получения некоторого результата и сам результат, достигнутый в конце процесса.

ВЫРАЖЕНИЕ – формула или её часть.

Г

ГОМЕОМОРФИЗМ – от греческих слов $o\mu o\iota o\varsigma$ *– похожий,* $\mu o\rho\varphi\eta$ *– форма.* Это понятие ввёл (1895) французский математик Анри Пуанкаре. Гомеоморфизм – взаимно-однозначное и непрерывное отображение в топологии. В дискретной математике используется в теории графов.

ГОМОМОРФИЗМ – от греческих слов $o\mu o\varsigma$ – одинаковый, $\mu o\rho\varphi\eta$ *– форма.* Это понятие возникло в алгебре и обобщено (1929) немецким математиком-женщиной Эмми Нётер. Гомоморфизм – бинарное отображение одной алгебраической системы в другую, при котором сохраняются основные операции и отношения в этих алгебраических системах.

Д

ДЕДУКЦИЯ – от латинского *deductio – выведение.* Метод мышления, при котором новое положение выводится чисто логическим путём из предшествующих.

ДИЗЪЮНКЦИЯ – происходит от латинского слова *disjunctio – разбиение, разобщение.* Результат этой операции – всегда истина, если истиной является хотя бы одно из двух высказываний, входящих в операцию дизъюнкции.

ДИСКРЕТНОСТЬ – от латинского *discretio – отделение, разделение.* Антонимом этому слову является слово *непрерывность*.

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ – от латинского *distributivus – распределение.*

И

ИДЕМПОТЕНТНОСТЬ – от латинских слов *idem – тот же самый, potens – способный.* Идемпотентность – такое свойство операции, при котором повторное применение операции к высказыванию не меняет высказывание. Если операция идемпотентна, то многократное её применение логически эквивалентно однократному применению этой операции. Термин предложил (1870) американский математик Бенджамин Пирс. Это важное свойство операций встречается в сетевых взаимодействиях.

ИЗО – от греческого слова *ισος – равный, одинаковый, подобный.* Входит как приставка во многие математические термины.

ИЗОЛИРОВАННЫЙ – от французского *isole – отдельный.* Например, изолированная точка.

ИЗОМОРФИЗМ – от двух греческих слов *ισος – равный, одинаковый, подобный* и *μορφη – форма.* Если при биекции сохраняется структура этих множеств, такие множества называют изоморфными.

ИМПЛИКАЦИЯ – от латинского *implicatio – сплетение.* Логическая операция, образующая составное высказывание из двух других высказываний с помощью логической операции (связки). Соответствует союзу "если⋯,то⋯ ".

ИНВАРИАНТНОСТЬ – от латинского *invariabils – неизменный.* Неизменность некоторых математических объектов относительно отдельных преобразований.

ИНВЕРСИЯ – от латинского *inversio – переворачивание, перестановка.* В логике – отрицание.

ИНВОЛЮЦИЯ – от латинского *involutio – переход к прежнему состоянию*.

ИНДУКЦИЯ – от латинского *inductio – вводить, проводить, выводить.* В русский язык пришло в начале XIX в. Индуктивное умозаключение – метод рассуждения от частного к общему.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ – от латинского слова *interpretatio – толкование, объяснение.*

ИНЪЕКЦИЯ (инъективное отображение) – разные элементы 1-го множества X отображаются в разные элементы 2-го множества Y, а одинаковые образы имеют одинаковые прообразы: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.

ИТЕРАЦИЯ – от латинского *iteratio – повторение.* Английское *iteration – итерация.* Слово означает процесс повторного применения совокупности математических операций при решении задачи. Для успешной работы такого процесса необходимо, прежде всего, создать такой алгоритм, при котором после каждого шага итерации будет повышаться точность приближения к истинному решению поставленной задачи. Эйлер – первый стал исследовать итерационные методы.

ИТЕРИРОВАНИЕ – переход от одного шага итерации к следующему шагу.

К

КАРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО – *от латинского cardinalis – основа, главное обстоятельство, сердце.* Характеристика бесконечных множеств.

КВАНТОР – от латинского *quantum – доля, часть, квант*. Общее название логических обозначений, с помощью которых характеризуют математические объекты. Чаще всего используются следующие кванторы.
$\forall$ – квантор всеобщности, заменяет слова: *любой, всякий. каждый, все*;
$\exists$ – квантор существования, заменяет слова: *есть*, *существует. найдётся*;
$\exists!$ – квантор существования и единственности; заменяет выражения: *есть и только один, существует единственный*;
] – квантор допущения; заменяет слова: *допустим, предположим, рассмотрим, пусть, возьмём.*

КОММУТАТИВНОСТЬ – *от латинского commutativus – менять.* В математике так называют свойство операции, при которой результат операции не зависит от порядка вхождения элементов, над которыми производится эта операция.

КОНТИНУУМ – от латинского *continuum – непрерывный.* Этим словом называют мощность бесконечного множества чисел, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

КОНТРА – от латинского *contra – против*. Например, *контрапозитив*.

КОНТРАДИКЦИЯ – составное высказывание, если оно ложно при любых, составляющих его простых высказываниях.

КОНТРАПОЗИЦИЯ – закон логики, по которому, если есть импликация $p \to q$, то верна импликация $\neg q \to \neg p$. Выражение $\neg q \to \neg p$ называют контрапозицией относительно $p \to q$.

КОНЦЕПЦИЯ – от латинского *conceptus – замысел.* Теоретическое построение.

КОНЪЮНКЦИЯ – от латинского *conjunctio – связь, соединение.* В логике – это операция, эквивалентная по смыслу союзу "и". Результат действия такой операции будет истинным, только когда истинны все высказывания, входящие в эту операцию.

КОРТЕЖ – от французского *cortege – торжественное шествие.* Кортеж – это конечное множество с упорядоченным набором элементов. Порядок элементов имеет значение, а элементы могут повторяться.

КРИТЕРИЙ – от греческого *χριτεριον – способ решения.* Критерий – оценка, определение или классификация некоторого объекта по его существенному и отличительному признаку.

Л

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК – способ упорядочения и сортировки слов. Этот способ используется в словарях, энциклопедиях и алфавитных указателях.

ЛИНИЯ – от латинского *linea*, которое произошло от *linum – льняная нить.*

ЛОГИКА – от греческого $\lambda o\gamma o\varsigma$ (логос) – *слово, разум, речь, рассуждение.* Логика является разделом философии. Это наука о законах и формах правильного мышления, о способах доказательств и опровержений. Математическая логика – это самостоятельный раздел математики.

М

МАТЕМАТИКА – от древнегреческого глагола $\mu\alpha\theta\alpha\nu\omega$ – *учусь через размышление*. В России в XV веке астрологию называли математикой, а математику – геометрией. Только к XVII веку арифметика и геометрия стали математикой.

МЕТОД – от греческого $\mu\varepsilon\theta o\delta o\varsigma$– *путь, способ.* Греческие учёные Платон и Аристотель использовали это слово как название совокупности необходимых математических операций для получения результата.

МИНТЕРМ – булева функция, которая принимает значение 1 только на одном наборе значений её аргументов.

МОДУЛЬ – от латинского слова *modulus* – мера.

МОНОИД – множество, состоящее из набора элементов и бинарной операции со свойством ассоциативности и наличием нейтрального элемента (единицы). Можно сказать, что моноид – это *полугруппа с единицей*.

МОЩНОСТЬ – происходит от древнеславянского *mogti,* от которого произошли русские слова *могу, мочь*. Характеристика бесконечных или конечных множеств.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ – от латинского *multiplicatio – умножение.*

П

ПАРАДОКС – от греческого $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$ – *странный, необычный*. В теории множеств, например, существует парадокс Рассела.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ – от греческого $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta o\varsigma$ – *рядом идущая.* Слово стали использовать как математический термин 2500 лет назад в школе Пифагора.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР – от латинского слова *perpendicularum – отвес.*

ПОГЛОЩЕНИЕ – название логических законов, с помощью которых можно упростить (поглотить) некоторые комбинации логических операций без изменения их логического значения. Законы поглощения – это часть булевской алгебры:

$p\vee(p\wedge q) \equiv p$ – поглощение конъюнкции дизъюнкцией;

$p\wedge(p\vee q;) \equiv p$ – поглощение дизъюнкции конъюнкцией.

ПРЕДИКАТ – от латинского *predicatum – сказуемое.* В математической логике – это утверждение, содержащее переменные. Предикат принимает значение истины или лжи в зависимости от значений переменных. В логике – это часть суждения, которое характеризует субъект, например, "человек умный", умный – предикат; "солнце светит", светит – предикат.

ПРИМИТИВ – от латинского *primitivus – первоначальный, первобытный.* Первоначальное простое явление по сравнению с последующими явлениями того же рода. Произведение искусства, которое относится к ранним стадиям развития культуры. Примитивизм – упрощённый подход к сложным вопросам.

ПРИОРИТЕТ – от латинского *prioritas – преимущественное право на что-либо.*

ПРОПОЗИЦИЯ – от латинского *propositio – предложение.* В философии так называют высказывание, которое может быть истинным или ложным. Язык логики высказываний называется пропозициональным языком.

Р

РАВЕНСТВО. До появления специального знака понятие *равенство* записывали определённым словом соответствующего языка. В 1557 г. английский математик и врач Рекорд предложил знак $=$. Свой выбор он объяснил просто: "Ничего нет более равного, чем две параллельные прямые". Этот знак стали использовать повсюду только к концу XVIII века. Изобретатель знака, который наиболее часто встречается в математике, умер в долговой тюрьме Лондона.

РЕКУРРЕНТНОСТЬ – от латинского *recurro – бегу назад, возвращаюсь.* Термин ввёл в математику французский математик Абрахам де Муавр.

РЕФЛЕКСИВНОСТЬ – от латинского *reflrxio – обращение назад.* Способность объекта обращаться к самому себе.

С

СИЛЛОГИЗМ – от греческого $\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\iota\sigma\mu o\varsigma$ *– подытоживать, сделать умозаключение.* Силлогизм – это логическое заключение, которое получается на основе двух или более исходных суждений.

СИМВОЛ – от греческого слова $\sigma\upsilon\mu\beta o\lambda o\varsigma$ *– условный знак, примета.*

СИММЕТРИЯ – от греческого слова $\sigma\nu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ *– соразмерность, правильное отношение.* Свойство геометрического объекта совмещаться с собой при некоторых преобразованиях. В более общем случае симметрия в математике – это инвариантность структуры математического объекта относительно определённых преобразований.

СИСТЕМА – от греческого слова $\sigma\upsilon\sigma\tau\eta\mu\alpha$ *– составленное из частей, соединение.*

СКАЛЯР – от латинского прилагательного *scalaris*, а оно произошло от слова *scala – лестница. Скаляр* – величина, каждое значение которой выражается одним действительным числом. В таком смысле слово *скаляр* закрепилось в математике. Первым стал называть величины скалярами великий ирландский математик Гамильтон (1843), чтобы отделить векторы от числовых величин.

СКОБКИ – от славянского слова *скоба – крючок.* Подобие скобок впервые изобрёл итальянский математик Тарталья. У Виета появились (1593) фигурные скобки. Благодаря Лейбницу и Эйлеру скобки стали широко использоваться в математике с начала XVIII века.

СЮРЪЕКЦИЯ – от французского *sur – на, над* и латинского *jacio – бросаю.* Сюръективное отображение – это отображение, при котором любой элемент 2-о множества имеет хотя бы один прообраз в 1-м множестве.

Т

ТАБЛИЦА– от латинского *tabula – доска, стол.*

ТАВТОЛОГИЯ – составное, тождественно истинное высказывание. Оно истинно при любых, составляющих его простых высказываниях. На английском языке этот термин выглядит как *displaystile.*

ТЕОРЕМА – от греческого слова $\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$ – зрелище, представление. У Пифагора это слово стало означать *умозаключение.*

ТЕОРИЯ – от греческого $\theta\varepsilon\omega\rho\iota\alpha$ – наблюдение. В математику это слово ввёл Пифагор.

ТОЖДЕСТВО – образовано от старославянского местоимения *тожде* или *тоже.* Означает полное сходство.

ТРАНЗИТИВНОСТЬ – от латинского *transitivus – переходный.* Одно из свойств логического отношения.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА – от латинского *transcendentis – выходящий за пределы.* Так называются иррациональные числа, которые не могут быть корнями ни одного алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Множество трансцендентных чисел несчётно. Эти числа составляют основную массу множества всех действительных чисел.

ТРИВИАЛЬНЫЙ – от латинского *trivialis – обыкновенный.*

У

УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ – составное высказывание, которое истинно хотя бы один раз при любых, составляющих его простых высказываниях.

УНИВЕРСУМ – от латинского *universum – мир как целое, вселенная, совокупность всего.*

Ф, Э

ФАКТОРИАЛ – от английского слова *factor – множитель.* В 1808 году появилось обозначение *n!*. Ещё в конце XIX века использовали несколько различных обозначений факториала. Но в 1916 году в Лондонском математическом обществе постановили, что следует использовать только *n!*.

ФОРМУЛА – от латинского *formula – уменьшительное от слова forma – образ, вид.* В русском языке появилось при правлении Петра I.

ФУНКЦИЯ – от латинского *functio – свершение, исполнение.*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ – от латинского *equivalents – равнозначный, равносильный.* В математической логике означает, что два выражения или утверждения имеют одинаковый смысл или одинаковое значение, не смотря на разницу в их форме.

Обозначения

КВАНТОРЫ

$\exists$ – квантор существования. Он заменяет слова: *найдётся, есть, существует.* Образован от английского слова Exist. Знак $\exists$ – это перевёрнутая буква E.

$\forall$ – квантор всеобщности. Он заменяет слова: *все, любой, всякий, каждый*. Образован от английского слова All. Знак $\forall$ – это перевёрнутая буква A.

] – квантор допущения. Заменяет слова*: допустим, пусть, предположим, рассмотрим.*

ЗНАКИ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

$\in$ – знак принадлежности одного элемента некоторому множеству:

$a \in A$ – элемент a из множества A; $b \notin A$ – элемент b не из множества A;

$\subset$ – знак принадлежности одного множества другому множеству;

$\cup$ – знак объединения множеств;

$\cap$ – знак пересечения множеств;

$\setminus$ – знак вычитания множеств;

$\sim$ – знак эквивалентности множеств;

$\cong$ – знак изоморфизма;

$\{a_i\}_{i=1}^N$ – обозначение дискретного множества, состоящего из N элементов;

$\emptyset$ – пустое множество.

СТРЕЛКИ

$\Longrightarrow$ или $\rightarrow$ – знак следования. Заменяет слова: *следует, вытекает, поэтому;*

$\Leftrightarrow$ или $\leftrightarrow$– знак равносильности или знак логической эквивалентности;

$\mapsto$ знак соответствия ($a \mapsto b$); например, соответствие двух элементов из изоморфных множеств.

СКОБКИ

$\begin{cases} A, \\ B, \\ C. \end{cases}$ такая скобка заменяет фразу: "A, B, C рассматриваются вместе";

$\left[\begin{array}{l} A, \\ B, \\ C. \end{array}\right.$ скобка заменяет фразу: "рассматривается A или B, или C.

РАВЕНСТВА

обозначение	смысл	пример
$\stackrel{Def}{=}$	равно по определению	$_{Def}\lvert\emptyset\rvert = 0$
$\coloneqq$	знак присвоения	c $\coloneqq$ (a+c)
$=$	знак равенства	$2 \cdot 2 = 4$
$\equiv$	знак эквивалентности в математической логике	$p \equiv q$

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел,

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество компле́ксных чисел.

МНОЖЕСТВА

обозначение	что означает	пример
$\{a_1, \cdots, a_n\}$	неупорядоченное множество различных элементов	$\{8,2,15,3\}$
$(a_1, \cdots, a_n)$	упорядоченное множество однотипных элементов	$(1,1,3,3,3)$
$\langle A, B, C\rangle$	упорядоченное множество разнотипных элементов	$\langle K, *, 8\rangle$
$\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$	упорядоченное множество составных элементов	$\langle a \to c, d \to q\rangle$

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

обозначение	что означает	пример
$A \subset B$	A – подмножество B	$\{8,2\} \subset \{8,2,5\}$
$A \cup B$	объединение множеств	$\{8,2\} \cup \{1,2\} = \{1,2,8\}$
$A \cap B$	пересечение множеств	$\{8,2\} \cap \{1,2\} = \{2\}$
$A \setminus B$	разность множеств	$\{8,2\} \setminus \{1,2\} = \{8\}$
$A \Delta B$	симметрическая разность множеств	$\{8,2\} \setminus \{1,2\} = \{8, 1\}$
$\|A\|$	мощность множества	$\|\{8,2\}\| = 2$
$A \times B$	прямое произведение множеств	$\{8,2\} \times \{1,2\} = \{(8,1), (8,2), (2,1), (2,2)\}$

ОБОЗНАЧЕНИЯ В ЛОГИКЕ

обозначение	название	произношение и смысл
$\neg p$	отрицание	не p
$p \vee q$	дизъюнкция	p или q
$p \wedge q$	конъюнкция	p и q
$p \to q$	импликация	если p, то q
$p \vdash q$	$\vdash$ символ турникета	q может быть выведено из p
$\forall x$: $P(x)$ или $\forall x$: $(P(x))$	использование квантора всеобщности	для всех x выполняется $P(x)$
$\exists x$: $P(x)$	использование квантора существования	существует такое x, что выполняется $P(x)$

ФУНКЦИИ

обозначение	произношение	запись на языке логики
$f\colon A \to B$	функция из A в B	$f \subset A \times B$
$b = f(a)$	b – значение функции f для аргумента a	$a \to b$
$f \circ g$	композиция функций f и g	$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$
f^{-1}	функция, обратная к f	$f^{-1}\colon B \to A$
$Dom\, f$	множество определения функции	$\forall a \in Dom\, f \Big(\exists b \in B\ \big(b = f(a)\big)\Big)$
$Im\, f$	множество значений функции	$\forall b \in Im\, f \Big(\exists a \in A\ \big(b = f(a)\big)\Big)$

Основные определения

Комбинаторика

Размещением из n элементов множества по m называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из $m \leq n$ различных элементов исходного множества.

Число всех размещений из n элементов по m обозначается в виде A_n^m .

Перестановкой из n элементов множества называется любой упорядоченный набор, в который входят по одному разу все элементы исходного множества.

Число всех перестановок из n элементов обозначается как P_n.

Сочетанием из n элементов множества по m называется любое неупорядоченное подмножество, состоящее из $m \leq n$ различных элементов исходного множества.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается как C_n^m.

Множества

Множество – это совокупность объектов произвольной природы, которые называются ***элементами множества***.

Число элементов в конечном множестве X называют ***мощностью*** этого множества и обозначают как $|X| = n$.

Множество Y называют ***подмножеством*** множества X, если любой элемент из Y принадлежит X:

$$\forall\, x \in Y \Rightarrow x \in X \Rightarrow Y \subseteq X.$$

Если $Y \subseteq X$, но $X \neq Y$, множество Y называют ***собственным подмножеством*** X; соответствующее обозначение имеет вид $Y \subset X$.

В теории множеств принято считать, что множество – это подмножество самого себя: $X \subseteq X$. Такое правило называют свойством ***рефлексивности.***

Пустое множество $\emptyset$ – это тоже подмножество множества X.

Множества X и Y называют равными: $X = Y$, если они имеют одинаковую мощность $|X| = |Y|$ и состоят из одинаковых элементов.

Два множества называются равными, если каждое из них содержится в другом. Поэтому для доказательства равенства множеств: $A = B$ следует проверить истинность двух ***импликаций*** – "если⋯,то":

$$\{x \in A \Rightarrow x \in B\} \text{ и } \{x \in B \Rightarrow x \in A\}.$$

Два множества A и B называются ***эквивалентными*** $A \sim B$, если они имеют одинаковую мощность.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Объединением двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Множество C состоит из элементов множества A или B, или их обоих сразу.

Пересечением (произведением) двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Множество C состоит из элементов, принадлежащих сразу двум множествам A и B.

Разностью двух множеств A и B называется множество

$$C = A \backslash B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Множество C состоит из тех элементов A, которые не принадлежат B.

Для подмножества A некоторого ***универсума*** U разность $U \backslash A$ можно рассматривать как ***дополнение*** A до U. Такое дополнение обычно обозначается как

$$\bar{A} = \{x\colon (x \notin A)\}.$$

Симметричной разностью двух множеств A и B называется множество

$$C = A\,\Delta\,B = A \oplus B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x\colon x \in B \text{ и } x \notin A\}.$$

Симметричная разность состоит из элементов, лежащих либо в A, либо в B.

Прямое (декартово)произведение. Пусть A и B – два множества. Прямым произведением этих множеств называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит A, а второй принадлежит B.

СПЕЦИАЛЬГЫЕ ВИДЫ МНОЖЕСТВ

Кортеж *(n-мерный вектор)* – это конечный упорядоченный набор элементов или упорядоченное множество. Порядок элементов имеет значение, а элементы могут повторяться.

Множество G называется ***группой***, если для него выполняются следующие условия.

1. В множестве определена одна алгебраическая операция.
2. Результат операции принадлежит множеству G – ***условие замкнутости***.
3. Заданная операция ***ассоциативна***:

$$\forall\, a, b, c \in G \;\Rightarrow\; (a\,b)\,c = a\,(b\,c).$$

4. В множестве есть ***нейтральный элемент*** e:

$$e * a = a * e = a.$$

Для любого элемента группы в ней существует ***обратный элемент***:

$$\forall\, a \in G\;\; \exists\, a^{-1} \in G \Rightarrow a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Перечисленные выше условия часто называют ***групповыми аксиомами***.

Если в группе определена операция сложения, такая группа называется ***аддитивной***. Если определена операция умножения, то – ***мультипликативная***.

Группы A и B называются ***изоморфными*** $A \sim B$ относительно тех операций, которые в них определены, если между элементами этих групп установлено следующее взаимно-однозначное соответствие:

$$a_i * a_k = a_l, \quad b_i * b_k = b_l \implies a_i \mapsto b_i, \qquad a_k \mapsto b_k, \quad a_l \mapsto b_l.$$

Мощности ***изоморфных групп*** всегда одинаковы.

Множество G называется ***полугруппой***, если для него выполняются следующие условия.

1. В множестве определена одна алгебраическая операция.
2. Результат операции принадлежит множеству G – ***условие замкнутости***.
3. Заданная операция ***ассоциативна***.

Пусть множество A – группа, а множество $B \subseteq A$ и является группой с той же бинарной операцией, что и в A. В этом случае B называется ***подгруппой***.

Множество R с двумя определёнными в нём операциями сложения и умножения, называется ***кольцом***, если выполняются следующие условия.

1. R – абелева (коммутативная) группа относительно сложения.
2. Выполняется ***условие замкнутости***: $\forall \ a, b \in G \ \Rightarrow \ a * b \in G$.
3. Выполняется закон дистрибутивности:

$$\forall \ a, b, c \in G \Rightarrow a * (b + c) = a * b + a * c.$$

Кольцо R называется ***ассоциативным***, если для любых $a, b, c \in R$ верно равенство

$$(a * b) * c = a * (b * \ c).$$

Кольцо R называется ***коммутативным***, если для любых $a, b \in R$ верно равенство $a * b = b * a$. Если выполняются оба равенства, кольцо называется ***ассоциативно - коммутативным.***

Поле F – это особый класс колец. На поле заданы две бинарные ассоциативные и коммутативные операции сложение и умножение, связанные между собой законом дистрибутивности. Значит, для $\forall \ a, b, c \in F$ выполняются следующие равенства.

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc),$$

$$a + b = b + a, \qquad a * b = b * a, \qquad (a + b) * c = a * c + b * c.$$

В поле должен быть нулевой элемент:

$$a + 0 = a, \qquad 0 + a = 0.$$

Для каждого ненулевого элемента a в поле должен быть противоположный элемент $-a$:

$$a + (-a) = 0.$$

В поле должен быть единичный элемент e, для которого $a \cdot e = a$.

Для каждого ненулевого элемента a в поле должен быть такой обратный элемент a^{-1}, что

$$a * a^{-1} = e.$$

Согласно определению поля его элементы образуют коммутативную группу относительно операции сложения, а все ненулевые элементы – коммутативную группу относительно умножения.

Логика

Высказыванием называется утверждение, которое может принимать только два значения:

истина – t ($true$) или ложь – f ($false$).

Каждое высказывание обычно обозначается своей буквой. Высказывания делятся на ***простые*** и ***составные***.

Высказывание называется ***простым*** или ***примитивным,*** если оно не является комбинацией простейших высказываний.

Составное высказывание – это результат действия ***логических операций*** над простыми высказываниями. Истинность или ложность составного высказывания полностью определяется истинностью или ложью составляющих её простых высказываний.

Два составных высказывания называются ***логически эквивалентными*** или ***логически тождественными,*** если они построены из одинаковых простых утверждений, но разными способами. Логическая эквивалентность высказываний обозначается значком $\Leftrightarrow$.

Принцип двойственности. Если в двух логически эквивалентных высказываниях заменить дизъюнкцию на конъюнкцию, тавтологию на противоречие и наоборот, то полученные новые два высказывания также будут логически эквивалентны.

Способы построения составных высказываний называются ***исчислением высказываний.***

ОПЕРАЦИЙ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Отрицанием высказывания p называется операция, которая строит новое высказывание $\bar{p}$, противоположное исходному высказыванию p.

Конъюнкцией или ***логическим умножением*** двух высказываний p и q называется операция, результатом которой является составное высказывание. Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части. Это определение согласуется со смыслом союза "и".

Конъюнкция может обозначаться по-разному:

$$p \wedge q, \quad p \,\&\, q, \quad p \cdot q.$$

Дизъюнкцией или ***логическим сложением*** высказываний p и q называется операция, в результате которой появляется составное высказывание. Оно будет истинным, если хотя бы одна из его частей истинна.

Дизъюнкция может обозначаться по-разному:

$$p \vee q, \quad p + q.$$

Результатом ***импликации*** является ***условное высказывание*** "если p, то q".

Высказывание p – ***предпосылка,*** а высказывание q – ***заключение.*** Для обозначения условного высказывания "если p ,то q" используется символ ***импликации*** "$\Longrightarrow$", благодаря ему условное высказывание записывается коротко в виде $(p \Longrightarrow q)$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Составное высказывание называется ***тавтологией*** (тождественно истинным), если оно истинно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Составное высказывание называется ***контрадикцией*** (противоречием), если оно ложно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Составное высказывание называется ***удовлетворительным***, если оно хотя бы один раз истинно при любых, составляющих его простых высказываниях.

Отношения

Бинарным отношением ρ или просто ***отношением*** ρ между двумя множествами A и B называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$: $\rho \subseteq A \times B$; прямым произведением может быть

$$A \times A = A^2.$$

СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ

Пусть некоторое отношение ρ задано на множестве A, и элементы $a, b, c \in A$.

Отношение ρ называется ***рефлексивным***, если каждый элемент $a \in A$ находится в этом отношении сам с собой: $a\rho a$ для всех $a \in A$.

Отношение ρ называется ***симметричным***, если из условия

$$a\rho b \text{ следует } b\rho a.$$

В противном случае отношение ***не симметрично***.

Отношение ρ называется ***транзитивным***, если из условий

$$a\rho b \text{ и } b\rho c \text{ следует условие } a\rho c.$$

Отношение ρ называется ***антисимметричным***, если из условий

$$a\rho b \text{ и } b\rho a \text{ обязательно следует условие } a = b.$$

В противном случае оно не антисимметрично.

Отношение ρ^* называется ***замыканием отношения*** $\boldsymbol{\rho}$ относительно свойства P, если

1. ρ^* обладает свойством P;
2. $\rho \subset \rho^*$;
3. ρ^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего ρ и обладающего этим свойством.

Отношение ρ на некотором множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если ρ ***рефлексивно, симметрично*** и ***транзитивно***.

P разбиением множества A называется семейство непустых подмножеств (классов) $\{A_i\}_{i=1}^{m}$, $A_i \in A$, имеющих следующие свойства.

1. Каждый элемент из A принадлежит только одному подмножеству из разбиеения

$$P:\ A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m.$$

2. Разбиение P состоит из непересекающихся непустых подмножеств:

$$A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Отношение ρ на множестве A называется отношением ***частичного порядка***, если оно ***рефлексивно, антисимметрично*** и ***транзитивно***:

1. Для любого $a \in A \Rightarrow (a, a) \in \rho$.
2. Если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$.
3. Если $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.

Множество A, на котором определено частично упорядоченное отношение, называется ***частично упорядоченным множеством***.

Отношение частичного порядка называется ***линейным порядком*** на множестве A, если из любой пары элементов можно выделить только один предшествующий и один последующий. Такие отношения ещё называют ***цепью***.

Функции

Пусть заданы два множества X и Y. ***Функцией*** f из X в Y называется бинарное отношение, которое каждый элемент множества X связывает с единственным элементом множества Y. Можно сказать, что функция f строит пары (x, y). Функцию можно также называть ***отображением.***

Множество X называется областью определения или областью задания функции f, а множество Y – областью значений функции или ***образом.***

Функция $f: X \to Y$ называется ***инъективной*** или ***инъекцией***, или ***взаимно однозначной***, если для любой пары $x_1, x_2 \in X$ верно следующее соотношение

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Это определение эквивалентно соотношению

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Функция f называется ***сюръективной*** или ***сюръекцией***, или ***функцией на***, если для

$$\forall\, y \in Y\ \exists x \in X \Rightarrow y = f(x).$$

Функция f называется ***биективной*** или ***биекцией,*** если она ***инъективна*** и ***сюръективна***.

Композицией функций f и g называется такая функция $h\colon X \to Z,$ которая каждый элемент $x \in X$ отображает в элемент

$$z = g\big(f(x)\big) \in Z.$$

Композиция обозначается как $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Иногда композицию функций называют ***суперпозицией***.

Булевы функции

Функция $f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ называется булевой, если её переменные и сама функция принимают значения из множества $E_2 = \{0,1\}$.

Булева функция называется ***минтермом***, если она принимает значение 1 только на одном наборе значений её аргументов.

Множество функций, через которые можно выразить любую булеву функцию, называется ***полной системой функций***.

Говорят, что булева функция $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ***существенно зависит от*** переменной a_i, если существует такой набор значений

$$a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n, \text{ что}$$

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 0\,, a_{i+1}, \cdots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 1\,, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

В этом случае переменную a_i называют ***существенной переменной,*** в противном случае a_i – ***несущественная*** *или* ***фиктивная переменная***.

Булевы функции f_1 и f_2 называются равными, если функцию f_1 можно получить из функции f_2 с помощью введения или удаления фиктивных переменных.

Литература

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь справочник. Изд. 3-е, испр. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 250 с.
2. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М., «Наука», 1969. – 160 с. ил.
3. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1976. – 48 с.
4. Гусев И.Е. Математика. (100 гениальных идей, о которых должен знать каждый образованный человек). М.: «АСТ», 2018. – 208 с. ил.
5. Казанский А.А. Дискретная математика в задачах. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2025. – 344 с.
6. Крилли Тони. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – Пер. с англ. Ш. Мартыновой. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.
7. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для пед. вузов. – М.: Высшая школа. 1979. – 559 с. ил.
8. Микони С.В. Дискретная математика для бакалавров: множества, отношения, функции. графы: Учебное пособие – СПб.: Издательство «Лань», 2012. –192 с. ил.
9. Новиков Ф.А. Дискретная математика для вузов. 2-е изд. Стандарт 3-го поколения. – СПб.: Питер,2014. – 432 с. ил.
10. Редькин Н.П. Дискретная математика: курс для студентов-механиков. Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 96 с.
11. Математика с Борисом Трушиным. Комбинаторика: с нуля до олимпиад. – Москва: Эксмо, 2024. – 240 с.
12. Турецкий В.Я. Математика и информатика. –3-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 560 с.
13. Успенский В.А. Апология математики: [сборник статей] /В.А. Успенский. – СПб.: Амфора. ТИД Амфор, 2009. – 554 с.
14. Хаггарти Р. Дискретная математика в задачах. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2023. – 400 с.
15. Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. Ред.– сост. Г.И. Синкевич, науч. ред. А.И. Назаров – 2-е – изд., испр. и доп. – СПб.: Образовательные проекты, 2018. – 336 с.
16. Математика / [пер. с англ. И. Карнаушко; науч. ред. С. Михаеску; под ред. Ричарда Брауна]. – М.: РИПОЛ классик, 2015. – 160 с. ил.

Беликова Галина Иосифовна

Бровкина Екатерина Анатольевна

Зайцева Ирина Владимировна

ВВЕДЕНИЕ
В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие

Подписано в печать 02.02.2026. Формат 60×84/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 12,0. Тираж 26. Заказ 0433.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.