

26
778
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды, выпуск 14

ОБЛАКА, ОСАДКИ И ВОПРОСЫ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

175263

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

ЛЕНИНГРАД
1963

Я. С. РАБИНОВИЧ

РЕШЕНИЕ ЦИКЛА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ
В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

§ 1. Общая математическая постановка

Методом сопряженных операторов решается уравнение

$$u(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1)$$

с линейными краевыми условиями для функции φ и ее производной $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Коэффициенты $k(z)$ и $u(z)$ меняются по степенному

$$\begin{aligned} k(z) &= k_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n, & n &= 1-\varepsilon, \\ u(z) &= u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^m \end{aligned} \quad (2)$$

или экспоненциальному закону

$$\begin{aligned} k(z) &= k_n e^{-\delta(z-n)}, & \delta &\geq 0, \\ u(z) &= u_n e^{\beta(z-n)}, & \beta &\leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Область задания функции (конечная или бесконечная) ограничена кусочно-гладкой кривой. Относительно функции φ и ее производных выдвигаются обычные предпосылки, связанные с использованием формулы Грина. Такой формулировкой охвачен широкий класс вопросов теплопроводности, диффузии, электродинамики.

Уравнению (1) можно сопоставить пару сопряженных операторов:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - u(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4)$$

$$M(v) = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial v}{\partial z} + u(z) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

К тождеству

$$v \mathcal{L}(\varphi) - \varphi M(v) = \frac{\partial}{\partial z} \left[v k \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi k \frac{\partial v}{\partial z} \right] - u \frac{\partial}{\partial x} (\varphi v) = 0$$

$[\varphi$ и v - решения уравнений $\mathcal{L}(\varphi) = 0$, $M(v) = 0$] применяем формулу Грина в системе осей, изображенных на рис.1.

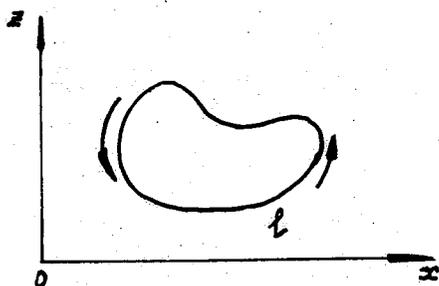


Рис. 1.

Тогда

$$\int_l [v k \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi k \frac{\partial v}{\partial z}] dx - u \varphi v dz = 0. \quad (6)$$

Отправляясь от формулы (6), нетрудно сконструировать ряд практически интересных решений. Для дальнейшего удобно ввести новые переменные:

$$z = a, z^{m-n+z}, \quad a_1 = \frac{u_1}{k_1 z_1^{m-n} (m-n+2)^2}, \quad (7)$$

если коэффициенты $k(z)$ и $u(z)$ заданы в форме (2), и

$$\eta = \eta_n e^{(\delta+\beta)(z-H)}, \quad \eta_n = \frac{u_n}{k_n (\delta+\beta)^2}, \quad (8)$$

если $k(z)$ и $u(z)$ заданы в форме (3).

Операторы (4), (5) и интеграл (6) преобразуются:

$$\mathcal{L}_1(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1+\nu_1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \nu_1 = \frac{n-1}{m-n+2} = -\frac{\varepsilon}{m+\varepsilon+1},$$

$$\mathcal{L}_2(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1+\nu_2}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \nu_2 = -\frac{\delta}{\delta+\beta}, \quad (4)'/$$

$$M_i(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial z_i^2} - \frac{1+\nu_2}{z_i} \frac{\partial v}{\partial z_i} + \frac{1}{z_i} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1+\nu_2}{z_i^2} = 0, \quad (5)$$

$i=1,2; z_1 = z, z_2 = \eta,$

1/ Уравнение типа (4') было изучено Кепинским. Он получил решение, зависящее от произвольной функции $f(w)$:

$$\varphi = \frac{\eta^{-\frac{\nu}{2}}}{x} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\eta+w}{x}\right\} \mathcal{L}_\nu\left(\frac{2i\sqrt{\eta w}}{x}\right) f(w) dw.$$

$$\int_{\xi} \left[v \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} - \varphi \frac{\partial v}{\partial z_i} + \frac{1+v_i}{z_i} v \varphi \right] dx + \frac{\varphi v}{z_i} dz_i =$$

$$= \int_{\xi} z_i^{1+v_i} \left[\bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} - \varphi \frac{\partial \bar{v}}{\partial z_i} \right] dx + \frac{\varphi v}{z_i} dz_i = 0, \quad (6')$$

$$\bar{v} = z_i^{-(1+v_i)} v.$$

Решение уравнения $M_i(v)$ ищем в виде функции источника

$$v_i = \left(\frac{z_i}{x_0 - x} \right)^{1+v_i} u \left[\frac{z_i z_{i0}}{(x_0 - x)^2} \right] e^{-\frac{z_i + z_{i0}}{(x_0 - x)^2}}.$$

Подстановка в (5') дает уравнение

$$x_i \frac{d^2 u}{dx_i^2} + (1+v_i) \frac{du}{dx_i} - u = 0, \quad x_i = \frac{z_i z_{i0}}{(x_0 - x)^2},$$

которое приводится к уравнению Бесселя. Его решение

$$u = \left(\frac{\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right)^{-v_i} \left\{ A I_{\frac{v_i}{2}} \left(\frac{2\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right) + B I_{-\frac{v_i}{2}} \left(\frac{2\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right) \right\}.$$

Откуда

$$v_i = \left(\frac{z_i}{x_0 - x} \right)^{1+v_i} \left(\frac{\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right)^{-v_i} \left\{ A I_{\frac{v_i}{2}} \left(\frac{2\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right) + B I_{-\frac{v_i}{2}} \left(\frac{2\sqrt{z_i z_{i0}}}{x_0 - x} \right) \right\} e^{\frac{z_i + z_{i0}}{x_0 - x}}. \quad (9)$$

Теперь можно получить решения ряда краевых задач уравнения (1), зависящие от значений функции φ и ее производной $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ на границах.

Рассмотрим конкретный вопрос о распространении пассивной примеси от непрерывно действующего точечного источника, расположенного на некоторой высоте h , в двуслойной атмосфере: коэффициент турбулентности $K(z)$ и скорость ветра $u(z)$ для нижнего слоя аппроксимируются формулами (2), для верхнего слоя - формулами (3). Линией раздела слоев служит горизонталь $z = H$.

Задача ставится так: найти решения уравнения (1), непрерывные вместе со своими производными в областях $0 \leq z \leq H$ и $H \leq z \leq \infty (x > 0)$.

Краевые условия:

а) при $x = 0$

$$\varphi(0, z) = \frac{\sigma}{u(h)} \delta(z - h), \quad (10)$$

(σ - мощность источника),

б) при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &\rightarrow 0, \\ K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (11)$$

в) на границе сопряжения областей

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) \Big|_{z=H-0} &= \varphi(x, z) \Big|_{z=H+0}, \\ K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H-0} &= K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H+0}. \end{aligned} \quad (12)$$

В частности, при наличии на границе $z = H$ полностью запирающего слоя будет

$$K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H-0} = K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H+0} = 0, \quad (13)$$

г) на подстилающей поверхности $z = 0$

$$K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{условие полного отражения}) \quad (14)$$

или

$$\varphi(x, z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{условие полного поглощения}). \quad (15)$$

Переход от плоской задачи к пространственной совершается по статистической формуле

$$q(x, y, z) = e^{-\frac{y^2}{2\bar{y}^2(x, z)}} \frac{\varphi(x, z)}{\sqrt{2\pi} \bar{y}^2(x, z)}. \quad (16)$$

$\bar{y}^2(x, z)$ - среднее квадратичное рассеяние примеси в направлении оси y (см. [2]).

Мы не вдаемся здесь в физическую сторону вопроса: она освещена в монографии Д.Л. Лайхтмана [2]. Области $0 \leq z \leq H$, $x \geq 0$ на плоскости (z, x) соответствует полоса $0 \leq \eta \leq \eta_h$, $x \geq 0$; области $z \geq H$, $x \geq 0$ на плоскости (η, x) - полоса

$$\eta \geq \eta_h, \quad x \geq 0 \quad \text{для } \delta + \nu > 0 \quad (\eta \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow \infty) \quad (17)$$

$$\text{и} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_h, \quad x \geq 0 \quad \text{для } \delta + \nu < 0 \quad (\eta \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty). \quad (17')$$

Полезно отметить, что в плоскости (z, x)

$$\varphi_1(0, z_h) = \varphi_1(0, h) = \frac{\alpha_1 h}{K(h)(m-n+2)} \delta z_h$$

(z_h - высота источника),

$$K(z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{u_1}{z_1^m (m-n+2)} \left(\frac{z}{a_1} \right)^{1+\gamma_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

$$z_h = \frac{u_n}{K_n} \left(\frac{H}{m-n+2} \right)^2;$$

(18)

в плоскости (η, x) :

если $h > H$,

$$\varphi_2(0, \eta_h) = \varphi_2(0, h) = \pm \frac{\alpha_2}{K(\eta)(\delta + \nu)} \delta \eta_h \quad \left(\begin{array}{l} +: \delta + \nu > 0 \\ -: \delta + \nu < 0 \end{array} \right), \quad (19)$$

(η_h - высота источника),

$$K(z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{u_H}{\delta + b} \left(\frac{\eta}{\eta_H} \right)^{1+\nu_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \quad (\delta + b \geq 0)$$

($\delta z_h, \delta \eta_h$ - нормированные дельта-функции).

Здесь и в дальнейшем индексом "1" отмечаются величины, относящиеся только к нижнему слою $z \leq H$, индексом "2" - относящиеся только к верхнему слою атмосферы $z \geq H$. Применим формулу (6') к плоскости (x, z) . С этой целью выделим прямоугольник $0 \leq z \leq z_h$ и $0 \leq x \leq x_0$ (см. рис. 2, направление обхода контура указано стрелками).

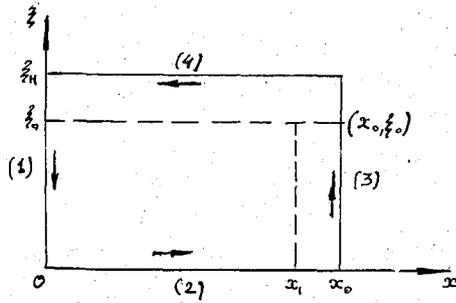


Рис. 2.

На участке (1) $dx = 0$,

$$J_1 = \int_0^{z_h} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right] dx + \frac{\varphi_1 v_1}{z} dz = \int_{(1)} \frac{\varphi_1 v_1}{z} dz = - \int_0^{z_h} \frac{\varphi_1 v_1}{z} dz.$$

На участке (2) $dz = 0$,

$$J_2 = \int_{z=0}^{z_h} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right] dx.$$

На участке (3) - вдоль отрезка $x = x_1$, $dx = 0$,

$$J_3 = \int_{x_1}^{x_0} \int_{z_h}^{z_0} \frac{\varphi_1 v_1}{z} dz.$$

На участке (4) $dz = 0$,

$$J_4 = - \int_{z_h}^{z_0} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right] dx.$$

Это рассуждение можно повторить и для области (x, η) : уравнения $L(\varphi_1) = 0$ и $L(\varphi_2) = 0$, $M(v_1) = 0$ и $M(v_2) = 0$ совершенно идентичны. Необходимо лишь учитывать, что координате $z = \infty$ при $\delta + b > 0$ на

плоскости (x, η) соответствует $\eta = \infty$, а при $\delta + \beta < 0$ - $\eta = 0$; граница $Z = H$ в обоих случаях эквивалентна линии $\eta = \eta_H$. Соответственно условиям на подстилающей поверхности (14) и (15) изучим раздельно два процесса:

1) распространение примеси от непрерывно действующего точечного источника при условии полного отражения примеси от подстилающей поверхности (при $\beta = 0$, $\frac{\partial^{1+\nu_1} z}{\partial z} = 0$);

2) то же при условии полного поглощения примеси на подстилающей поверхности [$\beta = 0$, $\varphi_1(x, 0) = 0$].

В первом случае положим в решении (9) сопряженного уравнения для нижнего слоя $M(\nu) = 0$ постоянную $B=0$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{z^{1+\nu_1}}{(x_0-x)^{1+\nu_1}} \left(\frac{\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right)^{-\nu_1} \int_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0-x}} , \\ \bar{v}_1 &= \frac{1}{(x_0-x)^{1+\nu_1}} \left(\frac{\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right)^{-\nu_1} \int_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0-x}} \end{aligned} \quad (20)$$

Во втором случае полагаем там же $A=0$, тогда

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{z}{x_0-x} \right)^{1+\nu_1} \left(\frac{\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right)^{-\nu_1} \int_{-\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0-x}} , \\ \bar{v}_1 &= \left(\frac{1}{x_0-x} \right)^{1+\nu_1} \left(\frac{\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right)^{-\nu_1} \int_{-\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{z_0 z}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0-x}} \end{aligned} \quad (21)$$

Для верхнего слоя $Z \geq H$ в обоих случаях принимаем

$$\begin{aligned} v_2 &= \left(\frac{\eta}{x_0-x} \right)^{1+\nu_2} \left(\frac{\sqrt{\eta_0 \eta}}{x_0-x} \right)^{-\nu_2} \int_{\nu_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_0 \eta}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{\eta_0+\eta}{x_0-x}} , \\ \bar{v}_2 &= \frac{1}{(x_0-x)^{1+\nu_2}} \left(\frac{\sqrt{\eta_0 \eta}}{x_0-x} \right)^{-\nu_2} \int_{\nu_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_0 \eta}}{x_0-x} \right) e^{-\frac{\eta_0+\eta}{x_0-x}} \end{aligned} \quad (22)$$

§ 2. Распространение примеси от высотного точечного источника при условии полного отражения от подстилающей поверхности

Каждый из выписанных ранее интегралов Y_k подвергнем более детальному анализу с учетом краевых условий (10), (11), (14).

а) Интеграл Y_1 после подстановки условия (10), взятого в форме (18), можно записать в конечном виде

$$Y_1 = - \frac{\alpha_1 h}{\kappa(h)(m-\eta+2)} \left(\frac{z_h}{z_0} \right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{z_h z_0}}{x_0} \right) e^{-\frac{z_h+z_0}{x_0}} .$$

При этом подразумевается, что источник расположен ниже линии раздела слоев, т.е. $h < H$. Если $h > H$, то $\bar{\nu}_1 = 0$ и $\mathcal{J}_1 = 0$.

б) Интеграл $\mathcal{J}_2 = 0$, так как при $\bar{z} \rightarrow 0$, $\bar{z}^{1+\nu_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \rightarrow 0$ [по условию (14), см. также (18)],

$$\bar{\nu} \sim 1, \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \bar{z}} \sim 1, \bar{z}^{1+\nu_1} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \bar{z}} \rightarrow 0 \quad (1+\nu_1 = \frac{m+1}{m+\varepsilon+1} > 0).$$

$$б) \mathcal{Y}_3 = \int_0^{\bar{z}_H} \frac{\varphi_1 \bar{\nu}_1}{\bar{z}} \Big|_{x=x_1} d\bar{z} = \int_0^{\bar{z}_H} \varphi_1(x, \bar{z}) \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0 - x_1} \Big|_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}}}{x_0 - x_1}\right) e^{-\frac{\bar{z}_0 + \bar{z}}{x_0 - x_1}} d\bar{z}.$$

Если $x_1 \rightarrow x_0$, то

$$\begin{aligned} I &\sim e^{-\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}}}{x_0 - x_1}} \frac{\sqrt{x_0 - x_1}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}}}, \\ \mathcal{Y}_3 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{z}_H} \varphi_1(x_1, \bar{z}) \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}_0}\right)^{\frac{2\nu_1+1}{4}} \frac{e^{-\frac{(\sqrt{\bar{z}_0} - \sqrt{\bar{z}})^2}{x_0 - x_1}}}{\sqrt{(x_0 - x_1) \bar{z}}} d\bar{z}. \end{aligned}$$

Произведем замену переменных:

$$u = -\frac{\sqrt{\bar{z}_0} - \sqrt{\bar{z}}}{\sqrt{x_0 - x_1}}, \quad du = \frac{d\bar{z}}{2\sqrt{(x_0 - x_1)\bar{z}}}, \quad \bar{z} = (u\sqrt{x_0 - x_1} + \sqrt{\bar{z}_0})^2,$$

$$\mathcal{Y}_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\bar{z}_0}}{\sqrt{x_0 - x_1}}}^{\frac{\sqrt{\bar{z}_H} - \sqrt{\bar{z}_0}}{\sqrt{x_0 - x_1}}} \varphi_1 \left[x_1, (u\sqrt{x_0 - x_1} + \sqrt{\bar{z}_0})^2 \right] \left[\frac{(u\sqrt{x_0 - x_1} + \sqrt{\bar{z}_0})^2}{\bar{z}_0} \right]^{\frac{2\nu_1+1}{4}} e^{-u^2} du.$$

Переход к пределу по $x_1 \rightarrow x_0$ дает $\mathcal{Y}_3 = \varphi_1(x_0, \bar{z})$.

г) Четвертый интеграл остается в первоначальном виде

$$\mathcal{Y}_4 = -\bar{z}_H^{1+\nu_1} \int_0^{x_0} \left[\bar{\nu}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{\nu}_1}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=\bar{z}_H} dx.$$

Суммарный интеграл по всему периметру прямоугольника

$$\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3 + \mathcal{Y}_4 = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, \bar{z}_0) &= \frac{\bar{\nu}_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \cdot \left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \Big|_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}_0} h}{x_0}\right) e^{-\frac{\bar{z}_0 + \bar{z}_0 h}{x_0}} + \\ &+ \bar{z}_H^{1+\nu_1} \int_0^{x_0} \left[\bar{\nu}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{\nu}_1}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=\bar{z}_H} dx. \quad (23) \end{aligned}$$

Формула (23) определяет концентрацию примеси в нижнем слое. Первый член, зависящий от мощности источника γ_1 ($\delta_1 = 0$, если источник в нижнем слое отсутствует), выражает поле концентраций от точечного источника в однослойной атмосфере ($H = \infty$). После замены \tilde{z}_0, \tilde{z}_h через номинальную высоту z по формуле (7) и V_1 через $-\frac{m+\varepsilon+1}{m+\varepsilon+1}$ он точно соответствует формуле, полученной в 1947 г. Д.Л.Лайхтманом:

$$\varphi_1(x, z) = \frac{\gamma_1 z_1^{1-\varepsilon} (zh)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(m+\varepsilon+1)K_1 x} e^{-\frac{z^{m+\varepsilon+1} + h^{m+\varepsilon+1}}{(m+\varepsilon+1)^2 \frac{K_1}{U_1} z_1^{m+\varepsilon-1} x}} \int_{\frac{\varepsilon}{m+\varepsilon+1}}^{\frac{m+\varepsilon+1}{2}} \left[\frac{2(zh)^{\frac{m+\varepsilon+1}{2}}}{(m+\varepsilon+1)^2 \frac{K_1}{U_1} z^{m+\varepsilon-1} x} \right]$$

Второе интегральное слагаемое формулы (23) учитывает зависимость поля концентраций от потока вещества через верхнюю границу и граничного (при $z = H, \tilde{z} = \tilde{z}_H$) значения самой концентрации $\varphi_2(x, H)$. Причем математически поток вещества через границу приравнивается системе источников, непрерывно распределенных на отрезке $z = H, x \in [0, x_0]$.

Совершенно аналогичным образом для верхнего слоя $z \geq H$ будет:

$$\varphi_2(x_0, \eta) = \frac{\sigma_2}{\kappa(h)(\delta+b)} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\sqrt{\eta_h \eta_0}}{x_0}\right) e^{-\frac{\eta_0 + \eta_h}{x_0}} -$$

$$- \eta_h^{1+\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \varphi_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_h} dx \quad (\delta+b > 0) \quad (24)$$

и

$$\varphi_2(x_0, \eta_0) = \frac{\sigma_2}{\kappa(h)(\delta+b)} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\sqrt{\eta_h \eta_0}}{x_0}\right) e^{-\frac{\eta_0 + \eta_h}{x_0}} +$$

$$+ \eta_h^{1+\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \varphi_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_h} dx \quad (\delta+b < 0). \quad (25)$$

Случай $\delta + b = 0$ ($\delta = b = 0$) получается из (23), (24) предельным переходом:

$$\varphi_2(x_0, z_0) = \frac{\sigma_2}{2\sqrt{\pi} \kappa_h U_h x_0} e^{-\frac{(z_0-h)^2}{4\alpha^2 x_0}} - \int_0^{x_0} \left[\frac{a}{2\sqrt{\pi}(x_0-x)} e^{-\frac{(z_0-H)^2}{(x_0-x)^2 4\alpha^2}} \frac{\partial \varphi_2(x, H)}{\partial z} -$$

$$- \frac{(z-H)}{4\alpha\sqrt{\pi}(x_0-x)^{3/2}} e^{-\frac{(z_0-H)^2}{4\alpha^2(x_0-x)}} \varphi_2(x, H) \right] dx \quad (\delta=b=0), \quad (26)$$

$$a = \sqrt{\frac{K_H}{U_H}}, \quad U_H = U_1 \left(\frac{H}{Z}\right)^m, \quad K_H = K_1 \left(\frac{H}{Z}\right)^{1-\varepsilon}.$$

Условие $\delta = \beta = 0$ означает, что коэффициент K и скорость U в верхнем слое не меняются по высоте и равны соответственно K_H и U_H .

Если граница слоев $Z = H$ к тому же еще моделирует запыряющий слой $\left[K(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \right]$, то формулы (24), (25), (26) значительно упрощаются:

$$Z \leq H: \varphi_1(x_0, z_0) = \frac{\sigma_1 h}{K(h)(m-n+2)} \left(\frac{z_0}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{V_1} \left(\frac{2\sqrt{z_0 z} h}{x_0}\right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0}} - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{x_0} \varphi_1(x, z_0) \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial z} \Big|_{z=z_0} dx, \quad (27)$$

$$Z \geq H: \varphi_2(x_0, \eta_0) = \frac{\sigma_2}{K(h)(\delta+\beta)} \left(\frac{\eta_0}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{V_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_0 \eta} h}{x_0}\right) e^{-\frac{\eta_0+\eta}{x_0}} + \\ + \eta_0^{1+\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} \varphi_2(x, \eta_0) \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} dx \quad (\delta+\beta > 0), \quad (28)$$

$$\varphi_2(x_0, \eta_0) = -\frac{\sigma_2}{K(h)(\delta+\beta)} \left(\frac{\eta_0}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{V_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_0 \eta} h}{x_0}\right) e^{-\frac{\eta_0+\eta}{x_0}} - \\ - \eta_0^{1+\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} \varphi_2(x, \eta_0) \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} dx \quad (\delta+\beta < 0), \quad (29)$$

$$\varphi_2(x_0, z_0) = \frac{\sigma_2}{2\sqrt{\pi} K_H U_H x_0} e^{-\frac{(z_0-h)^2}{4a^2 x_0}} + \\ + \int_0^{x_0} \varphi_2(x, H) \frac{z-H}{4a\sqrt{\pi}(x_0-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(z_0-H)^2}{4a^2(x_0-x)}} dx \quad (30) \\ (\delta = \beta = 0).$$

Все замечания, сделанные ранее к формуле (23), в равной мере относятся и к формулам (24)-(30). Для определения граничных значений $\varphi[x, z_H(\eta_H)]$, $\frac{\partial \varphi[x, z_H(\eta_H)]}{\partial z_H(\eta_H)}$ воспользуемся условиями склейки обоих решений - φ_1 и φ_2 на линии раздела слоев $Z = H$. В переменных (x, z) , (x, η) эти условия выглядят так:

$$\varphi_1(x, \bar{z}_H) = \varphi_2(x, \eta_H),$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{m+\varepsilon+1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_H} &= \frac{1}{\delta+b} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_H}, \quad \delta+b \neq 0, \\ \frac{H}{m+\varepsilon+1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_H} &= \frac{K_H}{U_H} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=H}, \quad \delta=b=0. \end{aligned} \quad (31)$$

К условиям (31) добавляются предельные интегральные уравнения, получающиеся из общих решений (23) - (26):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, \bar{z}_H) &= 2 \int_0^{x_0} \left\{ \frac{\bar{z}_H}{x_0-x} \int_{V_1} \left(\frac{2\bar{z}_H}{x_0-x} \right) e^{-\frac{2\bar{z}_H}{x_0-x}} \frac{\partial \varphi_1(x, \bar{z}_H)}{\partial \bar{z}} - \right. \\ &- \varphi_1(x, \bar{z}_H) \frac{\bar{z}_H}{(x_0-x)^2} e^{-\frac{2\bar{z}_H}{x_0-x}} \left[\int_{V_1} \left(\frac{2\bar{z}_H}{x_0-x} \right) - \int_{V_1} \left(\frac{2\bar{z}_H}{x_0-x} \right) \right] \Big\} dx + \\ &+ \frac{2\sigma_1 h}{K(h)(m+\varepsilon+1)} \left(\frac{\bar{z}_H}{\bar{z}_H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{V_1} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_H \bar{z}_H}}{x_0} \right) e^{-\frac{\bar{z}_H + \bar{z}_H}{x_0}} \Big\} dx, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_0, \eta_H) &= \frac{2\sigma_2}{K(h)|\delta+b|} \left(\frac{\eta_H}{\eta_H} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{V_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_H \eta_H}}{x_0} \right) e^{-\frac{\eta_H + \eta_H}{x_0}} - \\ &- \text{sign}(\delta+b) \cdot 2 \int_0^{x_0} \left\{ \frac{\eta_H}{x_0-x} e^{-\frac{2\eta_H}{x_0-x}} \int_{V_2} \left(\frac{2\eta_H}{x_0-x} \right) \frac{\partial \varphi_2(x, \eta_H)}{\partial \eta} - \right. \\ &- \varphi_2(x, \eta_H) \frac{\eta_H}{(x_0-x)^2} e^{-\frac{2\eta_H}{x_0-x}} \left[\int_{V_2} \left(\frac{2\eta_H}{x_0-x} \right) - \int_{V_2} \left(\frac{2\eta_H}{x_0-x} \right) \right] \Big\} dx, \quad \delta+b \neq 0, \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x_0, H) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{JK_H U_H x_0}} e^{-\frac{(H-H)^2}{4a^2 x_0}} - \int_0^{x_0} \frac{a}{\sqrt{J(x_0-x)}} \frac{\partial \varphi_2(x, H)}{\partial z} dx, \quad (33) \quad \delta=b=0.$$

Предельные уравнения к формулам (27)-(30) (задача с запирающим слоем) специально выписывать нет необходимости: они получаются из (32), (33) как частный случай, если отбросить члены, содержащие производные $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}_H}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta_H}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_H$. Уравнения (32), (33) по существу своему линейные интегральные уравнения. Методы их прак-

тического решения общеизвестны. В качестве одного из методов можно применить к формулам (23)-(26) операцию свертывания по x_0 :

$$\begin{aligned} \Phi[\varphi_1(x_0, \xi_0)] &= \frac{2\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{\xi_h}{\xi_0}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \begin{cases} K_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_h}) I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_0}) & \xi_h \geq \xi_0 \\ K_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_0}) I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_h}) & \xi_h \leq \xi_0 \end{cases} \\ &+ 2\xi_0 \left(\frac{\xi_h}{\xi_0}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} K_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_h}) I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_0}) \Phi\left[\frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \xi}\right] + \\ &+ 2\left(\frac{\xi_h}{\xi_0}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \sqrt{s\xi_h} K_{\nu_1+1}(2\sqrt{s\xi_h}) I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_0}) \Phi[\varphi_{1h}], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Phi[\varphi_2(x_0, \eta_0)] &= \frac{2\sigma_2}{\kappa(h)|\delta+\beta|} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \begin{cases} K_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) & \eta_h \geq \eta_0 \\ K_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) & \eta_h \leq \eta_0 \end{cases} \\ &- 2\eta_h \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} K_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) \Phi\left[\frac{\partial \varphi_{2h}}{\partial \eta}\right] + \\ &+ 2\sqrt{s\eta_h} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} K_{\nu_2+1}(2\sqrt{s\eta_0}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) \Phi[\varphi_{2h}] \quad (\delta+\beta \geq 0), \\ \Phi[\varphi_2(x_0, \eta_0)] &= -\frac{2\sigma_2}{\kappa(h)(\delta+\beta)} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \begin{cases} K_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) & \eta_h \geq \eta_0 \\ K_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_h}) & \eta_h \leq 0 \end{cases} \\ &+ 2\eta_h \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} K_{\nu_2+1}(2\sqrt{s\eta_h}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) \Phi\left[\frac{\partial \varphi_{2h}}{\partial \eta}\right] + \\ &+ 2\sqrt{s\eta_h} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} K_{\nu_2+1}(2\sqrt{s\eta_h}) I_{\nu_2}(2\sqrt{s\eta_0}) \Phi[\varphi_{2h}] \quad (\delta+\beta \leq 0). \end{aligned} \quad (35)$$

Символом Φ обозначено преобразование Лапласа

$$\Phi[f(x_0)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

В формулах (34), (35) переходим к пределу по $\xi_0 \rightarrow \xi_h, \eta_0 \rightarrow \eta_h$. Предельный переход в данном случае будет условным, но в законности его нетрудно убедиться, если произвести непосредственно свертывание предельных уравнений (32)(33). Результат в обоих случаях будет одинаковым:

нижний слой:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{s\xi_h} I_{\nu_1+1}(2\sqrt{s\xi_h}) \Phi[\varphi_{1h}] &= \\ = \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{\xi_h}{\xi_h}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_h}) &+ \xi_h I_{\nu_1}(2\sqrt{s\xi_h}) \Phi\left[\frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \xi}\right], \end{aligned} \quad (36)$$

Верхний слой :

$$\left. \begin{aligned}
 2) \sqrt{s\eta_n} K_{\nu_2} (2\sqrt{s\eta_n}) \Phi[\varphi_{2n}] &= \frac{\sigma_2}{\kappa(h)(\delta+\beta)} \left(\frac{\eta_n}{\eta_n}\right)^{\nu_2} K_{\nu_2} (2\sqrt{s\eta_n}) - \eta_n K_{\nu_2} (2\sqrt{s\eta_n}) \Phi\left[\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial z}\right], (\delta+\beta > 0) \\
 3) \sqrt{s\eta_n} \int_{\nu_2+1} (2\sqrt{s\eta_n}) \Phi[\varphi_{2n}] &= \frac{\sigma_2}{\kappa(h)(\delta+\beta)} \left(\frac{\eta_n}{\eta_n}\right)^{\nu_2} \int_{\nu_2} (2\sqrt{s\eta_n}) + \eta_n \int_{\nu_2} (2\sqrt{s\eta_n}) \Phi\left[\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial z}\right], (\delta+\beta < 0) \\
 4) \Phi[\varphi_{2n}] &= \frac{\sigma_2}{\sqrt{u_n \kappa_n s}} e^{-\sqrt{\frac{u_n}{\kappa_n}} s(h-H)} - \sqrt{\frac{\kappa_n}{u_n s}} \Phi\left[\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial z}\right], (\delta=\beta=0)
 \end{aligned} \right\} (37)$$

При отсутствии в том или ином слое источника $\sigma_L = 0$. Символами φ_n , $\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}$, $\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial z}$, $\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial z}$ обозначены в (36), (37) значения концентрации и ее производных на линии раздела слоев $z = -H$ ($\bar{z} = \bar{z}_n$, $\eta = \eta_n$). Они связаны условиями (31). Предельные соотношения (36), (37) - суть линейные алгебраические уравнения относительно $\Phi[\varphi_n]$, $\Phi\left[\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]$. Если их решения внести в формулы (34), (35), то получаются общие выражения концентрации в той форме, в которой пришел Г.Х.Цейтин, т.е. в разрешенном, явном виде для интегрального изображения искомой функции.

Необходимо отметить, что построение оригинала функции φ_i по ее образу $\Phi[\varphi_i]$ технически не просто. Поэтому при выборе конкретной методики расчета концентраций целесообразно использовать другие возможности, открываемые интегральной формой полученных выше общих решений (27)-(30), (32), (33). На них удачно накладываются метод итераций, численные методы. Хорошо совмещаются они и с типовой программой электронных цифровых машин любой марки, поскольку интегральные уравнения (32), (33) можно заменить эквивалентной системой линейных алгебраических уравнений.

§ 3. Поле концентраций от точечного источника при полном поглощении примеси на деятельной поверхности

Взяв в качестве решения сопряженного уравнения $M(\nu_1)=0$ функцию

$$\nu_1 = \left(\frac{\bar{z}}{x_0 - x}\right)^{1+\nu_1} \left(\frac{\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}}}{x_0 - x}\right)^{-\nu_1} \int_{-\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}}}{x_0 - x}\right) e^{-\frac{\bar{z}_0 + \bar{z}}{x_0 - x}}$$

[см. выше (21)], будем оперировать формулой (6) с учетом крайних условий (10), (15) на прямоугольнике

$$0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_n, \quad 0 \leq x \leq x_1 < x_0.$$

(см. рис. 2).

Так же как в предыдущей задаче, в итоге выйдут четыре линейных (относительно φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$) интеграла:

$$J_1 = \int_{z_0}^0 \frac{\varphi_1 v_1}{z} dz = -\frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^{\frac{V_1}{2}} \frac{1}{x_0} \left[\frac{2\sqrt{z_0 z_0}}{x_0} \right] e^{-\frac{z_0+z_0 h}{x_0}},$$

$$J_2 = \int_{z_0}^0 \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1+V_1} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right] dx = \frac{1}{\Gamma(-V_1)} \int_{z_0}^0 \left(\frac{z_0}{z}\right)^{-V_1} \frac{z_0^{-V_1}}{(x_0-x)^{-V_1}} e^{-\frac{z_0}{x_0-x}} dx -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(-V_1)} \int_0^{x_0} \varphi_1(0, x) \frac{z_0^{-V_1}}{(x_0-x)^{-V_1}} e^{-\frac{z_0}{x_0-x}} dx,$$

$$J_3 = \int_{x_1 \rightarrow x_0}^{z_0} \frac{\varphi(z_0, x_1) v(z_0, z_0, x_0, x_1)}{z} dz = \varphi_1(x_0, z_0) \quad (\text{см. § 2}),$$

$$J_4 = -\frac{z_0^{1+V_1}}{z_0} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right]_{z=z_0} dx.$$

Из условия $J_0 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ получаем выражение для концентрации примеси в нижнем слое ($z \leq H$)

$$\varphi_1(x_0, z_0) = \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^{\frac{V_1}{2}} \frac{1}{x_0} \left[\frac{2\sqrt{z_0 z_0}}{x_0} \right] e^{-\frac{z_0+z_0 h}{x_0}} -$$

$$- J_2 + \frac{z_0^{1+V_1}}{z_0} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right]_{z=z_0} dx. \quad (38)$$

Первое слагаемое является непосредственной функцией источника. Если источник расположен вне слоя ($h > H$), то $\sigma_1 = 0$.

О физическом смысле интеграла $\int_{z_0}^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right]_{z=z_0} dx$ уже говорилось. Остается разобраться со вторым интегральным членом J_2 , фиксирующим в формуле (38) действие нижней границы $z=0$ ($z=0$). Изучим три случая: $V_1 < 0$, $V_1 > 0$, $V_1 = 0$. Напомним, что $V_1 = -\frac{2}{m+2+1}$.

1. $V_1 < 0$. При малых z_0 формулу (38) можно переписать:

$$\varphi_1(x_0, z_0) = \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \frac{z_0^{-V_1}}{x_0^{2+V_1}} e^{-\frac{z_0+z_0 h}{x_0}} \left[\frac{1}{\Gamma(-V_1)} + 0(z_0) \right] - \frac{1}{\Gamma(-V_1)} \int_{z_0}^0 \left(\frac{z_0}{z}\right)^{-V_1} \frac{z_0^{-V_1}}{(x_0-x)^{-V_1}} e^{-\frac{z_0}{x_0-x}} dx +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-V_1)} \int_0^{x_0} \varphi_1(x, 0) \frac{z_0^{-V_1}}{(x_0-x)^{-V_1}} e^{-\frac{z_0}{x_0-x}} dx +$$

$$+ \frac{\partial_0^{-\nu_1}}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \frac{\partial_0^{\nu_1}}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} e^{-\frac{\partial_0 + \partial_0^{\nu_1}}{x_0-x}} \frac{\partial \varphi_{1H}}{\partial \partial_0} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} + 0(\partial_0) \right] dx -$$

$$- \frac{\partial_0^{-\nu_1}}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \frac{\partial_0^{\nu_1}}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} e^{-\frac{\partial_0 + \partial_0^{\nu_1}}{x_0-x}} \varphi_{1H} \left[\left(\frac{\partial_0^{\nu_1}}{x_0-x} \right)^{-1} + \frac{1}{\nu_1} + 0(\partial_0) \right] dx. \quad (39)$$

Устремим ∂_0 к нулю:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \left(\partial_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \partial_0} \right)_{\partial_0=0} \frac{\partial_0^{-\nu_1}}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} e^{-\frac{\partial_0}{x_0-x}} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{\infty} \left[\partial_0 \frac{\partial}{\partial \partial_0} \varphi_1(x_0 - \frac{\partial_0}{u}, \partial_0) \right]_{\partial_0=0} u^{-\nu_1-1} e^{-u} du \xrightarrow{\partial_0 \rightarrow 0} - \frac{1}{\nu_1} \left[\partial_0 \frac{\partial \varphi_1(x_0, \partial_0)}{\partial \partial_0} \right]_{\partial_0=0},$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \varphi_{1H}(0, x) \frac{\partial_0^{-\nu_1}}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} e^{-\frac{\partial_0}{x_0-x}} dx \xrightarrow{\partial_0 \rightarrow 0} \varphi_1(x, 0) = 0,$$

$$u = \frac{\partial_0}{x_0-x}$$

Остальные слагаемые в (39) тоже стремятся к нулю. Следовательно, $\left[\partial_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \partial_0} \right]_{\partial_0=0} = 0$. В этом случае ($\nu_1 < 0$) $\gamma_2 = 0$ и формула концентрации (38) отличается от аналогичного результата для нижнего слоя при полном отражении примеси у подстилающей поверхности лишь знаком индексов при бесселевых функциях [см. выше (23), (20)]. Непосредственным дифференцированием формулы (38) легко убедиться, что поток концентрации через нижнюю границу при этом ($\varepsilon > 0$, инверсионные условия) будет не равен нулю.

Таким образом, избыток примеси, скапливающейся ниже источника у земной поверхности вследствие недостаточно интенсивной диффузии в вертикальном направлении [$K(z)$ имеет порядок $z^{-1-\varepsilon}$], должен для обеспечения условия $\varphi_1(x, 0) = 0$ протекать через подстилающую поверхность.

2. $\nu_1 > 0$ ($\varepsilon < 0$, конвективные условия в атмосфере).

В (39) переходим к пределу по $\partial_0 \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial_0^{\nu_1}}{\Gamma(1-\nu_1)} \varphi_1(x_0, \partial_0)_{\partial_0 \rightarrow 0} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} \left\{ \frac{x_0 h}{K(h)(m-n+2)} \frac{e^{-\frac{\partial_0 h}{x_0}}}{x_0^{1-\nu_1}} - \right.$$

$$- \int_0^{x_0} \left(\partial_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \partial_0} \right)_{\partial_0=0} \frac{dx}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} - \nu_1 \int_0^{x_0} \varphi_1(x, 0) \frac{dx}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} +$$

$$+ \int_0^{x_0} \frac{\partial_0^{\nu_1}}{(x_0-x)^{1-\nu_1}} e^{-\frac{\partial_0}{x_0-x}} \frac{\partial \varphi_{1H}}{\partial \partial_0} dx +$$

$$+ \int_0^{x_0} \frac{1}{(x_0-x)^{1-\nu}} e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0-x}} \left[\nu_1 + \frac{\bar{z}_h}{x_0-x} \right] \varphi_{1h} dx \Big\} = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=0} \frac{dx}{(x_0-x)^{1-\nu}} = \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \frac{e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0}}}{x_0^{1-\nu}} + \\ & + \int_0^{x_0} \frac{\bar{z}_h}{(x_0-x)^{1-\nu}} e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0-x}} \frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \bar{z}} dx + \\ & + \int_0^{x_0} \frac{1}{(x_0-x)^{1-\nu}} e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0-x}} \left[\nu_1 + \frac{\bar{z}_h}{x_0-x} \right] \varphi_{1h} dx \end{aligned} \quad (40)$$

и

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=0} = \frac{\sigma_1 h \bar{z}_h^\nu}{\Gamma(\nu) \kappa(h)(m-n+2)} \frac{e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0}}}{x_0^{1+\nu}} + \\ & + \frac{\bar{z}_h^{1+\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{x_0} \left\{ \frac{e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0-x}}}{(x_0-x)^{2+\nu}} \frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \bar{z}} + \frac{e^{-\frac{\bar{z}_h}{x_0-x}}}{(x_0-x)^{2+\nu}} \varphi_{1h} \right\} dx. \end{aligned} \quad (41)$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=0}$ однозначно определяется по функции источника и значениям концентрации φ_{1h} и ее производной $\frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \bar{z}}$ на верхней границе $\bar{z} = \bar{z}_h$ ($z = H$).

Таким образом, при $\nu_1 > 0$

$$Y_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=0} \frac{\bar{z}_0^{-\nu}}{(x_0-x)^{1-\nu}} e^{-\frac{\bar{z}_0}{x_0-x}} dx \neq 0.$$

Полная формула концентрации

$$\varphi_1(x_0, \bar{z}_0) = \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_h} \right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1}{x_0} \Gamma_{-\nu} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_h \bar{z}_0}}{x_0} \right) e^{-\frac{\bar{z}_h + \bar{z}_0}{x_0}} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \frac{\xi^{-\nu}}{(x_0-x)^{1-\nu}} e^{-\frac{\xi_0}{x_0-x}} dx + \\
 & + \xi_0^{1+\nu} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0} dx. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в этом случае поток примеси через подстилающую поверхность будет тоже равен нулю. Действительно, из формулы (41) явствует, что $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$ имеет порядок конечный, следовательно порядок потока, равный $\left(\xi^{1+\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$ будет нулевым. В справедливости такого заключения легко убедиться и непосредственным дифференцированием формулы (42) с привлечением соотношения (41). Получается, что при неустойчивой стратификации атмосферы ($\nu_1 > 0, \xi < 0$) наряду с решением (23), задающим поле концентраций, в котором φ_1 и ее производная $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ на границе $Z = 0$ остаются величинами конечными, существует второе решение с неограниченной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \sim \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \sim \frac{1}{Z} \right)$ и нулевым значением концентрации φ на нижней границе. В обоих решениях поток примеси через границу $Z = 0$ отсутствует. С математической стороны причина такой двойственности кроется в том, что коэффициент диффузии, вводимый законом $\kappa(Z) = A Z^{-1-\xi}$, при $\xi < 0$ и $Z \rightarrow 0$ уходит в нуль сильнее ($\sim \xi^{1+\nu_1}$), чем $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$ - в бесконечность ($\sim \frac{1}{Z}$). И самый факт отсутствия в решении (42) потока примеси через нижнюю границу есть прямое следствие того, что коэффициент диффузии принимался равным нулю при $Z = 0$.

Физическое толкование второго решения следующее. При конвекции ($\xi < 0$) коэффициент диффузии интенсивно убывает в слое $\xi < 1$ $\left\{ Z < \left[\frac{K_1 Z^{m+\xi-1} (m+\xi+1)^2}{u_1} \right]^{\frac{1}{m+\xi+1}} \right\}$ и, наоборот, интенсивно растет для $\xi > 1$, поэтому выделяемая источником примесь рассеивается во внешнее пространство, не достигая нижней границы. Слой малых Z ($\xi < 1$) будет зоной высоких градиентов концентрации (рис. 3).

Надо думать, что подобное распределение концентрации может реально сложиться и сколько-нибудь длительно существовать лишь в особых случаях, например, развитой, сильной конвекции в сочетании с очень малыми (или полностью отсутствующими) градиентами горизонтального ветра вблизи земной поверхности. В обычных условиях турбулентности, в зоне предполагаемых больших градиентов $\frac{\partial \varphi}{\partial Z}$ концентрации должны выравниваться - и тогда установится распределение примеси, соответствующее первому решению (23) (с конечной величиной $\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=0}$ и отличной от нуля концентрацией $\varphi \Big|_{Z=0}$). Учитывая, однако, изменчивый, в значительной мере вероятностный характер процессов в турбулентной атмосфере и то,

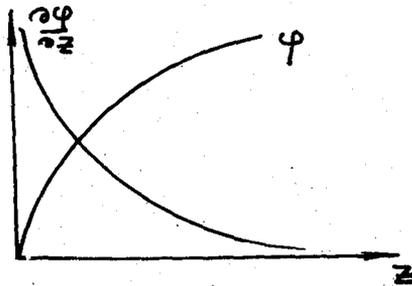


Рис.3.

что при их изучении приходится оперировать в большинстве случаев статистическими, средними величинами, важна бывает не устойчивость того или иного явления, а возможная его повторяемость. Поэтому не следует отвергать начисто второе решение, как физически неустойчивое.

Более тонкое физическое различие между обоими решениями, относящимися к условию $\xi < 0$, сводится к тому, что для первого (23) подстилающая поверхность является деятельной, активно отражающей примесь границей, и поток на ней будет нулем высокого порядка ($\sim \bar{z}^{1+\nu}$), во втором решении (42) поток будет нулем в силу конвективной стратификации атмосферы (и формы задания коэффициента диффузии), но нулем слабым ($\sim \bar{z}^{\nu}$), а сама подстилающая поверхность непосредственным образом не взаимодействует с диффундирующей примесью.

Чтобы при $\xi < 0$ исследовать поле концентраций от источника над подстилающей поверхностью, активно поглощающей всю выносимую к ней примесь [$\varphi_1(x, 0) = 0, K(z \frac{\partial \varphi}{\partial z} |_{z=0} \neq 0$], надо коэффициент диффузии задать в форме

$$K(z) = Az^{1-\xi} + K_0, \quad K_0 \neq 0.$$

3. $V_1 = 0$. (равновесная стратификация атмосферы). В формуле (38) полагаем $V_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, \bar{z}_0) &= \frac{\sigma_1 h}{K(h)(m-n+2)} \frac{1}{x_0} \int_0^{\bar{z}_0 + \frac{z_0}{x_0}} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}_h}}{x_0} \right) e^{-\frac{\bar{z}_0 + \frac{z_0}{x_0}}{x_0}} - \\ &- \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{z}=0} \frac{e^{-\frac{\bar{z}_0}{x_0 - x}}}{x_0 - x} dx + \bar{z}_h \int_0^{x_0} \left\{ \frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial \bar{z}} \frac{e^{-\frac{\bar{z}_0 + \frac{z_0}{x_0}}{x_0 - x}}}{x_0 - x} \int_0^{\bar{z}_0 + \frac{z_0}{x_0}} \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}_h}}{x_0 - x} \right) - \right. \\ &\left. - \varphi_{1h} \frac{e^{-\frac{\bar{z}_0 + \frac{z_0}{x_0}}{x_0 - x}}}{(x_0 - x)^2} \left[I_1 \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}_h}}{x_0 - x} \right) \sqrt{\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_h}} - I_0 \left(\frac{2\sqrt{\bar{z}_0 \bar{z}_h}}{x_0 - x} \right) \right] \right\} dx. \quad (43) \end{aligned}$$

Член $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$ во втором слагаемом - поток через нижнюю границу - определяем из условия $\varphi(x, 0) = 0$. Для этого в (43) совершается предельный переход по $z_0 \rightarrow 0$. Но предварительно, чтобы обеспечить сходимость второго слагаемого в (43) при предельном переходе, целесообразно написать его сначала для границы $z = \delta > 0$:

$$J_2 = \int_0^{x_0} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=\delta} \frac{e^{-\frac{z_0+\delta}{x_0-x}}}{x_0-x} I_0\left(\frac{2\sqrt{z_0\delta}}{x_0-x}\right) - \delta \varphi(x, \delta) \frac{e^{\frac{z_0+\delta}{x_0-x}}}{(x_0-x)^2} \left[I_1\left(\frac{2\sqrt{z_0\delta}}{x_0-x}\right) \sqrt{\frac{z_0}{\delta}} - I_0\left(\frac{2\sqrt{z_0\delta}}{x_0-x}\right) \right] \right\} dx, \quad (44)$$

и прежде чем перейти к пределу по $z_0 - \delta \rightarrow 0$, произвести над (43) преобразование Лапласа по переменной x :

$$\begin{aligned} & \Phi[\varphi(x_0, z_0)] \Phi[Y_{\text{ист}}(x_0, z_0, z_h)] - \\ & - \Phi\left[\frac{\partial \varphi(x_0, \delta)}{\partial z}\right] \delta \cdot 2 K_0(2\sqrt{z_0\delta}) I_0(2\sqrt{\delta s}) + \\ & + 2\delta \Phi[\varphi(x_0, \delta)] \sqrt{\frac{z_0}{\delta}} K_0(2\sqrt{z_0\delta}) I_1(2\sqrt{\delta s}) + \Phi[Y_H(x_0, z_0)], \quad (45) \end{aligned}$$

где $Y_{\text{ист}}(x_0, z_0, z_h)$ - первое слагаемое в (43), $Y_H(x_0, z_0)$ - третье слагаемое, зависящее от условий на границе $z = z_h$.

После предельного перехода и обращения операции Φ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{\pi h}{K(h)(m+1)} \frac{e^{-\frac{z_h}{x_0}}}{x_0} + \\ & + \frac{z_h}{\delta} \int_0^{x_0} \left\{ \frac{e^{-\frac{z_h}{x_0-x}}}{x_0-x} \frac{\partial \varphi_{1H}}{\partial z} + \varphi_{1H} \frac{e^{-\frac{z_h}{x_0-x}}}{(x_0-x)^2} \right\} dx. \quad (46) \end{aligned}$$

По существу своему $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$ является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$ $\left[\frac{F(x_0, z_0)}{z_0(m\sqrt{z_0}+c)}\right]$, где $F(x_0, z_0)$ - правая часть (46). Это следует учитывать при подстановке его в (43).

Соотношением (46) однозначно определяется на нижней границе $Z = 0$ величина потока (конечная и не равная нулю), за счет которого обеспечивается краевое условие $\varphi(x, 0) = 0$ и формула для поля концентраций (43) определяется с точностью до значений концентрации φ_{1H} и ее производной $\frac{\partial \varphi_{1H}}{\partial z}$ на верхней границе $Z = H$.

Если в формулах (38) $[z > 0, J_2 = 0]$, (42) и (40) $[z < 0, J_2 \neq 0]$,

(43) и (46) [$\xi=0, \gamma_2 \neq 0$] положить $H = \infty$ (иначе говоря, отбросить интегральное слагаемое, зависящее от величин φ_{1h} и $\frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial z}$), то они дают решение задачи для случая однослойной атмосферы (от $Z = 0$ до ∞) с бесконечно растущим коэффициентом диффузии

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, \frac{z}{\delta}) &= \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{zh}{\delta_0}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{-\nu_1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\delta_0 zh}}{x_0}\right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0}} , \quad \varepsilon > 0; \\ \varphi_1(x_0, \frac{z}{\delta}) &= \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m+1)} \left\{ \frac{e^{-\frac{zh+z_0}{x_0}}}{x_0} \int_0^{x_0-\frac{zh}{x_0}} \left(\frac{2\sqrt{\delta_0 zh}}{x_0}\right) \frac{e^{-\frac{z_0}{x_0-x}}}{x} dx \right\}, \quad \varepsilon = 0; \\ \varphi_1(x_0, \frac{z}{\delta}) &= \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{zh}{\delta_0}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{1}{x_0} \int_{-\nu_1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\delta_0 zh}}{x_0}\right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{zh}{\delta_0}\right)^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{x_0-\frac{zh}{x_0}} \frac{e^{-\frac{zh}{x}}}{x^{1+\nu}} \frac{e^{-\frac{z_0}{x_0-x}}}{(x_0-x)^{-\nu}} dx \right\}, \quad \varepsilon < 0. \end{aligned}$$

Решения уравнения (1) для верхнего слоя атмосферы непосредственно не зависят от условий на нижней границе. Они остаются те же, что и в предыдущем случае [см. (24), (25), (26)]. Так что совместные решения задачи для двухслойной атмосферы даются формулами:

$$\begin{aligned} Z \leq H - \\ \varphi_1(x_0, \frac{z}{\delta_0}) &= \frac{\sigma_1 h}{\kappa(h)(m-n+2)} \left(\frac{zh}{\delta_0}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{-\nu_1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\delta_0 zh}}{x_0}\right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0}} - \gamma_2 + \\ &\quad + \frac{z_0^{\nu_1}}{\delta_0^{\nu_1}} \int_0^{x_0} \left[\bar{v}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \varphi_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right]_{z=\frac{z_0}{x_0}} dx, \\ \bar{v}_1 &= \frac{1}{(x_0-x)^{1+\nu_1}} \left(\frac{\sqrt{\delta_0 z}}{x_0-x}\right)^{\nu_1} \int_{-\nu_1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\delta_0 z}}{x_0-x}\right) e^{-\frac{z_0+z}{x_0-x}}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} \frac{z_0^{-\nu_1}}{(x_0-x)^{-\nu_1}} e^{-\frac{z_0}{x_0-x}} dx, \end{aligned} \tag{47}$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0 && \text{при } \varepsilon > 0, \nu_1 < 0; \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0 && \text{при } \varepsilon < 0, \nu_1 > 0 \text{ дается формулой (41);} \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} &= 0 && \text{при } \varepsilon = 0, \nu_1 = 0 \text{ дается формулой (46);} \end{aligned}$$

$Z \geq H -$

$$\varphi_2(x_0, \eta_0) = \frac{\sigma_2}{\kappa(h)|\delta+\delta|} \left(\frac{\eta_h}{\eta_0}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{1}{x_0} \int_{\nu_2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\eta_h \eta_0}}{x_0}\right) e^{-\frac{\eta_0+\eta_h}{x_0}} -$$

$$- \operatorname{sign}(\delta + b) \eta_n^{1+\nu_2} \int_0^{x_0} \left[\bar{u}_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \varphi_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_n} d\eta, \quad \delta + b \neq 0,$$

\bar{u}_2 — см. (22),

$$\varphi_2(x_0, z_0) = \frac{\sigma_2}{2\sqrt{\pi}k_n u_n x_0} e^{-\frac{(z_0-h)^2}{4a^2 x_0}} - \int_0^{x_0} \left\{ \frac{a}{2\sqrt{\pi}(x_0-x)} e^{-\frac{(z-h)^2}{4a^2(x_0-x)}} \frac{\partial \varphi_2(x, h)}{\partial z} - \frac{(z-h)}{4a\sqrt{\pi}(x_0-x)^{3/2}} e^{-\frac{(z-h)^2}{4a^2(x_0-x)}} \varphi_2(x, h) \right\} dx, \quad a = \sqrt{\frac{k_n}{u_n}}, \quad \delta = b = 0. \quad (48)$$

Как частный случай из (48) получается поле концентраций при наличии запирающего слоя на линии раздела слоев $z = H$ достаточно для этого положить в (48) $\frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial \eta} = 0$. Реализуя в формулах (48) условия склейки (12) или (81), выпишем систему линейных интегральных уравнений относительно $\varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \eta}$, аналогичные (32), (33):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, \frac{\partial}{\partial \eta}) &= \frac{2\alpha h}{k(h)(m-n+2)} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)^{\nu_1} \frac{1}{x_0} \int_{-\nu_1}^{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{\beta_n \partial h}}{x_0} e^{-\frac{\partial h + \partial h}{x_0}} - \right. \\ &- \left. \frac{2}{\Gamma(1-\nu_1)} \int_0^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^{\nu_1} \frac{\partial h^{\nu_1}}{(x_0-x)^{1+\nu_1}} e^{-\frac{\partial h}{x_0-x}} dx + \right. \\ &+ \left. 2 \int_0^{x_0} \left\{ \frac{\partial h}{x_0-x} \int_{-\nu_1}^{\nu_1} \left(\frac{2\partial h}{x_0-x} \right) e^{-\frac{2\partial h}{x_0-x}} \frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial \eta} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \varphi_{1n} \frac{\partial h}{(x_0-x)^2} e^{-\frac{2\partial h}{x_0-x}} \left[\int_{-\nu_1-1}^{\nu_1} \left(\frac{2\partial h}{x_0-x} \right) - \int_{-\nu_1}^{\nu_1} \left(\frac{2\partial h}{x_0-x} \right) \right] \right\} dx, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\varepsilon > 0, \quad \nu_1 < 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0,$$

$$\varepsilon < 0, \quad \nu_1 > 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \text{ определяется уравнением (41),}$$

$$\varepsilon = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \text{ определяется уравнением (46);}$$

$$\varphi_2(x_0, \eta_n) = \frac{2\sigma_2}{k(h)|\delta+b|} \left(\frac{\eta_h}{\eta_n} \right)^{\nu_2} \frac{1}{x_0} \int_{\nu_2}^{\nu_2} \left(\frac{2\sqrt{\eta_h \eta_n}}{x_0} \right) e^{-\frac{\eta_h + \eta_h}{x_0}} -$$

$$-\text{sign}(\delta + \nu) 2 \int_0^{x_0} \left\{ \frac{\eta_H}{x_0 - x} e^{-\frac{2\eta_H}{x_0 - x}} \left[\frac{2\eta_H}{x_0 - x} \frac{\partial \varphi_{2H}}{\partial \eta} - \frac{\eta_H}{(x_0 - x)^2} e^{-\frac{2\eta_H}{x_0 - x}} \left[I_{\nu_2+1} \left(\frac{2\eta_H}{x_0 - x} \right) - I_{\nu_2} \left(\frac{2\eta_H}{x_0 - x} \right) \right] \varphi_{1H} \right] \right\} dx, \quad (50)$$

$$\varphi_{1H} = \varphi_1(x, \xi_H) = \varphi_2(x, \eta_H) = \varphi_{2H},$$

$$\frac{H}{m+2+1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_H} = \frac{1}{\delta + \nu} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_H}.$$

Способы решения системы (50), (41)-(46), (50) общеизвестны. Наиболее удобным в расчетных целях представляется нам метод итераций. Метод свертывания позволяет в (49), (50) через преобразование Лапласа перейти от линейных интегральных уравнений к линейным алгебраическим уравнениям относительно $\varphi_{1H}, \frac{\partial \varphi_{1H}}{\partial \xi(\eta)}, \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$

но при этом возникают большие трудности с построением обращения по формуле Римана-Мелина. В известной мере можно избежать эти трудности, сочетая метод свертывания с методом итерации. Тогда в приближениях вместо полных значений функций φ_1 и производных $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi(\eta)}$ используются только главные члены их разложений по степеням аргумента.

В детали этого вопроса мы не входим за невозможность уместить его в рамки статьи.

В заключение автор считает своим долгом выразить признательность проф. Д.Л. Лайхтману, с которым эта работа многократно обсуждалась.

Л и т е р а т у р а

1. В а т с о н Г.Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
2. Л а й х т м а н Д.Л. Физика приземного слоя. Гидрометеопиздат, Л., 1961.
3. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики, т.1У. Физматгиз, М., 1958.
4. Д и т к и н В.А., П р у д н и к о в А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Физматгиз, М., 1961.