



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра инженерной гидрологии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(бакалаврская работа)

На тему **Численное решение уравнения
Фоккера–Планка–Колмогорова**

Исполнитель Суворов Виктор Николаевич
(фамилия, имя, отчество)

Руководитель кандидат технических наук, доцент
(ученая степень, ученое звание)

Хаустов Виталий Александрович
(фамилия, имя, отчество)

«К защите допускаю»
Заведующий кафедрой

(подпись)

кандидат технических наук, доцент
(ученая степень, ученое звание)

Хаустов Виталий Александрович
(фамилия, имя, отчество)

«27» мая 2024г.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Введение	4
1 Физико-географическое описание	5
1.1 Общая характеристика реки Индигирка.....	5
1.2 Рельеф.....	6
1.3 Геологическое строение	8
1.3 Почвы и растительность	9
1.5 Климат	10
1.5.1 Общая характеристика климата.....	10
1.5.2 Температура воздуха.....	11
1.5.3 Облачность и осадки	13
1.6 Гидрологическая изученность	14
1.6.1 Гидрологический режим реки.....	14
1.7 Исходные данные	15
1.7.1 Метеорологическая информация	15
1.7.2 Гидрологическая информация	16
2 Математический аппарат.....	18
2.1 Модель формирования воды в снеге и водоотдачи	19
2.2 Модель формирования стока	21
2.3 Модель теплопроводности	23
2.4 Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова	25
2.5 Уравнение для моментов	28
3 Этапы расчетов.....	31
3.1 Расчет формирования воды в снеге и водоотдачи	31
3.1.1 Определение устойчивого перехода температуры через 0 °С	31
3.1.2 Расчет водоотдачи и водоподачи на водосбор	32
3.2 Расчет температуропроводности	34
3.3 Расчет модели формирования стока 1 порядка	36
3.3.1 Расчет модели формирования стока без корректировки	36
3.3.2 Расчет модели формирования стока с корректировкой.....	39
3.3.3 Оценка эффективности методики.....	42
3.4 Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова	47
3.5 Решение уравнения для моментов.....	49
Заключение.....	51

Список используемых источников	52
--------------------------------------	----

Введение

Темой исследования выпускной квалификационной работы является реализация численного решения уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для конкретной реки.

Актуальность данной работы заключается в том, что прогнозы, основанные на методах математического моделирования, рассматриваются в арктической зоне с гидрологическим постом с небольшим водосбором и метеостанцией, описывающей метеорологическую ситуацию на водосборе. Численное решение уравнение ФПК позволяет моделировать и анализировать динамику стохастических систем, исследовать вероятностные процессы, описывающие сложные системы и явления.

Цель – оценить водоотдачу из снега и водоподачу на водосбор, построить модель формирования стока первого порядка, которая лежит в основе уравнения ФПК, добиться устойчивости в реализации момента температуропроводности, реализация численного решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.

Предметом исследование является температура воздуха и под земной поверхностью, атмосферные осадки, запасы воды в снеге, водоотдача и расходы воды рек Арктической зоны Российской Федерации.

Объектом исследования выбран водосбор реки Индигирка.

1 Физико-географическое описание

1.1 Общая характеристика реки Индигирка

Река Индигирка относится к бассейну Восточно-Сибирского моря Северного Ледовитого океана. Она является самой крупной в Республике Саха (Якутия), третья по величине в Сибири. На рисунке 1.1 изображен бассейн реки Индигирка.



Рисунок 1.1 – Бассейн реки Индигирка

Берёт начало двумя истоками – Хастах и Тарын-Юрях на северных склонах Халканского хребта; впадает в Восточно-Сибирское море. Долина делится на две части: горную (640 км, от места слияния рек Хастах и Тарын-Юрях до с. Крест-Майор) и равнинную (1150 км, до устья). После слияния рек Хастах и Тарын-

Юрях Индигирка течёт на северо-запад по пониженной части Оймяконского нагорья, повернув на север, прорезает ряд горных цепей хребта Черского.

В районе пересечения Чемалгинского хребта течёт в глубоком ущелье, образуя пороги (наиболее крупный – Бусика). В Момо-Селенняхской впадине начинается равнинный участок течения. Долина расширяется, русло изобилует песчаными мелями и косами, местами разбивается на рукава. Обогнув Момский хребет, река течёт по низменной равнине, пересекая отроги Полоусного кряжа и огибая Кондаковское плоскогорье. На Абыйской низменности извилиста, на Яно-Индигирской низменности для неё характерны прямые длинные плёсы шириной 350–500 м. Основные притоки на равнинном участке – Мома, Бадяриха (правые), Селеннях, Уяндина, Бёрёлёх (левые). В 130 км от устья река разбивается на протоки (Русско-Устьянская, Средняя, Колымская, Уларовская и др.), образуя дельту (пл. 7600 км²). От моря устье Индигирки отделено обширным мелководьем, образованным многочисленными устьевыми барами.

[1]

1.2 Рельеф

Территория бассейна р. Индигирки принадлежит к Верхоянско-Колымской горноскладчатой области, охватывающей кроме того бассейны рек Алазеи, Яны, Алдана и Лены. Эта огромная территория весьма неоднородна по рельефу и геологическому строению. На западе области простирается Верхоянская горная система, а на востоке – Полоусненско-Верхнеколымская, частично занимающая бассейн Индигирки. В сложении горных цепей этой системы существенное участие принимают терригенные отложения палеозоя, триаса и юры, различного возраста и состава вулканогенные породы и гранитоиды, слагающие водоразделы горных хребтов. Современная Индигирка, следуя общему уклону территории на север, на большом протяжении в верхнем и среднем течении пересекает вкрест простирания ряд сложных орографических сооружений и разновозрастных геологических образований. На этих участках

речной долины наблюдается большое количество террас, местами сильно деформированных. Террасированные отрезки долины перемежаются с молодыми участками прорыва, имеющих порожи́стое русло. По особенностям морфологии, глубины вреза, характера террасированности, скорости осадконакопления и возраста долины Индигирки и ее притоков можно подразделить на две крупные части: горную – область размыва и сноса, и равнинную – область аккумуляции. Горная часть приходится на верхнее и среднее течение Индигирки, для которых наиболее характерным является глубокий врез в районе пересечения хребтов до 1000–2000 м, каньонообразная и V-образная форма долин, наличие цокольных террасовых комплексов и резкое изменение мощности и состава аллювия при переходе от зон поднятий к зонам опускания

Дельта р. Индигирки является одной из крупных речных дельт на севере Сибири с общей площадью 9,64 тыс.км². Сравнительно большие уклоны в низовьях Индигирки (0,15– 0,9%) не позволили последней послеледниковой трансгрессии далеко проникнуть в устье реки. Выходя из предгорной зоны на приморскую равнину Индигирка впадала в короткий (до 70 км), но широкий (до 70 км) и неглубокий (до 15 м) залив, берегами которого были обрывы едомы на поверхности Приморской (Яно-Индигирской) низменности, коренные склоны отрогов Кондаковского плоскогорья и обрывы каргинской морской террасы. На протяжении последних 5–6 тыс. лет происходило заполнение долинного залива и формирование гидрографической сети дельты. [2]

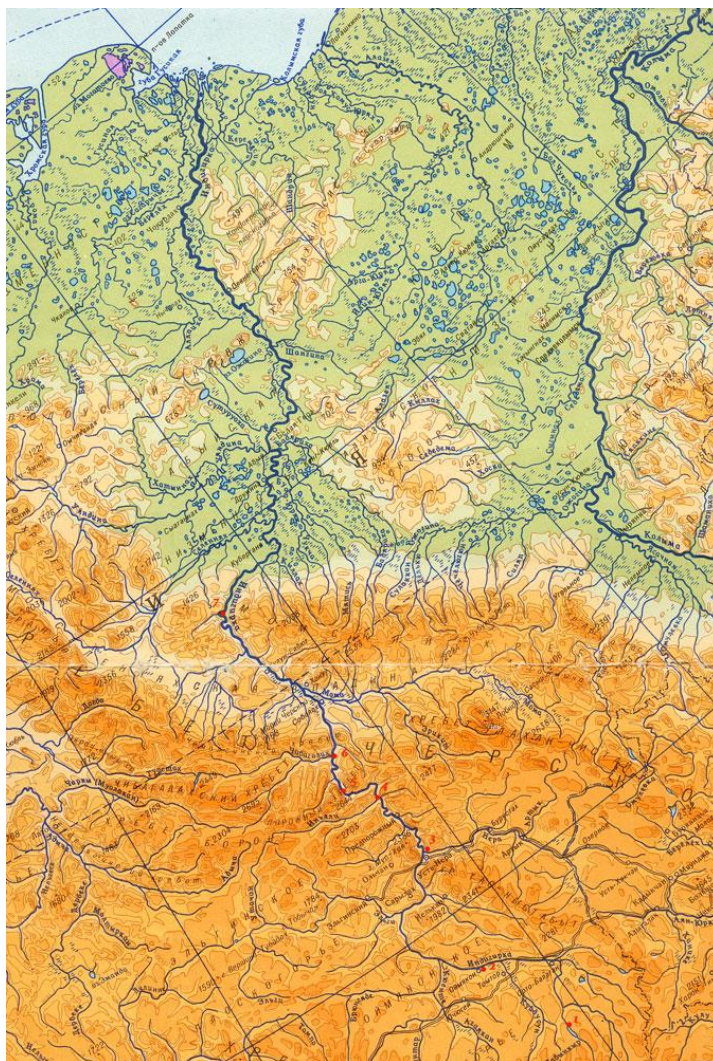


Рисунок 1.2 – Физическая карта реки Индигирка

1.3 Геологическое строение

Определяющую роль в формировании современного рельефа и речной сети бассейна Индигирки сыграли новейшие тектонические движения, а также процессы оледенения. Дифференцированные новейшие движения обусловили, в частности, смену эрозионных циклов и образование в долинах горных рек большого количества террас высотой от 5 до 500 м. В современном рельефе основные структурно-тектонические элементы выражены в виде соответствующих морфоструктурных образований. В общем виде складчатым областям соответствуют нагорья, горные цепи и хребты. Зоны дроблений и разломов выражаются в рельефе в виде интрузивных и блоковых горстообразных

хребтов и кряжей, межгорных впадин и грабен. Таким образом, крупнейшие современные орографические элементы являются одновременно и морфоструктурными. Основной облик территории создают горные системы хребтов Верхоянского и Черского, имеющие вид нагорий. Наиболее древним морфоструктурным элементом является Алазейское плоскогорье, ядро которого составляет дорифейский Колымский срединный массив – структура, близкая к платформам. По своему строению Алазейское плоскогорье служит крупнейшим центральным горстовым сводовым поднятием, или выступом, где среди сплошного поля юрских, меловых и третичных эффузивов обнажаются пермские породы, поднятые над мезокайнозойскими отложениями на 500–600 м. [4]

1.3 Почвы и растительность

На крайнем севере господствует арктическая пустыня с фрагментарной растительностью, южнее – арктическая тундра. Растительный покров мозаичен. Пятнистые и полигональные мелкотравные тундры сочетаются с кустарничково-травянисто-зеленомошными, пушицево-кочкарными и полигонально-валиковыми болотами на торфяно-глееземах. В береговой зоне распространены низинные болота и солончаковые луга на маршевых почвах. Узкая полоса лесотундры с лиственничными рединами, островами ерниковых тундр, обилием бугристых сфагновых болот сменяется к югу таёжными лесами. Господствует лиственница Гмелина (81,9%), значительно меньше сосны (7%), много вторичных берёзовых лесов. В подзоне северной тайги представлены редкостойные лиственничные леса на глеево-таёжно-мерзлотных почвах в сочетании с кочкарными моховыми, осоково-пушицевыми болотами на торфяно-болотных почвах. В среднетаёжной подзоне лиственничные леса имеют более высокую продуктивность, значительно участие сосновых, берёзово-травяных с аласами и лиственнично-еловых лесов. Из кустарничков – брусника, багульник, толокнянка и пр. Почвы мерзлотно-таёжные палевые, местами осолоделые.

Большую часть площади водосбора занимают горы, в которых тип высотной поясности чётко коррелирует с высотой и ориентировкой хребтов. В нижнем поясе представлены редкостойные леса из лиственницы Каяндера с подлеском из кедрового стланика, ольховника, берёзки Миддендорфа на подбурях, сменяющиеся выше поясом из кедрового стланика, местами ерника с участками кобрезников на грубогумусных подбурях. Выше 800–1200 м распространены тундры лишайниковые, кустарничковые, каменистые на литозёмах в сочетании с гольцами и гляциально-нивальными комплексами. На юж. склонах нередко встречаются остепнённые лиственничники и участки степей с господством пырея, степной осочки, мятлика, ковыля, лапчатки и пр. на криоаридных почвах. По долинам – тополёво-чозениевые леса и болота. На юге в горах появляются (кроме лиственницы Гмелина) пихта, ель аянская, в стланиковом ярусе – золотистый рододендрон. [3]

1.5 Климат

1.5.1 Общая характеристика климата

Особенностями географического положения и рельефа, а также атмосферной циркуляции обусловлено формирование почти на всей территории Якутии, за исключением побережья Северного Ледовитого океана, резко-континентального климата с очень холодной зимой и относительно жарким летом, малой облачностью, большим количеством штилей и слабыми, особенно в зимний период, ветрами. В зимний период основным барическим образованием, определяющим термический и ветровой режим, является Сибирский антициклон. В области высокого давления формируется воздух, характеризующийся чрезвычайной устойчивостью, очень низкими температурами в приземном слое, мощными и продолжительными приземными инверсиями и малой влажностью. Суровость климата в отдельных районах

усиливается расположением их на дне горных долин или замкнутых плоскогорий, куда в зимний период стекают с водоразделов охлажденные, более тяжелые массы воздуха, застаивающиеся при слабой зимней циркуляции у земной поверхности и еще более охлаждающиеся вследствие радиационного выхолаживания.

Зима продолжительная, суровая, малоснежная с антициклональным режимом погоды. В холодное время года преобладает штилевая погода, особенно в центральной части. Во время сильных морозов часто образуются «морозные» (т. н. печные) туманы, главным образом вблизи селений, где в результате сжигания топлива в воздух попадает много ядер конденсации.

Лето короткое, но тёплое и засушливое. В период белых ночей длительность светового дня 20 ч (Якутск). Распространена многолетняя мерзлота, на севере – сплошная (мощность 400–500 м), на юге – прерывистая; макс. мощность – 1500 м (в долине р. Марха, притока р. Вилюй).

Вегетационный период от 60–90 суток на севере до 120–130 суток в центральной части и на юге. [1]

1.5.2 Температура воздуха

Бассейн реки Индигирки лежит в резко континентальном климате, который отличается долгой по продолжительности зимой и коротким летом. Средняя температура января от -26 (-30) °С на севере и островах, до -45 (-55) °С на остальной территории. В районе Верхоянск – Оймякон находится один из полюсов холода Северного полушария с абсолютным минимумом температуры -68 °С. Средняя температура января от -26 (-30) °С на севере и островах, до -45 (-55) °С на остальной территории. В горах наблюдается температурная инверсия.

На рисунке 1.3 представлено распределение среднемесячной температуры за январь по всей России.

Средняя температура июля на побережье и островах 2–4 °С, в северной части 12–15 °С, в центр. части 18–19 °С (макс. 38 °С).

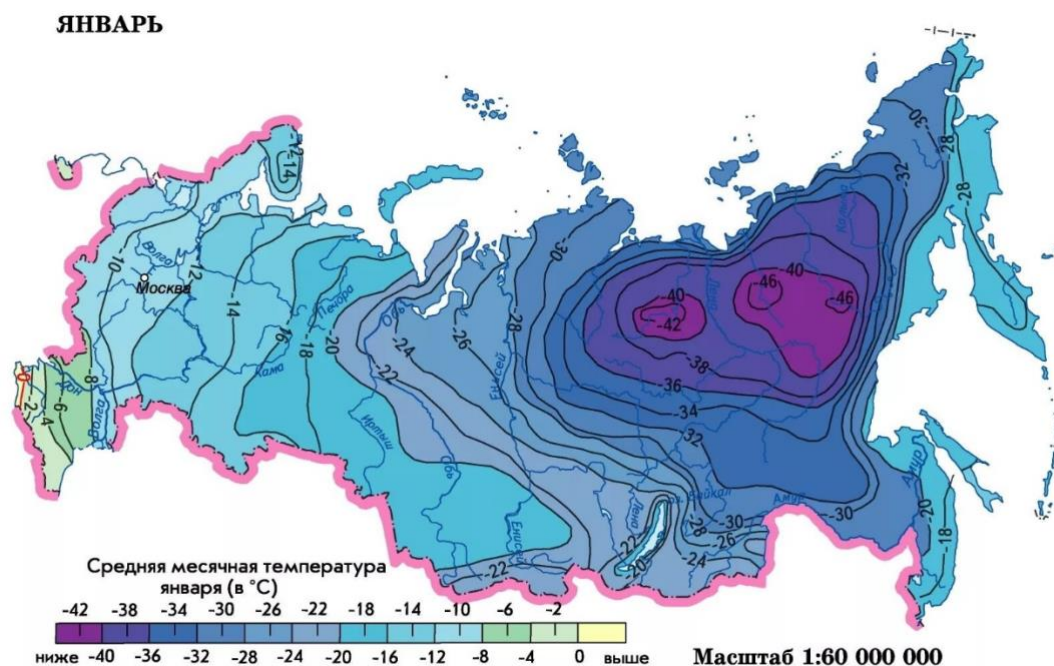


Рисунок 1.3 – Средняя месячная температура за январь

По гистограмме месячных среднегодовых значений температуры воздуха на метеостанции Оймякон (рисунок 1.4) можно увидеть, что продолжительность холодного периода с отрицательными значениями составляет 7 месяцев, а продолжительность теплого периода 5 месяцев, из которых только 3 имеют среднюю температуры выше 5 t, °С. [1]

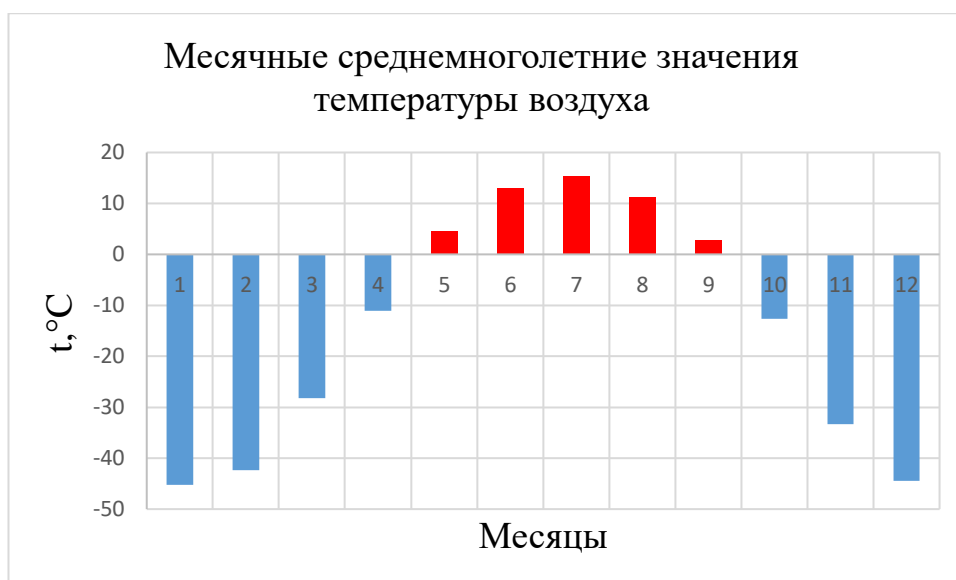


Рисунок 1.4 – Месячные среднемноголетние значения температуры воздуха на метеостанции Оймякон

1.5.3 Облачность и осадки

Характер облачности и ее количество в холодное и теплое время года значительно различаются. В холодный период при низких температурах воздуха и малом влагосодержании устанавливается устойчивая область высокого давления с нисходящими потоками, уменьшающими влагосодержание. На большей части территории, за исключением арктического побережья, в период с декабря по март количество облачности нижнего яруса составляет 5-10%, общей облачности – 40-70%. В теплый период года, благодаря высокой температуре, более высокой влажности воздуха, развитию процессов испарения и конвекции и циркуляционным условиям, повторяемость пасмурных дней возрастает до 55-70%.

Годовые суммы осадков для большей части территории составляют 200-250 мм, на юге и юго-западе – 350-500 мм. В течение года осадки распределяются неравномерно, в холодный период (с ноября по апрель) выпадает всего 15-20% от общего количества, в теплый (с мая по октябрь) – 75-80%. Особенно малое количество осадков (от 150 до 250 мм в год) выпадает на побережье и островах, Янском и Оймяконском плоскогорьях, Верхоянской и Момо-Селенняхской

котловинах, а также Центрально-Якутской равнине. В предгорных и горных районах количество осадков возрастает до 400 мм.



Рисунок 1.5 - среднее многолетнее количество осадков в бассейне реки Индигирка на метеостанции Оймякон

Число дней со снегом 200–210 на юге и в центре, 260–280 – на островах. Высота снежного покрова 20–25 см – в центр. части, до 120 см и более – в горах. [1] [2]

1.6 Гидрологическая изученность

1.6.1 Гидрологический режим реки

Река Индигирка относится к бассейну Восточно-Сибирского моря Северного Ледовитого океана. Имеет длину 1790 км. и площадь бассейна 362 тыс. км². Русло галечное, много шивер, скорость течения 2–3,5 м/с. В районе пересечения Чемалгинского хребта течёт в глубоком ущелье, образуя пороги (наиболее крупный – Бусика); скорость течения более 5 м/с. Осн. притоки на этом участке – Нера (правый), Куйдусун, Кюенте, Чибагалах (левые).

По особенностям водного режима Индигирка относится к рекам с высоким весенне-летним половодьем и паводками. Питание дождевое (50–65%), снеговое (20–40%) и подземное (5–10%). Весенний ледоход, совпадающий с пиком половодья, проходит от верховьев к устью с середины мая до середины июня. После спада волны половодья наступает период летне-осенней межени с отдельными паводками, по величине равными половодью. Максимальный подъём уровня воды 11,1 м (пос. Воронцово, 350 км от устья). В половодье низкие острова дельты и песчаные отмели взморья почти полностью затопляются, в нижней части дельты прилегающие территории покрываются слоем воды толщиной 0,6–0,7 м. Среднегодовой (1937–96) расход воды у пос. Воронцово 1600 м³/с (годовой объём стока 50,5 км³/год), сток Индигирки в море в среднем составляет около 54,1 км³/год. В низовье среднегодовые сток взвешенных наносов и мутность воды составляют 11,7 млн. т/год и 231 г/м³ соответственно. Ледостав с октября до конца мая – начала июня. Местами перемерзает (пристань Чокурдах и др.). Бассейн реки расположен в области распространения многолетнемерзлых горных пород и образования гигантских наледей (напр., наледь Улахан-Тарын в долине р. Мома – пл. до 90 км², толщина льда 5–6 м). В бассейне Индигирки. – свыше 80 тыс. озёр общей площадью 11,8 тыс. км². Река богата рыбой, в устье – промысел ряпушки, чира, муксуна, нельмы, омуля, сига. Судоходна от устья р. Мома (1154 км). Главные пристани (от истока к устью) – Хонуу, Дружина, Чокурдах, Русское Устье. [1]

1.7 Исходные данные

1.7.1 Метеорологическая информация

Использованные для расчетов метеорологические данные были взяты со станции Оймякон, расположенной на водосборе реки Индигирка.

Станция Оймякон находится на Оймяконском нагорье, в левобережной части обширной долины р. Куйдусун (левый приток р. Индигирки), в 17 км от ее

устья и в 1 км к западу от бровки левого берега р. Буор-Юрях (левый приток р. Куйдусун) и в 2 км от р. Куйдусун. Метеорологическая станция «Оймякон» начала работу в марте 1929 года. В настоящее время станция является действующей. Синоптический индекс станции – 24688

На рисунке 1.6 представлено расположение метеорологической станции Оймякон.

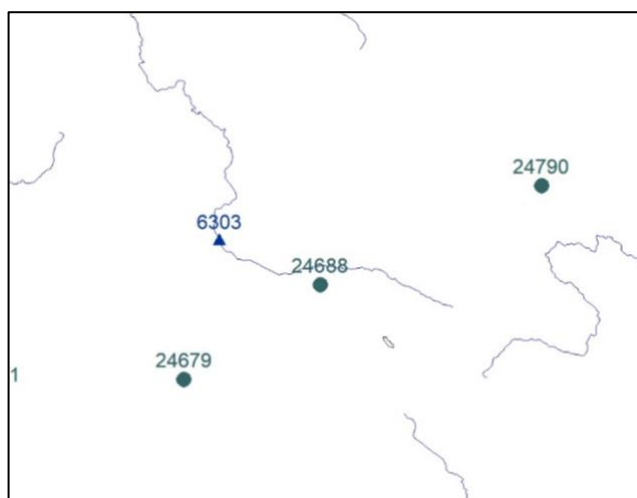


Рисунок 1.6 – Расположение метеорологической станции Оймякон

В качестве исходных данных с метеорологической станции были взяты ежедневные данные о приземной температуре воздуха, осадках, температуре на глубине, маршрутных снегомерных съемках за период с 2008 по 2020 год.

1.7.2 Гидрологическая информация

Использованные для расчетов гидрологические данные были взяты по гидропосту ГМС Юрты на р. Индигирка.

Гидрологический пост Юрты на реке Индигирка находится в Якутии на реке Индигирка, вниз по течению от села Оймякон. Данная станция была

открыта в 1955 году. В настоящее время станция является действующей. Код поста - 6303

На рисунке 1.7 представлено расположение гидрологического поста ГМС Юрты.

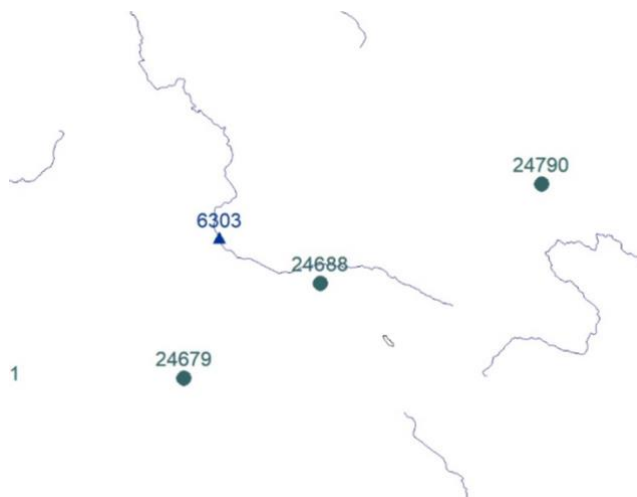


Рисунок 1.7 – расположение гидрологического поста ГМС Юрты

В качестве исходных данных с гидрологического поста были взяты ежедневные данные о ежедневных расходах воды с 2008 по 2020 год.

2 Математический аппарат

Математической моделью называется совокупность математических и логических соотношений, с помощью которых устанавливаются количественные и качественные характеристики изучаемого процесса. Математические модели стали, с одной стороны, средством описания и воспроизведения естественного процесса, а с другой - средством объединения отдельных результатов исследований в целостную картину формирования стока. Изучение гидрологических явлений с помощью моделирования позволяет относительно быстро осуществить проверку модели на основе сопоставления с натурными данными. В процессе моделирования выявляется необходимость постановки новых экспериментов, уточняется программа проведения специализированных гидрологических наблюдений. В свою очередь, результаты экспериментирования способствуют развитию и совершенствованию моделей.

Математические модели позволяют решать как диагностические, так и прогностические задачи; точность выходной информации в первую очередь определяется качеством исходных данных и степенью детализации физических процессов, описываемых самой моделью. Уровень схематизации реальных процессов, описываемых уравнениями математической физики и гидродинамики, определяется целым рядом факторов, важнейшим из которых является возможность использования разработанной модели в оперативной практике. Совершенно очевидно, что характер развития процессов на водосборе зависит от множества гидрофизических характеристик подстилающей поверхности, которым свойственна явная пространственная изменчивость. Подробное описание физических закономерностей процессов формирования стока в отдельных точках речного бассейна часто не представляется возможным из-за отсутствия данных измерений. Это препятствует реализации строгих методов и заставляет идти по пути разработки концептуальных моделей, учитывающих пространственные неоднородности в интегральном виде. Конструируя математическую модель, исследователь, с одной стороны,

старается достаточно подробно описать процессы формирования стока на водосборе, с другой — не переусложнить модель, памятуя о требованиях к ее практической реализуемости. [6]

2.1 Модель формирования воды в снеге и водоотдачи

Факторы, определяющие процесс формирования стока в бассейне реки, обычно подразделяют на две группы: на относительно постоянные факторы подстилающей поверхности и переменные - гидрометеорологические. Факторы подстилающей поверхности определяют характер распределения снега на водосборе, аккумуляцию талой воды на его поверхности, инфильтрацию талых вод, скорости стекания и время добегания по склонам и русловой сети. К числу этих факторов относятся: размеры, конфигурация и рельеф бассейна, его геологическое строение; состав почвогрунтов; растительность; степень озерности, заболоченности; уклоны склонов и русел. К этой же группе можно отнести и антропогенный фактор - интенсивное осуществление хозяйственной деятельности на водосборах и в руслах рек.

Переменными факторами являются снегозапасы, интенсивность снеготаяния, увлажнение почвогрунтов и их промерзаемость, испарение и количество осадков. Эти факторы в основном определяют объем половодья, сроки его начала и окончания, максимальный расход и в значительной степени форму гидрографа.

Снегозапасы в бассейне реки являются главным фактором половодья. Распределение снегозапасов по территории подчиняется закону географической зональности и вертикальной поясности. Запас воды в снежном покрове определяется его высотой и плотностью.

Расчет интенсивности снеготаяния может быть основан на тепловом балансе, который учитывает основные формы теплообмена.

Тепло передается снегу путем поглощения прямой солнечной радиации, длинноволновой радиации и т.д.

Для определения количества тепла, необходимого для снеготаяния Q_m , может быть использовано уравнение энергетического баланса. Общее уравнение имеет вид:

$$Q_m = Q_n + Q_h + Q_e + Q_g + Q_a - \frac{dS_i}{dt} \quad (2.1)$$

Где Q_n - длинноволновая радиация;

Q_h - разницы температур между поверхностью и атмосферой;

Q_e - скрытый энергопоток в результате изменения водяного пара (выброс тепла при конденсации или его высвобождении при сублимации или испарении);

Q_g - поток тепла от подстилающей поверхности;

Q_a - адвекция тепла (дождь);

S_i - запас тепла в снеге.

В период формирования половодья выпадают твердые и жидкие осадки. Их влияние на объем весеннего стока зависит не только от количества, но и от времени выпадения осадков. Дело в том, что условия водопоглощения осадков резко изменяются после схода снега и оттаивания почвы.

Стаивание временного снежного покрова при переходе температуры через 0° обычно происходит в пределах первых суток. В результате сочетания таяния снега и выпадения осадков может наблюдаться значительное увеличение объема воды, поступающей на водосбор в период снеготаяния. Тем не менее, необходимо учитывать потенциальные последствия нарушения первоначального распределения снегозапаса на территории.

Общий вид модели запасов воды в снеге:

$$\frac{dS}{dt} = kf \cdot X^{TB} + kt \cdot t^+ \quad (2.2)$$

$$S_{i+1} = S_i + kf \cdot X_i^{TB} + kt \cdot t_i^+ \quad (2.3)$$

Водоотдача из снега рассчитывается путем вычитания смежных значений снеготпасов в сторону убывания.

$$W = S_{i-1} - S_i \quad (2.4)$$

Где W – водоотдача из снега, мм;

S_{i-1} и S_i – смежные запасов воды в снеге, мм.

Водоподача на водосбор в холодный период учитывается водоотдачей из снега и осадками, а в теплый – непосредственно осадками. [5]

2.2 Модель формирования стока

Одной из основных задач моделирование гидрологических процессов является построение модели формирования стока.

В данной выпускной квалификационной работе модель формирования стока решает вторую задачу математического моделирования в гидрологических процессах – по наличию сведений в текущем состоянии ВХК сделать прогноз его будущего состояния.

На рисунке 2.1 представлена модель формирования стока.

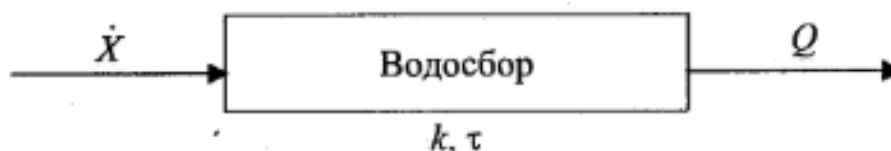


Рисунок 2.1 – Модель формирования стока

Модель склонового стока с сосредоточенными параметрами имеет следующий вид:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{\dot{X}}{\tau} \quad (2.5)$$

Расчеты выполняются по формулам:

$$\tau \frac{dQ}{dt} + Q = k\dot{X} \quad (2.6)$$

$$\tau \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{k} = \dot{X} \quad (2.7)$$

Мерой точности методики прогнозирования является средняя квадратическая погрешность проверочных прогнозов, вычисляемая по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{n-m}} \quad (2.8)$$

где y_i и y'_i - соответственно фактическое и предсказанное значения; n – число членов ряда; m - число степеней свободы, равное числу постоянных в прогностическом уравнении.

Исходя из того, что распределение погрешностей прогнозов и распределение отклонений гидрологических величин от нормы близки к нормальному, за критерий применимости и качества методики принято отношение S/σ_{Δ} и S/σ . Эти отношения являются показателями эффективности и точности прогнозирования, ибо показывают выигрыш в распределении погрешностей, который дает метод прогнозирования по сравнению с распределением погрешностей при принятии ожидаемой величины по ее норме или норме изменения за период заблаговременности прогноза. [5] [8]

σ — среднее квадратическое отклонение прогнозируемого значения элемента от среднего:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \quad (2.9)$$

Где y_i – значение прогнозируемой величины; \bar{y} – ее среднее значение.

Методика прогнозирования считается приемлемой, если обеспеченность допустимой погрешности проверочных прогнозов не менее чем на 10 % превышает обеспеченность вероятного отклонения от нормы. Учитывая, что погрешности определения S и σ зависят также и от числа членов ряда n , установлены следующие условия применимости методик прогнозирования:

$$\text{при } n \geq 25 \quad S/\sigma \leq 0,8. \quad (2.10)$$

2.3 Модель теплопроводности

Уравнение теплопроводности описывает процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, процессы диффузии.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

Где a – коэффициент температуропроводности

Устойчивость разностных схем.

Для явной разностной схемы для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\hat{T}_j - T_j}{\tau} = a \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{h^2} \quad (2.12)$$

$$\ddot{T}_j \frac{1}{\tau} = T_{j-1} \frac{a}{h^2} + T_j \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \right) + T_{j+1} \frac{a}{h^2} \quad (2.13)$$

Коэффициенты:

$$a_{max} = \frac{1}{\tau}, \quad (2.14)$$

$$\beta_{j+1} = \frac{a}{h^2}, \quad (2.15)$$

$$\beta_j = \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2}, \quad (2.16)$$

$$\beta_{j-1} = \frac{a}{h^2}. \quad (2.17)$$

Условие устойчивости по начальным данным принимает вид:

$$\frac{1}{\tau} \geq \frac{a}{h^2} + \frac{a}{h^2} + \left| \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \right| \quad (2.18)$$

$$\left| \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \right| \leq \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \quad (2.19)$$

Раскрывая которое:

$$\frac{2a}{h^2} - \frac{1}{\tau} \leq \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \leq \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2} \quad (2.20)$$

Получим условие устойчивости по начальным данным (условие Куранта).

Т.е схема условно устойчива.

Условие устойчивости по правой части:

$$\frac{1}{\tau} \leq \frac{\omega}{\tau} \quad (2.21)$$

$$0 < \omega < 1 \quad (2.22)$$

То явная разностная схема является условно устойчивой при выполнении условия, ограничивающего шаг интегрирования.

2.4 Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

Искомое уравнение, описывающее эволюцию плотности вероятности, впервые строго вывел А. Н. Колмогоров, хотя некоторые его модификации встречались раньше в работах других ученых, отсюда и название уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова.

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p(Q,t)}{\partial t} = \frac{\partial(A(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q} + 0.5 \frac{\partial^2(B(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q^2} \quad (2.23)$$

где $p(Q, t)$ – плотность вероятности; Q – расход воды (слой стока, модуль); t – время.

Коэффициенты сноса $A(Q, t)$ и диффузии $B(Q, t)$ выражаются формулами:

$$A(Q, t) = -(\bar{c} - 0.5G_{\bar{c}})Q - 0.5G_{\bar{c}\bar{N}} + \bar{N}; \quad (2.24)$$

$$B(Q, t) = G_{\bar{c}}Q^2 - G_{\bar{c}\bar{N}}Q + G_{\bar{N}} \quad (2.25)$$

где $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$ и $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ – интенсивности и взаимная интенсивность шумов, а \bar{c} и \bar{N} – математические ожидания (они могут быть функциями времени). Уравнение (2.23) и формулы (2.24), (2.25) являются следствиями стохастического обобщения одномерной модели склонового стока с сосредоточенными параметрами:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{\dot{X}}{\tau} \quad (2.26)$$

где k – коэффициент стока; τ – время релаксации речного бассейна; \dot{X} & – интенсивность осадков.

Уравнение (2.26) можно записать в виде стохастического дифференциального уравнения:

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + \bar{N} + \tilde{N}]dt \quad (2.27)$$

где $c = 1/k\tau$, $N = \dot{X} / \tau$, причем $c = \bar{c} + \tilde{c}$, $N = \bar{N} + \tilde{N}$ (здесь \tilde{c} и \tilde{N} – белые коррелированные шумы).

Уравнение (2.27) статистически эквивалентно уравнению ФПК (2.23), численную реализацию которого рассмотрим на примере эволюции плотности вероятности расхода воды в замыкающем створе речного бассейна при известных параметрах речного бассейна (k и τ) и заданном ходе дождя $\bar{X}(t)$ & и статистических характеристик шумов $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$, т. е. интенсивностей (знак осреднения над обозначением интенсивности осадков не должен смущать, так как осреднение статистическое, а не временное).

Для численного решения уравнения (2.23) используем следующую конечно-разностную аппроксимацию:

$$\frac{(p_j^{i+1}-p_j^i)}{\Delta t} = -\frac{(A_j^i p_j^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q} + 0.5 \frac{(B_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + B_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{(\Delta Q)^2} \quad (2.28)$$

где i и j – номера расчетных шагов по времени и расходу соответственно.

Это — так называемая явная разностная схема. Она проста логически, однако при ее использовании существует опасность потери устойчивости счета при переходе от одного временного слоя к другому, так как незначительная погрешность, возникающая, например, в результате округлений, может возрастать от слоя к слою. Как и в случае модели кинематической волны необходимо соблюдать определенные условия устойчивости, связанные с интенсивностью шумов и соотношением шагов Δt и ΔQ . [6]

Алгоритм расчета символически и обобщенно можно представить так:

$$p_j^{i+1} = p_j^i + \mathfrak{D} \left(\begin{matrix} i, & i, & i \\ j-1, & j, & j+1 \end{matrix} \right) \Delta t, \quad (2.29)$$

Где

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \left(\begin{matrix} i, & i, & i \\ j-1, & j, & j+1 \end{matrix} \right) &\equiv \\ &\equiv \left(-\frac{(A_j^i p_j^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q} + 0.5 \frac{(B_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + B_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{(\Delta Q)^2} \right) \end{aligned}$$

Расчетную сетку и логику действия в соответствии с алгоритмом (2.29) иллюстрирует рис. 2.2 [9]

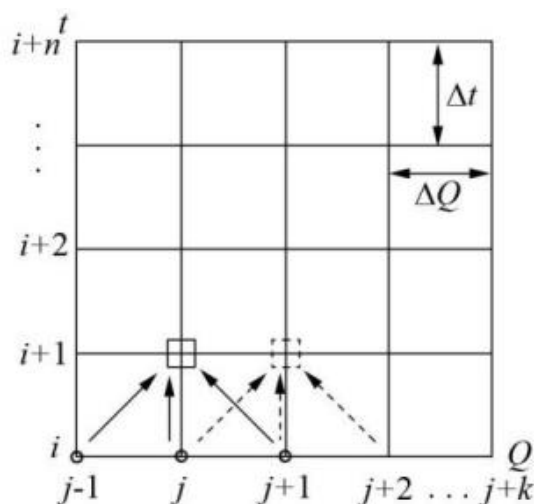


Рис. 2.2 - Иллюстрация алгоритма вычисления (2.29) в соответствии с конечноразностной аппроксимацией (2.28)

2.5 Уравнение для моментов

При подходе к задаче численного решения уравнения ФПК коэффициенты связываются формулами параметрами \bar{c} , \bar{N} , $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{N}}$, $G_{\bar{c}\bar{N}}$ приобретают физический (а не «подгоночный») смысл. Это открывает возможность рассматривать уравнение (2.23) как генетическую модель формирования стока, а решение $p(Q)$ уравнения Пирсона с физически обоснованными коэффициентами a , b_0 , b_1 , b_2 – как теоретическое распределение, с которым согласуется или не согласуется эмпирический набор точек. Важным является то, что можно, меняя факторы формирования стока (климатические или подстилающей поверхности бассейнов) через параметры \bar{c} и \bar{N} , т. е. через осадки и величины, влияющие на коэффициент стока k , оценивать чувствительность к подобным изменениям кривой плотности вероятности. Стационарность, заложенная в уравнение Пирсона (2.23), согласуется с тем обстоятельством, что существующие климатические сценарии носят квазистационарный характер, т. е. выделяется временной промежуток, например, в 20 лет, и для него указываются значения характеристик (осадков и температуры воздуха) метеовеличин. Другой набор – для следующего интервала и т. д. Таким образом, для каждой «ступеньки»

процесс формирования многолетнего стока можно рассматривать как статистически стационарный, т. е. можно считать, что $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$. Так как в практической гидрологии из-за коротких рядов наблюдений ограничиваются 3–4 моментами вероятностных распределений, то имеет смысл аппроксимировать (2.23) системой алгебраических уравнений для моментов:

$$nb_0m_{n-1} + [(n + 1)b_1 - a]m_n + [(n + 2)b_2 + 1]m_{n+1} = 0 \quad (2.30)$$

Она связывает начальные моменты распределения с параметрами уравнения ФПК a, b_0, b_1, b_2 . Полагая последовательно $n = 0, 1, 2, 3$ и учитывая, что $m^0 = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 2b_2m_1 + b_1 + b_0 \cdot 0 - a \cdot 1 &= -m_1, \\ 3b_2m_2 + 2b_1m_1 + b_0 \cdot 1 - am_1 &= -m_2, \\ 4b_2m_3 + 3b_1m_2 + 2b_0m_1 - am_2 &= -m_3, \\ 5b_2m_4 + 4b_1m_3 + 3b_0m_2 - am_3 &= -m_4. \end{aligned}$$

В этой системе в роли известных величин выступают моменты распределения плотности вероятности расхода в замыкающем створе речного бассейна $m_1 - m_4$, а искомые величины – a, b_0, b_1, b_2 . [5] [9]

Тогда, искомые величины можно выразить с помощью системы уравнений:

$$a = m_1 + b_1 + 2b_2 = b_1 + m_1(1 + 2b_2), \quad (2.31)$$

$$b_0 = m_1(m_1(1 + 2b_2) - b_1) - m_2(1 + 3b_2), \quad (2.32)$$

$$b_1 = \frac{[-m_3 + m_2 \cdot a - 2m_1 \cdot b_0 - 4b_2 m_3]}{3m_2}, \quad (2.33)$$

$$b_2 = \frac{[-m_4 + m_3 \cdot a - 3m_2 \cdot b_0 - 4m_3 \cdot b_1]}{5m_4}. \quad (2.34)$$

Расчет параметров \bar{c} , k , $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{N}}$, $G_{\bar{c}\bar{N}}$:

$$\bar{c} = \frac{\bar{N}}{(a - \frac{b_1}{2})} \quad (2.35)$$

$$k = \frac{\bar{Q}}{\bar{N}} \quad (2.36)$$

$$G_{\bar{c}} = - \left(\frac{2 \cdot b_2 \cdot \bar{c}}{b_2 + 1} \right) \quad (2.37)$$

$$G_{\bar{N}} = \frac{-2 \cdot \bar{N} \cdot b_0}{a - 0.5 \cdot b_1} \quad (2.38)$$

$$G_{\bar{c}\bar{N}} = \frac{\bar{N} \cdot b_0}{a - 0.5 \cdot b_1} \quad (2.39)$$

3 Этапы расчетов

3.1 Расчет формирования воды в снеге и водоотдачи

3.1.1 Определение устойчивого перехода температуры через 0 °С

Для расчета формирования воды в снеге и водоотдачи использовались данные приземной температуры воздуха, осадки, фактические запасы воды в снеге из материалов маршрутной снегосъемки и высота снежного покрова на метеостанции.

На первом этапе работ нужно было определить устойчивый переход через 0 °С, он был рассчитан с помощью специальной программы по фактическим данным температур за период наблюдений с 2008 по 2021 год. Для визуальной проверки строится хронологический график температур и сумм температур по которому видно дату устойчивого перехода, пример такого графика представлен на рисунке 3.1

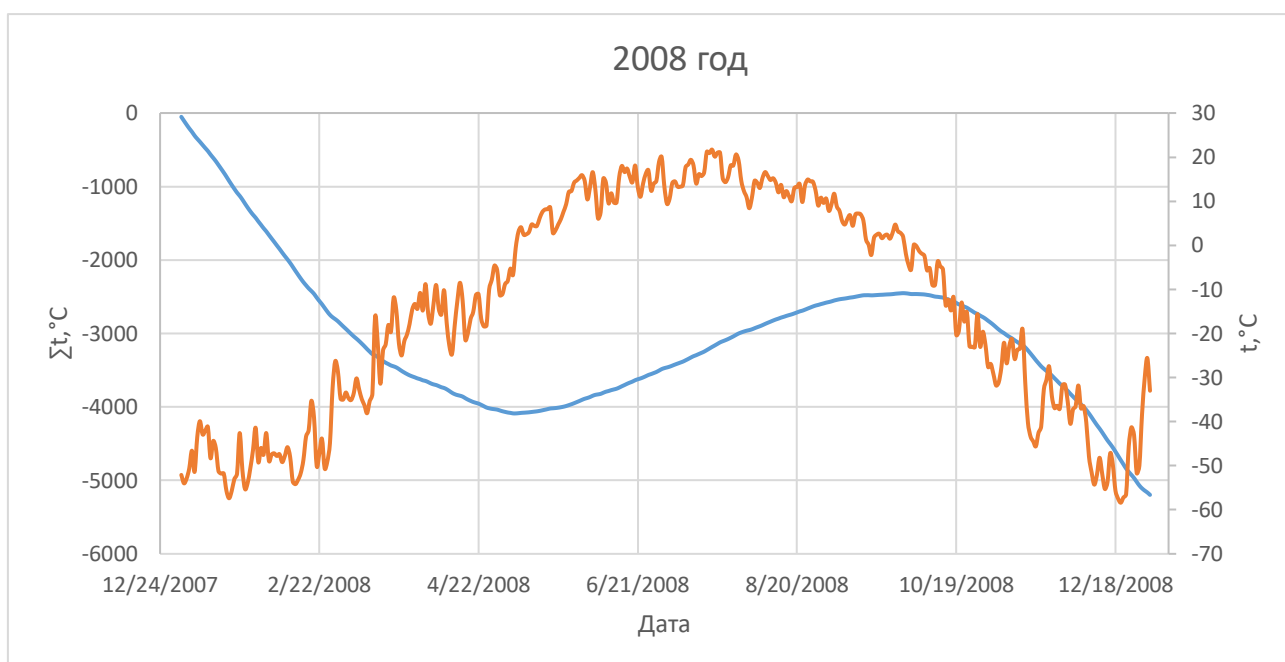


Рисунок 3.1 - Хронологический график температур и сумм температур за 2008 год на метеостанции Оймякон

Точка перегиба значения сумм температур за первую половину года соответствует дате 06.05.2008, следовательно, следующий день после данного характерного пика на графике является датой устойчивого перехода через 0.

Ниже в таблице 3.1 представлены даты устойчивого перехода через 0 °С на метеостанции Оймякон.

Таблица 3.1 - Даты устойчивого перехода через 0 °С на метеостанции Оймякон.

Год	Дата устойчивого перехода
2008	07.05.2008
2009	11.05.2009
2010	30.04.2010
2011	08.05.2011
2012	27.04.2012
2013	27.04.2013
2014	05.05.2014
2015	13.05.2015
2016	30.04.2016
2017	09.05.2017
2018	03.05.2018
2019	04.05.2019
2020	08.05.2020

Анализируя таблицу 3.1, можно сделать вывод, что на метеостанции Оймякон устойчивый переход к положительным температурам приходится на конец апреля – начало мая.

3.1.2 Расчет водоотдачи и водоподачи на водосбор

Для расчета водоотдачи из снега на водосбор нужно определить дату начала снеготаяния. Эту дату можно определить по высоте снежного покрова. Для этого необходимо найти максимальное значение высоты снежного покрова. Дата, с максимальной высотой снежного покрова является пиком, после которой происходит процесс снеготаяния и водоотдачи на водосбор.

Расчет водоотдачи и водоподачи выполнялся по формулам 2.2- 2.4. Для вычисления водоотдачи на каждый день нужно было узнать значения снеготолщин по данным маршрутной снеговосъемки за каждый день. Маршрутная снеговосъемка проводилась раз в 5 и более суток, в следствии чего, было необходимо методом интерполяции восстановить значения снеготолщин.

Водоотдача и водоподача на водосбор за период снеготаяния за 2008 год представлена в таблице 3.2

Таблица 3.2 – водоотдача и водоподача на водосбор за 2008 год

Дата	X	Переход через 0	h	Sфакт	T	W	Wвп
30.04.2008	0		24	53	-11.3	0	0
01.05.2008	0		23	51.6	-11.1	1.4	1.4
02.05.2008	0		22	50.2	-8.8	1.4	1.4
03.05.2008	0		21	48.8	-8.1	1.4	1.4
04.05.2008	0		20	47.4	-5.3	1.4	1.4
05.05.2008	0		20	46	-6.7	1.4	1.4
06.05.2008	2.3		20	40.9	-0.6	5.1	5.1
07.05.2008	0	1	19	35.8	3	5.1	5.1
08.05.2008	0		11	30.7	4.1	5.1	5.1
09.05.2008	0		3	25.6	2.4	5.1	5.1
10.05.2008	0		3	20.4	2.5	5.1	5.1
11.05.2008	0		3	15.3	3	5.1	5.1
12.05.2008	0		2	10.2	4.7	5.1	5.1
13.05.2008	0		1	5.1	4.4	5.1	5.1
14.05.2008	0		0	0	4.4	5.1	5.1
15.05.2008	0		0		6.1	0	0

С использованием полученных данных строятся хронологические графики с расчетными значениями водоотдачи, температуры, снеготолщин и высоты снежного покрова.

Пример хронологического графика за 2008 год представлен на рисунке 3.2

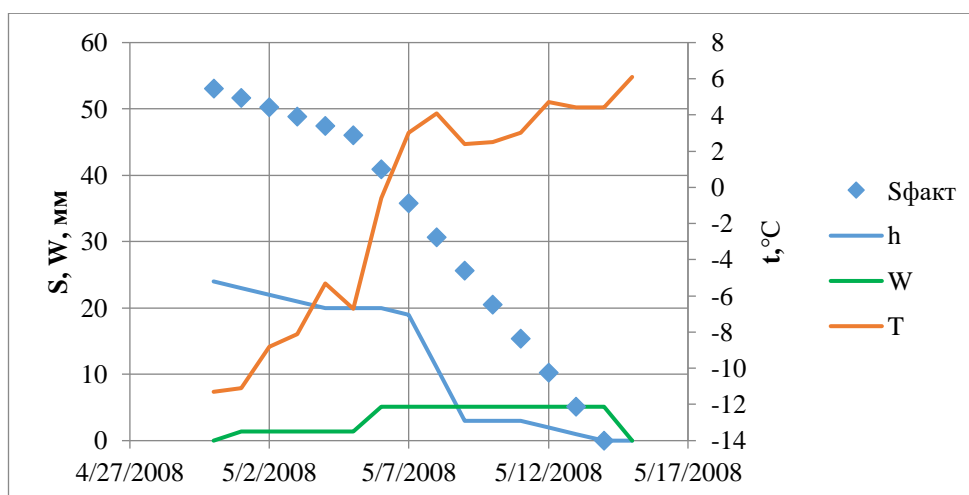


Рисунок 3.2 - Хронологический график с расчетными значениями водоотдачи, температуры, снеготзапасов и высоты снежного покрова за 2008 год

В приложении А представлены хронологические графики с расчетными значениями водоотдачи, температуры, снеготзапасов и высоты снежного покрова за период с 2009 по 2020 год.

3.2 Расчет температуропроводности

Бассейн реки Индигирки протекает на территории с вечной мерзлотой. Данный фактор представляет большой интерес для исследований и построения математических моделей в условиях изменения климата, ведь к стандартным стокообразующим факторам добавляется сток из вечной мерзлоты. Поэтому, в данной работе мы рассмотрели уравнение температуропроводности.

Были взяты данные температур на глубине 0, 0.2 м., 0.4 м., 0.6 м., 1.6 м. на метеостанции Оймякой. На рисунке 3.3 представлен график распределения температуры на глубине.

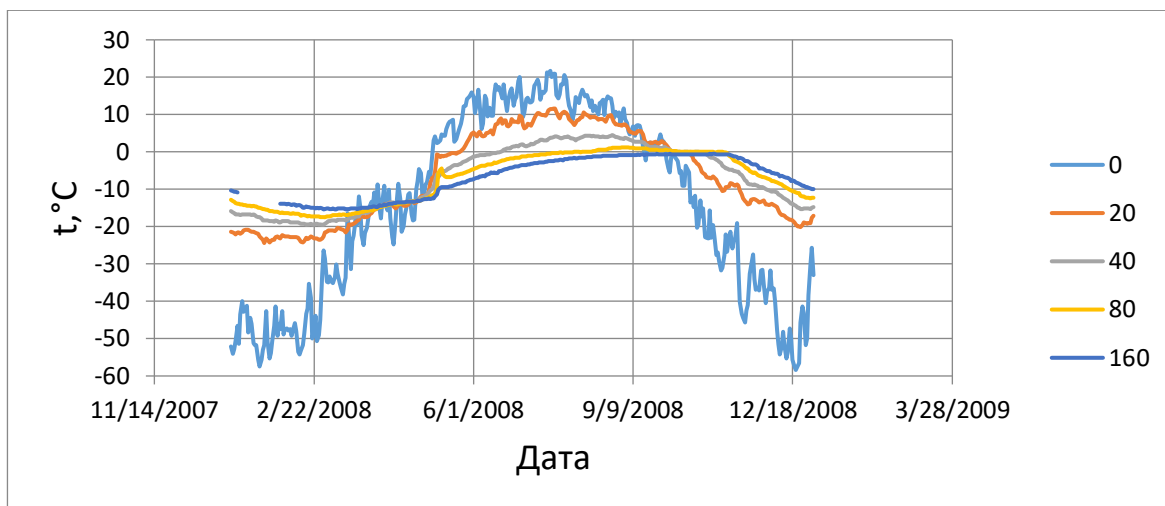


Рисунок 3.3 - График распределения температуры на глубине на метеостанции
Оймякон

С помощью уравнения 2.13 была смоделирована расчетная температура на глубине 0.2 метра. Фрагмент таблицы с расчетной температурой представлен в таблице 3.3

Таблица 3.3 – Рассчитанная температура на глубине 0.2 метра на метеостанции Оймякон.

Дата	0	20 расч.	40
01.01.2008	-52.1	-21.3	-15.9
02.01.2008	-54.0	-21.4	-16.2
03.01.2008	-52.9	-21.6	-16.4
04.01.2008	-50.6	-21.7	-16.7
05.01.2008	-46.6	-21.8	-16.7
06.01.2008	-51.4	-21.7	-16.7
07.01.2008	-43.5	-21.8	-17.0
08.01.2008	-39.9	-21.6	-16.8
09.01.2008	-42.9	-21.3	-16.8
10.01.2008	-42.1	-21.2	-16.7
11.01.2008	-41.2	-20.9	-16.8

С помощью надстройки «Поиск решения» в Microsoft Excel были оптимизированы коэффициенты a и q , для более эффективного решения данной модели.

По формуле 2.20 были рассчитаны условия устойчивости данной модели, которые показали устойчивость на всех временных промежутках. На рисунке 3.4 показаны сравнения фактической температуры с расчетной.

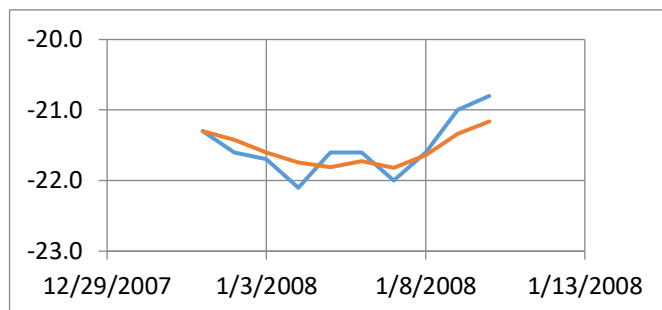


Рисунок 3.4 – Данные расчетной и фактической температуры на глубине 0.2 метра на метеостанции Оймякон

Данная модель показала устойчивость решения на метеостанции Оймякон, в дальнейшем модель теплопроводности можно смело применять для решения задачи по моделированию температуры на глубине.

3.3 Расчет модели формирования стока 1 порядка

3.3.1 Расчет модели формирования стока без корректировки

За начало расчета модели формирования стока 1 порядка была взята дата возникновения водоотдачи из снега на водосбор. Период расчета составил 30 суточный интервал на промежуток половодья. Прогнозные значения расходов воды рассчитывались по формуле 2.11 без корректировки (рисунок 3.3). Для оптимизации параметров k и τ использовалась функция «поиск решения» в Microsoft Excel.

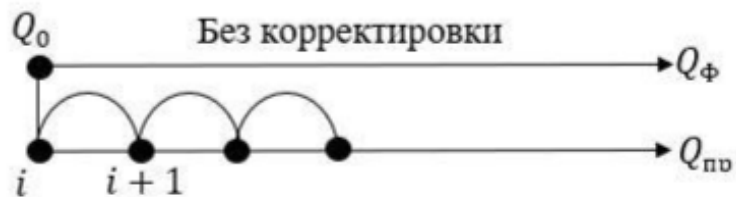


Рисунок 3.3 – Схема прогнозов без корректировки

За Q_0 принималось фактическое значение расходов воды на гидрологическом посту Юрты на реке Индигирка за данные сутки. Для корректного прогнозирования расходов воды значения водопада из миллиметров переводились в метры кубические в секунду.

С использованием данных по водопадам, фактическим и расчетным значениям расходов воды строится хронологический график сравнения за каждый 30-суточный период.

Примеры хронологических графиков сравнения за 2008 год представлены на рисунках 3.4 – 3.8

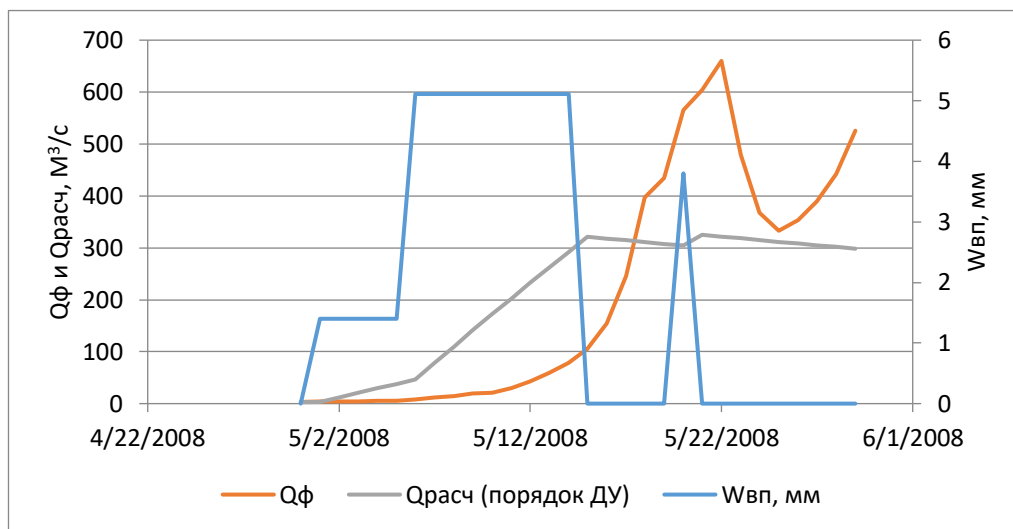


Рисунок 3.4 - Хронологический график сравнения за 2008 год

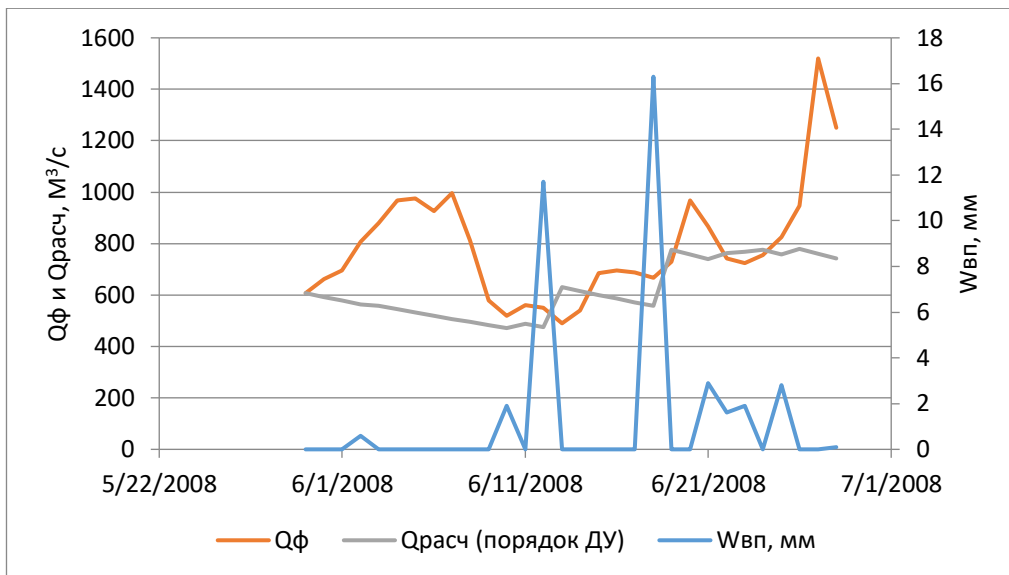


Рисунок 3.5 - Хронологический график сравнения за 2008 год

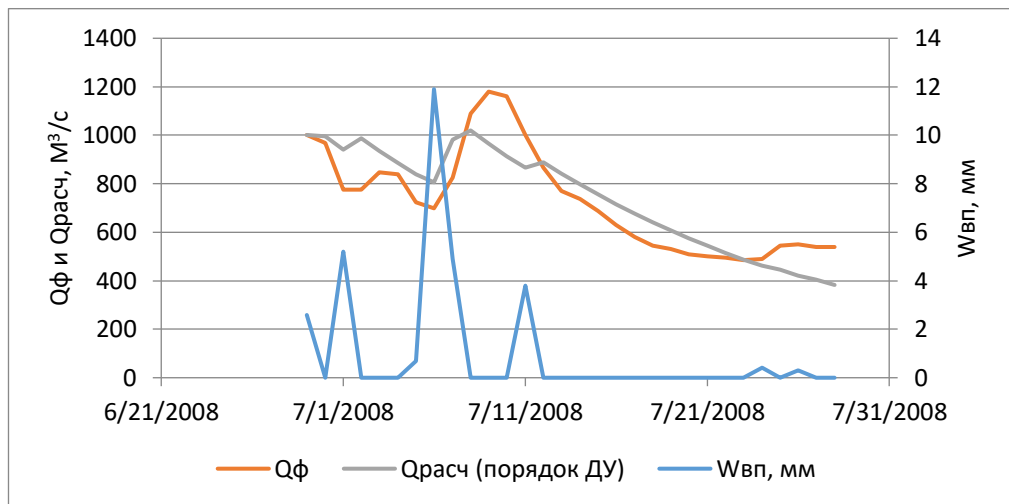


Рисунок 3.6 - Хронологический график сравнения за 2008 год

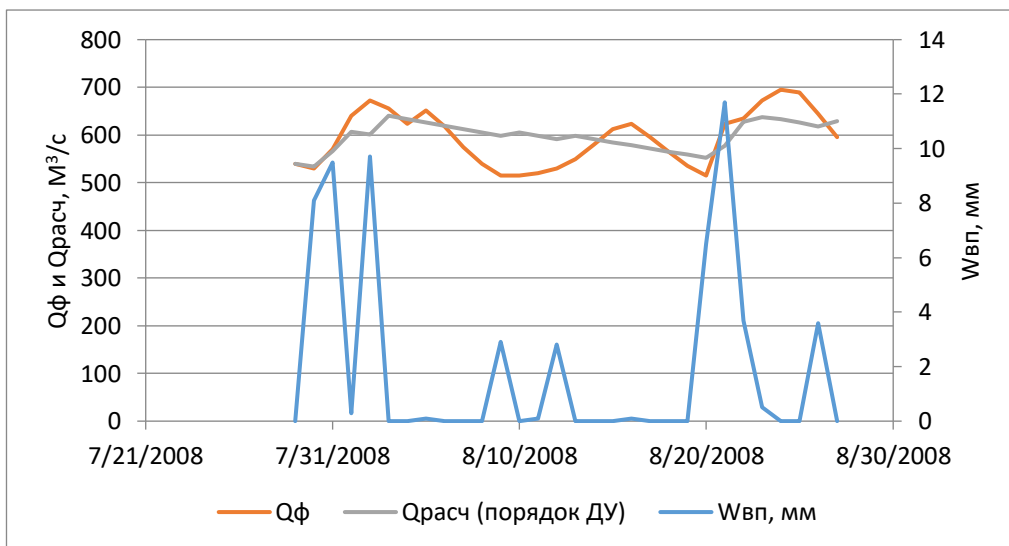


Рисунок 3.7 - Хронологический график сравнения за 2008 год

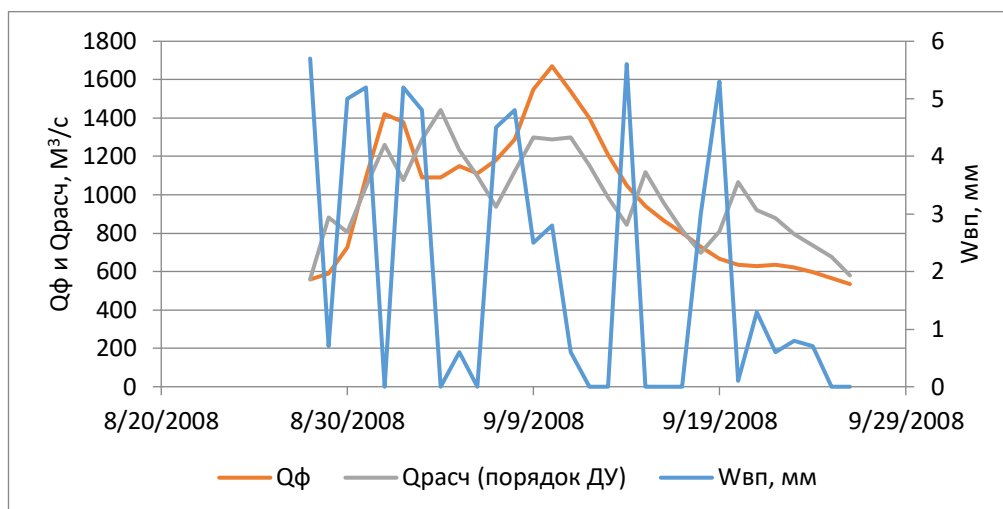


Рисунок 3.8 - Хронологический график сравнения за 2008 год

На графиках видно, что расчетные значения расходов воды имеют значительные погрешности, в следствии чего, были предприняты меры по улучшению качества прогноза.

В приложении Б представлены хронологические графики сравнения фактических и расчетных расходов воды без корректировки с 2009 по 2020 год.

3.3.2 Расчет модели формирования стока с корректировкой

Модель формирования стока без корректировки показала большие погрешности в расчетах. Для получения эффективной методики расчета было принято решение использовать корректировки. Прогноз с корректировкой проводился в рамках фактических значений расходов воды. Схема прогноза с корректировкой представлена на рисунке 3.9



Рисунок 3.9 – Схема прогноза с корректировкой

Расчетные значения прогноза расхода воды с корректировкой показали малые погрешности, что наглядно видно на хронологических графиках 3.10 – 3.14, представленных ниже.

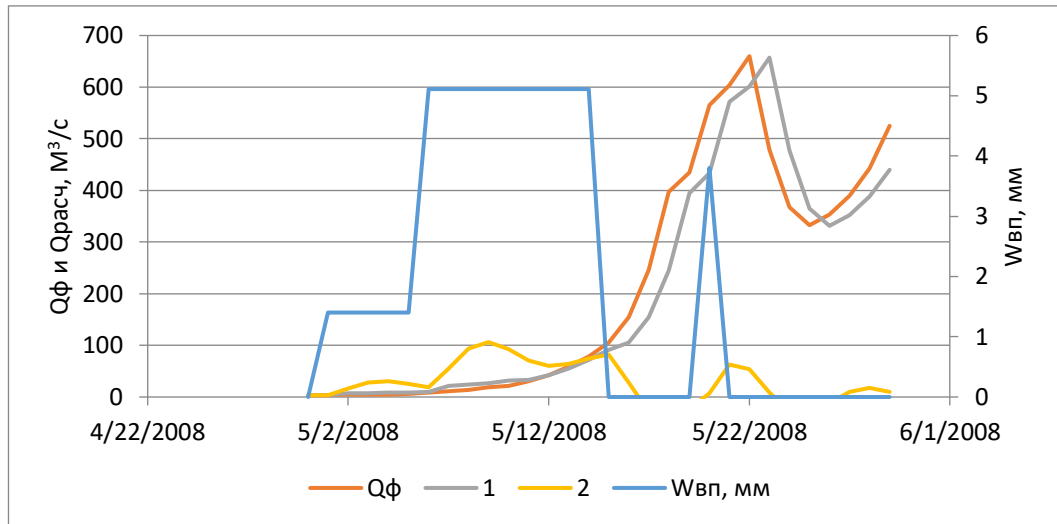


Рисунок 3.10 - Хронологический график сравнения с корректировкой за 2008
год

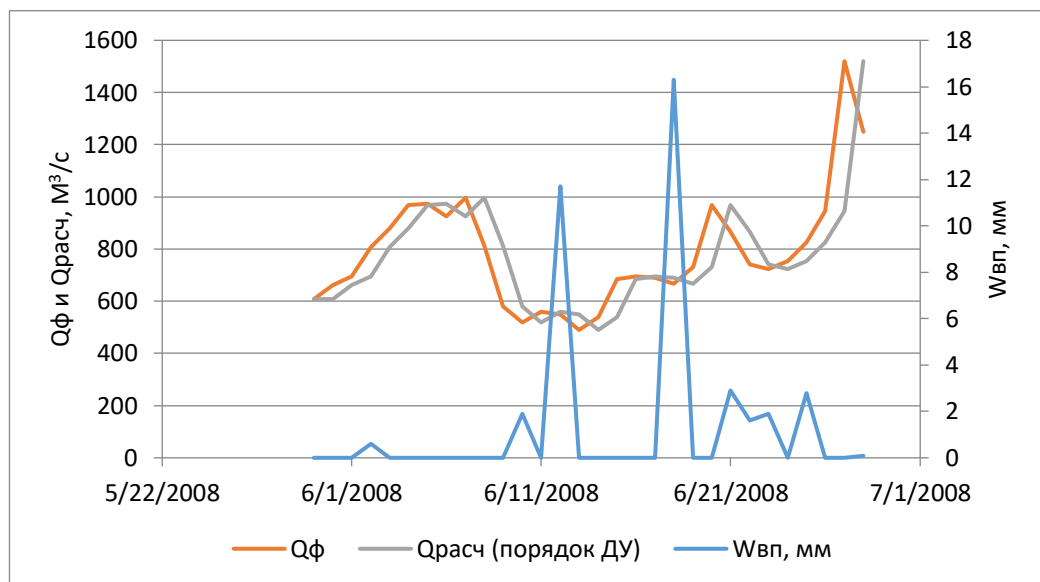


Рисунок 3.11 - Хронологический график сравнения с корректировкой за 2008
год

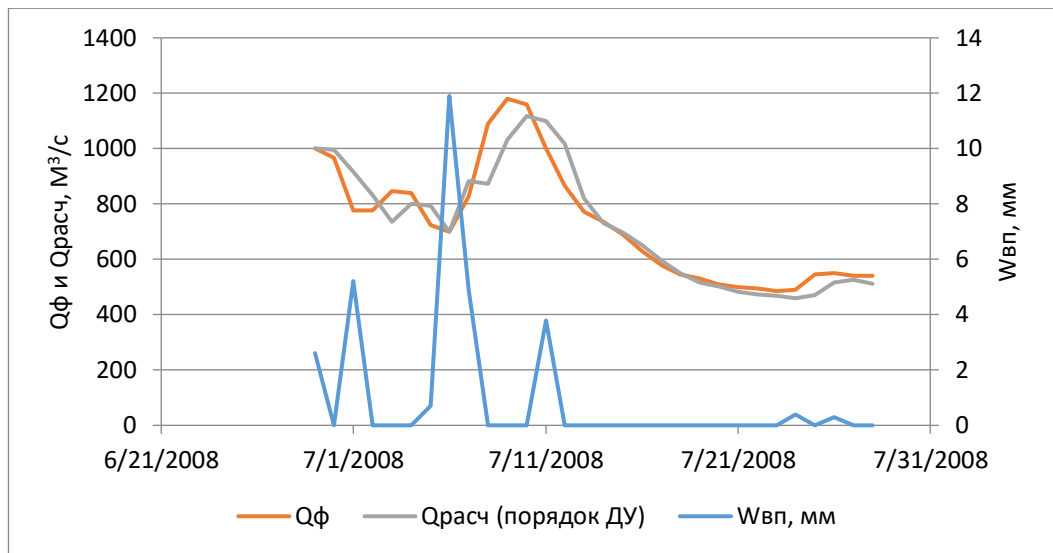


Рисунок 3.12 - Хронологический график сравнения с корректировкой за 2008
ГОД

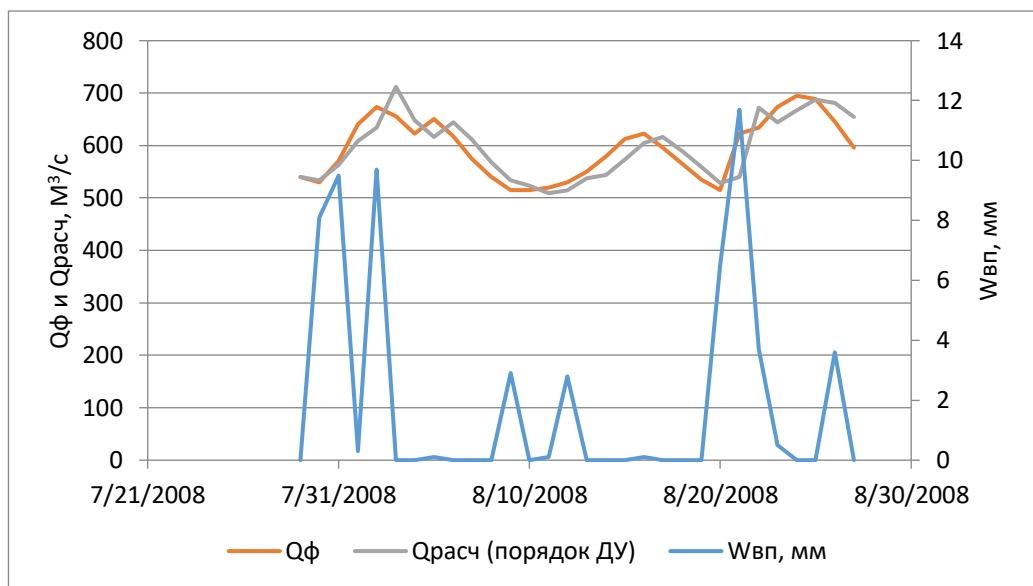


Рисунок 3.13 - Хронологический график сравнения с корректировкой за 2008
ГОД

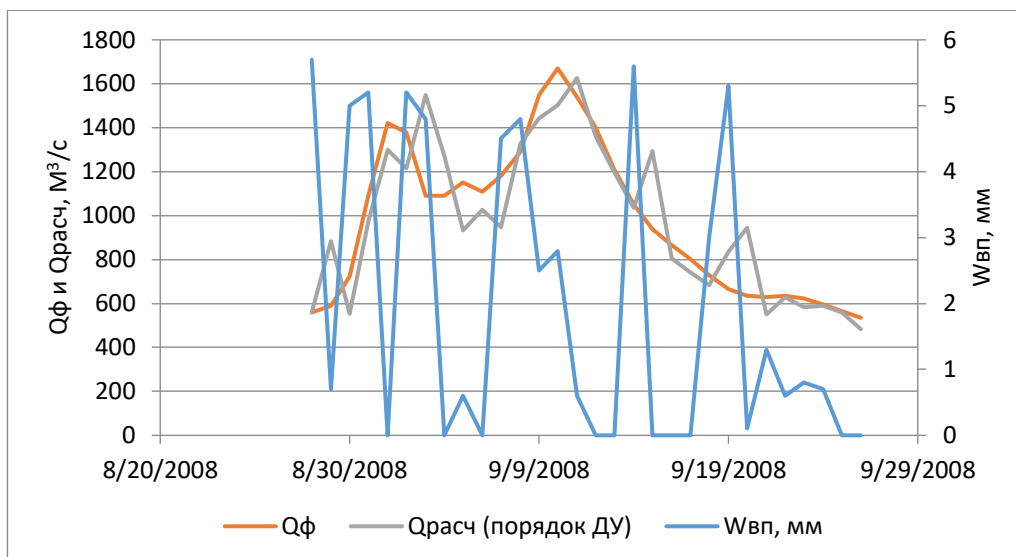


Рисунок 3.14 - Хронологический график сравнения с корректировкой за 2008 год

В приложении В представлены хронологические графики сравнения фактических и расчетных расходов воды с корректировкой с 2009 по 2020 год.

3.3.3 Оценка эффективности методики

Оценка эффективности методики прогнозирования позволяет установить возможность ее практического применения. При оценке эффективности методики и оправдываемости прогнозов требуется выполнение двух условий:

- должна быть соблюдена объективность системы оценки прогнозов;
- необходимо иметь возможность проводить сравнительную оценку.

Для каждого 30 суточного прогноза моделей с корректировкой и без корректировки были вычислены средняя квадратическая погрешность поверочных прогнозов (S) по формуле 2.45 и среднее квадратическое отклонение прогнозируемого значения элемента от среднего (σ) по формуле 2.46. После чего было вычислено отношение качества методики S/σ . Все значения качества методики были внесены в таблицу 3.3 и 3.4 для моделей с корректировкой и без корректировки соответственно.

Таблица 3.3 – показатели качества методики для модели без корректировки

Год	Дни		S/σ
	от	до	
2008	121	150	0.71
	151	180	1.24
	181	210	0.57
	211	240	0.82
	241	270	0.65
2009	105	134	0.54
	135	164	1.26
	165	194	0.93
	195	224	1.63
	225	254	1.25
2010	255	284	0.19
	105	134	0.90
	135	164	1.30
	165	194	0.54
	195	224	0.59
	225	254	0.79
2011	255	284	0.19
	105	134	0.54
	135	164	0.66
	165	194	0.87
	195	224	0.74
2012	225	254	0.46
	106	135	0.80
	136	165	1.01
	166	195	0.82
	196	225	0.27
2013	226	255	0.85
	100	129	0.82
	130	159	1.12
	160	189	0.62
	190	219	0.73
2014	220	249	0.71
	110	139	0.81
	140	169	0.62
	170	199	0.45
	200	229	0.56
	230	259	1.18

Продолжение таблицы 3.3

2015	110	139	1.16
	140	169	0.99
	170	199	1.11
	200	229	0.67
	230	259	0.26
2016	111	140	0.79
	141	170	1.97
	171	200	0.91
	201	230	0.84
	231	260	0.57
2017	110	139	0.94
	140	169	0.81
	170	199	0.68
	200	229	0.79
	230	259	0.39
2018	90	119	1.13
	120	149	1.00
	150	179	1.03
	180	209	1.14
	210	239	1.06
	240	269	2.7
2019	90	119	4.12
	120	149	1.15
	150	179	1.3
	180	209	0.51
	210	239	0.47
	240	269	0.68
2020	116	145	0.95
	146	175	1.04
	176	205	0.98
	206	235	0.42
	236	265	0.51

Таблица 3.4 – показатели качества методики для модели с корректировкой

Год	Дни		S/ σ
	от	до	
2008	121	150	0.29
	151	180	0.7
	181	210	0.37
	211	240	0.59
	241	270	0.51
2009	105	134	0.21
	135	164	0.45
	165	194	0.5
	195	224	0.57
	225	254	0.36
	255	284	0.1
2010	105	134	0.37
	135	164	0.29
	165	194	0.4
	195	224	0.33
	225	254	0.64
	255	284	0.06
2011	105	134	0.29
	135	164	0.25
	165	194	0.54
	195	224	0.23
	225	254	0.3
2012	106	135	0.33
	136	165	0.68
	166	195	0.49
	196	225	0.33
	226	255	0.51
2013	100	129	0.34
	130	159	0.36
	160	189	0.5
	190	219	0.57
	220	249	0.21
2014	110	139	0.28
	140	169	0.27
	170	199	0.54
	200	229	0.34
	230	259	0.33

Продолжение таблицы 3.4

2015	110	139	0.24
	140	169	0.38
	170	199	0.54
	200	229	0.58
	230	259	0.14
2016	111	140	0.24
	141	170	0.54
	171	200	0.61
	201	230	0.38
	231	260	0.39
2017	110	139	0.22
	140	169	0.31
	170	199	0.44
	200	229	0.78
	230	259	0.25
2018	90	119	0.19
	120	149	0.55
	150	179	0.44
	180	209	0.57
	210	239	0.31
	240	269	0.35
2019	90	119	1.14
	120	149	0.36
	150	179	0.5
	180	209	0.41
	210	239	0.25
	240	269	0.31
2020	116	145	0.43
	146	175	0.72
	176	205	0.94
	206	235	0.24
	236	265	0.34

Оценка методики модели без корректировки показывает, что прогноз не качественный и имеет большие погрешности. В случае модели с корректировкой ситуация кардинально меняется. По критериям качества методики большинство значений хорошие и удовлетворительные, что показывает эффективность методики.

3.4 Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

Для численного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова были взяты значения расходов воды реки Индигирка на гидрологическом посту Юрты с 1 июня по 31 августа. В качестве внешнего воздействия использовалась водоподача на водосбор рассчитанная ранее.

На каждый календарный день по всем годам были рассчитаны минимальные и максимальные многолетние расходы воды. Значения минимальных и максимальных многолетних расходов воды представлены на рисунке 3.15

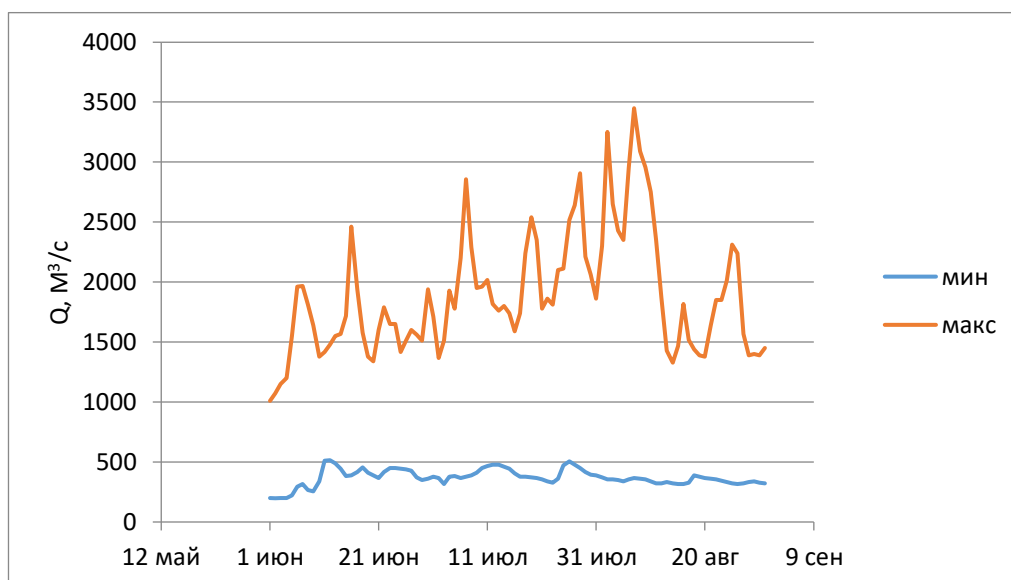


Рисунок 3.15 - Минимальные и максимальные многолетние расходы воды реки Индигирка на гидрологическом посту Юрты

С помощью минимального и максимального значения расходов воды были определены границы и интервал интегрирования. $\Delta Q = 100 \frac{M^3}{c}$ и $\Delta t = 1$ сутки. Далее, с помощью инструмента анализа данных “Гистограмма” в Microsoft Excel были рассчитаны значения плотности вероятности в начальный момент времени (таблица 3.5).

Таблица 3.5 – Значения плотности вероятности в начальный момент времени

Карман	Частота	P, %
100	0	0
200	0	0
300	2	14
400	1	7
500	2	14
600	4	29
700	2	14
800	1	7
900	0	0
1000	1	7
1100	1	7
1200	0	0

Следующим шагом было вычисление конкретных значений параметров $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$, k , τ . Этапы вычисления конкретных параметров представлены в следующей главе.

После вычисления параметров уравнения мы приступили к расчету коэффициента сноса $A(Q, t)$ и коэффициента диффузии $B(Q, t)$ по формулам 2.24 и 2.25 соответственно.

Затем, для вычисления эволюции плотности вероятности применялась формула 2.23 и её конечно-разностная аппроксимация формула 2.28

Пример расчетного значения эволюции плотности вероятности представлены в приложении Г.

Из расчетов видно, что решение является неустойчивым.

Для попытки нахождения устойчивого решения мы уменьшили шаг и интервал интегрирования. Теперь $\Delta t = 0.1$ сутки и $\Delta Q = 50 \frac{M^3}{c}$, но неустойчивость по прежнему сохранялась.

Следующая попытка нахождения устойчивости заключалась в решении численного решения уравнения ФПК по декадам с различными шагами и интервалами интегрирования, но неустойчивость сохранялась.

Было опробовано более 20 различных вариантов решения данной задачи, но к конечному положительному результату они не привели. Был сделан следующий вывод: данное уравнение (2.23) в его явной форме не подходит для численного решения на данной реке. Но существует неявная форма решения данного уравнения. В дальнейшем, будут производиться исследования для численного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова по неявной схеме.

3.5 Решение уравнения для моментов

Для численного решения уравнения ФПК необходимо вычислить конкретные значения параметров $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{N}}$, $G_{\bar{c}\bar{N}}$, с помощью которых можно приступить к расчету коэффициента сноса $A(Q,t)$ и коэффициента диффузии $B(Q, t)$.

Была построена вспомогательная таблица 3.6 для расчетов значений параметров уравнения a , b_0 , b_1 , b_2 .

Таблица 3.6 – Вспомогательная таблица

$Q_{cp} =$	693
$D =$	106578
$C_v =$	0.47
$C_s =$	1.36
$C_s/C_v =$	2.88
$N_{cp} =$	835

Затем через моменты распределения по формулам 2.31 – 2.34 были найдены параметры уравнения a , b_0 , b_1 , b_2 .

Таблица 3.7 – Параметры уравнения a , b_0 , b_1 , b_2

a	b_0	b_1	b_2
471	-46950	222	-53850149577122500000000

В дальнейшем, были рассчитаны параметры \bar{c} , k , $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{c}\tilde{N}}$, $G_{\tilde{N}}$ по формулам 2.35 – 2.39, которые представлены в таблице 3.8

Таблица 3.7 – Параметры уравнения а, b0, b1, b2

$G_{\bar{c}}$	$G_{\bar{c}\tilde{N}}$	$G_{\tilde{N}}$	\bar{c}	k
-4.63	-108818	217636	2.32	0.83

Заключение

Проанализировав результаты данной выпускной квалификационной работы можно сделать следующие выводы:

- были собраны и проанализированы данные о физико-географических особенностях бассейна реки Индигирка;
- были собраны и проанализированы многолетние метеорологические данные с метеостанции Оймякон;
- были собраны и проанализированы многолетние гидрологические данные с гидропоста Юрты;
- были рассчитаны многолетние данные водоотдачи и водоподачи на водосбор бассейна реки Индигирка;
- были рассчитаны прогнозные значения расходов воды с использованием модели формирования стока 1 порядка без корректировки и с корректировкой;
- была рассчитана модель температуропроводности;
- были рассчитаны моменты и параметры для решения уравнения ФПК;
- были произведены попытки численного решения уравнения ФПК.

Список используемых источников

1 ИНДИГИРКА // Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – URL: <https://old.bigenc.ru/geography/text/2008739> (Дата обращения 26.04.2024).

2 Якутия // РУВИКИ [Электронный ресурс]. – URL: <https://ru.ruwiki.ru/wiki> (Дата обращения 26.04.2024).

3 Королева, Т. М. К изучению флоры дельты реки Индигирка / Т. М. Королева, П. А. Гоголева ; Ботанический институт им. В. Л. Комарова, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова // Евразийский союз ученых. – 2015.

4 ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ - СЕВЕРО-ВОСТОК СИБИРИ [Электронный ресурс]. – URL: <https://arz.unn.ru/2016-05-16-10-34-33/1186-2016-05-19-08-37-46> (Дата обращения 26.04.2024).

5 Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В. Моделирование гидрологических процессов [Текст]. Изд. 2-е исправ. И доп. Учебник. – СПб., изд. РГГМУ, 2006. – 559 с.

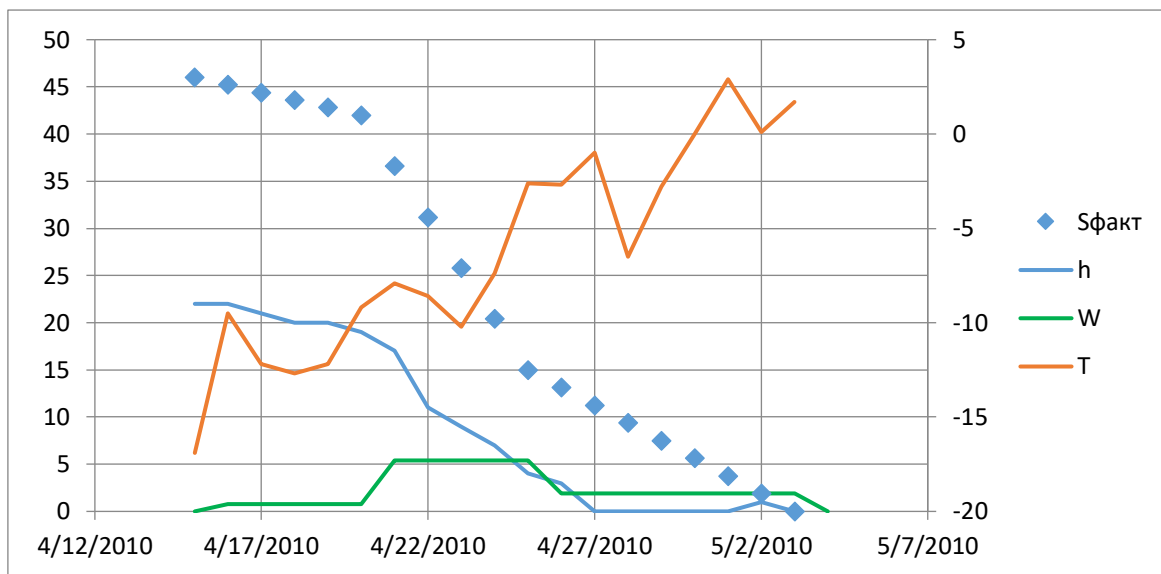
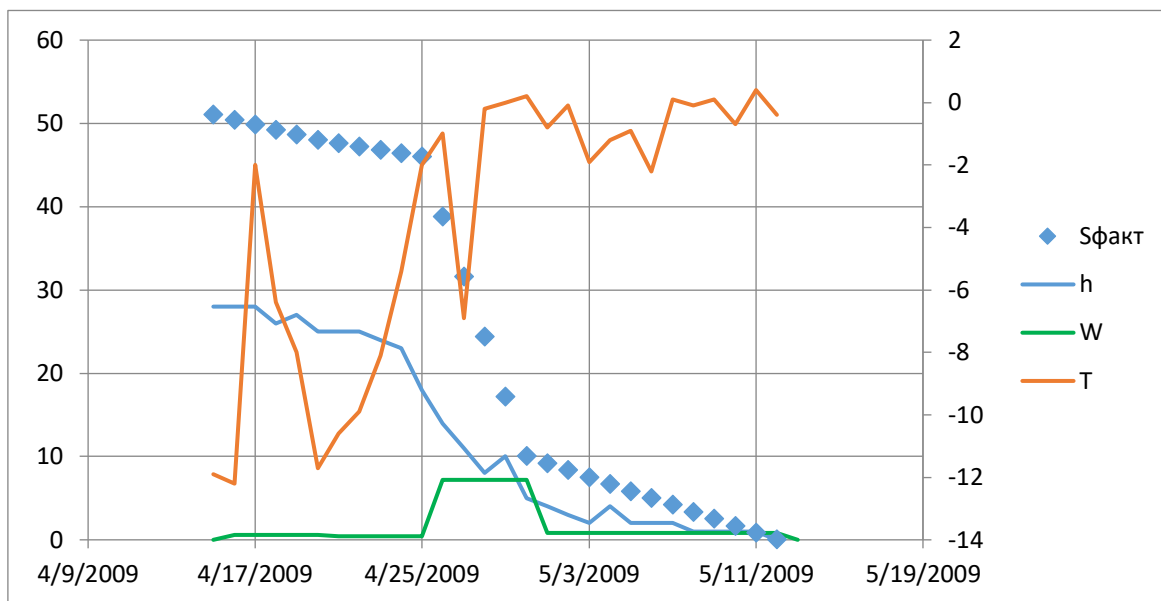
6 Коваленко В.В. Частично инфинитивное моделирование и прогнозирование процесса формирования речного стока [Текст]. – СПб.: изд. РГГМУ, 2004. – 198 с.

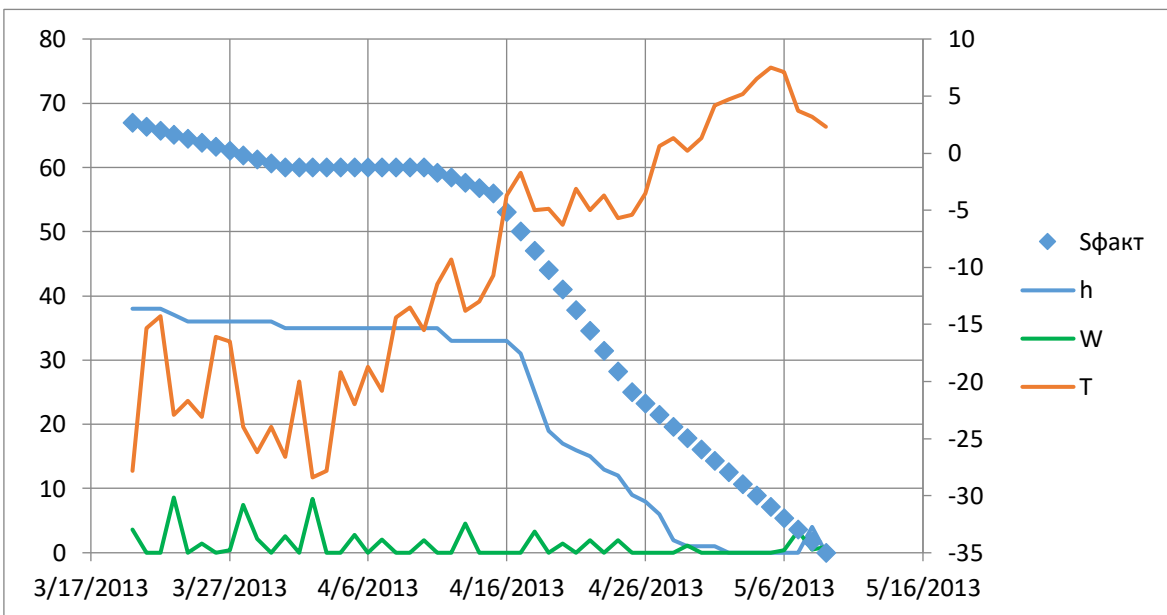
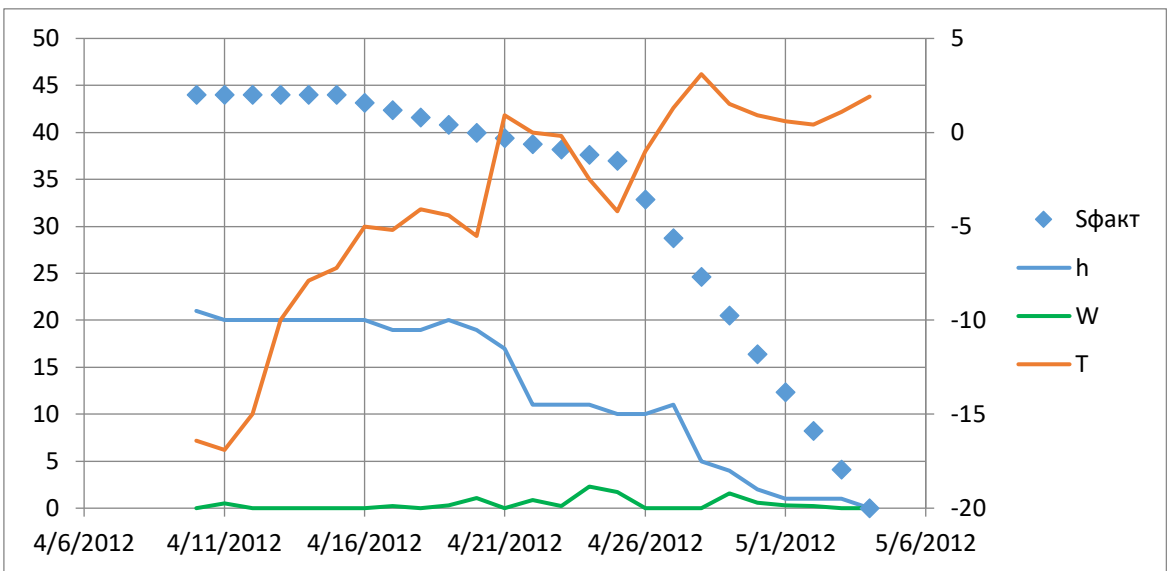
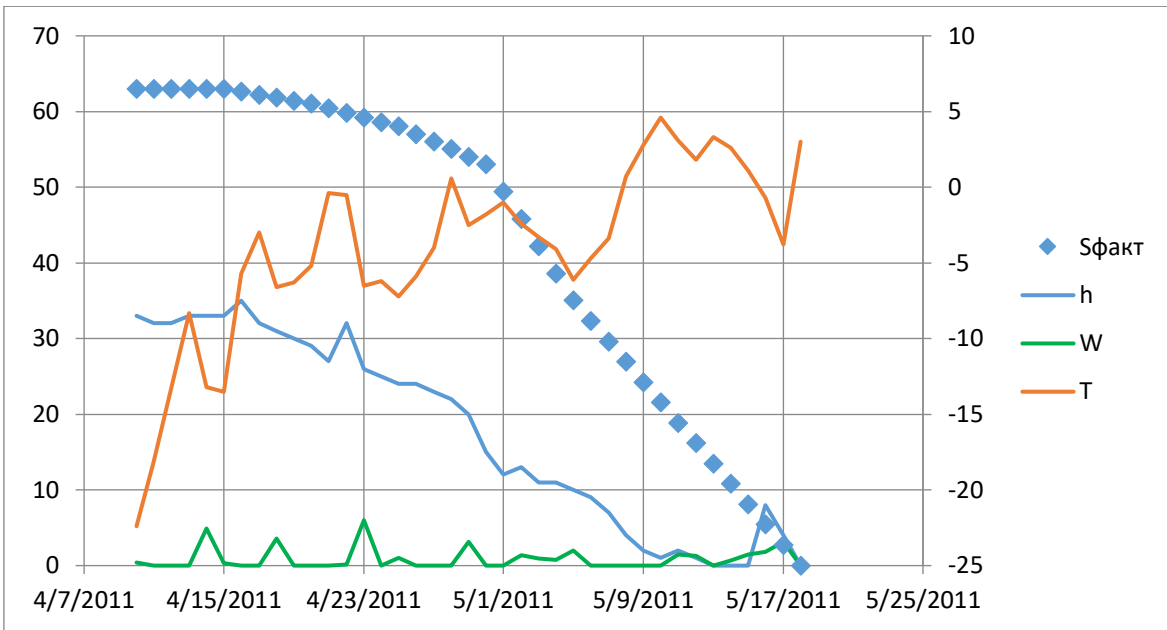
7 Коваленко В.В., Хаустов В.А. Критерии устойчивого развития гидрологических процессов и картирование зон ожидаемых аномалий параметров годового стока рек СНГ при антропогенном изменении климата // Метеорология и гидрология [Текст], 1998, 12. – С 96 – 102

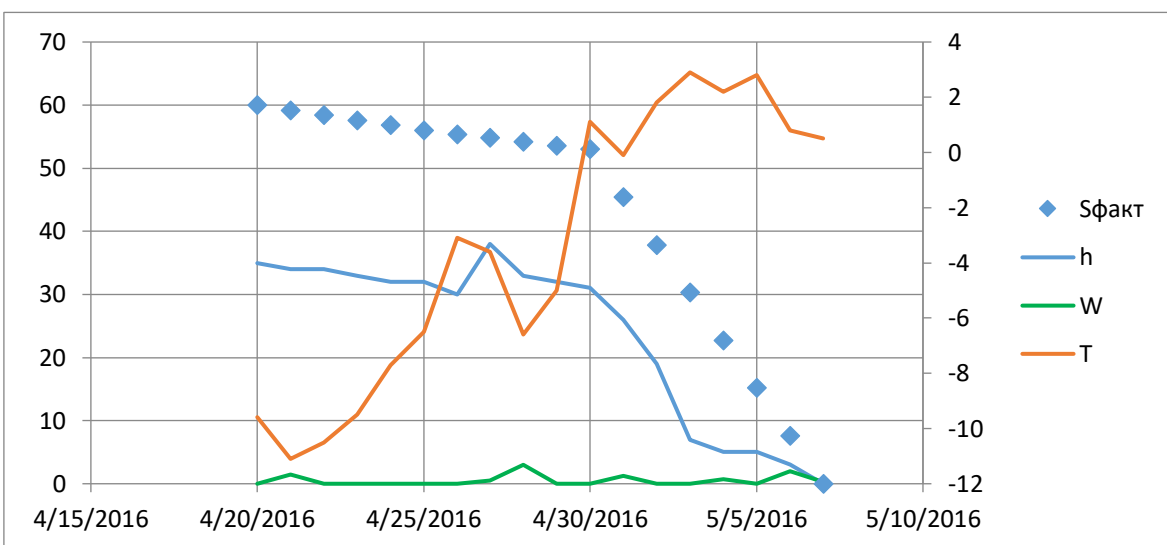
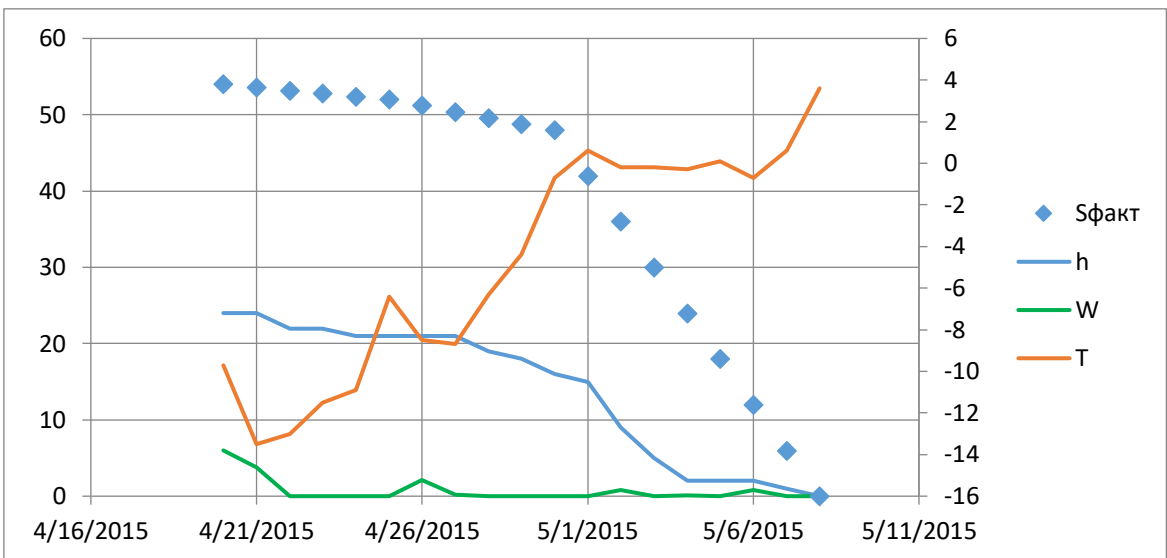
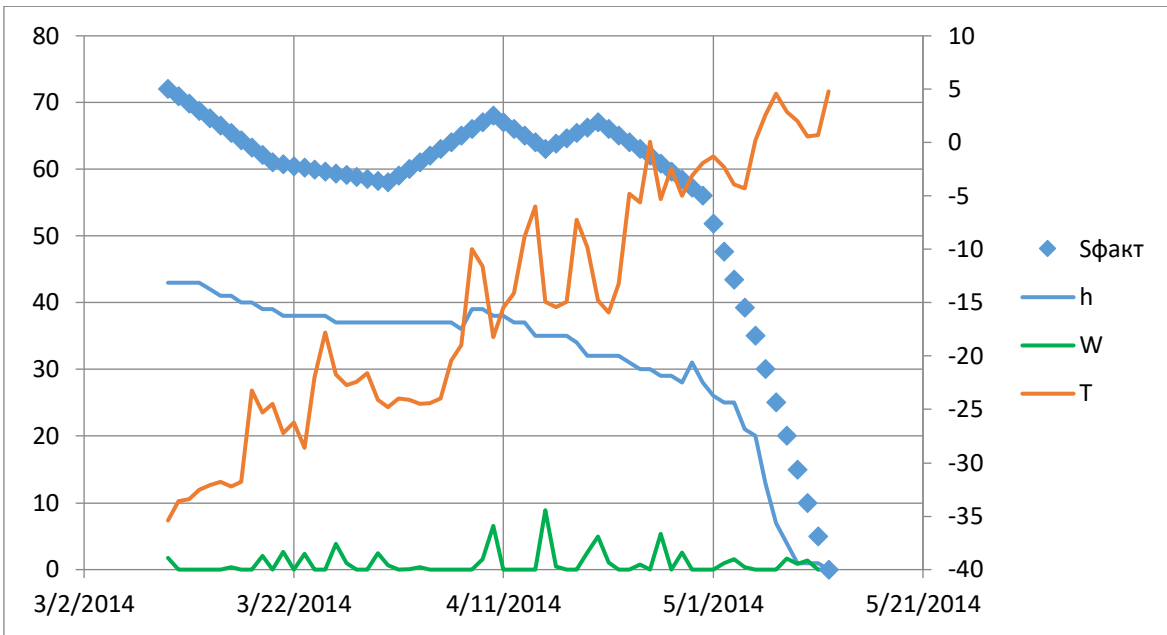
8 Коваленко В.В., Гайдукова Е.В. Практикум по дисциплине «Моделирование гидрологических процессов. Часть I. Динамические модели» (на базе языка C++) [Текст], ; РГГМУ. - Санкт-Петербург : Изд-во РГГМУ, 2010. - 95 с.

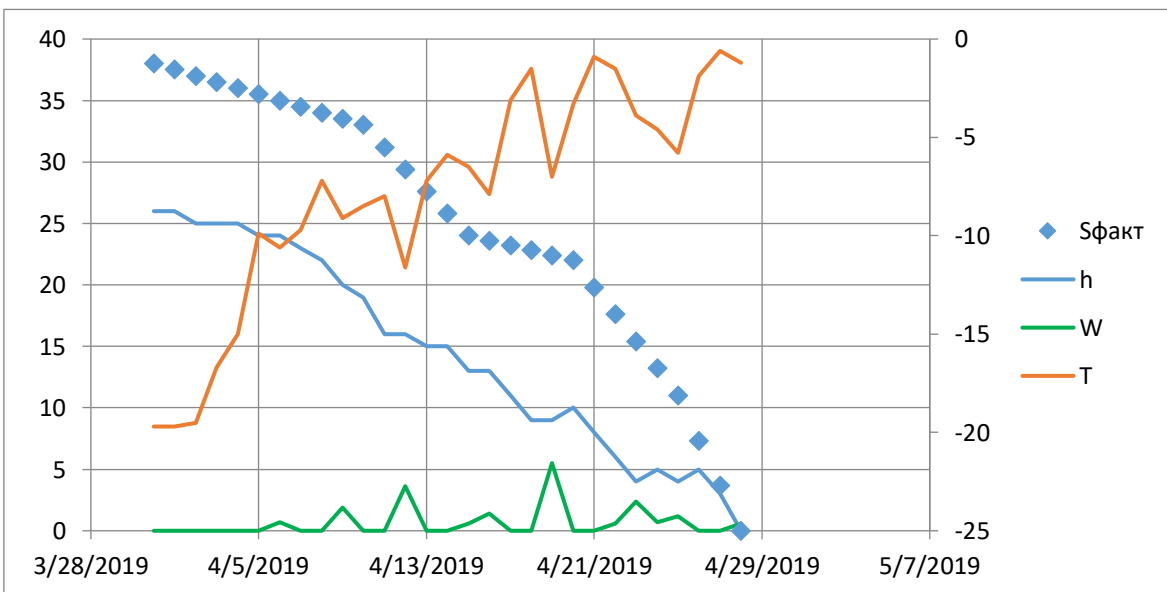
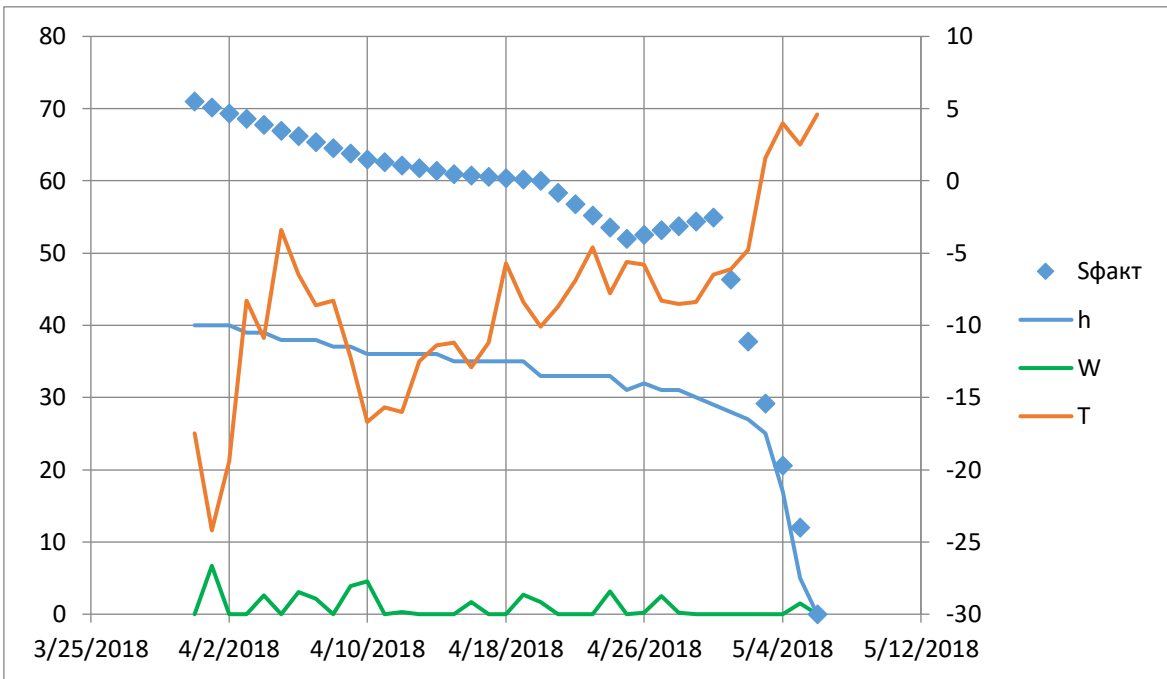
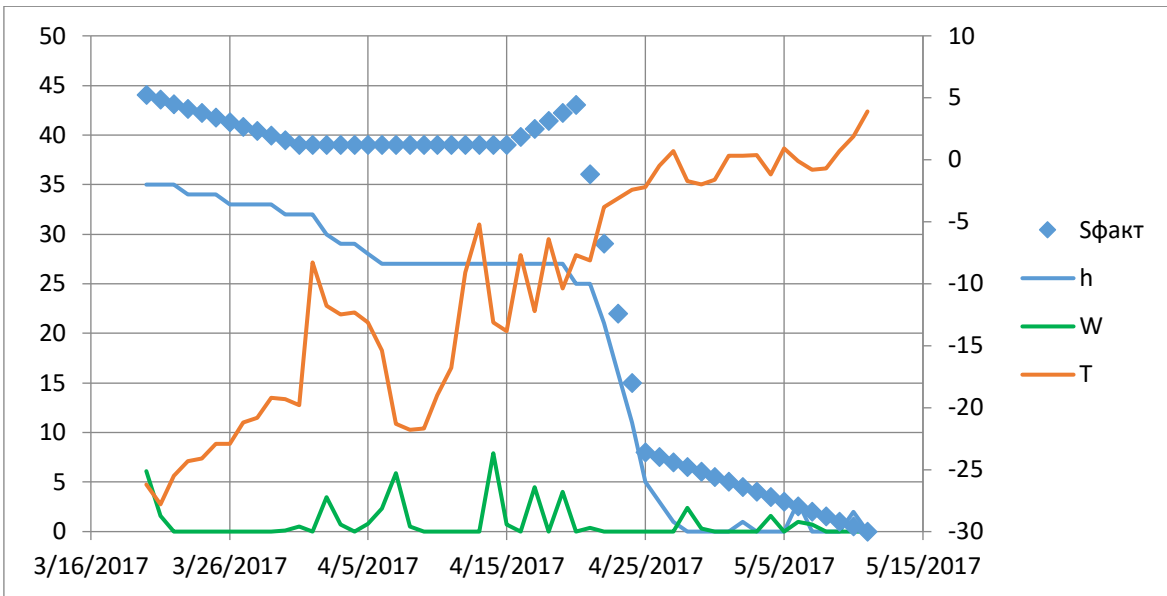
9 Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Викторова Н.В. Практикум по дисциплине "Моделирование гидрологических процессов" : учебное пособие. Ч. 2. Стохастические модели (на базе языка C++) [Текст], ; РГГМУ. - Санкт-Петербург : Изд-во РГГМУ, 2012. - 246 с.

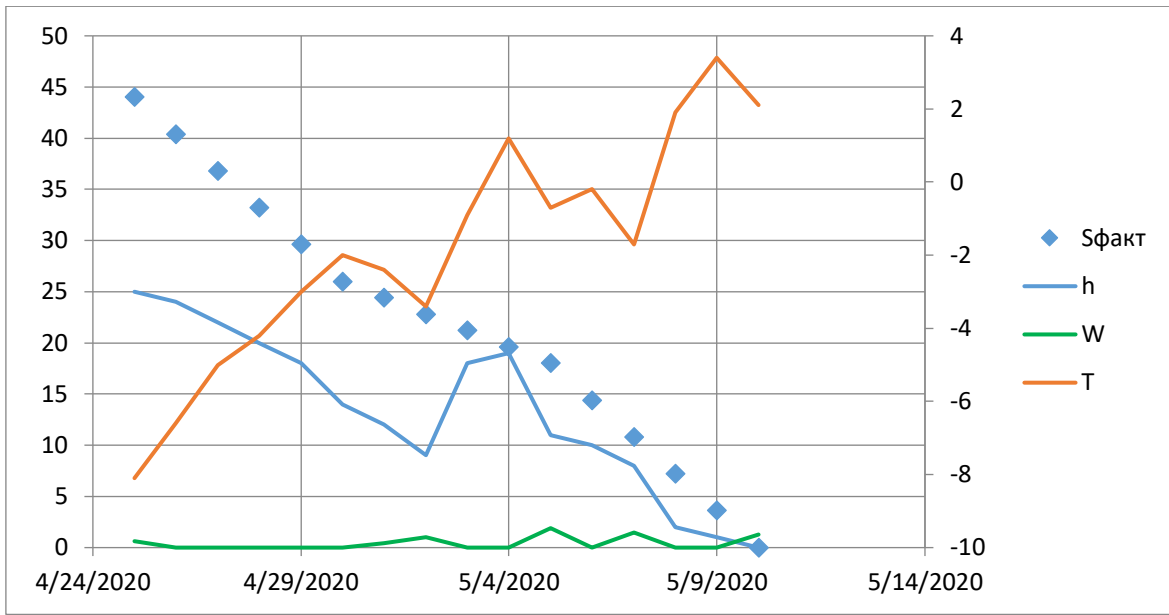
Приложение А - хронологические графики с расчетными значениями водоотдачи, температуры, снеготпасов и высоты снежного покрова за период с 2009 по 2020 год.



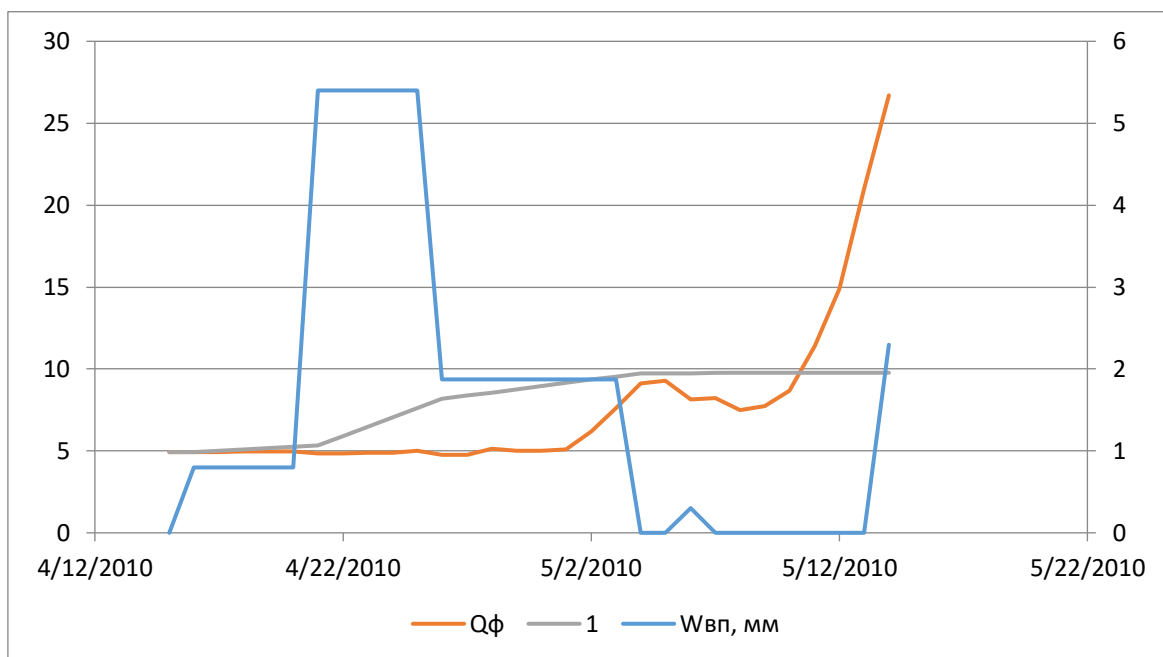
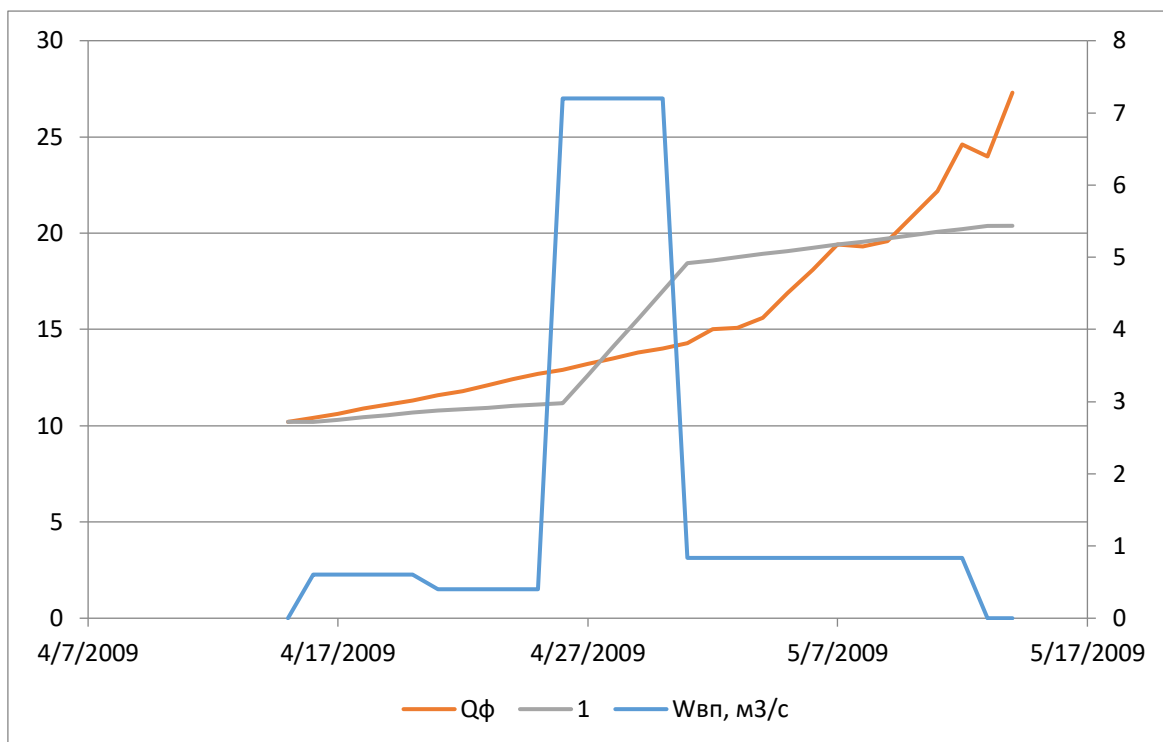


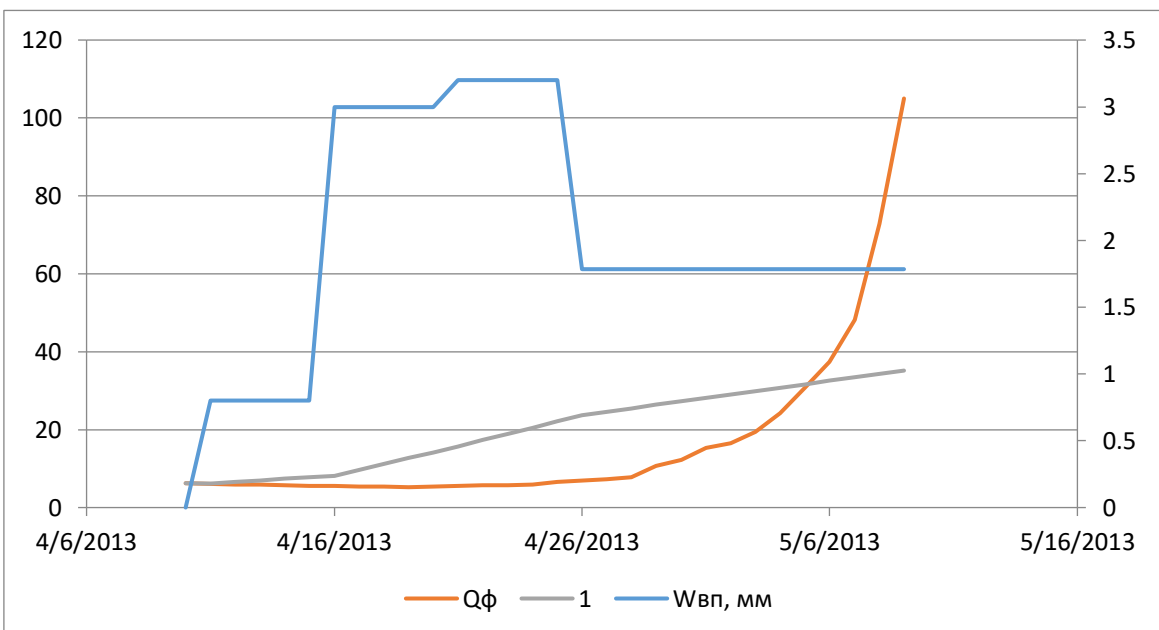
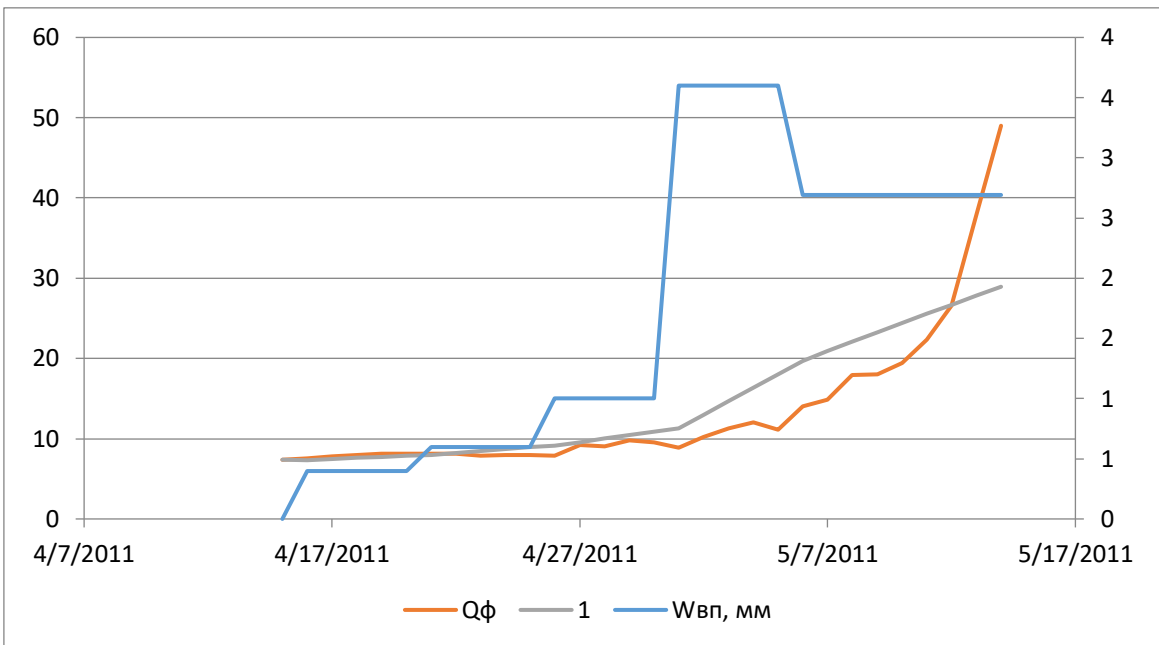
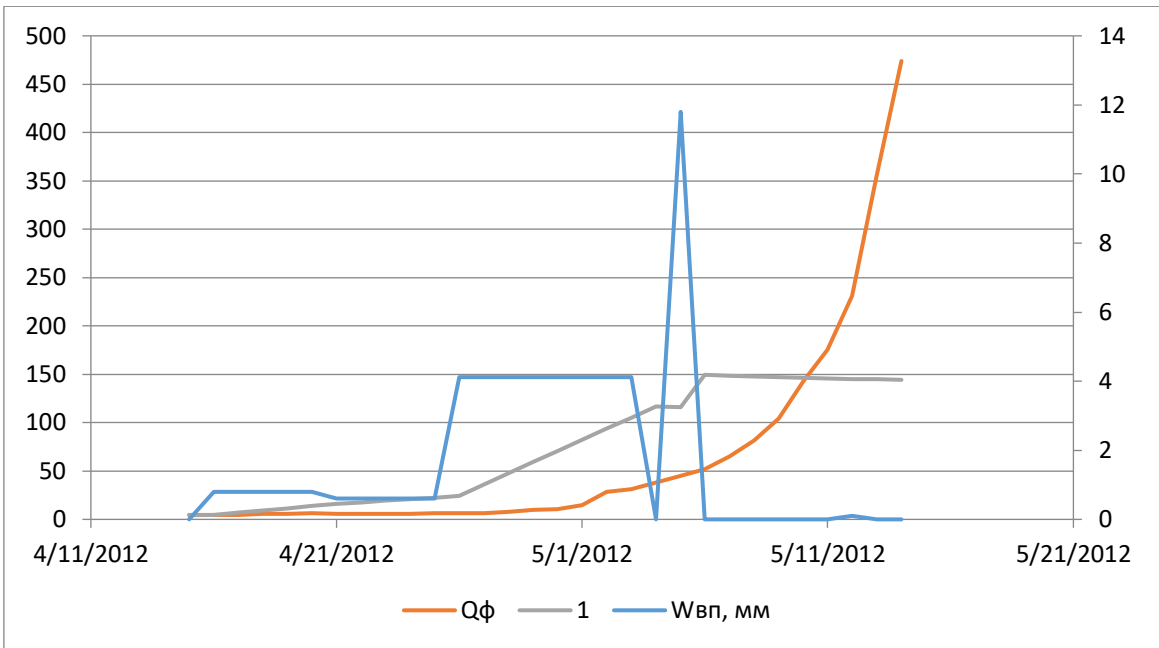


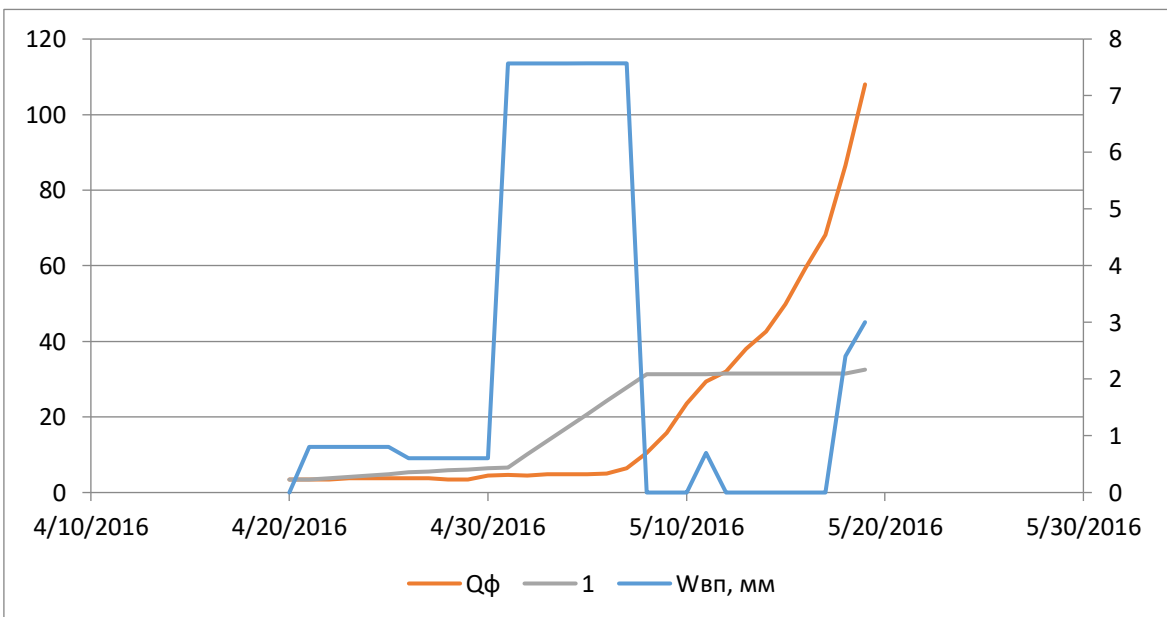
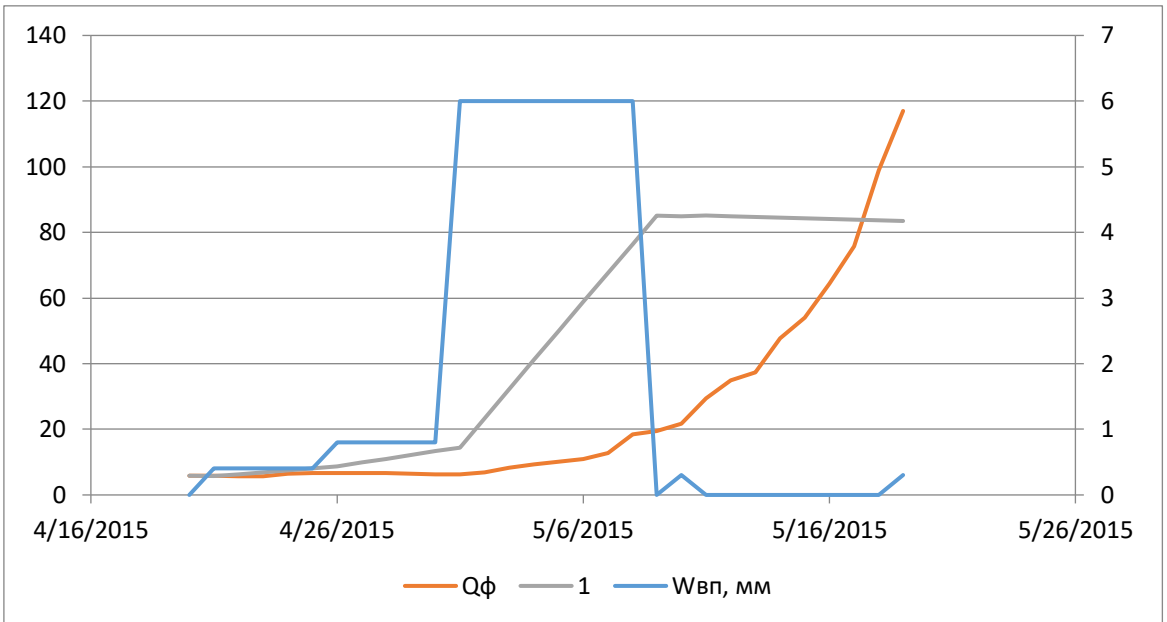
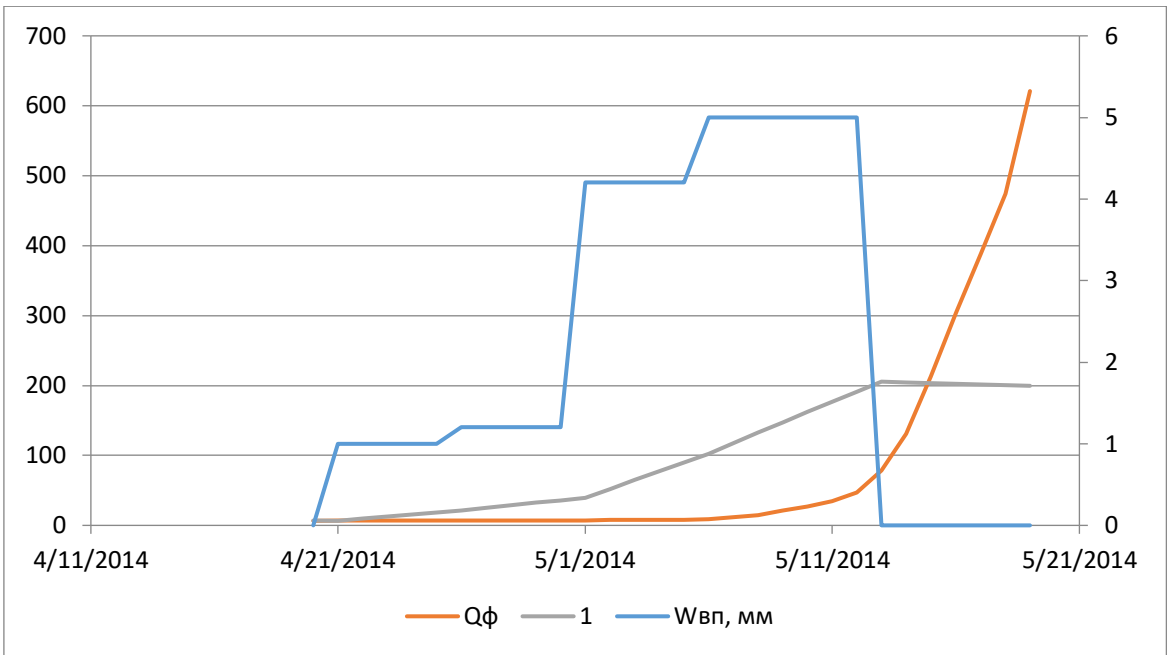


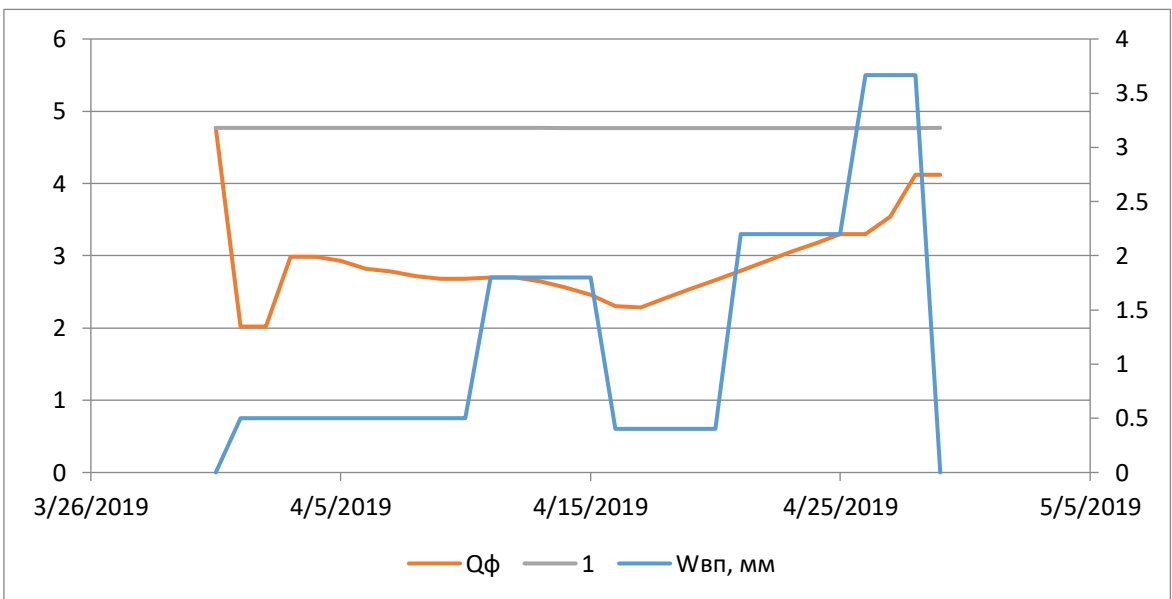
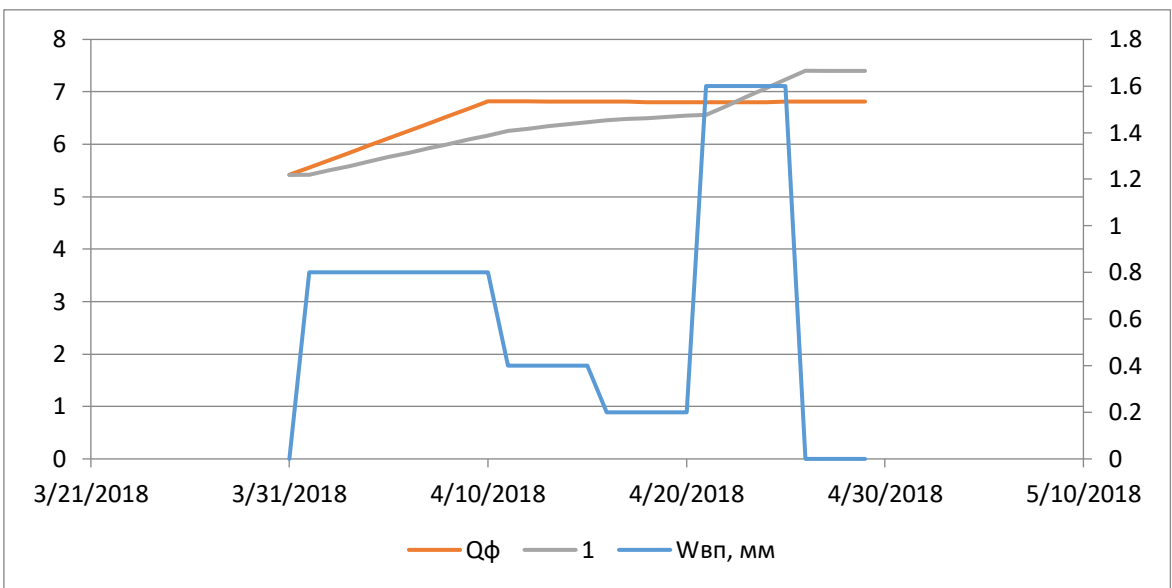
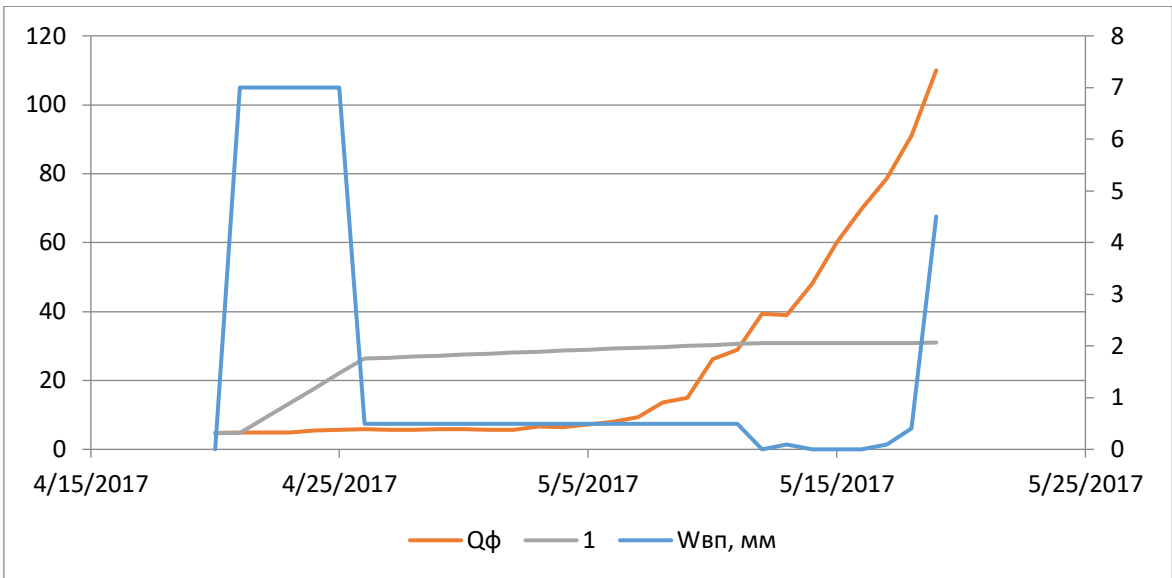


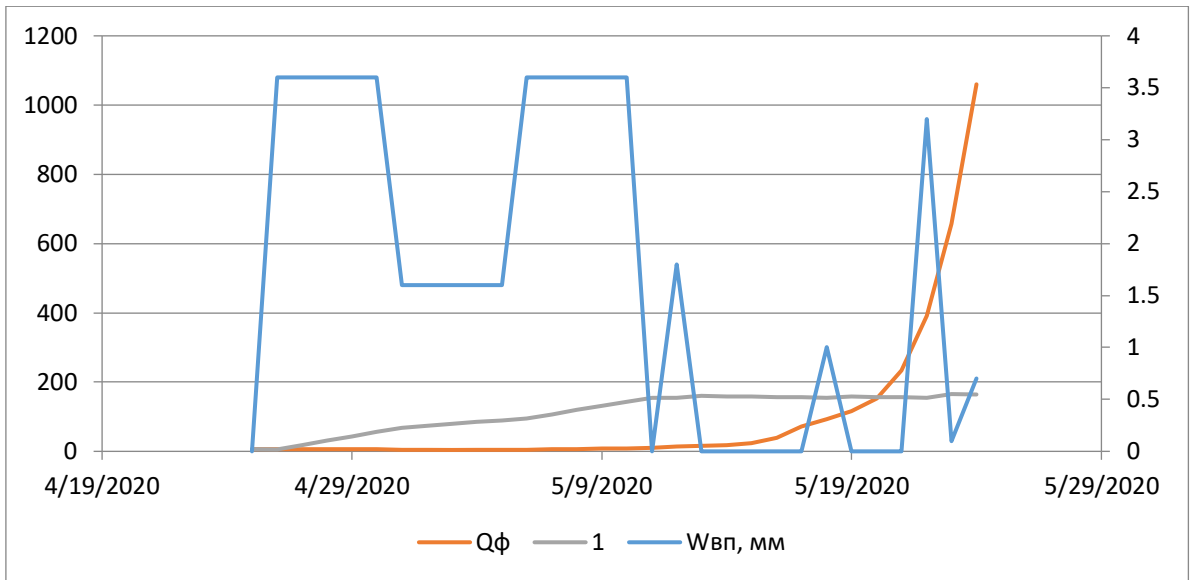
Приложение Б - Хронологические графики сравнения расчетных и фактических значений расходов воды без корректировки за период с 2009 по 2020 год.



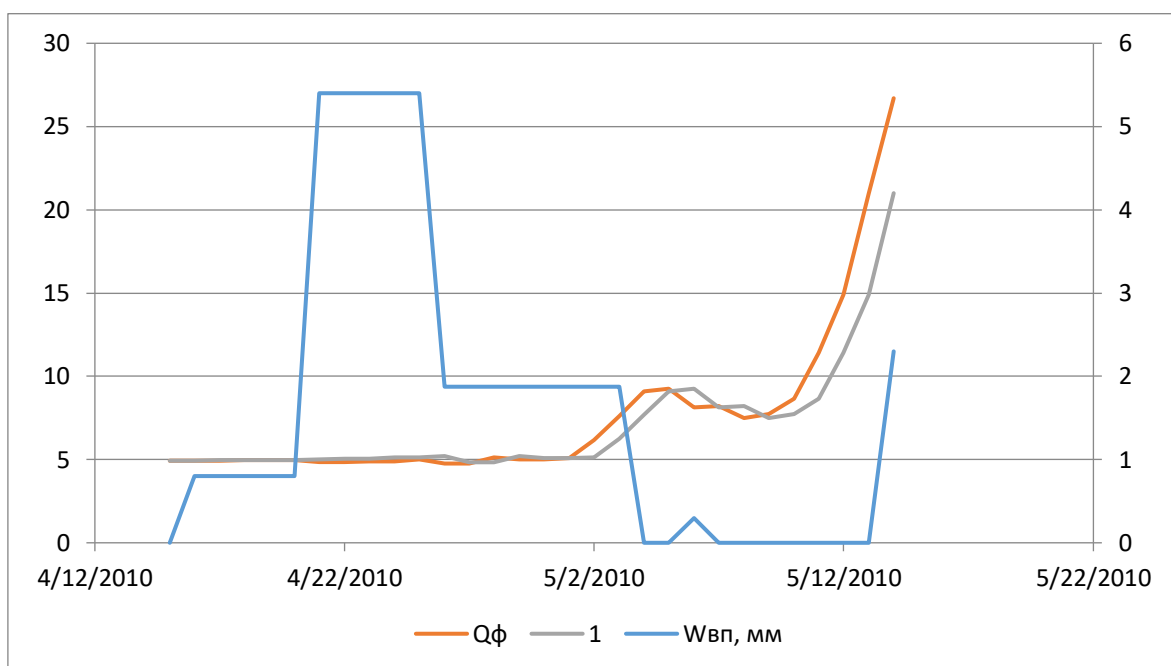
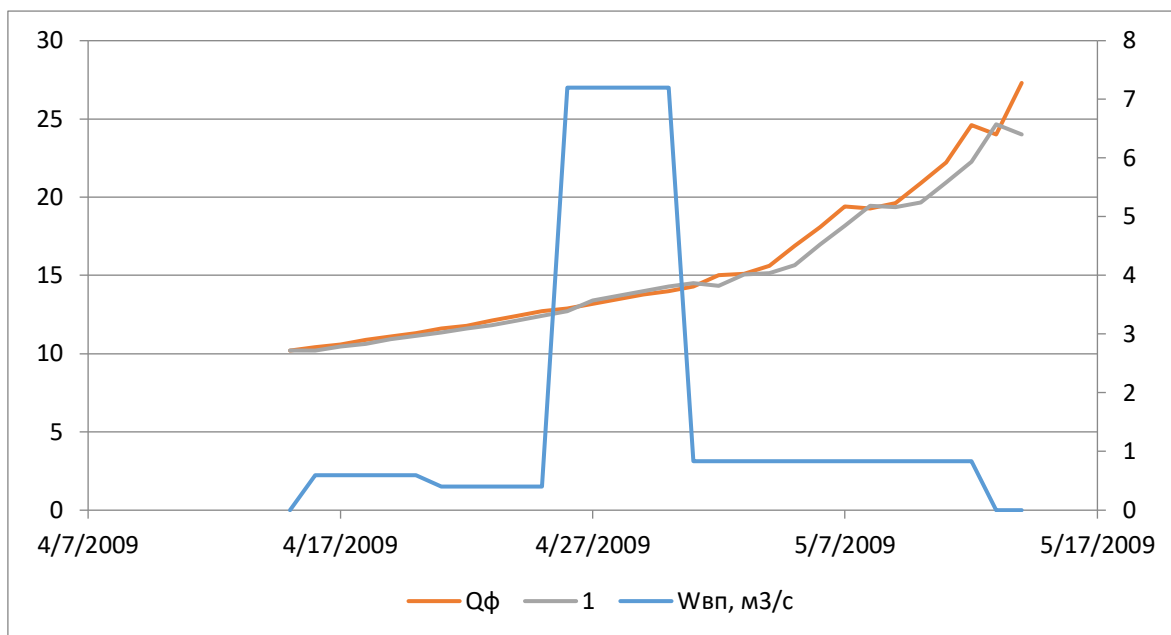


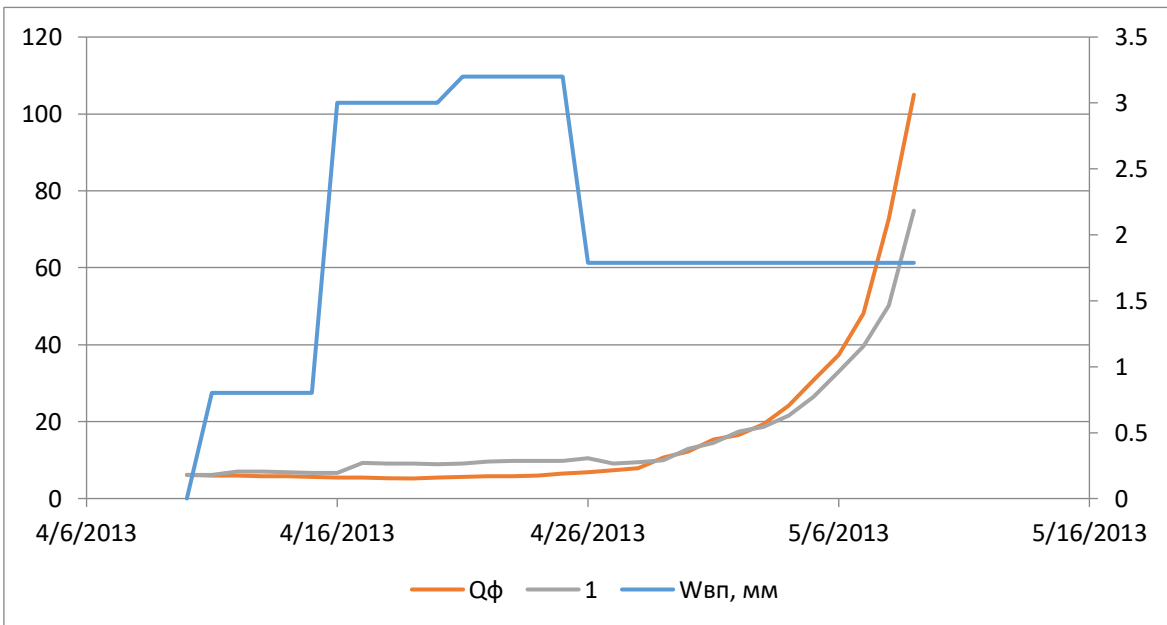
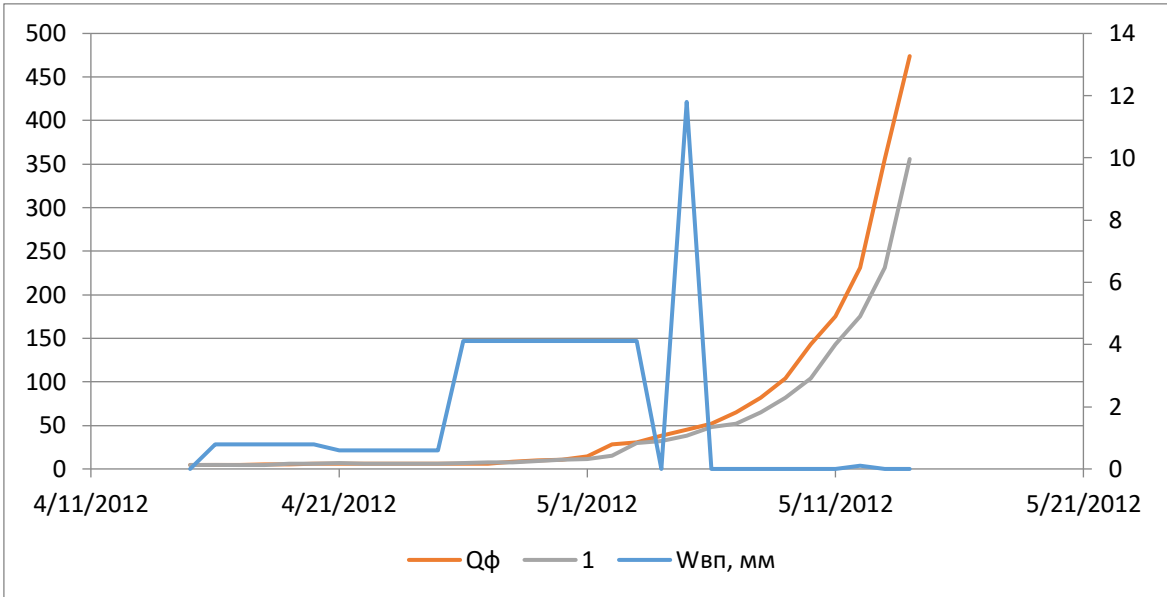
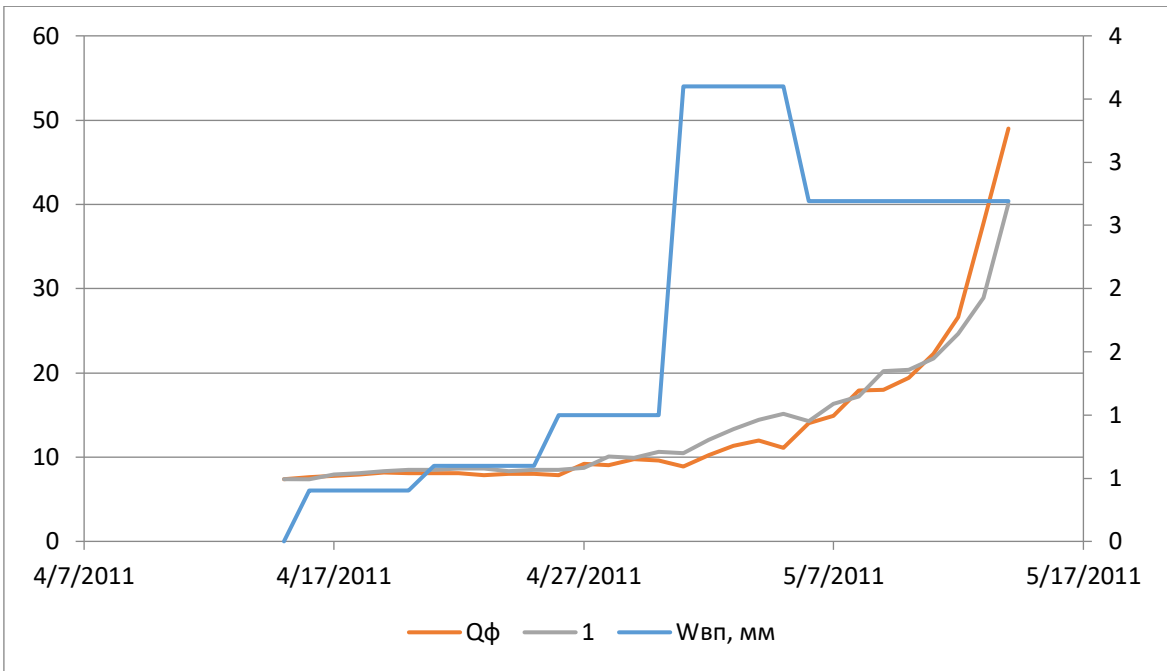


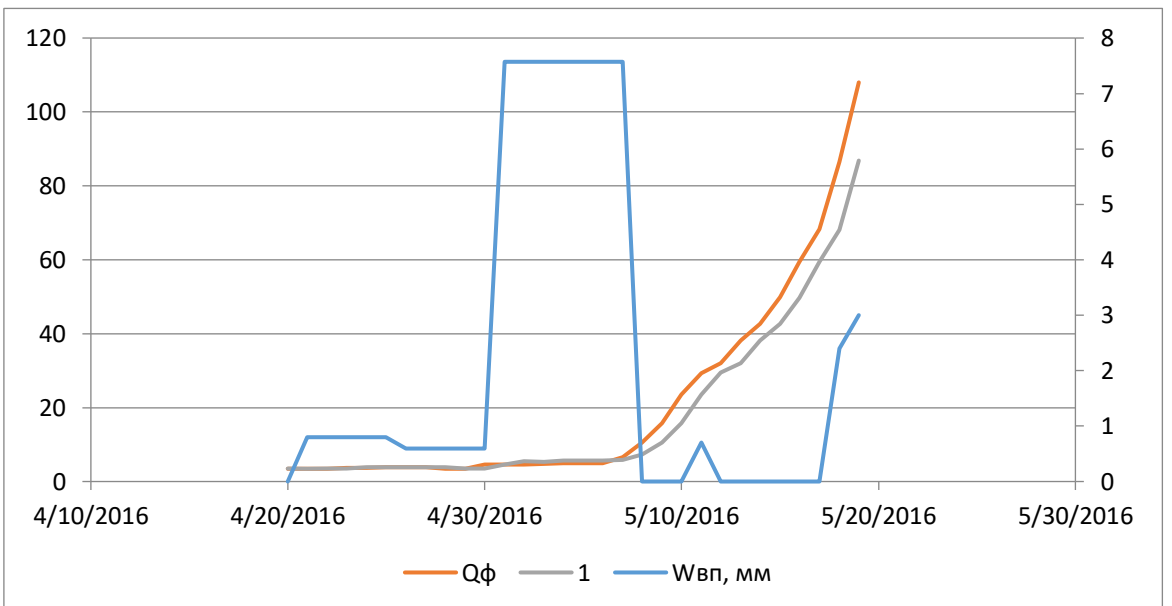
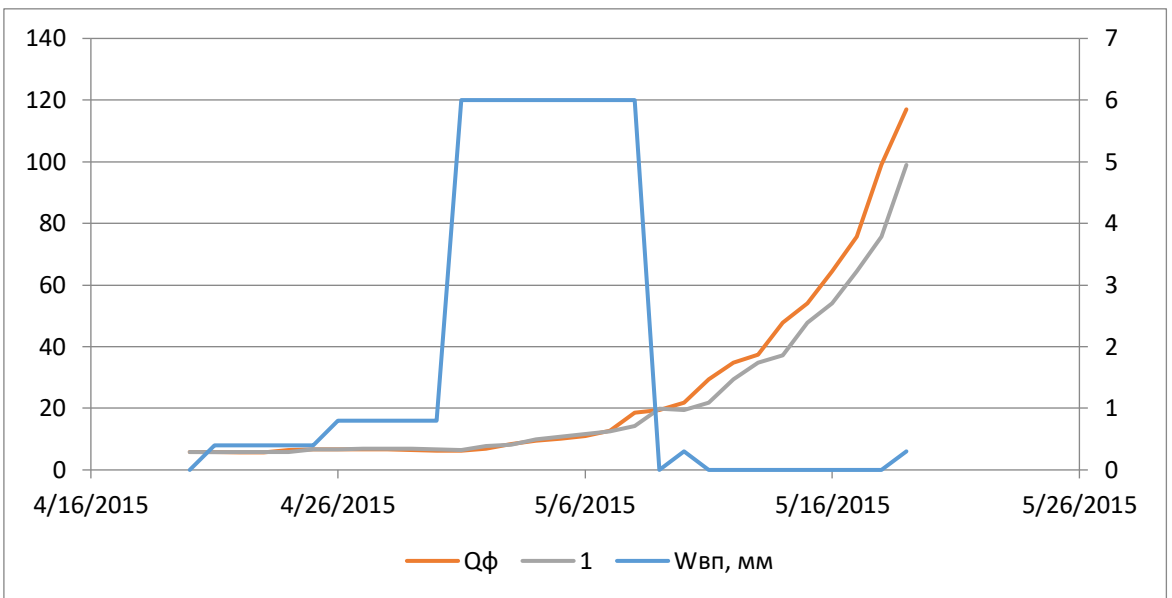
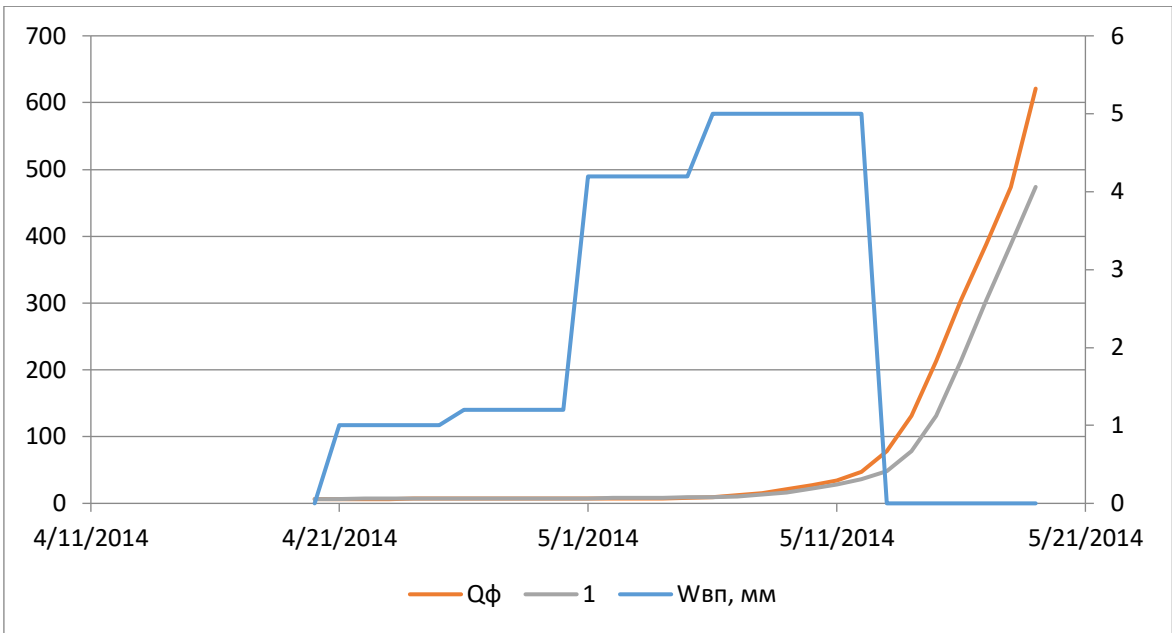


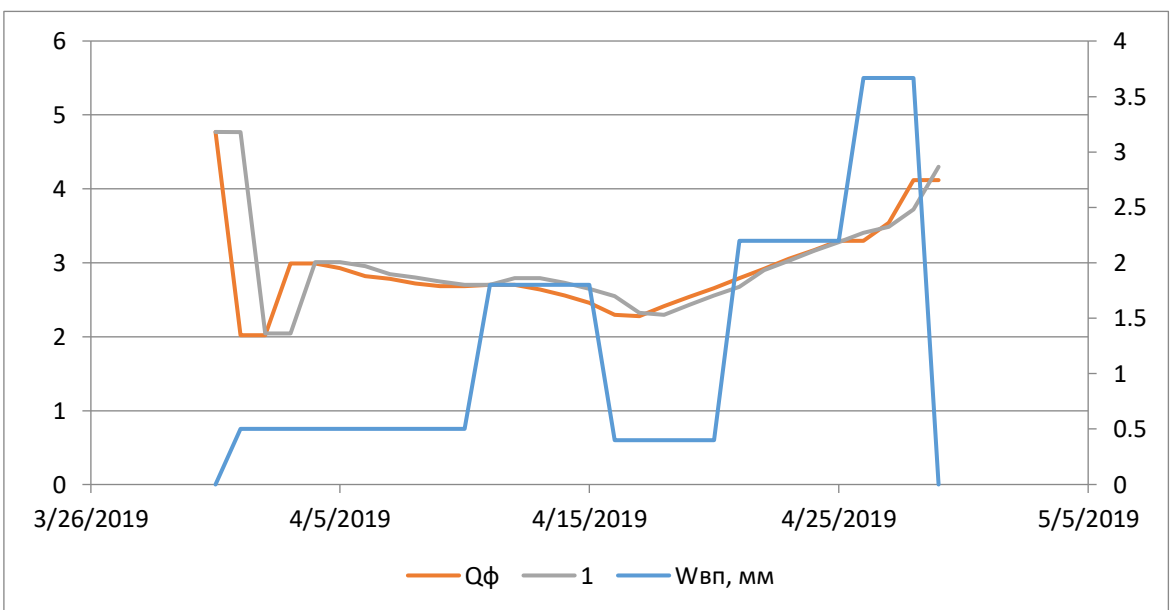
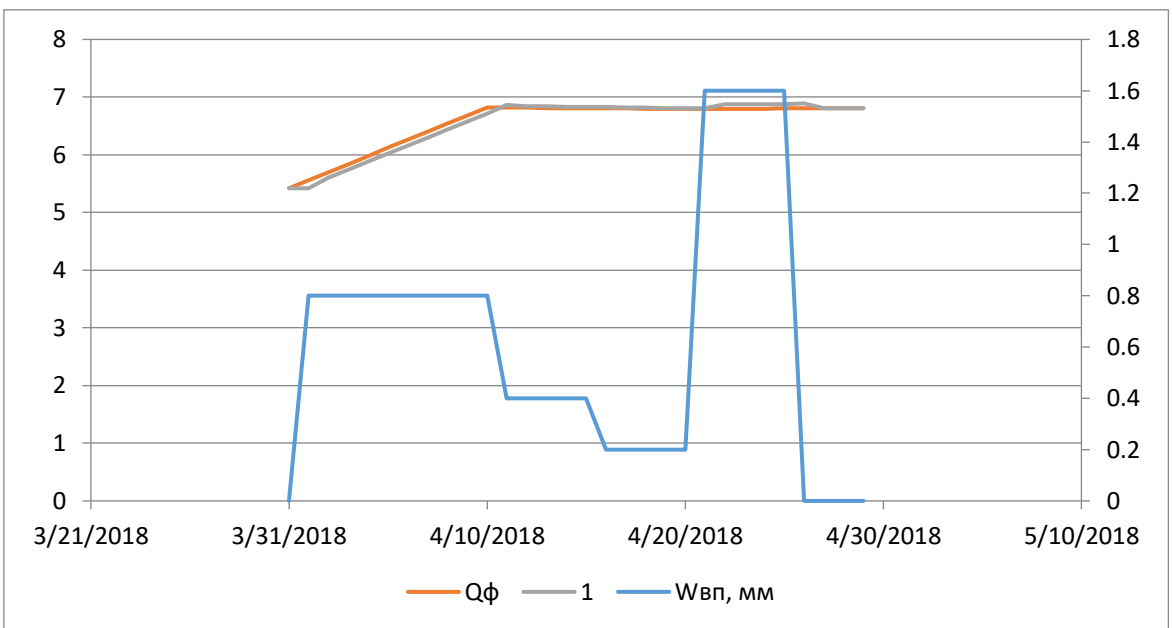
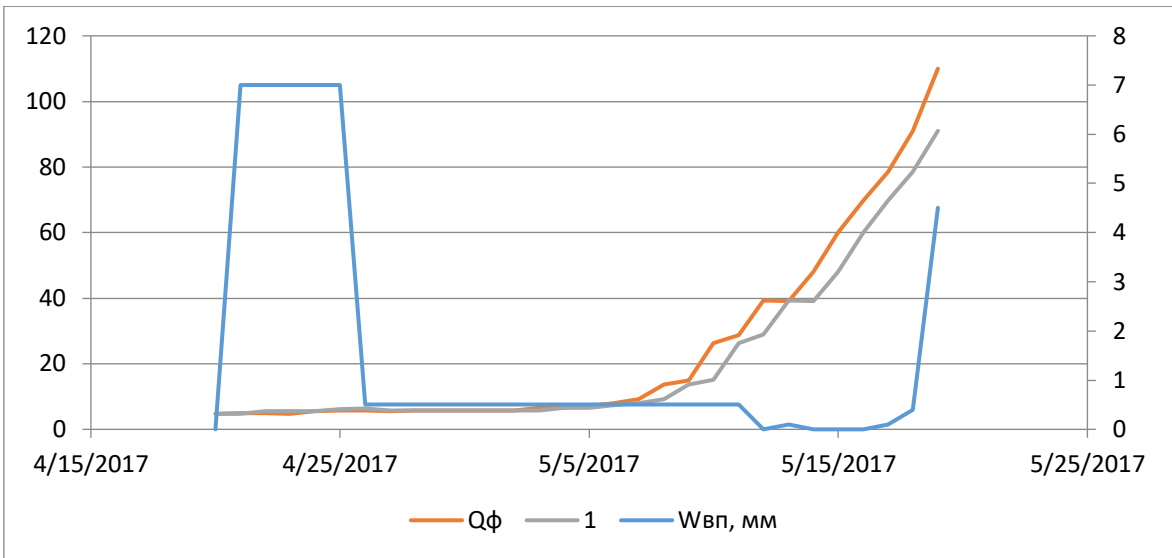


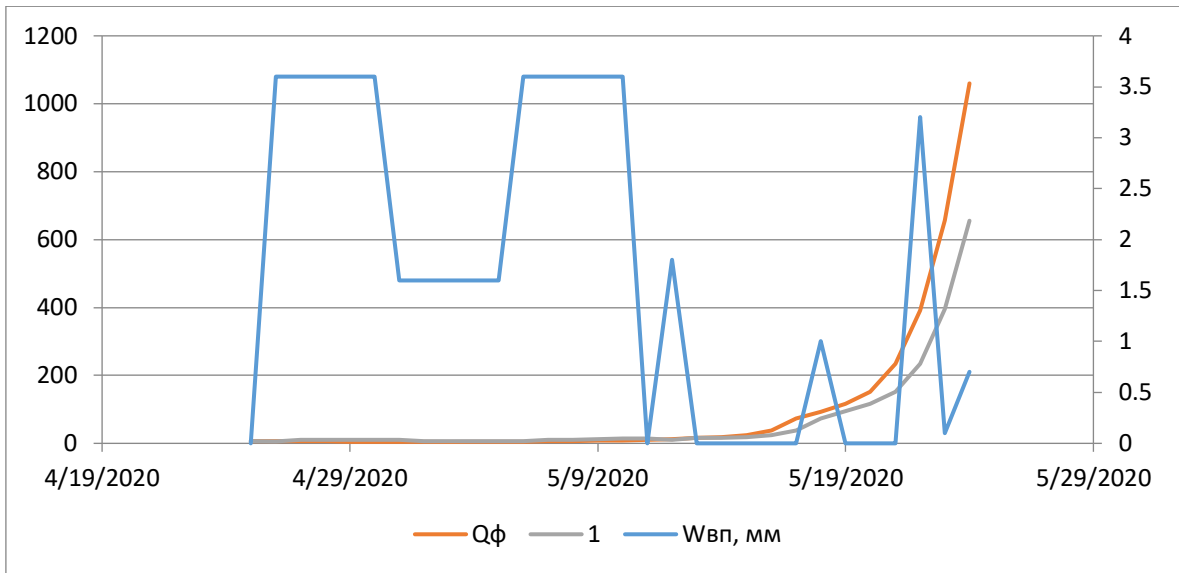
Приложение В - Хронологические графики сравнения расчетных и фактических значений расходов воды с корректировкой за период с 2009 по 2020 год.











Приложение Г – Фрагменты примеров решения уравнения ФПК.

№	20 0	P, %						
		300	400	500	600	700	800	900
0	0	14	7	14	29	14	7	0
1	0	142	-91	-26	352	-93	-12	-226
2	0	1797	-1529	-2789	7945	-5553	3630	-8661
3	0	31233	-18879	-105750	268672	-295428	303362	-446255
4	0	500320	191638	-4114050	10260238	-14829089	19246332	-25632486
5	0	5282729	27756196	-167329613	427026401	-744669562	1126175244	-1529564433
6	0	-86508846	1563942817	-7077554566	18960952239	-37954171194	64331467615	-92581870731
7	0	-9744361533	74765793844	-310551824208	885121288675	-1972753550413	3667541509527	-5644398821915
8	0	-536938338166	3424347664874	-14126162607273	43032846887715	-104744946923976	210639165194314	-345947694433374
9	0	-2574128054665 0	1568476726643 05	-66576973280970 4	21663405714966 00	-568321310208602 0	122339479474287 00	-213039021362458 00
10	0	-9043302130126 74	5270568548137 820	-23236610569099 200	80673300354451 100	-226748389564140 000	517978674404980 000	-940834108003665 000

№	P, %											
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
0	0	0	14	7	14	29	14	7	0	7	7	0
0.1	0	0	23	4	23	49	0	-1	-11	21	9	0
0.2	0	0	37	-6	42	84	-58	-4	-30	85	-15	0
0.3	0	0	58	-33	89	142	-240	72	-77	307	-219	0
0.4	0	0	93	-94	205	223	-746	522	-328	1056	-1311	0
0.5	0	0	149	-225	485	284	-2056	2399	-1749	3750	-6300	0
0.6	0	0	239	-494	1149	138	-5266	9103	-8719	14366	-27619	0
0.7	0	0	382	-1031	2691	-850	-12782	30995	-38905	58647	-116940	0
0.8	0	0	611	-2082	6202	-4570	-29589	98319	-158230	245368	-490779	0
0.9	0	1	976	-4110	14059	-16276	-65343	296490	-599169	1018400	-2058192	0
1	0	7.14	7.14	0.00	7.14	42.86	7.14	7.14	14.29	0.00	7.14	0

		P,%		
	480	485	490	495
	0	10	10	10
0	0	-1038071	10	10
0.1	0	216602696287	-108843856542	-115465620475
0.2	0	-56608230093474300	33422104455956000	37863236357127600
0.3	0	15316089153324700000000	-8969455730821750000000	-11172528685644700000000
0.4	0	-4136277700813130000000000000	2313065247125190000000000000	3290876847064360000000000000
0.5	0	11055937831763900000000000000000	-57267435390813900000000000000000	-98356185302078600000000000000000
0.6	0	-29073624626134800000000000000000000000	13245735994073800000000000000000000000	29981575094343300000000000000000000000

