

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.А. Чернецова

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2023

УДК 621.396.669(075.8)

ББК 32я7

Рецензент: В.Г. Бурлов, д.т.н., проф. СПбПУ

Чернецова Е.А. Теория радиотехнических сигналов. Учебное пособие / Е.А. Чернецова. – [Текст : электронный]. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2023. – 146 с.

Учебное пособие «Теория радиотехнических сигналов» представляет собой раздел одноименной дисциплины, читаемой на кафедре "Информационные технологии и системы безопасности" для студентов, обучающихся по специальности «Информационная безопасность телекоммуникационных систем». В учебное пособие включены теоретические сведения, практические задачи и упражнения, в которых рассматриваются: классификация сигналов, используемых в телекоммуникационных каналах связи и передачи данных, описание и представление сигналов в аналоговом и цифровом виде, способы их преобразования, виды модуляции и демодуляции.

Рассмотрены: структурные схемы аппаратурной реализации видов обработки сигналов, особенности передачи информации и современные технологии обработки аналоговых и дискретных сигналов, основные качественные характеристики систем обработки. Материал пособия иллюстрируется примерами, графическим материалом в виде структурных схем, графиков расчета параметров и характеристик рассматриваемых систем.

Учебное пособие предназначено для студентов гидрометеорологического университета и может быть полезным для всех желающих ознакомиться с основами теории и принципов реализации современных мобильных и перспективных систем связи.

© Е.А.Чернецова, 2023

© Российский государственный
гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2023

1. Классификация сигналов

1.1. Виды сигналов

Сигнал есть функция, связывающая и характеризующая какие-либо физические параметры. Сигнал, как функцию, отождествляют с каким-либо физическим процессом и, соответственно, с его параметрами (например: скорость, ускорение, температура, напряжение, сопротивление, масса, влажность, давление и т.п.). Таким образом, сигнал содержит некоторую информацию о физическом процессе, который он характеризует. Кроме полезной информации в сигнале присутствуют ненужные составляющие – помехи, происхождение которых имеет разную природу.

Обычно реальные сигналы представляют собой функцию напряжения от времени $u(t)$ и содержат помехи и шум (помехи можно рассматривать как ненужные сигналы, шумы – это свойство реальных объектов).

Реальные физические сигналы почти всегда описываются непрерывной функцией (или кусочно-

непрерывной функцией). Такие сигналы называются аналоговыми. Если функция существует только в определенные моменты времени (ее аргумента), то множество значений такой функции называется дискретным сигналом. Цифровым сигналом будем называть дискретный сигнал, который может принимать значения только из конечного множества чисел. Классификация сигналов представлена на рис.1.1 [1].

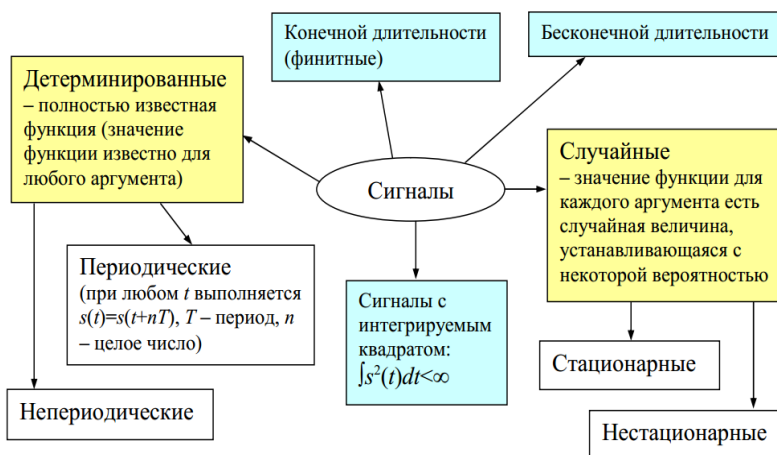


Рис. 1.1. Классификация сигналов

Сигналы бывают электрические и неэлектрические. Например, оптические сигналы представляют собой

световые волны. Это различие важно, так как в настоящее время сигналы очень часто обрабатываются в электрической форме, поэтому неэлектрические сигналы для обработки в этом случае должны быть преобразованы в электрические подходящими датчиками.

Если область определения сигнала непрерывна, то речь идет о непрерывных сигналах. Если область определения сигналов прерывна, то речь идет о дискретных сигналах.

В периодических сигналах существует непрерывный период повторения. К периодическим относят гармонические и полигармонические сигналы. Гармонические сигналы широко используются в радиотехнике потому, что, во-первых, гармоническое колебание наиболее просто технически воспроизвести; во-вторых, только гармонический сигнал, проходя через линейные цепи, сохраняет свою форму; в-третьих, большинство используемых в радиоэлектронике сигналов с помощью преобразования Фурье может быть представлено суммой гармонических составляющих[2].

На рис.1.2 представлены периодические и непериодические сигналы. **Полигармонический сигнал** – это сигнал, представляющий собой сумму гармонических колебаний. Он описывается формулой [2]:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{i=0}^N [a_i \cos(2\pi f_i t) + b_i \sin(2\pi f_i t)] = \\
 &= \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t - \varphi_i) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

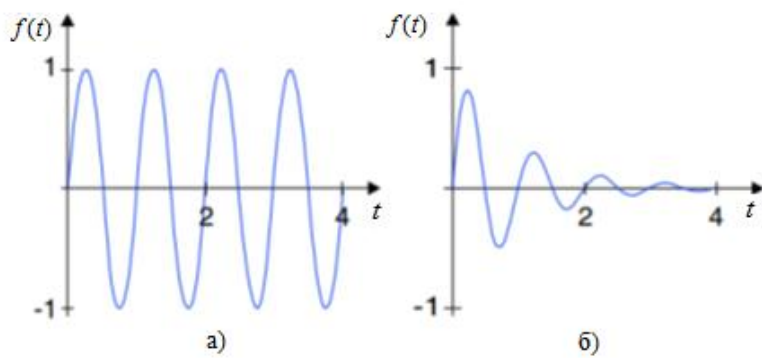


Рис. 1.2. Гармонический (а) и негармонический (б) сигналы

Также полигармонический сигнал можно описать функцией $x(t) = y(t + kT_p)$, где T_p – период одного полного колебания сигнала $y(t)$, заданного на одном

периоде, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Значение } f_p = \frac{1}{T_p}, \quad (1.2)$$

называют **фундаментальной частотой** колебаний.

Полигармонические сигналы представляют собой сумму определенной постоянной составляющей ($f_0 = 0$) и некоторого числа гармонических составляющих с произвольными значениями амплитуд A_i и фаз φ_i . **При этом периоды составляющих сигналов кратны периоду фундаментальной частоты f_p .** Другими словами, на периоде фундаментальной частоты f_p укладывается кратное число периодов всех гармоник, что и создает периодичность повторения сигнала.

Сигналы также можно описать через энергию или мощность. Если сигнал $x(t)$ затухает и имеет, таким образом, конечную энергию, то его можно назвать энергетическим сигналом. Энергия сигнала равна

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt, \quad (1.3)$$

поэтому сигналы, описываемые через энергию, можно назвать сигналами с интегрируемым квадратом.

Если сигнал бесконечен, то его энергия равна бесконечности, поэтому в этом случае энергию ограничивают интервалом времени. Эта величина соответствует мощности сигнала:

$$P = \frac{1}{T} E = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (1.4)$$

Детерминированный сигнал (рис.1.3) это функция, значения которой в любой точке области определения можно рассчитать заранее, зная математическую модель сигнала (имеется в виду формула, таблица, закон и т.п.)

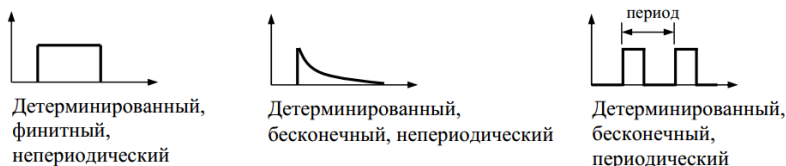


Рис. 1.3. Детерминированные сигналы

В частности, для переменного напряжения $u(t)=A\sin(\omega t)$ можно получить значение сигнала в любой момент времени t .

Надо отметить, что детерминированные сигналы в «чистом виде» не могут существовать в природе, т.к. на реальные сигналы всегда оказывает влияние окружающая среда, поэтому реальный сигнал всегда содержит случайную составляющую. Однако понятие «детерминированный сигнал» облегчает математическое описание сигналов. На практике же реальный сигнал представляют как сумму «идеального» детерминированного сигнала и случайного сигнала.

Случайный сигнал изображен на рис. 1.4.

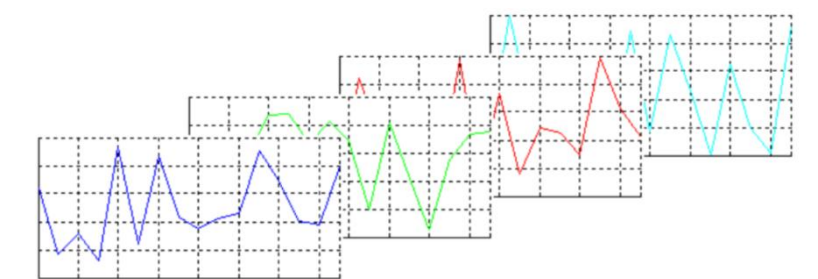


Рис. 1.4. Реализации конечного случайного сигнала

Это функция, значение которой невозможно предсказать (вычислить заранее), т.е. значение функции для каждого аргумента есть случайная величина, устанавливающаяся с некоторой вероятностью.

Случайность сигнала, или говорят процесса, проявляется в том, что значение функции изменяется от одного опыта к другому. Полученная в результате каждого опыта функция называется реализацией случайного процесса, т.е. это то, что мы регистрируем в ходе наблюдения (измерения) случайного сигнала.

В каждый момент времени существует бесконечно много реализаций случайного процесса. Осуществляя измерения такого сигнала, получают конкретную, одну из многих, реализацию.

Примером периодического случайного сигнала может служить сигнал, состоящий из периодически повторяющихся одинаковых фрагментов, значения которых на каждом периоде заранее неизвестны, но каждая реализация содержит повторяющийся сигнал. Например: электрический сигнал (с камеры наблюдения) развертки строк экрана – получая сигнал, мы не знаем наперед о цвете каждого пикселя изображения – сигнал случайный. Однако, если изображение статично, то пиксели не изменяются и получаемые строки повторяются с частотой

кадров – сигнал периодичен. Предсказать какая будет «картинка» в целом (т.е. кадр) в следующий момент времени невозможно – значит рассматриваемый сигнал случайный и периодичный.

Источниками сигналов являются:

- генераторы сигналов (обычно зависимость напряжения от времени) это устройства, предназначенные для получения (генерации) сигналов с заданными параметрами;

- датчики (преобразователи физических величин в зависимость, как правило, напряжения от времени) это устройства, дающие возможность контролировать неэлектрические процессы (температура, давление и т.п.);

- искусственно созданные сигналы: табличная форма, генераторы случайных чисел, формула и т.п. обычно применяются при математическом моделировании).

Примерами изучаемых сигналов являются[3]:

- зависимость окружающей температуры во времени (за час, день, неделю, год и т.п.),

– зависимость скорости автомобиля в единицу времени,

– зависимость яркости свечения лампы во времени,

– зависимость массы объекта во времени, и т.п.

Все эти физические параметры приводятся к зависимости электрического тока или напряжения от времени с помощью соответствующих датчиков (сенсоров): термopара, пьезоэлемент, фотоэлемент, катушка, открытый конденсатор и т.п.

1.2. Параметры сигналов

Сигналы можно представлять во временной области – в виде функций от времени или в частотной области – в виде функций от частоты (также можно представлять и в других координатах, если это будет иметь смысл). Сигналы описываются математическими моделями, которые имеют ряд параметров:

– Амплитуда – максимальное значение по модулю смещения или изменения переменной величины от

среднего значения при колебательном или волновом движении (изменении функции).

– Период повторения (обратно пропорционален частоте) сигнала – расстояние между одинаково колеблющимися точками колебательного или волнового изменения сигнала.

– Максимальное (минимальное) значение – величина отклонения или изменения функции $f(t)$ от нулевого значения, такая, что для любой величины t из области существования функции выполняется условие:

$$F_{\min} \leq f(t) \leq F_{\max}. \quad (1.5)$$

– Абсолютные значения максимума и минимума сигнала на рассматриваемом отрезке времени $t = [0, T]$, называемые пиковыми значениями:

$$X_+ = \left| \max_{t \in T} x(t) \right|; X_- = \left| \min_{t \in T} x(t) \right|. \quad (1.6)$$

– Среднее значение – величина, определяемая в соответствии с формулами:

$$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt . \quad (1.7)$$

$$X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) . \quad (1.8)$$

где T – интервал наблюдения функции или ее период.

Среднее значение для периодических сигналов называют постоянной составляющей.

– **Мощность сигнала**, определяемая с учетом постоянной составляющей:

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (1.9)$$

$$P_X = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i), \quad (1.10)$$

и без учета постоянной составляющей:

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2, \quad (1.11)$$

$$P_X = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left(\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2. \quad (1.12)$$

– Среднее квадратическое значение или эффективное значение, определяемое с учетом постоянной составляющей:

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad (1.13)$$

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i)}, \quad (1.14)$$

и без учета постоянной составляющей:

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right)^2}, \quad (1.15)$$

$$X_{СКЗ} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x^2(i) - \left(\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(i) \right)^2}. \quad (1.16)$$

Для гармонического сигнала между СКЗ и амплитудой существует однозначная связь:

$$X_{СКЗ} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,707A. \quad (1.17)$$

Если сигнал имеет сложную форму, то однозначной связи между СКЗ и его амплитудой нет.

– Полоса сигнала – разность верхней и нижней границ частотной области (спектра), в пределах которых существует (представляется) сигнал.

– Эффективная полоса сигнала (эффективная ширина спектра) $\omega_{эф}$ – полоса частот, в пределах которой заключается основная доля энергии сигнала (рис.1.5,а), обычно: 90%, т.е.

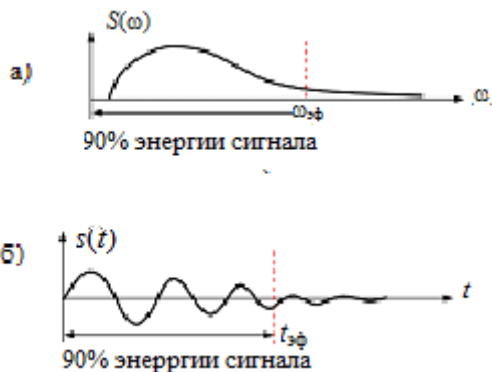
$$\int_0^{\omega_{эф}} S(\omega)d\omega = 0,9 \int_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega, \quad (1.18)$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность сигнала (частотное представление).

– Длительность сигнала – интервал времени, в пределах которого локализован (представлен) сигнал.

– Эффективная длительность сигнала $t_{эф}$ – отрезок времени, в пределах которого заключена основная доля энергии импульса, обычно: 90% (рис. 1.5, б).

– База сигнала $B = \omega_{\text{эф}} * t_{\text{эф}}$ (например: наименьшее значение базы имеет гауссов импульс $B=1,353$, у прямоугольного импульса $B=4,59$).



. Рис. 1.5. Определение эффективной полосы сигнала (а) и эффективной длительности сигнала (б)

– Отношение сигнал шум (ОСШ) равно отношению мощности полезного сигнала к мощности шума (часто приводится в логарифмических единицах).

– Динамический диапазон есть отношение наибольшей мгновенной мощности сигнала к наименьшей:

$$D = 10 \lg \left(\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \right). \quad (1.19)$$

Пример. Рассмотрим расчет мощности шума на конкретных реализациях. На рис.1.6 [4] приведены графики смеси полезного гармонического сигнала и аддитивного шума, а также указаны параметры сигнала и шума.

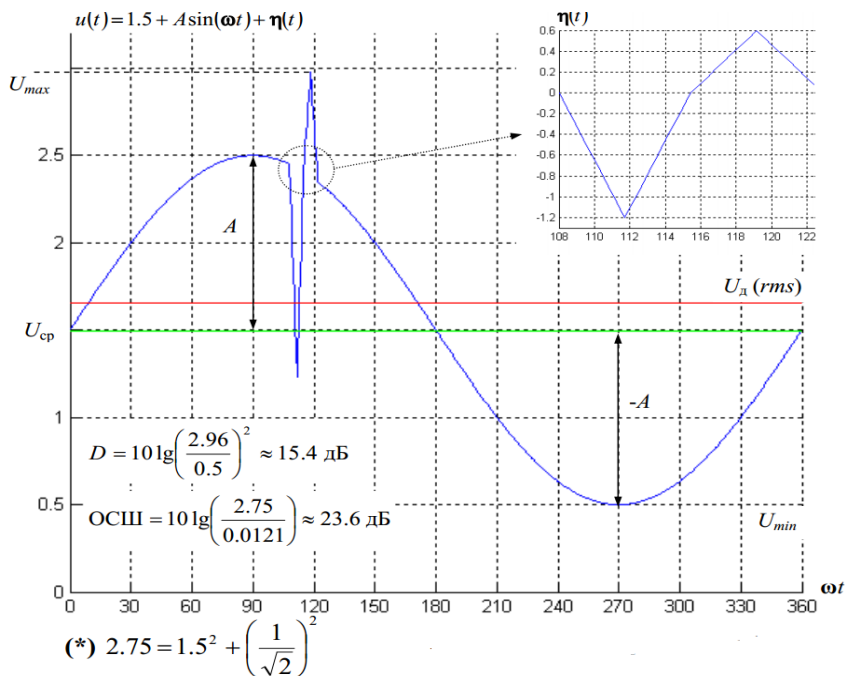


Рис. 1.6. Графическое представление основных параметров сигнала

По графику на рис.1.6 сформируем выборку отсчетов шума.

$\eta[14]=[0 \ -0.4 \ -0.62 \ -1 \ -1.6 \ -0.8 \ -0.42 \ -0.2 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.1]$.

Используя формулы (1.12), (1.14), (1.16), рассчитаем мощность шума по выбранной выборке:

$$aa=\text{sum}(a.^2)/14=0.4193 \text{ по (1.14),}$$

$$aa1=\text{sum}(a.^2)/14-0.3=0.11 \text{ по (1.16),}$$

$$P_{\text{ш}}=aa1^2=0.0121 \text{ по (1.12).}$$

2. Пространство сигналов

Для удобства анализа и обработки информации, которая заключена в сигналах, их множество «помещают» в подходящее метрическое пространство (как правило, линейное, с заранее оговоренными свойствами и единицами измерений). Это позволяет выделять из множества сигналов сигналы с определенными параметрами, сравнивать сигналы друг с другом, оценивать их изменение при их прохождении через системы обработки данных и т.п.

Линейное пространство дискретных и цифровых сигналов называется пространством Эвклида (обозначение пространства – R^2). Линейное пространство аналоговых сигналов с введенным скалярным произведением (положительно определенным) называется Гильбертовым пространством H (второе распространенное обозначение – L^2), представляет собой обобщение Евклидова пространства на бесконечномерный случай.

В пространствах Гильберта и Эвклида определяют норму $\|s(t)\|$ и метрику $\rho(s, v)$ в соответствии с выражениями[5]:

$$\|s(t)\| = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)}, \quad (2.1)$$

$$\rho(s, v) = \|s(t) - v(t)\|. \quad (2.2)$$

В этих пространствах справедливо неравенство Коши-Буняковского – скалярное произведение векторов не превосходит произведения их норм :

$$\langle s(t), v(t) \rangle \leq \|s(t)\| \cdot \|v(t)\|. \quad (2.3)$$

Некоторые аналогии между элементарными геометрическими понятиями и соответствующими им понятиями в теории сигналов даны в таблице 2.1 [8].

Разложение сигнала по базисным функциям. Любая функция линейного пространства L (размерности N) может выражаться через линейную комбинацию базисных функций, которые должны удовлетворять условию

$$\int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = K_j \delta_{jk} \quad 0 \leq t \leq T \quad j, k = 1, \dots, N,$$

Таблица 2.1. Аналогии между элементарными
геометрическими понятиями и соответствующими им
понятиями в теории сигналов

В геометрии	В теории сигналов
<p>Длина (l) вектора \vec{S} (модуль, норма):</p> $l = \vec{S} = \ \vec{S}\ = \sqrt{\sum_i S_i^2}, \text{ где } S_i \text{ — координаты}$ <p>вектора по i-й оси</p>	<p>Норма сигнал $S(t)$:</p> $\ S(t)\ = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt} = \sqrt{\mathcal{E}_S},$ <p>где \mathcal{E}_S – энергия сигнала</p>
<p>Скалярное произведение векторов \vec{S} и \vec{U}:</p> $(\vec{S}, \vec{U}) = \vec{S} \vec{U} \cos(\varphi_{S,u}), \text{ где } \varphi_{S,u} \text{ —}$ <p>угол между векторами</p>	<p>Скалярное произведение сигналов $S(t), U(t)$:</p> $S(t), U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)U(t) dt = \mathcal{E}_{S,u},$ <p>где $\mathcal{E}_{S,u}$ – взаимная энергия сигналов, или энергия взаимодействия сигналов</p>
<p>Расстояние ($d_{s,u}$) между векторами \vec{S}, \vec{U}:</p> $d_{s,u} = \vec{S} - \vec{U} = \sqrt{(\vec{S} - \vec{U}), (\vec{S} - \vec{U})} =$	<p>Метрика расстояний между сигналами $S(t), U(t)$: $\ S(t) - U(t)\ =$</p> $\sqrt{\sum_i [S_i - U_i]^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [S(t) - U(t)]^2 dt}$
<p>Вектор единичной длины (орт) \vec{l}: $l = \frac{\vec{S}}{ \vec{S} }$</p>	<p>Нормированный сигнал:</p> $\frac{S(t)}{\ S(t)\ } = \frac{S(t)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt}}$
<p>Ортогональные векторы \vec{S}, \vec{U}:</p> $(\vec{S}, \vec{U}) = 0; \varphi_{S,u} = 90^\circ$	<p>Ортогональные сигналы $S(t), U(t)$:</p> $S(t), U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)U(t) dt = 0$

где оператор $\delta_{jk} = \begin{cases} 1; j = k \\ 0; j \neq k \end{cases}$ является дельта-функцией.

При ненулевых константах K_j пространство называется ортогональным, если же базисные функции нормированы так, что все $K_j=1$, то пространство называется ортонормированным.

Одна из причин внимания к ортогональному сигнальному пространству – то, что в нем проще всего определяется Евклидова мера расстояния, используемая в процессе детектирования.

Произвольный конечный набор сигналов $\{s_i(t)\}$ $i=1, \dots, M$, где каждый элемент имеет длительность T можно выразить как линейную комбинацию N ортогональных сигналов $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$, $N \leq M$:

$$s_1(t) = a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \dots + a_{1N}\psi_N(t)$$

$$s_2(t) = a_{21}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \dots + a_{2N}\psi_N(t)$$

...

$$s_M(t) = a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \dots + a_{MN}\psi_N(t).$$

Эти соотношения можно записать в более компактной форме:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(t), \quad N \leq M, \quad i = 1, \dots, M,$$

где $a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t) \psi_j(t) dt, \quad i = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T,$

$\psi_j(t)$ – коэффициенты разложения сигнала $s_i(t)$ по базисным функциям, $j = 1, \dots, N$.

Произвольный сигнал $s(t)$ в пространстве Гильберта, заданный на интервале $[a, b]$, может быть разложен в ряд по упорядоченной системе ортонормированных базисных функций $\mathbf{u}_n(t): s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{u}_n(t)$. Совокупность чисел $\{c_n\}$ называется спектром сигнала $s(t)$ в этом базисе. Спектр сигнала в общем случае может быть комплексным. Таким образом, в геометрической интерпретации коэффициенты c_n представляют собой проекции вектора (сигнала $s(t)$) на соответствующие базисные направления $\mathbf{u}_n(t)$, т.е. координаты вектора $s(t)$ в базисе, образованном

системой ортогональных функций $u_n(t)$, в пределе – бесконечномерной.

Существует разложение $x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi_k$ – ряд Фурье, числа λ_k – коэффициенты ряда Фурье.

Возможность разложения непрерывных сигналов и функций в обобщенные ряды по системам ортогональных функций имеет принципиальное значение, так как позволяет вместо изучения несчетного множества точек сигнала ограничиться счетной системой коэффициентов ряда.

К системам базисных функций, которые используются при разложении сигналов, предъявляют следующие основные требования:

- для любого сигнала ряд разложения должен сходиться;
- при ограничении ряда по уровню остаточной погрешности расхождения с заданным сигналом количество членов ряда должно быть минимальным;
- базисные функции должны иметь достаточно простую аналитическую форму и коэффициенты

разложения в ряд должны вычисляться относительно просто.

Согласно теореме Дирихле, любой сигнал $s(t)$, имеющий конечное число точек нарушения непрерывности первого рода, и конечный по энергии на интервале $[a, b]$, может быть разложен по системе ортонормированных функций, если существуют интегралы модуля сигнала и модуля его первой производной:

$$\int_a^b |s(t)| dt < \infty, \quad \int_a^b |s'(t)| dt < \infty.$$

Широкое применение в цифровой обработке сигналов нашли некоторые функциональные базисы ортогональных функций.

Рассмотрим часто встречающиеся базисы.

1. Тригонометрическая система функций вида:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

приведенного на рис.2.1.

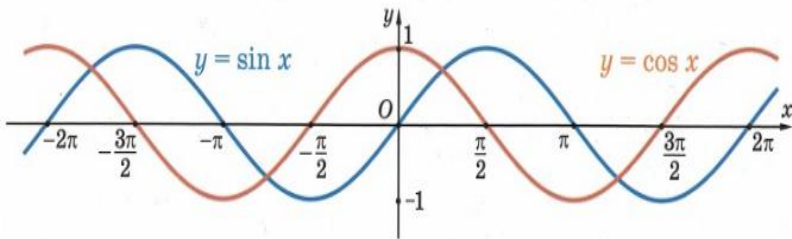


Рис.2.1 Ортогональные функции синус и косинус

2. Система функций Уолша $\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n [r_k(x)]^{n_k}$,

где K – определяется номером функции Уолша $n < 2^K$;

$r_k(x)$ – функция Радамахера.

3. Функция Радамахера определяются для $x \in [0, 1)$ при

$$r_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0; 0.5) \\ -1 & \text{при } x \in [0.5; 1) \end{cases},$$

причем $r_0(x)$ периодически продолжается на всю числовую ось. Остальные функции Радамахера определяются выражением:

$$r_k(x) = r_0(2^k x), k = 1, 2, \dots$$

Вид функции Радамахера показан на рис.2.2, а функции Уолша – на рис.2.3.

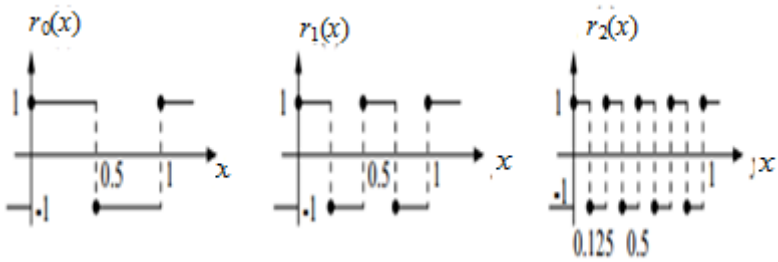


Рис. 2.2. Функции Радамахера при $k=0, 1, 2$

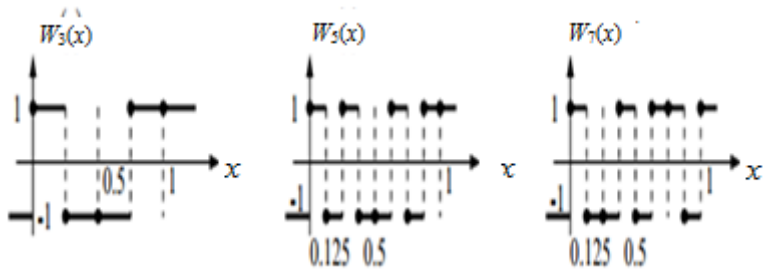


Рис. 2.3 Функции Уолша

Функции Уолша принимают значения ± 1 , что удобно при программировании.

4. Система функций Хаара описывается функцией

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{0.5k} & x \in \left[\frac{2m}{2^{k+1}}, \frac{2m+1}{2^{k+1}} \right) \\ -2^{0.5k} & x \in \left[\frac{2m+1}{2^{k+1}}, \frac{2m+2}{2^{k+1}} \right) \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Графическая реализация функции Хаара приведена на рис. 2.4.

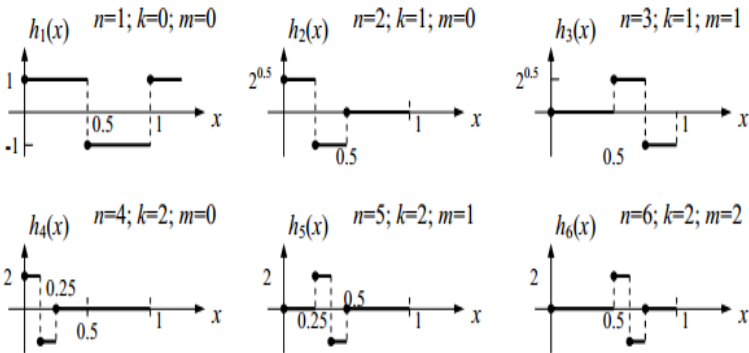


Рис. 2.4. Функции Хаара

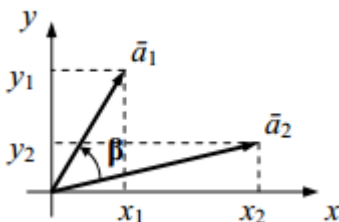
Автокорреляционная функция сигнала $x(t)$ есть скалярное произведение сигнала и сдвинутой во времени его копии:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t - \tau)dt. \quad (2.1)$$

Взаимная корреляционная функция:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t - \tau)dt. \quad (2.2)$$

Корреляционная функция применяется в случаях, когда необходимо обнаружить сигнал в смеси нескольких сигналов разной природы, т.к. корреляционная функция характеризует степень сходства сигналов (чем два вектора ближе по длине и направлению, тем больше величина их скалярного произведения, рис.2.5).



$$\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle = \bar{a}_1 \bar{a}_2 = \|\bar{a}_1\| \|\bar{a}_2\| \cos(\beta) = x_1 x_2 = y_1 y_2$$

Рис.2.5 Геометрическая интерпретация скалярного произведения

Свойства автокорреляционной функции:

1) Значение функции при $\tau=0$ есть энергия сигнала:

и при $\tau \neq 0$ $R(\tau) \leq R(0)$.
$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt.$$

2) Функция четна: $R(\tau) = R(-\tau)$.

3) Функция от сигналов с конечной энергией затухает.

4) Если сигнал не содержит особенностей в виде дельта функции, то его корреляционная функция непрерывна.

5) Если функция периодична, то ее автокорреляционная функция имеет тот же период.

Примеры расчета корреляционных функций [7].

1) Автокорреляционная функция прямоугольного сигнала с *периодом* $T=1$ мс и длительностью импульса $T_i < T$ приведены на рис.2.6. На рис.2.7 приведены автокорреляционная функция прямоугольного сигнала с длительностью $T_i = 0,5$ мс и $0,4$ мс.

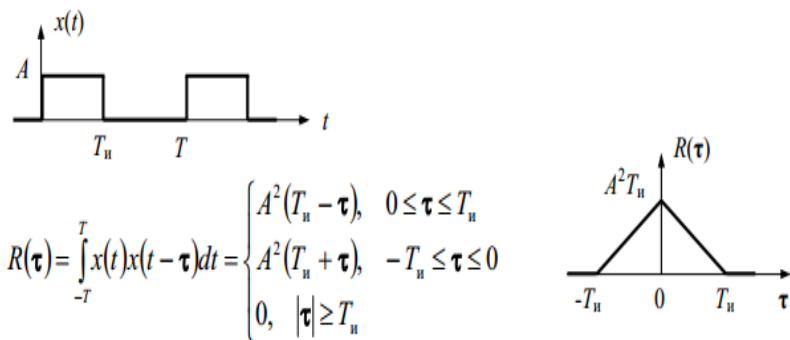


Рис.2.6. Сигнал с $T=1$ мс и его автокорреляционная функция

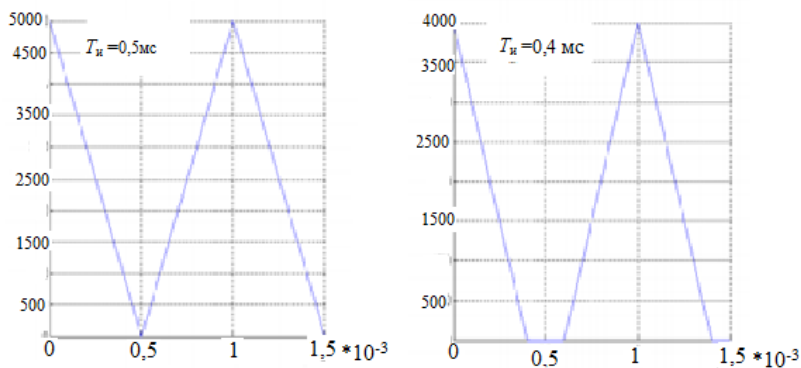


Рис. 2.7. Автокорреляционная функция прямоугольного сигнала с длительностью импульса T_n

2) Автокорреляция гармонического сигнала $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с периодом $T = 2\pi / \omega_0$.

$$R(\tau) = \int_{-0.5T}^{0.5T} A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0(t - \tau) + \varphi) dt = \\ = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

Автокорреляционная функция гармонического сигнала не зависит от начальной фазы и также является гармонической функцией с тем же периодом.

3) Автокорреляционная функция экспоненциального импульса с постоянной времени затухания τ :

$$x(t) = A e^{-t/\tau}, t \geq 0.$$

Автокорреляционная функция экспоненциального импульса является экспоненциальной функцией.

$$R(t_1) = \int_0^{\infty} A e^{-\frac{t}{\tau}} A e^{-\frac{t+t_1}{\tau}} dt = A^2 e^{-\frac{t_1}{\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \\ = \frac{A^2 \tau}{2} e^{-\frac{t_1}{\tau}}.$$

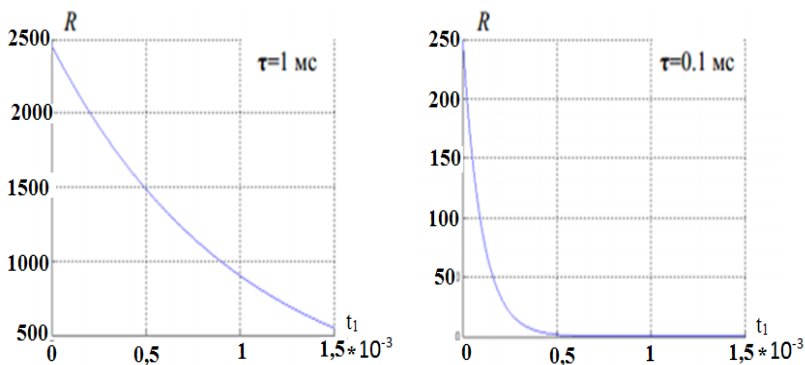


Рис. 2.8. Автокорреляционная функция экспоненциального сигнала с постоянной времени τ

4) Корреляционная функция зашумленного сигнала с ожидаемым, имеющим форму прямоугольного импульса. На рис.2.9. представлен эталонный сигнал и его автокорреляционная функция (слева), зашумленный и сдвинутый эталонный сигнал и его корреляционная функция (справа).

5) Свертка – это та же корреляция, только один из сигналов зеркально обращен относительно начала координат. Это связано с зеркальностью представления более ранних и более поздних отсчетов сигнала на

временной плоскости и при поступлении их в реальную систему.

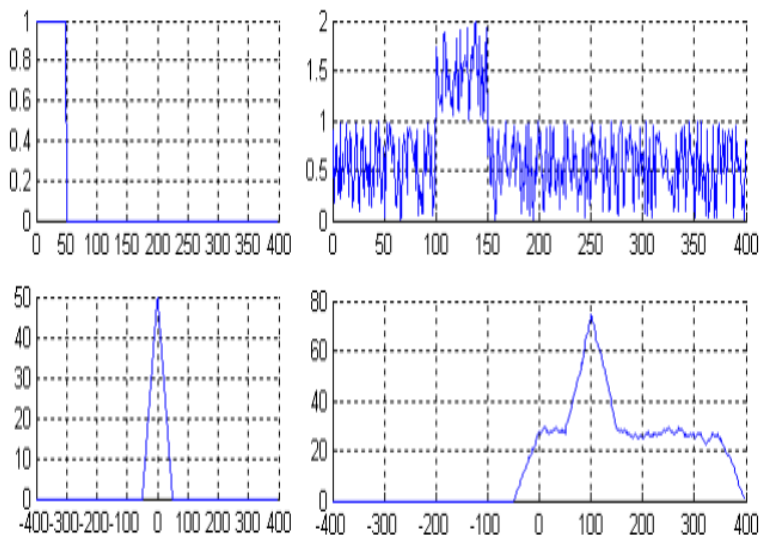


Рис.2.9. Корреляционная функция зашумленного сигнала

Графическая иллюстрация свертки для двух видов сигналов приведена на рис.2.10 [8]. На рис.2.11 приведен способ расчета побочных максимумов корреляционной функции. Ниже приведены численные значения

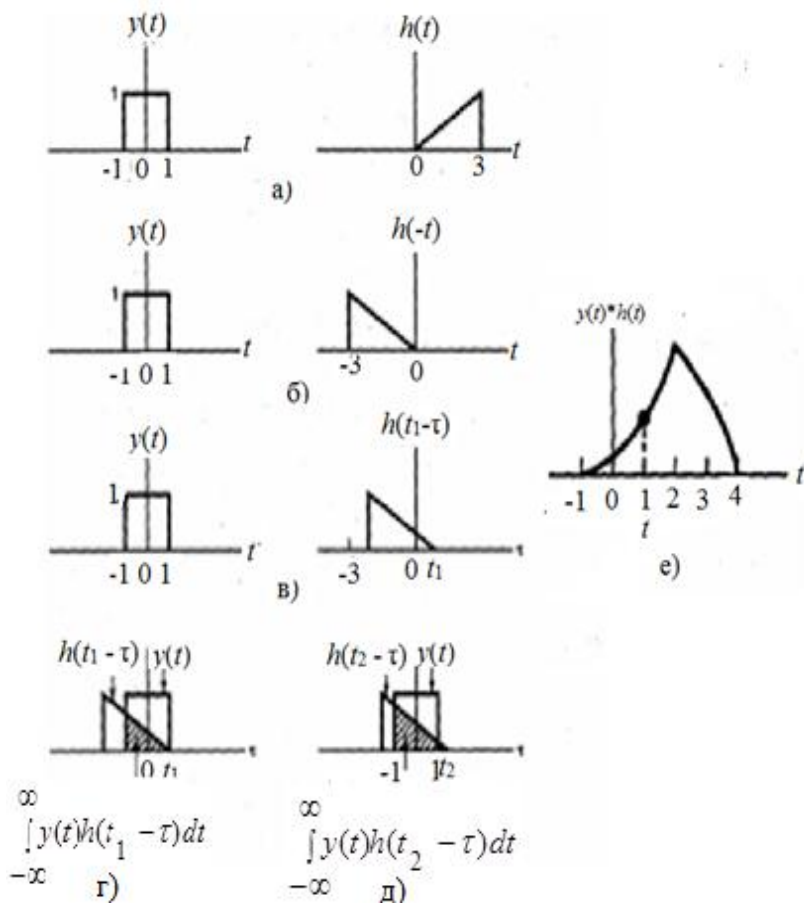


Рис. 2.10. Графическая иллюстрация свертки

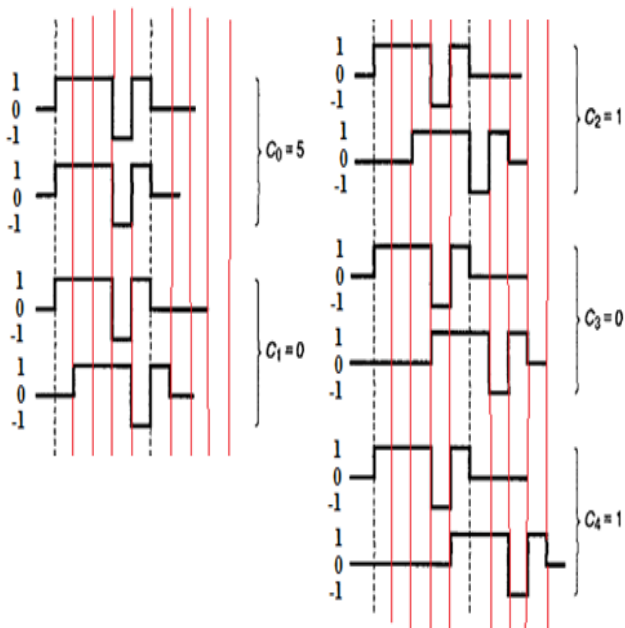


Рис.2.11. Вычисление побочного максимума
корреляционной функции

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0*0+1*1+1*1+1*1+1*1+(-1)*(-1)+1*1+0*0=5 \\
 C_1 &= 0*0+1*0+1*1+1*1+1*1+(-1)*1+1*(-1)+0*1=0 \\
 C_2 &= 0*0+1*0+1*0+1*1+(-1)*1+1*1+0*(-1)=1 \\
 C_3 &= 1*0+1*0+1*0+(-1)*1+1*1+0*1+0*(-1)+0*1=0 \\
 C_4 &= 1*0+1*0+1*0+(-1)*0+1*1+0*1+0*1+0*(-1)=0
 \end{aligned}$$

3. Преобразование Фурье

3.1. Виды и назначение преобразования Фурье

Преобразование Фурье сигнала $s(t)$ есть [8]:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

и фактически представляет собой разложение сигнала по системе базисных тригонометрических функций (т.е. скалярное произведение сигнала на базисные функции).

Комплексную величину $S(\omega)$ называют комплексным спектром (спектральной плотностью) сигнала $s(t)$, ω – круговая частота.

Обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Важнейшим случаем преобразования Фурье является представление периодических сигналов с периодом повторения T :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – круговая циклическая частота сигнала (основная гармоника);

$n\omega_0$ – круговая циклическая частота n -й гармоники;

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} s(t) dt \text{ – постоянная составляющая сигнала;}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

– коэффициенты разложения.

Если сигнал симметричный, то все $B_n=0$, если антисимметричный – все $A_n=0$. Для абсолютно интегрируемой функции (сигнала) коэффициенты A_n и B_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Ряд Фурье можно записать через комплексные величины:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{C}_k e^{-jk\omega_1 t} = \underline{C}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{C}_k e^{-jk\omega_1 t} + \underline{C}_{-k} e^{-jk\omega_1 t}] =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t + \varphi),$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$,

T – период повторения функции,

$\underline{C}_{-k} = \underline{C}_k^*$ – в противном случае сумма будет

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{-jk\omega_1 t}$ комплексной, а по условию $f(t)$ –

действительная функция (сигнал);

$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} f(t) dt$ – среднее значение функции

(постоянная составляющая);

$a_k = 2[\underline{C}_k] = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ – амплитуда гармоники

(множество этих величин называется спектром амплитуд);

$$\varphi = \arg(\underline{C}_k) = \arctg\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

– фаза гармоники (множество этих величин называется фазовым спектром).

Комплексные коэффициенты ряда Фурье (проекция сигнала на базисные направления) находят из формулы (скалярное произведение сигнала на базисные функции):

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Каждый коэффициент представляет собой амплитуду (модуль) и начальную фазу (угол) гармоник (компонент спектра). Поэтому между спектральной плотностью одиночного импульса со спектральной плотностью

$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{и коэффициентами ряда Фурье}$$

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{+0.5T} s(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad \text{для периодической}$$

последовательности таких импульсов (период повторения T , который по величине больше длительности импульса)

существует связь: $\underline{C}_k = \frac{1}{T} S\left(\frac{2\pi k}{T}\right)$, т.е. коэффициенты

ряда Фурье есть аппроксимация огибающей непрерывного спектра одиночного импульса (сигнала с бесконечным периодом повторения).

Поскольку частота спектральной компоненты k определяется величиной $\omega = 2\pi k / T$, то для $T \rightarrow \infty$ (при предельном переходе от периодических прямоугольных импульсов к одиночному импульсу) шаг по частоте $2\pi/T$ (расстояние между спектральными компонентами) становится бесконечно малым и, соответственно, число коэффициентов \underline{C}_k растет до бесконечности. Ширина спектра определяется шириной импульса, которая при предельном переходе остается неизменной.

Выводы:

- спектр непрерывного периодического сигнала дискретен (линейчатый);
- спектр непрерывного непериодического сигнала непрерывен (сплошной);
- спектр вещественного сигнала симметричен (поэтому область спектра с отрицательными частотами обычно не изображают).

3.2. Свойства преобразования Фурье

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \underline{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \underline{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt.$$

1) Линейность: если

$$y(t) = \alpha x(t) + \beta g(t), \quad \text{то} \quad \underline{Y}(\omega) = \alpha \underline{X}(\omega) + \beta \underline{G}(\omega) \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}.$$

Если мы берем какую-то линейную комбинацию функций, то преобразование Фурье этой комбинации будет такой же линейной комбинацией образов Фурье этих функций. Это свойство позволяет сводить сложные функции и их Фурье-образы к более простым. Если взять функцию, состоящую из суммы множества синусоид с разными частотами, то согласно свойству линейности, Фурье-образ этой функции будет состоять из соответствующего набора дельта-функций.

2) Задержка сигнала $x(t)$ на время τ , т.е. $y(t) = x(t - \tau)$:

$$\underline{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) = \underline{X}(\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

Второе свойство преобразования Фурье – это независимость амплитудного спектра от сдвига сигнала по времени. Если мы подвинем функцию влево или вправо по оси x , то поменяется лишь её фазовый спектр.

3) Масштабирование сигнала по времени
 $y(t) = x(at)$:

$$\begin{aligned} \underline{Y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau = \\ &= \underline{X}(\omega)\underline{G}(\omega). \end{aligned}$$

Третье свойство – растяжение (сжатие) исходной функции по оси времени (x) пропорционально сжимает (растягивает) её Фурье-образ по шкале частот (ω). В частности, спектр сигнала конечной длительности всегда бесконечно широк и наоборот, спектр конечной ширины всегда соответствует сигналу неограниченной длительности.

4) Дифференцирование сигнала $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$:

$$\underline{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \right] e^{-j\omega t} dt =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{X}(\omega)e^{j\omega\varepsilon} - \underline{X}(\omega)}{\varepsilon} = j\omega \underline{X}(\omega).$$

5) Интегрирование сигнала $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt :$

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) = \pi \underline{X}(0) \delta(\omega).$$

6) Смещение спектра

$$\underline{Y}(\omega) = \underline{X}(\omega - \omega_0) :$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) = e^{j\omega_0 t} x(t). \quad 7)$$

Спектр произведения сигналов – есть свертка сигналов.

Если $y(t) = x(t)g(t)$, то

$$\underline{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\nu) e^{-j\nu t} d\nu \right] g(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(v) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j(\omega-v)t} dt dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(v) \underline{G}(\omega-v) dv = \underline{X}(\omega) * \underline{G}(\omega).$$

Спектр свертки сигналов – есть произведение спектров исходных сигналов.

Если $y(t)=x(t)*g(t)$, то

$$\begin{aligned} \underline{Y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau = \\ &= \underline{X}(\omega) \underline{G}(\omega). \end{aligned}$$

9) Спектр действительного сигнала, умноженного на гармоническую функцию $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$$\begin{aligned} \underline{Y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \underline{X}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \underline{X}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Реализации приведены на рис.3.1 , рис.3.2 и на рис.3.3.

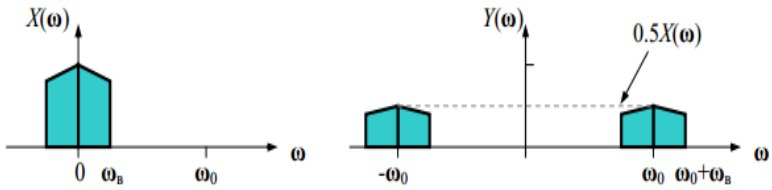
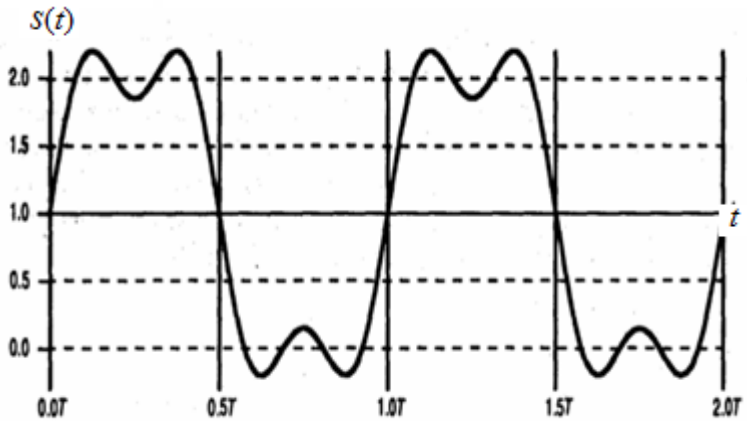


Рис. 3.1. Перенос спектра сигнала при умножении на гармоническую функцию



$$a) s(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin(2\pi f t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi(3f)t) \right)$$

Рис. 3.2. Сигнал с постоянной составляющей

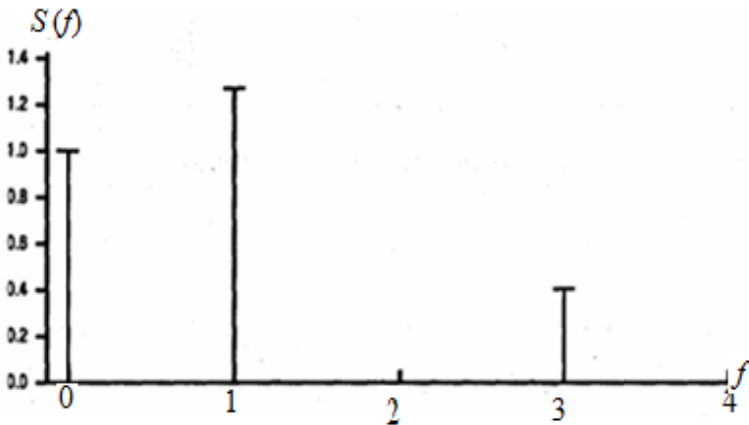


Рис. 3.3.Спектр сигнал с постоянной составляющей

10) Из равенства Парсеваля вытекает вывод о том, что мощность сигнала есть сумма квадратов модулей коэффициентов ряда Фурье.

4. Преобразование Гильберта, модуляция сигнала

4.1. Описание и свойства преобразования Гильберта

Аналитическим сигналом называется сигнал

$$\underline{s}_a(t) = s(t) + js_{\perp}(t),$$

где $s(t)$ – сигнал, $s_{\perp}(t)$ – квадратурное дополнение (сопряженное сигнала). Сопряженный сигнал связан с исходным сигналом преобразованием Гильберта:

$$s_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\theta)}{t - \theta} d\theta.$$

(преобразование – есть свертка сигнала $s(t)$ с функцией $1/\pi t$).

Частотная характеристика преобразования:

$$K_{\perp}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} d\omega = \begin{cases} j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j, & \omega > 0 \end{cases},$$

т.е. преобразование Гильберта – идеальный фазовращатель. В частности, если на входе

преобразователя Гильберта действительный сигнал, то и на выходе тоже действительный сигнал.

Например: если $s(t) = \cos(\omega_0 t)$, то $s_{\perp}(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Обратное преобразование: $s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{\perp}(\theta)}{t - \theta} dt$.

Рассчитаем спектр аналитического сигнала

$\underline{s}_a(t) = s(t) + js_{\perp}(t)$ на рис.4.1:

$$\underline{S}_a(\omega) = \underline{S}(\omega) + j\underline{S}_{\perp}(\omega) = \underline{S}(\omega) [1 + j\underline{K}_{\perp}(\omega)] = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ \underline{S}(0), & \omega = 0 \\ 2\underline{S}(0), & \omega > 0 \end{cases},$$

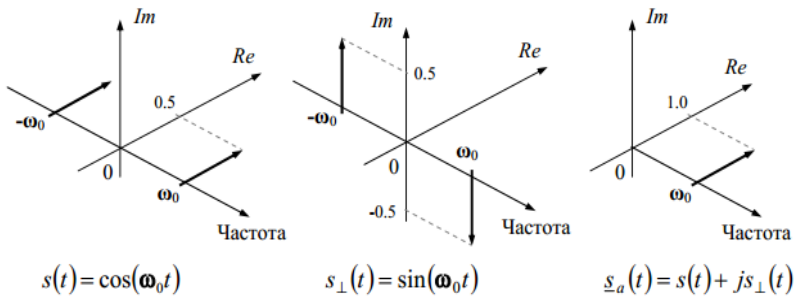


Рис. 4.1, а Графическая интерпретация спектра аналитического сигнала

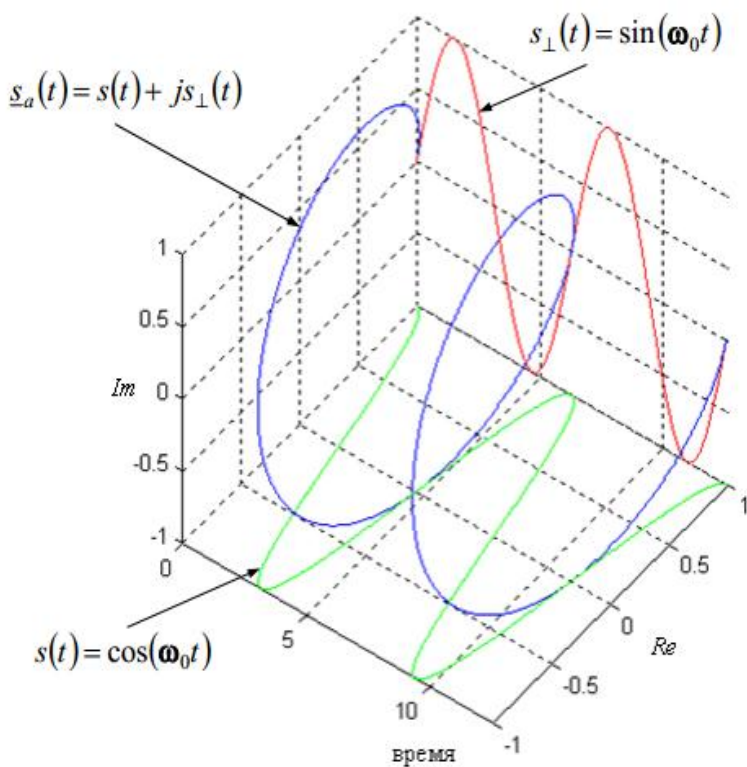


Рис. 4.1, б. Графическая интерпретация аналитического сигнала во временной области

Таким образом, симметричный спектр действительного сигнала $s(t)=\cos(\omega_0 t)$ становится односторонним,

совпадающим со спектром исходного сигнала (для положительных частот, с точностью до множителя 2.0).

Важными свойствами аналитического сигнала является возможность определения:

- 1) Огибающая сигнала

$$A(t) = |\underline{s}_a(t)| = \sqrt{s^2(t) + s_{\perp}^2(t)} .$$

- 2) Полная фаза сигнала

$$\Psi(t) = \arg(\underline{s}_a(t)) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{s_{\perp}(t)}{s(t)}\right), & s(t) \geq 0 \\ \pi + \arctg\left(\frac{s_{\perp}(t)}{s(t)}\right), & s(t) < 0 \end{cases} .$$

Одной из областей применения преобразования Гильберта является модуляция и демодуляция сигнала.

4.2. Модуляции сигнала

Одной из важнейших проблем обработки сигналов является задача передачи сигнала по каналам связи.

Здесь можно выделить два важных аспекта:

1) рациональное использование характеристик канала связи (задача передачи как можно большего количества информации за минимальное время и в узком частотном диапазоне);

2) передача данных без искажения (помехоустойчивость передачи).

Обе задачи крайне важны с практической точки зрения, т.к. фактически эффективность их решения обуславливает надежность и стоимость передачи.

Например, витая пара 5 класса (как среда передачи сигнала) имеет полосу частот порядка 300 МГц. Допустим необходимо передавать сигнал с полосой порядка 4 кГц. Тогда если генератор такого сигнала подключить к витой паре, то приемник естественно получит этот сигнал. Однако возможности кабеля с его полосой пропускания оказываются не востребованными. Кроме того, если бы необходимо передавать много сигналов с полосой 4 кГц (например: задача городской телефонии). Тогда очевидно, возникает задача: как «разместить» низкочастотные

сигналы в полосе частот кабеля так, чтобы они не влияли (не искажали) друг на друга. В частности, для решения подобных задач необходимо уметь сдвинуть спектры сигнала в другую область частот, для чего, согласно свойствам преобразования Фурье, достаточно умножить сигнал на гармоническую функцию – рис.4.2.

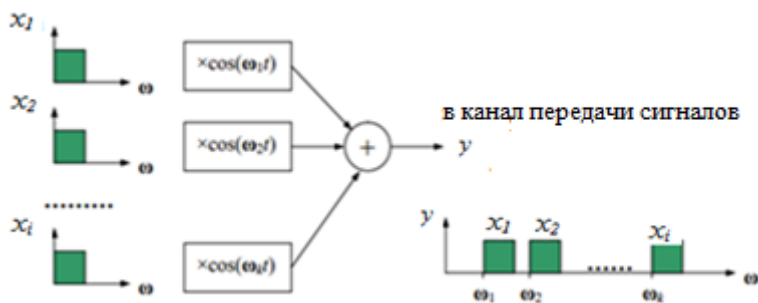


Рис. 4.2 Схематичное представление частотного
уплотнения канала

Фактически рассмотренный процесс и есть частный случай модуляции сигнала. Модуляция сигнала в общем случае рассматривается как изменение одного параметра сигнала другим. В самом распространенном случае модуляции подвергается гармонический сигнал с частотой ω_0 , который называется несущей. По характеру

воздействия на несущий синусоидальный сигнал выделяют четыре вида модуляции (которые нашли практическое применение): амплитудная, частотная, фазовая и квадратурная. При этом сигнал, изменяющий параметр несущей, называется модулирующим. Сам процесс изменения – модуляцией, обратной операцией является – демодуляция. Типичными практическими задачами, в которых не обойтись без модуляции, является радиопередача информации (сотовая связь, телевидение, радары и т.п.), поскольку информационные сигналы – это широкополосные низкочастотные сигналы, которые по физическим законам неудобны для передачи антеннами с малыми габаритами и приемлемым КПД системы приема/передачи. Также при радиопередаче данных надо учитывать свойства свободного пространства – есть частоты, на которых наблюдается сильное затухание колебаний, например, в атмосфере, гидросфере и т.п. Поэтому не всякий диапазон частот пригоден для осуществления радиопередачи.

Наиболее простой для понимания является **амплитудная** модуляция, которая подразумевает изменение амплитуды несущей информационным сигналом $A(t)$. Одним из условий осуществления модуляции является требование, что частота несущей много больше частоты (полосы) сигнала.

Пусть $A(t) = \sin(\omega_1 t) + 0.7 \sin(2\omega_1 t)$.

Построим сигнал

$$s(t) = [\sin(\omega_1 t) + 0.7 \sin(2\omega_1 t)] \cos(\omega_0 t)$$

при $\omega_1 \ll \omega_0$ (рис.4.3).

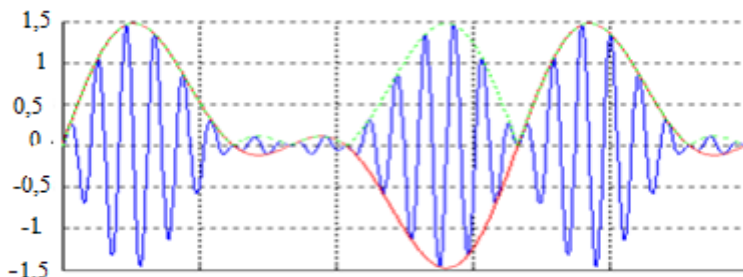


Рис. 4.3. Проблема неоднозначности при АМ модуляции

Из рис. 4.3 видно, что выделение огибающей для восстановления передаваемого сигнала $A(t)$ имеет неоднозначный характер (зеленая огибающая не соответствует передаваемому сигналу – показан красным цветом). Чтобы избежать неоднозначности (говорят перемодуляции) при амплитудной модуляции двухполярным сигналом вводят смещение (A_0) и масштабирующий множитель (ξ):

$$s(t) = [A_0 + \xi A(t)] + \cos(\omega_0 t).$$

На рис. 4.4 представлен результат амплитудной модуляции того же сигнала (что и на рис.4.3), но при $A_0=1$, $\xi=0.5$.

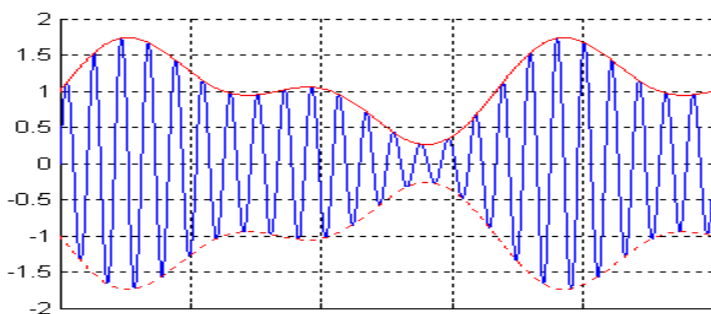


Рис. 4.4. Амплитудная модуляция без неоднозначности

Соответственно, огибающая (показана красным цветом) формируется однозначным образом.

Если информационный сигнал $A(t)$ есть гармоническая функция, то такую амплитудную модуляцию называют однотоновой:

$$s(t) = [A_0 + A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)] \cos(\omega_0 t). \quad \text{При этом}$$

выделяется коэффициент $m = A_m/A_0$, называемый глубиной модуляции, значение которого можно связать с минимальным и максимальным значениями

$$\text{модулирующего сигнала: } m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

Запишем выражение для однотонового амплитудно-модулированного сигнала:

$$\begin{aligned} s(t) &= [A_0 + A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + 0.5 A_m \cos((\omega_0 - \omega_1)t + \varphi_0 - \varphi_1) + \\ &+ 0.5 A_m \cos((\omega_0 + \omega_1)t + \varphi_0 + \varphi_1) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ \frac{mA_0}{2} \cos((\omega_0 - \omega_1)t + \varphi_0 - \varphi_1) + \\ &+ \frac{mA_0}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t + \varphi_0 + \varphi_1). \end{aligned}$$

Таким образом, в спектре сигнала однотоновой амплитудной модуляции будет присутствовать три спектральных пика – рис. 4.5 ($\omega_0 \gg \omega_1$).

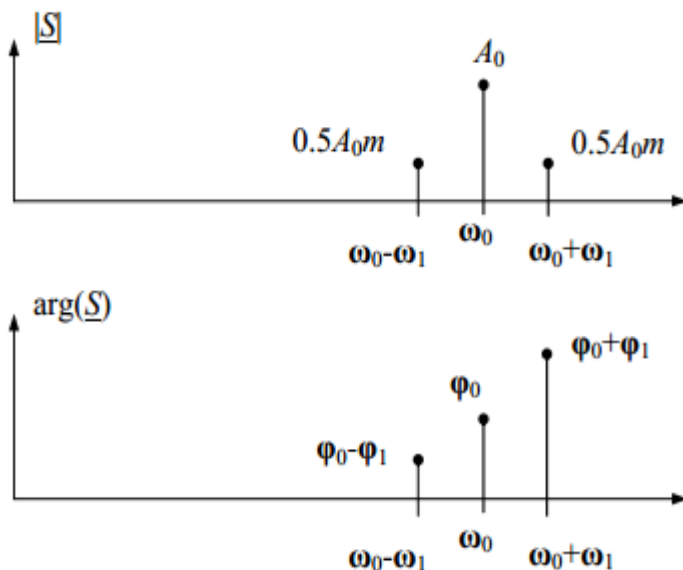


Рис. 4.5. Амплитудный и фазовый спектры однотоновой АМ сигнала

В общем случае в частотной области АМ сигнал содержит несущую частоту и две боковые полосы:

– верхнюю с частотой $\omega_0 + \omega_1$, представляет собой копию спектра информационного (модулирующего) сигнала;

– нижнюю с частотой $\omega_0 - \omega_1$, представляет собой зеркальную копию спектра информационного (модулирующего) сигнала.

Рассмотрим амплитудно-модулированный сигнал:

$$s(t) = [0.4 \cos(\omega_u t)] \cos(\omega_0 t),$$

где ω_0 – несущая частота, ω_u – частота модулирующего сигнала $\omega_u \ll \omega_0$.

Тогда квадратурное дополнение:

$$s_{\perp}(t) = [0.4 \cos(\omega_u t)] \cos(\omega_0 t),$$

и огибающая сигнала: $A(t) = |0.4 \cos(\omega_u t)|$.

Графическая интерпретация спектра АМ сигнала приведена на рис.4.6 и рис.4.7.

Недостатки амплитудной модуляции:

– Более двух третей мощности тратиться на передачу бесполезной (с точки зрения информации) несущей.

Поэтому существует несколько модификаций амплитудной модуляции: для снижения ширины полосы

частот канала одну из боковых полос подавляют (называется однополосой АМ); из энергетических соображений подавляют несущую (если приемник точно «знает» величину ω_0).

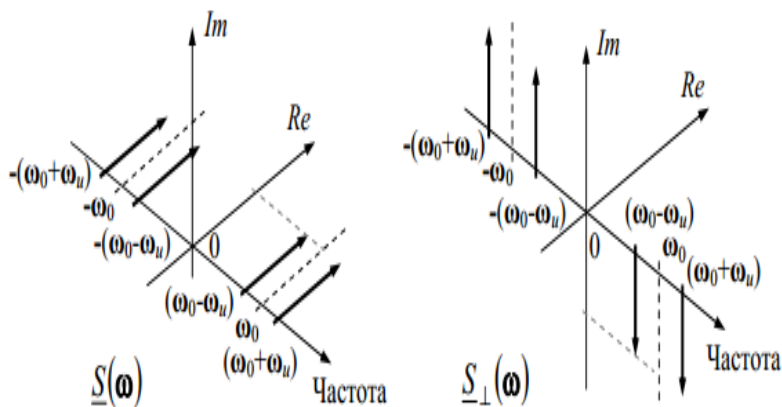


Рис. 4.6. Графическая интерпретация спектра АМ сигнала

– Однако эти усилия не могут преодолеть еще один недостаток амплитудной модуляции – плохая помехоустойчивость. Для устранения этого недостатка применяют угловые виды модуляции.

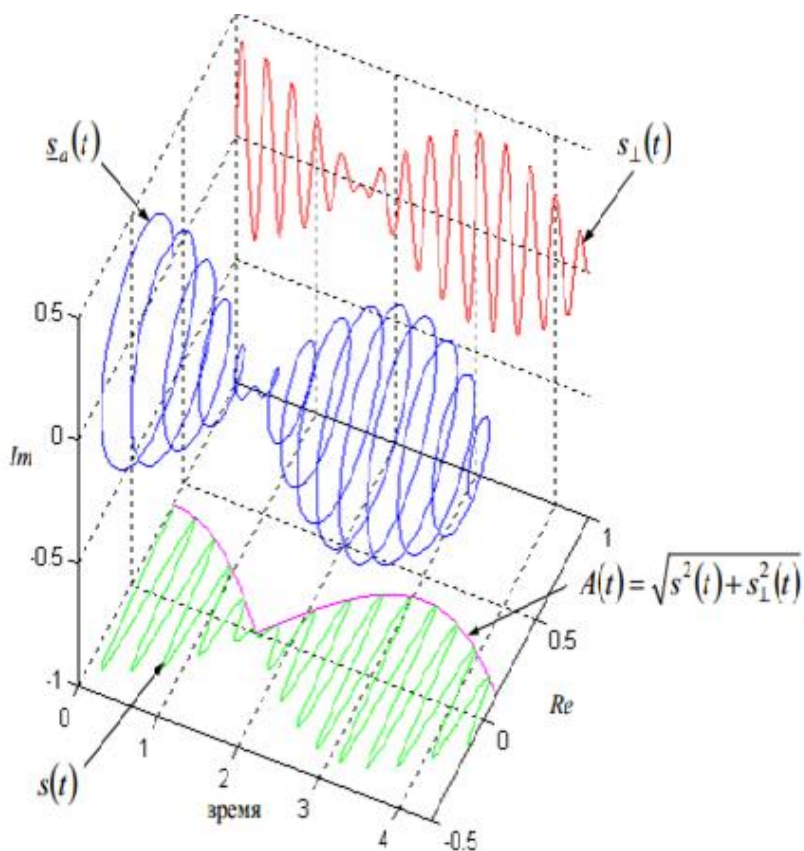


Рис. 4.7. Графическая интерпретация АМ сигнала во временной области (аналитический сигнал и огибающая)

– Еще одним недостатком является широкая полоса сигнала – в два раза большая, чем полоса информационного сигнала. Действительно, если принять во внимание что модулирующий сигнал содержит множество гармоник (имеет сложную форму), т.к. однотоновая АМ на практике не применяется, становится очевидным, что ширина спектра АМ сигнала в два раза больше ширины спектра модулирующего сигнала.

5. Дискретизация аналогового сигнала

Преобразование аналоговых сигналов в цифровую форму состоит из двух не связанных друг с другом операций – дискретизации и квантования непрерывных сигналов[9]. *Собственно дискретизация* - это процесс определения моментов времени, в которые должны быть произведены отсчеты; *квантование* - перевод этих отсчетов в цифровую форму. Как правило, эти две операции осуществляются при помощи аналого-цифровых преобразователей (АЦП), которые связывают источник аналогового сигнала с компьютером. АЦП обычно представляют собой двоичные или двоично-десятичные системы. Двоичная система преобразует аналоговые сигналы в двоичный цифровой код, а двоично-десятичная система -- в цифровой код, который может быть представлен десятью цифрами. Конструкция двоичной системы проще, но для обработки данных на компьютере нужно составлять программы в машинном коде. Двоично-десятичная система сложнее, но она позволяет

производить обработку данных наблюдений с помощью программ, написанных на обычном алгоритмическом языке.

Согласно теореме Котельникова (Найквиста), любой непрерывный сигнал с конечным спектром (то есть таким спектром, в котором спектральные составляющие, соответствующие частотам выше или равным некоторой частоты F_n , отсутствуют) может быть представлен в виде отсчётов дискретного сигнала с частотой дискретизации $f_s > 2F_n$. При этом такое преобразование является взаимно однозначным, то есть при соблюдении условий теоремы Котельникова (Найквиста) по дискретному сигналу можно восстановить исходный сигнал с финитным спектром без искажений.

Перевод аналогового сигнала в дискретную форму производится, как правило, через равные промежутки времени T . Важно правильно выбрать величину интервала дискретизации, т.е. правильно провести операцию *собственно дискретизации*. Согласно теореме Котельникова, этот интервал определяется частотой

Найквиста F_n : чтобы представление сигнала $x(t)$ в дискретной форме было однозначным, максимальный интервал дискретизации не должен превышать $T=1/(2F_n)$.

Если осуществлять выборки через интервалы времени, большие T , то можно столкнуться с эффектом маскировки (подмены) частот, т.е. возможно перепутывание низко- и высокочастотных составляющих исходного процесса. Явление подмены (наложение – aliasing) является источником ошибок, которые могут возникнуть лишь при работе с выборочными данными.

Чтобы пояснить эффект маскировки частот, рассмотрим преобразование непрерывного сигнала, показанного на рис. 5.1, в дискретную форму.

Интервал времени между соседними отсчетами составляет T с. Следовательно, скорость дискретизации равна $1/T$ отсчетов в секунду. Для того чтобы выборочная функция $x(i)$ содержала все те же частоты, что и исходный непрерывный сигнал $x(i)$, на каждый цикл колебания, согласно теореме Котельникова, должно приходиться не менее двух отсчетов, а наиболее высокая

частота, которая может быть выделена при дискретизации со скоростью $1/T$ отсчетов в секунду, равна частоте Найквиста F_n .

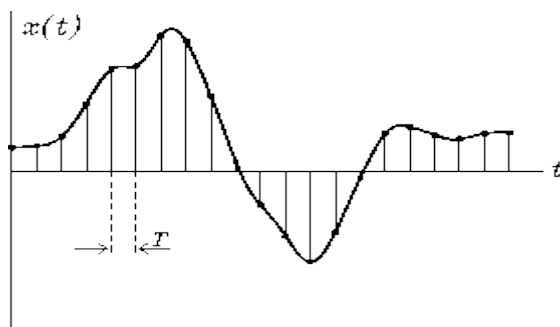


Рис. 5.1. Преобразование непрерывного сигнала в дискретную форму

Если в исходном сигнале содержатся более высокие частоты ($f > F_n$), то они будут свернуты в диапазон $[0, F_n]$ Гц и не будут различимы от более низких частот этого диапазона (рис. 5.1). Свертывание составляющих исходного процесса относительно частоты Найквиста наглядно можно изобразить с помощью диаграммы подмен – рис. 5.2.

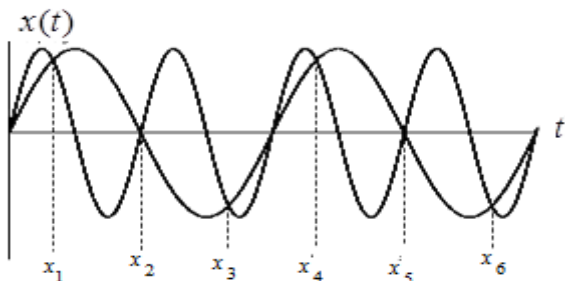


Рис. 5.2. Иллюстрация эффекта подмены частоты гармонического сигнала.

На рис. 5.3,а показаны исходные частоты, т.е. частоты, содержащиеся в сигнале $x(t)$.

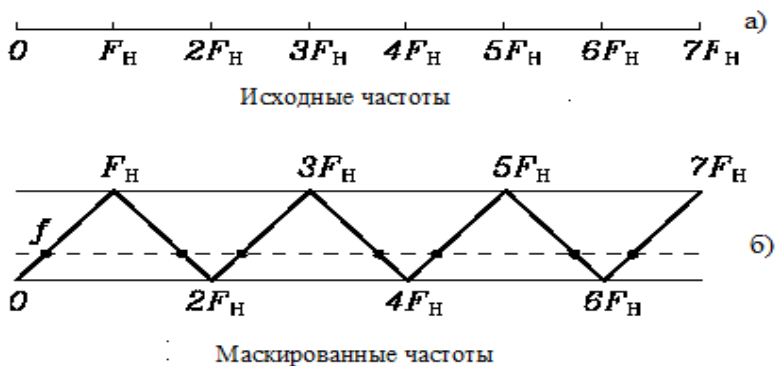


Рис. 5.3. Диаграмма подмены частот относительно частоты Найквиста

На рис. 5.3,б ось частот сложена гармошкой над интервалом $[0, F_n]$ Гц кусками по $[0, F_n]$ Гц. Видно, что для любой частоты f из диапазона $[0, F_n]$ Гц замаскированными под частоту f являются высокие частоты $2Fn \pm f, 4Fn \pm f, 2nFn \pm f$, где $n=1,2,3,\dots$

Пример. Пусть имеется два непрерывных сигнала $x(t) = \cos(2\pi f t)$, $y(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, с частотами f и f_1 . Если время дискретизации равно T , то выборочные функции $x(i)$ и $y(i)$ представляются последовательностями дискретных величин, соответствующих моментам времени $t = iT = i/(2F_n)$:

$$x(t) = \cos(2\pi f iT) = \cos\left(2\pi f \frac{i}{2F_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi f i}{F_n}\right),$$

$$y(t) = \cos(2\pi f_1 iT) = \cos\left(2\pi f_1 \frac{i}{2F_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi f_1 i}{F_n}\right).$$

Пусть частоты f и f_1 связаны соотношением $f_1 = 2nF_n \pm f$ тогда

$$y(i) = \cos(\pi(2nF_n \pm f) \frac{i}{F_n}) = \cos(2n\pi i \pm \frac{\pi f i}{F_n}) = \cos(\frac{\pi f i}{F_n}) = x(i).$$

Таким образом, при снятии отсчетов с интервалами

$$\frac{1}{(2F_n)}$$

значения косинусов с частотами f и $2nF_n \pm f$

одинаковы. Например, если $F_n = 100$ Гц, то составляющие с частотой 30 Гц будут неотличимы от составляющих с частотами 170, 230, 370 Гц и т. д.

На рис. 5.4 показан пример расчета спектральной плотности (a) и спектральная плотность этого же процесса, вычисленная по дискретному временному ряду с частотой дискретизации $2Fn$ (b). Если в спектре имеются частоты $f > F_n$ (рис. 5.4, a), то график истинной спектральной плотности будет искажен вследствие свертывания частот (рис. 5.4, b).

На практике при цифровом анализе данных избавиться от ошибок маскировки частот можно единственным способом. Для этого еще до процесса дискретизации необходимо подавить в исходном аналоговом сигнале ту его часть, которая может содержать

частоты, превышающие частоту Найквиста.

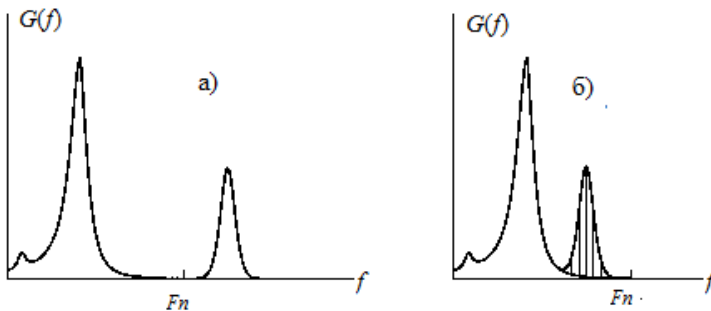


Рис. 5.4. Спектральная плотность процесса

Это делают с помощью низкочастотного фильтра, который устанавливается перед аналого-цифровым преобразователем. Такие низкочастотные фильтры называются *противоподменными*.

Наложение спектров особенно заметно на тех участках сигнала рис.5.5,а, которые содержат значительные высокочастотные спектральные составляющие.

На рис.5.5,а – изображение, уменьшенное, рис.5.5,б – изображение, уменьшенное с применением фильтра нижних частот. Так, на приведённых фотографиях рис.5.5,а небо практически не подверглось наложению

спектров, но эффект становится заметным, если обратить внимание на резкие переходы.

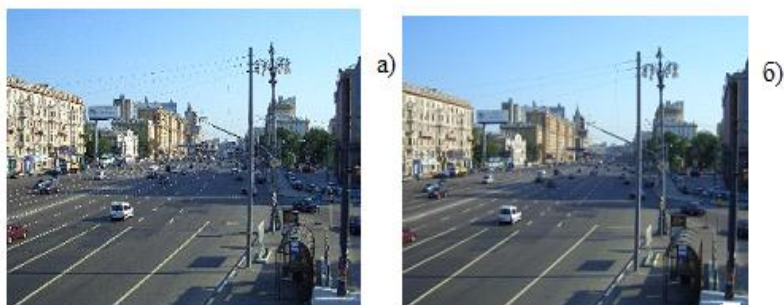


Рис.5.5. Иллюстрация эффекта наложения спектров (алиасинга) при уменьшении разрешения (децимации) растрового изображения. без фильтрации

Передискретизация в обработке сигналов – изменение частоты дискретизации дискретного (чаще всего цифрового) сигнала. Алгоритмы передискретизации широко применяются при обработке звуковых сигналов, радиосигналов и изображений (передискретизация растрового изображения – это изменение его разрешения в пикселах).

Отсчёты сигнала, соответствующие новой частоте дискретизации, вычисляются по уже имеющимся отсчётам и не содержат новой информации.

Повышение частоты дискретизации называется интерполяцией, понижение – децимацией.

При передискретизации отсчёты сигнала, соответствующие одной частоте дискретизации, вычисляются по имеющимся отсчётам этого же сигнала, соответствующим другой частоте дискретизации (при этом предполагается, что обе частоты дискретизации соответствуют условиям теоремы Котельникова). Идеальная передискретизация эквивалентна восстановлению непрерывного сигнала по его отсчётам с последующей дискретизацией его на новой частоте.

Процесс уменьшения частоты дискретизации сигнала называется децимацией. Иногда этот термин употребляют только для уменьшения частоты дискретизации в целое число раз N . Децимация цифрового сигнала с целым коэффициентом производится в два этапа[10]:

1. Цифровая фильтрация сигнала с целью удаления высокочастотных составляющих, не удовлетворяющих условиям теоремы Котельникова для новой частоты дискретизации;

2. Удаление (отбрасывание) лишних отсчетов (сохраняется каждый N -й отсчёт).

В англоязычной литературе второй из этих этапов иногда обозначают термином *downsampling*. В обиходе этот термин может употребляться как синоним термина «децимация».

На рис.5.6 показана иллюстрация алгоритма децимации дискретного сигнала (с коэффициентом 2).

Первый этап необходим для исключения наложения спектров, природа которого аналогична наложению спектров при первоначальной дискретизации аналогового сигнала. При программной реализации алгоритма децимации «лишние» отсчёты не удаляются, а просто не вычисляются.

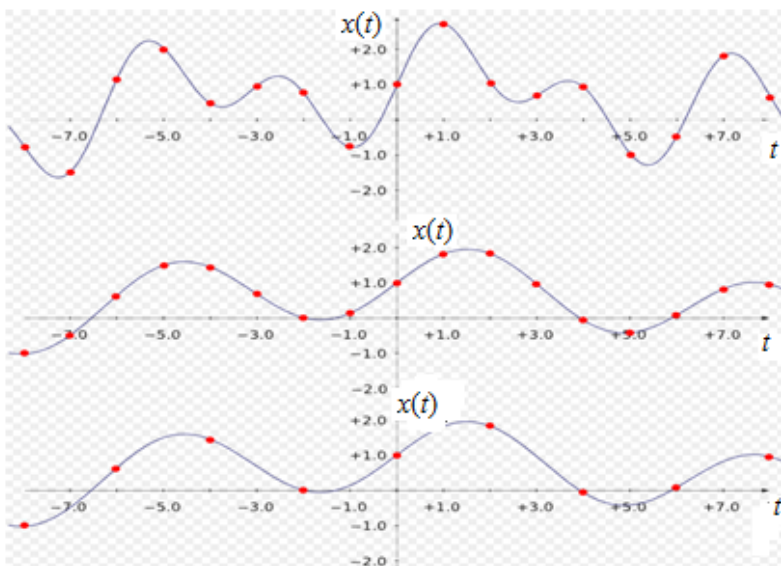


Рис. 5.6. Иллюстрация алгоритма децимации дискретного сигнала (с коэффициентом 2)

Красные точки на рис.5.6 обозначают отсчеты, сплошные линии – непрерывный сигнал, представлением которого эти отсчеты являются. Сверху – исходный сигнал. В середине – этот же сигнал после фильтрации в цифровом фильтре нижних частот. Снизу – децимированный сигнал.

Интерполяцией называют увеличение частоты в целое или дробное число раз путём вычисления промежуточных отсчетов по уже имеющимся. Идеальная интерполяция позволяет точно восстановить значения сигнала в промежуточных отсчётах.

Стандартный алгоритм интерполяции сигнала с целым коэффициентом заключается в следующем:

1) вставка нулевых отсчетов на место отсчетов, которые необходимо вычислить;

2) фильтрация сигнала цифровым фильтром нижних частот для того, чтобы убрать спектральные составляющие сигнала, которых заведомо не могло быть в исходном сигнале согласно теореме Котельникова; выход фильтра умножается на коэффициент интерполяции для нормирования.

В англоязычной литературе первый из этих этапов иногда обозначается термином *upsampling*. При этом в обиходе этот термин может употребляться как синоним термина «интерполяция».

При программной реализации интерполяции нулевые отсчёты не участвуют в вычислении выходного сигнала фильтра, что позволяет оптимизировать процесс вычисления. На рис. 5.7 приведена иллюстрация алгоритма интерполяции дискретного сигнала (с коэффициентом 2). Красные точки обозначают исходные отсчеты сигнала, сплошные линии – непрерывный сигнал, представлением которого эти отсчеты являются. Сверху — исходный сигнал. В середине – этот же сигнал со вставленными нулевыми отсчётами (зеленые точки). Снизу – интерполированный сигнал (синие точки – интерполированные значения отсчётов).

Для того, чтобы изменить частоту дискретизации сигнала в M/N раз (M и N – целые положительные числа), можно сначала увеличить частоту дискретизации в M раз, а затем уменьшить её в N раз. Фильтрацию сигнала достаточно произвести всего один раз – между интерполяцией и децимацией.

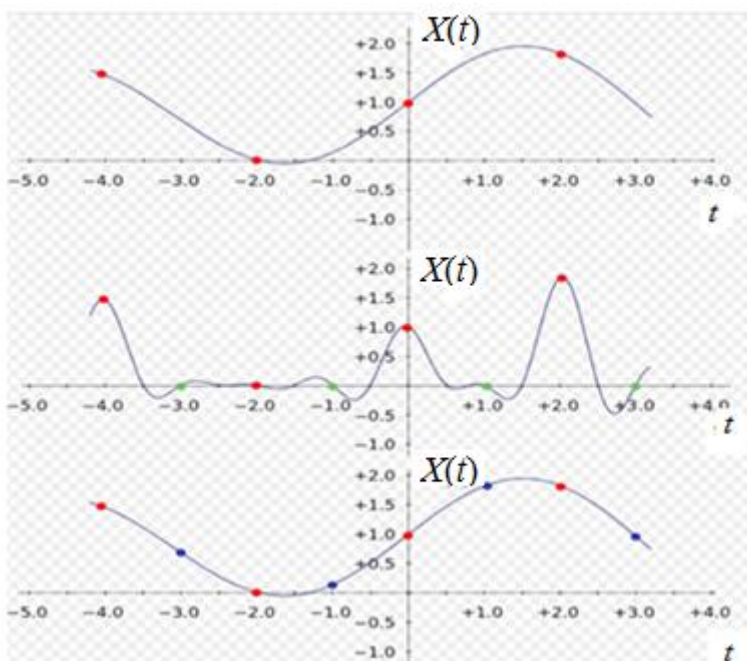


Рис.5.7. Иллюстрация алгоритма интерполяции дискретного сигнала. Комбинация интерполяции и децимации

Недостатком данного метода является необходимость фильтрации сигнала на повышенной в M раз частоте дискретизации, что требует значительных вычислительных ресурсов. При этом соответствующая частота может во много раз превосходить как исходную, так и

окончательную частоту передискретизации, особенно если M и N – близкие большие числа. Так, например, при передискретизации звукового сигнала с 44100 Гц до 48000 Гц этим методом необходимо увеличить частоту дискретизации в 160 раз до 7056000 Гц и затем уменьшить её в 147 раз до 48000 Гц. Таким образом, в данном примере вычисления приходится производить на частоте дискретизации более 7 МГц.

6. Квантование сигналов

Квантование сигнала по уровню является операцией, позволяющей осуществить переход от бесконечного множества состояний передаваемого сигнала к фиксированному количеству разрешенных состояний, называемых уровнями квантования.

Переход к конечному множеству разрешенных состояний может быть обоснован тем, что в процессе передачи сигналов канал вносит искажения и помехи, поэтому восстановленный сигнал может быть известен с точностью до помехи, помимо этого близкие по величине сигналы являются неразличимыми. То есть, передача точных значений сигнала не является необходимой.

Совокупность разрешенных уровней носит название «шкалы квантования», а расстояние между двумя соседними уровнями – «шага квантования». При попадании сигнала $a(t)$ в пределы шага квантования осуществляется округление его значения до значения уровня квантования $a_{\text{кв}}(t)$.

Разница между исходным значением сигнала и его квантованным значением называется шумом квантования $\varepsilon_{кв}(t) = a(t) - a_{кв}(t)$ (рис.6.1).

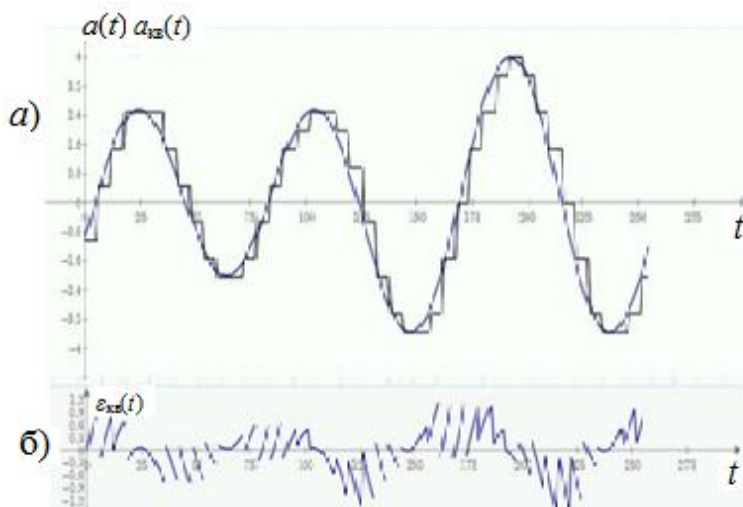


Рис.6.1: а – квантование сигнала по уровню; б – шум квантования

Если уровни квантования равномерно распределены по всему диапазону, устройство квантования именуется *равномерным*, или *линейным*. Каждое дискретное значение аналогового сигнала аппроксимируется квантованным импульсом: аппроксимация дает ошибку, не превышающую $q/2$ в положительном направлении или $-q/2$

в отрицательном. Таким образом, ухудшение сигнала вследствие квантования ограничено половиной квантового интервала, $\pm q/2$ вольт.

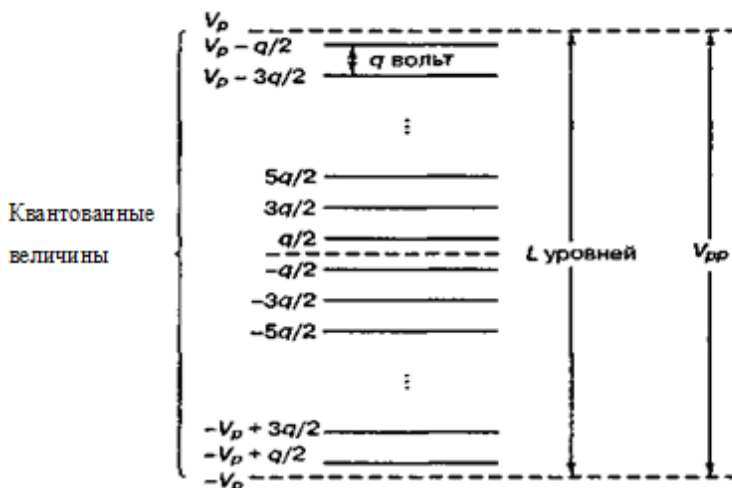


Рис.6.2. Уровни квантования

Хорошим критерием качества равномерного устройства квантования является его дисперсия (средний квадрат ошибки $e_i = \tilde{x}_i - x_i$ при подразумеваемом нулевом среднем, где \tilde{x}_i – квантованный отсчет, x_i – квантуемый отсчет). Если считать, что ошибка квантования e равномерно распределена в пределах

интервала квантования шириной q (т.е. принимает все возможные значения с равной вероятностью), то дисперсия ошибок для устройства квантования составляет

$$\sigma^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e) de = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12} \quad (6.1)$$

где $p(e) = 1/q$ при $-q/2 < e < q/2$ и 0 для др.

q – плотность вероятностей ошибки квантования.

Дисперсия σ^2 соответствует *средней мощности шума квантования*. Пиковую мощность аналогового сигнала (нормированную на 1 Ом) можно выразить как

$$V_p^2 = \left(\frac{V_{pp}}{2} \right)^2 = \left(\frac{q(L-1)}{2} \right)^2 \approx \frac{q^2 L^2}{2}, \quad (6.2)$$

где L – число уровней квантования. Объединение выражений (6.1) и (6.2) дает отношение *пиковой* мощности сигнала к *средней* мощности квантового шума $(S/N)_q$:

$$(S/N)_q = \frac{q^2 L^2 / 4}{q^2 / 12} = 3L^2, \quad (6.3)$$

где $N = \sigma^2$ – средняя мощность шума квантования. Очевидно, что отношение сигнал/шум $(S/N)_q$ квадратично растет с числом уровней квантования. В пределе ($L \rightarrow \infty$) сигнал становится аналоговым (бесконечное число уровней квантования и нулевой шум квантования). Для случайных сигналов в параметр $(S/N)_q$ входит не максимальная, а средняя мощность сигнала.

Недостатком равномерного квантования является то, что защищенность от шумов квантования минимальна для наиболее слабых сигналов и увеличивается пропорционально увеличению уровня сигнала. Для выравнивания величины шумов квантования при изменении уровня сигнала в широких пределах и соответственно для уменьшения количества уровней квантования и уменьшения разрядности двоичного кода применяют неравномерное квантование, при котором шаг квантования имеет минимальное значение для слабых

сигналов и увеличивается с увеличением уровня входного сигнала. Неравномерное квантование может обеспечить лучшее квантование слабых сигналов и грубое квантование сильных сигналов. Значит, в этом случае шум квантования может быть пропорциональным сигналу. Результатом является повышение общего отношения сигнал/шум – уменьшение шума для доминирующих слабых сигналов за счет повышения шума для редко встречающихся сильных сигналов. На рис. 6.3 сравнивается квантование слабого и сильного сигналов при равномерном и неравномерном квантовании. Ступенчатые сигналы представляют собой аппроксимации аналоговых сигналов (после введения искажения вследствие квантования).

Применение неравномерного квантования позволяет обеспечить требуемую защищенность от шумов квантования для наиболее слабых речевых сигналов при восьмиразрядном кодировании вместо двенадцатиразрядного при равномерном квантовании.

Чаще всего неравномерное квантование реализуется следующим образом: вначале исходный

сигнал деформируется с помощью устройства, имеющего логарифмическую характеристику сжатия (рис.6.4).



Рис. 6.3. Равномерное и неравномерное квантование сигналов

После сжатия деформированный сигнал подается на вход равномерного (линейного) устройства квантования. После приема сигнал пропускается через устройство с характеристикой, обратной характеристике сжатия.

Описанная пара этапов обработки сигнала (сжатие осуществляет компрессор, а расширение сигнала осуществляет экспандер) в совокупности обычно именуется компандированием.

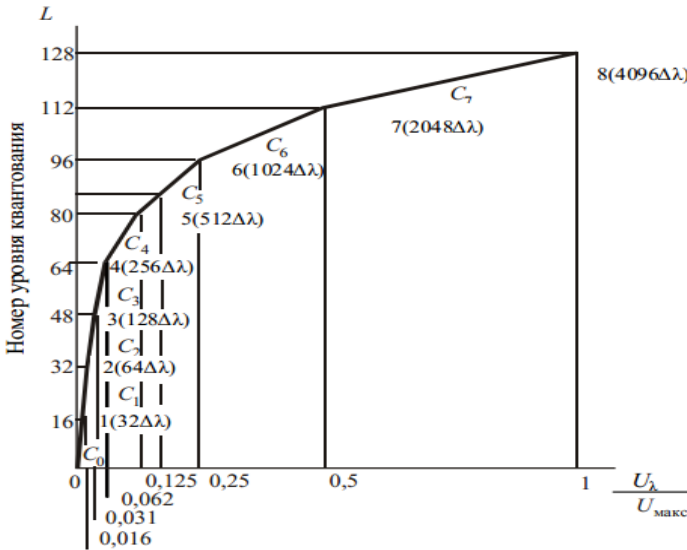


Рис.6.4. Сегментная характеристика компрессии закона $A=87,6/13$ (для положительной области)

В связи используют обычно один из двух законов компандирования (оба предполагают битность 8): μ -закон — стандартный для Северной Америки и Японии; A -закон — используется в Европе и России (табл.6.1 и 6.2).

Таблица 6.1. Кодирование (декодирование) для сегментной характеристики с законом $A = 87,6/13$

Номер сегмента	Диапазон входных амплитуд сигнала, у.е	Размер шага квантования, у.е	Код сегмента	Код уровня квантования	Номер кодовой комбинации	Амплитуда сигнала на выходе кодера, у.е
C0	0-2	2	000	0000	0	1
	2-4			0001	1	3
	-			0010	-	-
	-			-	-	-
	30-32			1111	15	31
C1	32-34	2	001	0000	16	33
	-			-	-	
	62-64			1111	31	63
C2	64-68	4	010	0000	32	66
	-			-	-	
	124-128			1111	47	126
C3	128-136	8	011	0000	48	132
	-			-	-	
	248-256			1111	63	252
C4	256-272	16	100	0000	64	364
	-			-	-	
	496-512			1111	79	504
C5	512-544	32	101	0000	80	528
	-			-	-	
	992-1024			1111	95	1008
C6	1024-1088	64	110	0000	96	1056
	-			-	-	
	1984-2048			1111	111	2016
C7	2048-2176	128	111	0000	112	2112
	-			-	-	
	3968-4096			1111	127	4032

Таблица 6.2 Кодирование (декодирование) для сегментной характеристики с законом $\mu = 255/15$

Номер сегмента	Диапазон входных амплитуд сигнала, у.е	Размер шага квантования, у.е	Код сегмента	Код уровня квантования	Номер кодовой комбинации	Амплитуда сигнала на выходе кодера, у.е
C0	0-1	1	000	0000	0	0
	1-3			0001	1	2
	3-5	0010		2	4	
	-	-		-	-	
	20-31	1111		15	30	
C1	31-35	4	001	0000	16	30
	-			-	-	
	91-95			1111	31	93
C2	95-103	8	010	0000	32	99
	-			-	-	
	215-223			1111	47	219
C3	223-239	16	011	0000	48	231
	-			-	-	
	463-479			1111	63	471
C4	479-511	32	100	0000	64	495
	-			-	-	
	959-991			1111	79	975
C5	991-1055	64	101	0000	80	1023
	-			-	-	
	1951-2015			1111	95	1983
C6	2015-2143	128	110	0000	96	2079
	--			--	-	
	39351-4063			1111	111	3999
C7	4063-4319	256	111	0000	112	4191
	-			-	-	
	7903-8159			1111	127	8031

Амплитудные характеристики компрессора и экспандера изображены на рис.6.5.

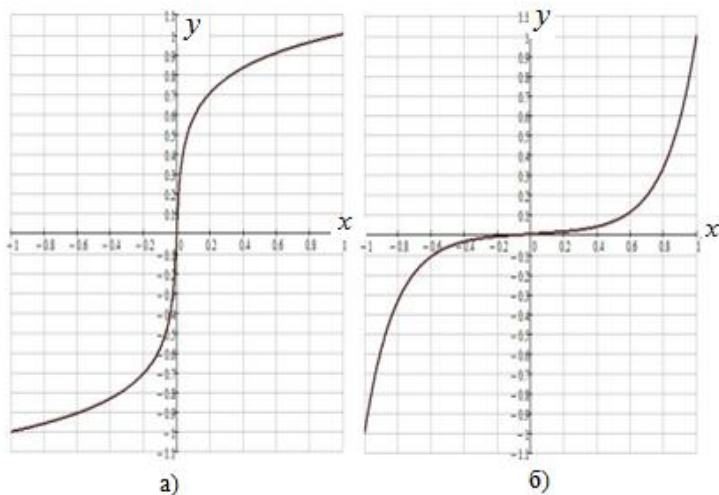


Рис. 6.5. Амплитудные характеристики а) компрессора, б) экспандера

При 128 значениях уровней нелинейное кодирование осуществляется за 8 тактов и включает три основных этапа:

1) определение и кодирование полярности входного сигнала, определяется на первом такте (если положительный, то указывается 1, отрицательный – 0);

2) определение и кодирование номера сегмента, в котором находится кодируемый отсчет, например: 0, если отсчет находится в сегменте 0; 1, если отсчет находится в сегменте 1; 2, если отсчет находится в сегменте 2 и т. д.

Номер сегмента или узла, соответствующего номеру этого сегмента, характеристики компрессии, в котором находится отсчет, указывается в двоичном коде во втором, третьем и четвертом тактах кодирования;

3) определение и кодирование номера уровня квантования сегмента, в зоне которого заключена амплитуда кодируемого отсчета (происходит в 5, 6, 7 и 8-м тактах кодирования). Этот этап осуществляется в четыре такта методом линейного кодирования. Здесь следует помнить, что шаг квантования внутри сегмента равномерный, число шагов квантования равно 16. Номер уровня квантования кодируемого отсчета внутри соответствующего сегмента представляется в двоичном коде.

7. Основы линейной фильтрации

7.1. Математическая модель линейного фильтра

Линейный фильтр является линейной дискретной системой (ЛДС), связь между входными и выходными параметрами которой может быть выражена в виде дифференциального уравнения (ДУ) вида [10]:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (7.1)$$

В формуле (7.1) $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – выходной сигнал, a_i и b_i – постоянные коэффициенты. Таким образом, цепь описывается наборами коэффициентов $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Должно выполняться неравенство $m \leq n$, т. е. максимальный порядок производной входного сигнала не может превышать максимального порядка производной выходного сигнала. Это связано с невозможностью

реализации операции "чистого" дифференцирования аналоговой системой. Значение n называется порядком системы.

Для анализа линейных дискретных систем используются z – преобразование и преобразование Лапласа. Смысл z – преобразования заключается в том, что последовательности чисел $\{x(k)\}$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , определяемая следующим образом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) Z^{-k} . \quad (7.2)$$

Z –преобразование (7.2) получено на основе известного дискретного преобразования Лапласа

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT} . \quad (7.3)$$

в результате замены переменных

$$z = e^{pT} , \quad (7.4)$$

где p – оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega. \quad (7.5)$$

Если применить к обеим частям ДУ (7.1) преобразование Лапласа, то получится выражение для операторного коэффициента передачи, или функции передачи системы (transfer function):

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (7.6)$$

a_i и b_i – постоянные коэффициенты, такие же, как и в (7.1).

Передаточная функция системы с использованием z – преобразования используется для анализа дискретных фильтров и записывается в виде:

$$H(Z) = \frac{y(Z)}{x(Z)} = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_m Z^{-m}}{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_n Z^{-n}}, \quad (7.7)$$

a_i и b_i – постоянные коэффициенты, такие же, как и в ДУ (7.1) и выражении (7.6).

В общем случае при вычислении очередного выходного отсчета системы $y(k)$ используется информация двух типов: некоторое количество отсчетов входного

сигнала и некоторое количество предыдущих отсчетов выходного сигнала. Ясно, что хотя бы один отсчет входного сигнала должен участвовать в вычислениях; в противном случае выходной сигнал не будет зависеть от входного. В противоположность этому, предыдущие отсчеты выходного сигнала могут и не использоваться. Уравнение фильтрации в этом случае приобретает следующий вид:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i). \quad (7.8)$$

Структурная схема, реализующая алгоритм (7.8), приведена на рис.7.1. Некоторое количество предыдущих отсчетов входного сигнала хранится в ячейках памяти, которые образуют дискретную линию задержки. Эти отсчеты умножаются на коэффициенты b_i и суммируются, формируя выходной отсчет $y(k)$.

Количество используемых предыдущих отсчетов m называется порядком фильтра (filter order). Следует обратить внимание на различие между терминами порядок фильтра и длина фильтра. Под длиной фильтра имеется в

виду общее число отсчетов, участвующих в вычислениях, включая текущий отсчет $x(k)$, поэтому длина дискретного фильтра на единицу больше, чем его порядок.

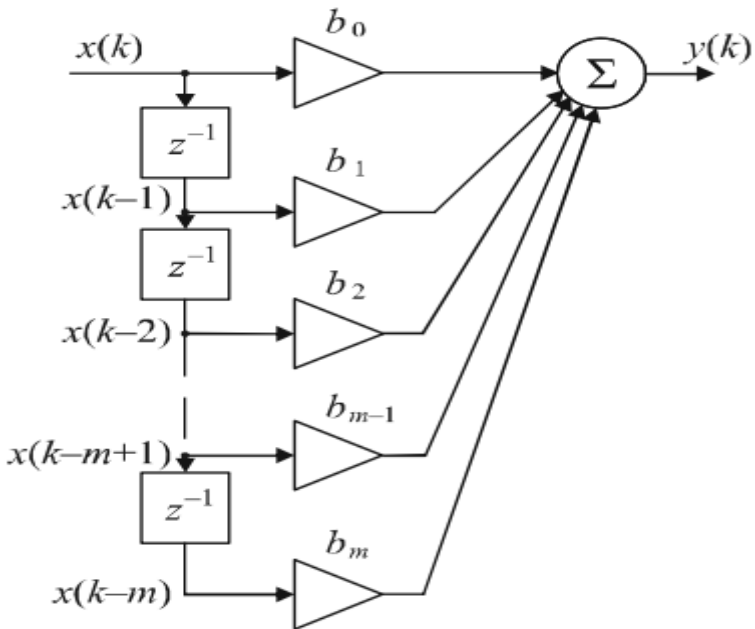


Рис. 7.1. Нерекурсивный фильтр

Импульсной характеристикой дискретного фильтра называется его реакция на единичный импульс при нулевых начальных условиях.

Так как при вычислениях не используются предыдущие отсчеты выходного сигнала, в схеме отсутствуют обратные связи. Поэтому такие фильтры называются нерекурсивными. Применяется также термин "трансверсальный фильтр" (от английского transversal— поперечный). Очевидно, что в реальном устройстве линия задержки содержит конечное число элементов, поэтому импульсная характеристика нерекурсивного фильтра также является конечной по длительности. Это обусловило еще одно название таких фильтров – фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ–фильтры; английский термин – finite impulse response, FIR). Вследствие отсутствия обратных связей любой нерекурсивный фильтр является устойчивым – ведь каковы бы ни были начальные условия (т. е. отсчеты, хранящиеся в линии задержки), при отсутствии сигнала на входе ($x(k) = 0$) выходной сигнал (свободные колебания) будет отличен от нуля в течение не более чем m тактов, необходимых для очистки линии задержки. Согласно свойствам z -преобразования, задержка дискретной последовательности на один такт

соответствует умножению ее z – преобразования на z^{-1} . Поэтому элементы памяти, осуществляющие такую задержку, обозначены на структурной схеме как " z^{-1} ".

Если уравнение фильтрации имеет общий вид (7.9), т. е. содержит как входные, так и выходные отсчеты, для реализации такого фильтра в схему, приведенную на рис. 7.1, необходимо добавить вторую линию задержки – для хранения выходных отсчетов $y(k-n)$. Получающаяся при этом структура показана на рис. 7.2.

$$y(k) = b_0x(k) + b_1x(k-1) + \dots + b_mx(k-m) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_ny(k-n), \quad (7.9)$$

Так как при вычислениях используются предыдущие отсчеты выходного сигнала, в схеме присутствуют обратные связи. Поэтому такие фильтры называют рекурсивными (recursive).

Наличие в схеме обратных связей позволяет получить бесконечную импульсную характеристику, поэтому рекурсивные фильтры называют также фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры; английский термин – infinite impulse response,

ПР). По этой же причине рекурсивные фильтры могут быть неустойчивыми.

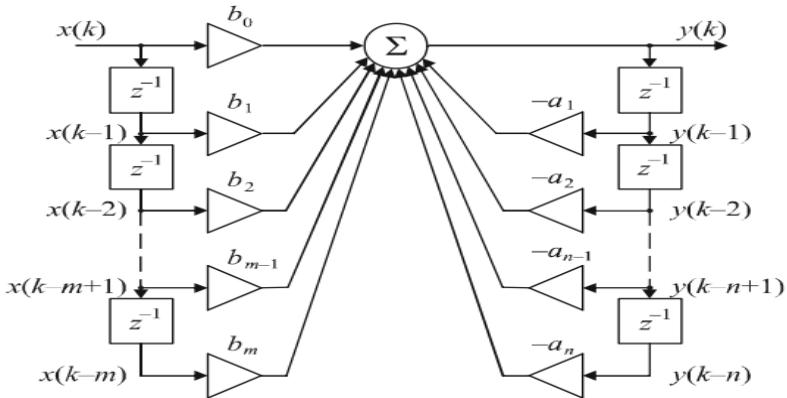


Рис. 7.2. Рекурсивный фильтр

Рассмотрим основы линейной фильтрации на примере линейного стационарного фильтра, который в непрерывном времени описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_o \cdot \dot{y} + \omega_o^2 \cdot y = Ax, \quad (7.10)$$

где x – заданный процесс, подаваемый на вход этого фильтра второго порядка;

y – процесс, получаемый на выходе фильтра;

ω – частота собственных колебаний фильтра,

ζ – относительный коэффициент затухания этого фильтра.

Передаточная функция фильтра, имеет вид:

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_o \cdot s + \omega_o^2}. \quad (7.11)$$

Допустим, что заданный процесс $x(t)$ представлен в виде отдельных его значений в дискретные моменты времени, которые разделены одинаковыми промежутками T_s времени (дискретом времени). Обозначим через $x(k)$ значение процесса в момент времени $t=k*Ts$, где k – номер измерения с начала процесса. Запишем уравнение (7.8) через конечные разности процессов x и y , учитывая, что конечно-разностным эквивалентом производной y является конечная разность

$$\frac{\Delta y(k)}{T_s} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T_s},$$

а эквивалентом производной второго порядка y является конечная разность второго порядка

$$\frac{\Delta^2 y(k)}{T_s^2} = \frac{\Delta y(k) - \Delta y(k-1)}{T_s^2} = \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_s^2}.$$

Тогда разностное уравнение

$$(1 + 2\zeta\omega_o \cdot T_s + \omega_o^2 \cdot T_s^2) \cdot y(k) - 2(1 + \zeta\omega_o \cdot T_s) \cdot y(k-1) + y(k-2) = AT_s^2 \cdot x(k) \quad (7.12)$$

является дискретным аналогом дифференциального уравнения (7.10).

Применяя к полученному уравнению Z-преобразование, получим:

$$y(z) \cdot [a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}] = A \cdot T_s^2 \cdot x(z), \quad (7.13)$$

$$\text{где } a_1 = 2(1 + \zeta\omega_o \cdot T_s); \quad a_2 = 1. \quad (7.14)$$

7.2. Характеристики системы

Передаточной функцией (ПФ) системы называется отношение z-изображения реакции к z-изображению воздействия при нулевых начальных условиях.

Дискретная передаточная функция фильтра определяется из уравнения (7.13):

$$H(z) = \frac{y(Z)}{x(Z)} = \frac{A \cdot T_s^2}{a_0 + a_1 \cdot Z^{-1} + \dots + a_n \cdot Z^{-n}}. \quad (7.15)$$

Таким образом, цифровым аналогом непрерывного колебательного звена (7.10) является цифровой фильтр с коэффициентами числителя и знаменателя, рассчитанными по формулам (7.13) и (7.14).

Частотной характеристикой (ЧХ) системы называется частотная зависимость отношения реакции к дискретному гармоническому воздействию в установившемся режиме.

Поясним, смысл «установившегося режима». Теоретически, область изменения гармонического воздействия $-\infty < n < \infty$. Однако на практике имеют дело с условно гармоническим воздействием в области $0 \leq n < \infty$, где время $n = 0$ соответствует началу воздействия. Переходный процесс на выходе фильтра показан на рис.7.3.

В течение времени $0 \leq n < n_0$ система работает в режиме переходных колебаний. Спустя время n_0 процесс

устанавливается и реакция становится периодическим сигналом, поэтому в данном случае имеет смысл говорить о реакции как о гармоническом сигнале в установившемся режиме.

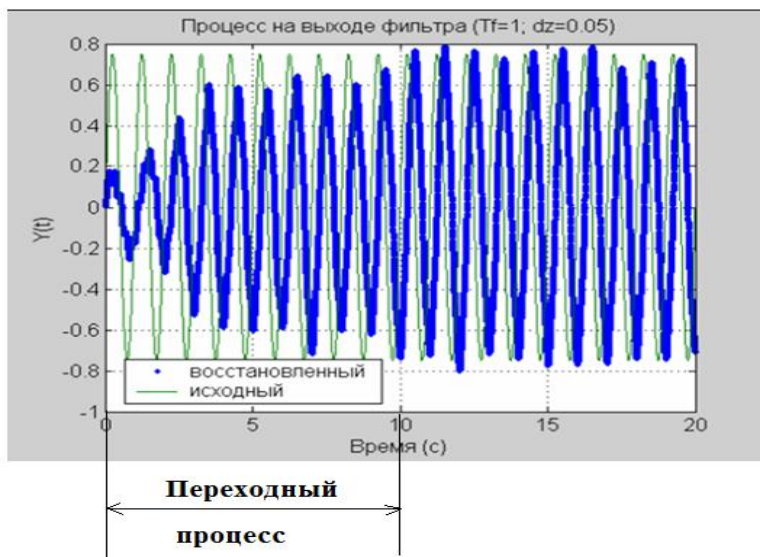


Рис.7.3. Переходный процесс на выходе фильтра

ЧХ $H(e^{j\omega})$ совпадает с ПФ $H(z)$, если область значений переменной z на комплексной z -плоскости ограничена точками на единичной окружности $e^{j\omega}$.

Амплитудно-частотной характеристикой системы называется частотная зависимость отношения амплитуды реакции к амплитуде дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме.

Фазочастотной характеристикой системы называется частотная зависимость разности фаз реакции и дискретного гармонического воздействия в установившемся режиме. Обе характеристики приведены на рис.7.4.

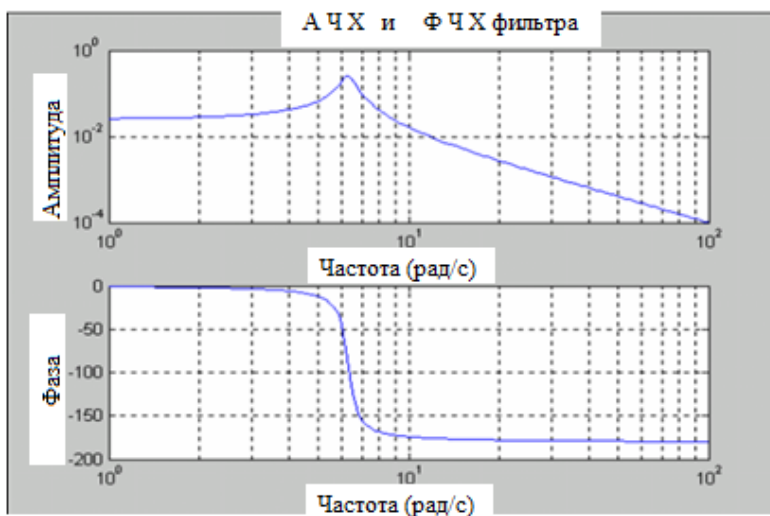


Рис.7.4. АЧХ и ФЧХ фильтра

8. Цифро-аналоговое преобразование сигналов

8.1. Дискретизация аналогового сигнала по частоте

После дискретизации и цифровой обработки сигнала во многих практических задачах необходимо вновь преобразовать его в аналоговый сигнал. Например, для воспроизведения звукового сигнала через акустические колонки или для получения изображения на аналоговом мониторе компьютера.

Для преобразования цифровых сигналов в аналоговые используются *цифро-аналоговые преобразователи* (ЦАП, от англ. *Digital – to – Analog Converter*, ДАС или D/C). ЦАП является обычным компонентом, в частности, звуковой карты, а также видеоадаптера РС. Структурная схема, поясняющая место ЦАП в обработке сигнала показана на рис.8.1, вид обработанного сигнала – на рис 8.2. На вход стандартного ЦАП поступает цифровой сигнал с выхода ЦП в *параллельном* коде. Сигнал на выходе ЦАП $\tilde{y}(t)$ имеет ступенчатый характер. Для сглаживания (удаления

высокочастотных составляющих) этого сигнала используют ФНЧ.



Рис. 8.1. Структурная схема, поясняющая место ЦАП в обработке сигнала

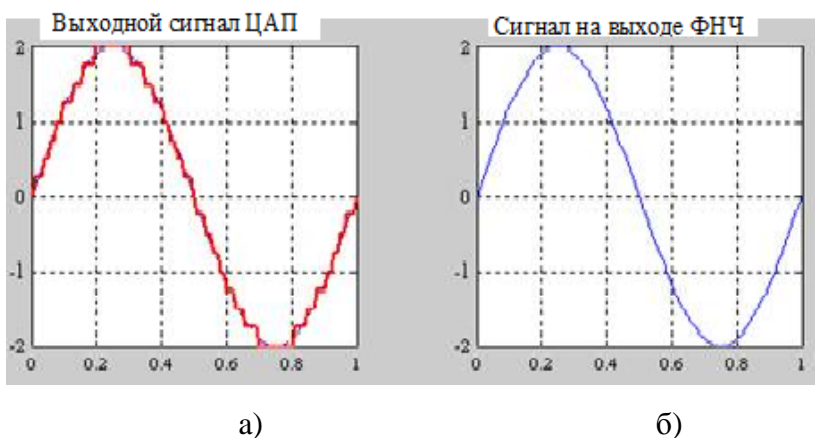


Рис. 8.2: а) сигнал на выходе ЦАП; б) сигнал на выходе ФНЧ

Принципы действия и схемы ЦАП рассматриваются в курсах схемотехники. Целью данной главы является рассмотрение вопросов, связанных с математическим представлением процесса восстановления аналогового сигнала по его отсчетам.

8.2. Математическая модель восстановления аналогового сигнала по его отсчетам в частотной области

Рассмотрим задачу преобразования цифрового сигнала в аналоговый, иначе – восстановление (*recovering*) аналогового сигнала по его отсчетам, используя анализ в частотной области. В течение времени $0 \leq n < n_0$ система работает в режиме переходных колебаний. Спустя время n_0 процесс устанавливается и реакция становится периодическим сигналом, поэтому в данном случае имеет смысл говорить о реакции как о гармоническом сигнале в установившемся режиме.

Схема, поясняющая восстановление сигнала показана на рис.8.3.

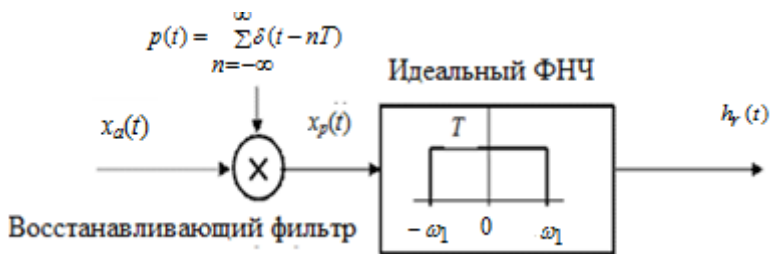


Рис. 8.3. Схема, поясняющая восстановление сигнала

Цель – получить аналоговый (восстановленный) сигнал $x_p(t)$ по его отсчетам $x_p(t)$.

Выражение дискретного по времени сигнала при идеальной дискретизации:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) -$$

последовательность смещенных δ – функций, модулированная отсчетами исходного аналогового сигнала. На рис.8.4 приведен пример, поясняющий дискретный по частоте сигнал.

Как показано ранее, спектр дискретного сигнала $x_p(t)$ равен:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^m X_a(j(\omega - k\omega_s)),$$

где $\omega_s = 2\pi/T$ угловая частота отсчетов.

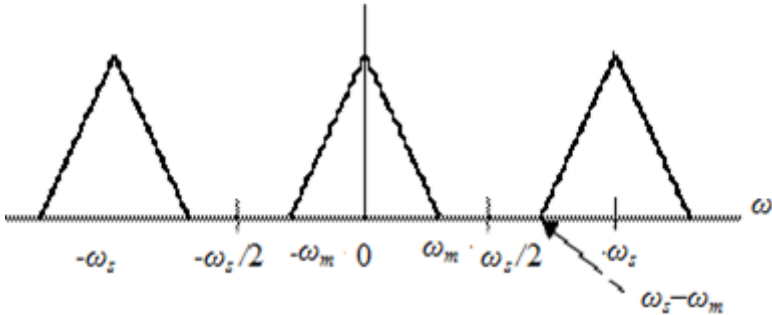


Рис.8.4. Дискретизация сигнала по частоте

Полагаем, что сигнал принадлежит к сигналам с ограниченным спектром и верхняя частота является граничной частотой $\omega_m < \omega_s/2$. Для выделения *основной полосы* спектра с $k=0$ следует пропустить дискретный сигнал $x_p(t)$ через идеальный ФНЧ с частотной характеристикой

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \omega_m < \omega_c \leq \omega_s - \omega_m,$$

т.е. идеальный ФНЧ, с характеристикой на рис.8.5.

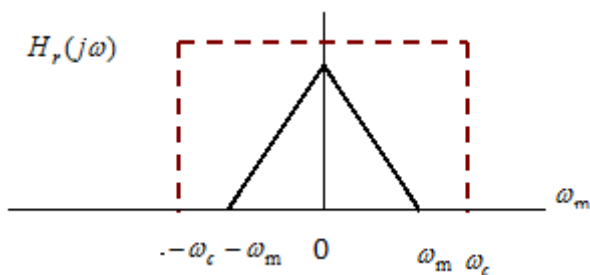


Рис.8.5. Идеальный ФНЧ

Выходной сигнал фильтра в частотной области – произведение основной полосы и ЧХ:

$$X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H_r(j\omega) = X_a(j\omega) –$$

спектр аналогового сигнала.

Обратное преобразование Фурье этого спектра

$$x_a(t) = F^{-1}\{X_a(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega / (2\pi)$$

дает исходную (без искажений) функцию сигнала $x(t)$ во временной области. Таким образом, если дискретизация производится с частотой $\omega_S \geq 2\omega_m$, то, пропуская дискретный сигнал через идеальный ФНЧ с частотой

среза $\omega_m < \omega_c \leq \omega_S - \omega_m$, можно точно восстановить спектр исходного аналогового сигнала, а, значит, и сам сигнал. Идеальный ФНЧ практически не реализуем, его можно воспроизвести только приближенно. Поэтому на практике восстановить сигнал по его отсчетам с помощью реального ФНЧ можно только приближенно.

8.3. Математическая модель восстановления аналогового сигнала по его отсчетам во временной области

Выходной сигнал восстанавливающего фильтра в частотной области представляет собой произведение спектра (преобразования Фурье) дискретного сигнала и частотной характеристики фильтра.

$$X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H_r(j\omega) = X_a(j\omega).$$

Произведению преобразований Фурье во временной области соответствует свертка $x_p(t)$ и $h_r(t)$, т.е. выражение выходного сигнала во временной области

$$x_r(t) = x_p(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(\tau) h_r(t - \tau) d\tau, \quad (8.1)$$

где $h_r(t) = F^{-1}\{H_r(j\omega)\}$ – импульсная характеристика (ИХ) восстанавливающего фильтра;

$$x_p(t) = F^{-1}\{X_p(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) –$$

дискретный сигнал.

Подставим $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$ в

выражение свертки (8.1), получим

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_p(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(\tau - nT) \right) h_r(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t - \tau) \delta(\tau - nT) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_r(t - nT). \end{aligned}$$

Найдем импульсную $h_r(t)$ – характеристику восстанавливающего фильтра, как обратное преобразование Фурье от импульсной характеристики

$$\begin{aligned}
 h_r(t) &= F^{-1}\{H_r(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) dt = 2\pi / T = \omega \quad | = \frac{1}{\omega_s} 2 \int_0^{\omega_c} \cos(\omega t) d\omega = \\
 &2 \frac{1}{\omega_s} \frac{1}{t} \sin(t\omega) \Big|_0^{\omega_c} = \frac{2}{\omega_s t} \sin(\omega_c t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_s t / 2}.
 \end{aligned}$$

Примем, что частота среза идеального ФНЧ равна

$$\text{половине частоты отсчетов } \omega_c = \omega_s / 2 = \frac{2\pi}{2T} = \pi / T$$

. Подставим эти значения в выражение импульсной

$$\text{характеристики } h_r(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_s t / 2} = \pi / T. \quad \text{Получим}$$

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}.$$

В результате выражение для

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_r(t - nT)$$

будет иметь вид

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right)}{\frac{\pi(t-nT)}{T}} . \quad (8.2)$$

Ряд (8.2) называют интерполяционным рядом Котельникова или рядом Шеннона. Его члены имеют вид $\sin(x)/x = \text{sinc}(x)$ с коэффициентами $x(nT)$, равными отсчетам сигнала $x(nT)$. Этот ряд **точно** представляет исходный сигнал $x_a(t)$ в точках отсчетов ($n=0,+1,+2,+...$) и сходится к нему, т.е. **интерполирует** сигнал для всех промежуточных между отсчетами значений временной оси t . Ряд (8.2) сходится очень медленно. Графическая иллюстрация ряда приведена на рис.8.6.

Точное восстановление сигнала с помощью интерполяционного ряда Котельникова требует:

- а) идеального ФНЧ,
- б) бесконечного числа членов самого ряда.

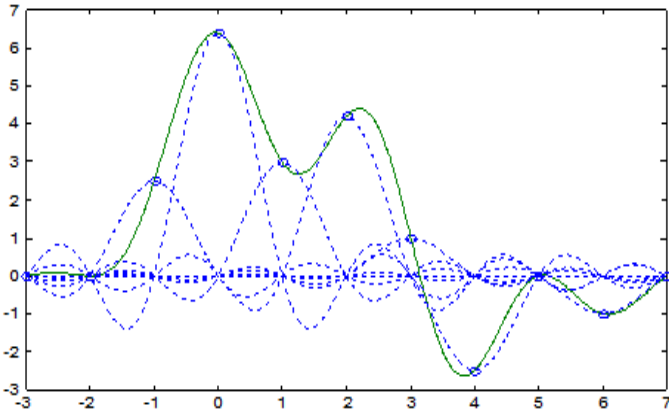


Рис. 8.6. Интерполяционный ряд исходного сигнала

И то и другое на практике невозможно обеспечить, поэтому для восстановления сигналов применяются и другие, более простые способы.

8.4. Восстановление аналогового сигнала с помощью интерполяционного полинома нулевого порядка

На практике для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам широко используют

восстановление с помощью полиномов нулевого порядка и полиномов первого порядка.

Для получения соответствующих интерполяционных выражений разложим сигнал $x(t)$ в точке отсчета $t = nT$ в степенной ряд Тейлора

$$x(t) = x(nT) + x'(nT)(t - nT) + \frac{x''(nT)}{2!}(t - nT)^2 + \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(nT) \frac{(t - nT)^k}{k!}.$$

Чем выше порядок производной, тем большее число соседних отсчетов необходимо для её оценки. Это увеличивает точность восстановления, но усложняет интерполяцию сигнала. Поэтому на практике для восстановления сигналов по отсчетам чаще используют только первый член выражения разложения в ряд Тейлора и реже второй. Для такой интерполяции необходима достаточно высокая частота отсчетов $F_s = 1/T$ по сравнению с граничным условием теоремы отсчетов $F_s = 2f_m$.

Использование только значений $x(nT)$ для цифро – аналогового преобразования является наиболее простой аппроксимацией сигнала и называется *интерполяцией*

полиномом нулевого порядка. Следующие устройства называют экстраполяторами или фиксаторами нулевого порядка (англ. Zero – Order Hold). Такое устройство сохраняет значение непрерывного сигнала постоянным до поступления следующего отсчета, т.е. экстраполирует сигнал:

$$x(t) \approx x(nT), \quad nT \leq t < (n+1)T, \quad n = 0, +1, +2, \dots$$

Рассмотрим процесс восстановления более подробно с использованием импульсной и частотной характеристик такого интерполятора.

Импульсная характеристика, т.е. реакция на δ -функцию, фиксатора нулевого порядка $h_0(t)$ имеет вид рис. 8.7 (T – интервал отсчетов).

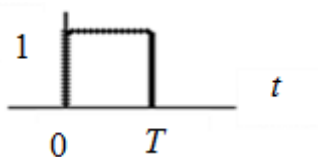


Рис.8.7. Идеальная импульсная характеристика интерполятора

Восстановленный сигнал – свертка $h_0(t)$ и $x(nT)$:

$$x_r(t) = x(nT) * h_0(t) = \int_0^{\tau} x(nT)h_0(\tau - nT)d\tau$$

$$nT \leq t < (n+1)T, \quad n = 0, +1, +2, \dots$$

Частотная характеристика интерполятора нулевого порядка как преобразование Фурье импульсной характеристики

$$H_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega T}) = \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) =$$

$$= \frac{T}{\omega T/2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T}{2}}.$$

Графики АЧХ и ФЧХ такого фиксатора при $T = 1$ в зависимости от частоты f приведены на рис.8.8.

Восстановление аналогового сигнала с помощью нтерполяционного полинома нулевого порядка показано на рис.8.9.

Частотная характеристика фиксатора изменяется по закону $\sin(x)/x$, т.е. имеет пульсирующий характер. По сравнению с частотной характеристикой идеального ФНЧ фиксатор нулевого порядка имеет высокочастотные составляющие пульсирующего характера.

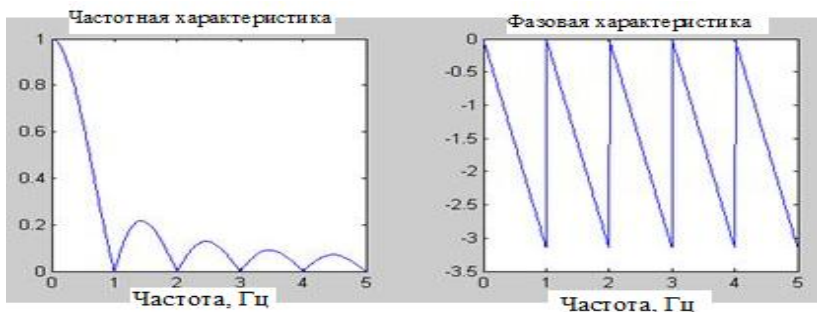


Рис. 8.8. Графики АЧХ и ФЧХ фиксатора

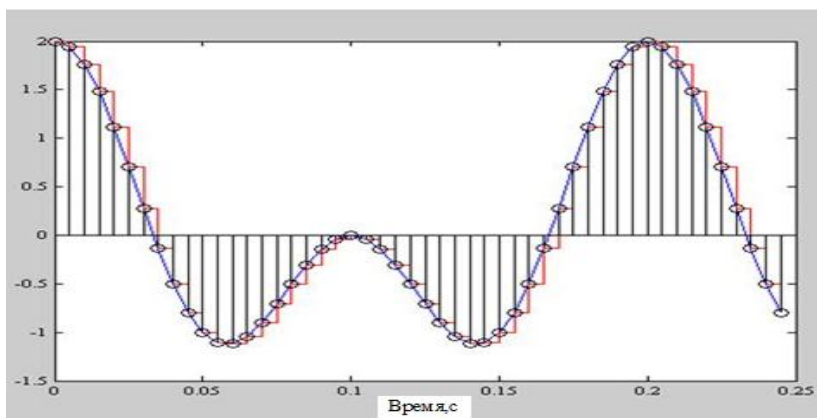


Рис.8.9. Восстановление аналогового сигнала по дискретным отсчетам

При уменьшении периода отсчета T АЧХ фиксатора становится ближе к АЧХ идеального ФНЧ, но высокочастотные пульсации АЧХ все равно остаются, и

для уменьшения пульсаций выходного сигнала ЦАП необходим сглаживающий ФНЧ.

Фазовая характеристика интерполятора – линейная, поэтому фазовых искажений такой интерполятор не вносит. Неизменные спутники такой интерполяции – «ступеньки» - сглаживаются с помощью выходного ФНЧ.

8.5. Восстановление аналогового сигнала с помощью интерполяционного полинома первого порядка

Кроме полинома нулевого порядка для восстановления аналогового сигнала по его отсчетам часто используются также полиномы первого порядка, в которых кроме отсчета сигнала необходима также его первая производная в момент отсчета. Устройство восстановления на основе полинома первого порядка называется *экстраполятором (фиксатором) первого порядка* (англ. *First – Order Hold*).

Выражение восстановленного сигнала

$$x(t) \approx x(nT) + x'(nT)(t - nT), \quad nT \leq t < (n+1)T.$$

Используются только первые 2 члена ряда Тейлора.

При этом первая производная в момент $t = nT$ может быть приближенно вычислена по формуле $x' \approx \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T}$ (интерполирование вперед), или по формуле

$$x'(nT) \approx \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \quad (\text{интерполирование назад}).$$

Таким образом, такое восстановление – более сложное по сравнению с использованием полинома нулевого порядка, т.к. необходимо на каждом шаге вычислять оценку производной сигнала.

В графическом представлении при этом способе восстановления соседние отсчеты соединяются прямыми линиями. Такой способ обычно используется в компьютерных программах при построении графиков функций, он называется *линейной интерполяцией*.

Импульсная характеристика экстраполятора первого порядка (T – интервал отсчетов). Найдем частотную характеристику интерполятора первого порядка

Частотная характеристика интерполятора первого порядка как преобразование Фурье импульсной характеристики

$$\begin{aligned}
 H_1(j\omega) &= F\{h_1(t)\} = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\
 &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos(\omega t) dt = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega} \Big|_0^T - \frac{2t}{\omega} \sin(\omega t) \Big|_0^T - \frac{2}{T} \frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t) \Big|_0^T = \\
 &= \frac{4}{T} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1 - \cos(\omega T)}{2}\right) = \frac{4}{T} \frac{1}{\omega^2} \left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2 = T \left(\frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2}\right)^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$h_1(t) = 1 - \frac{|t|}{T}, \quad |t| \leq T.$$

Импульсная характеристика показана на рис.8.10.

Графики АЧХ интерполяторов нулевого и первого порядка при $T = 1$ приведены на рис.8.11.

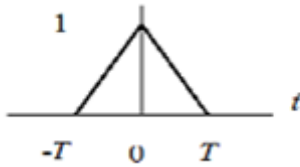


Рис.8.10. Импульсная характеристика

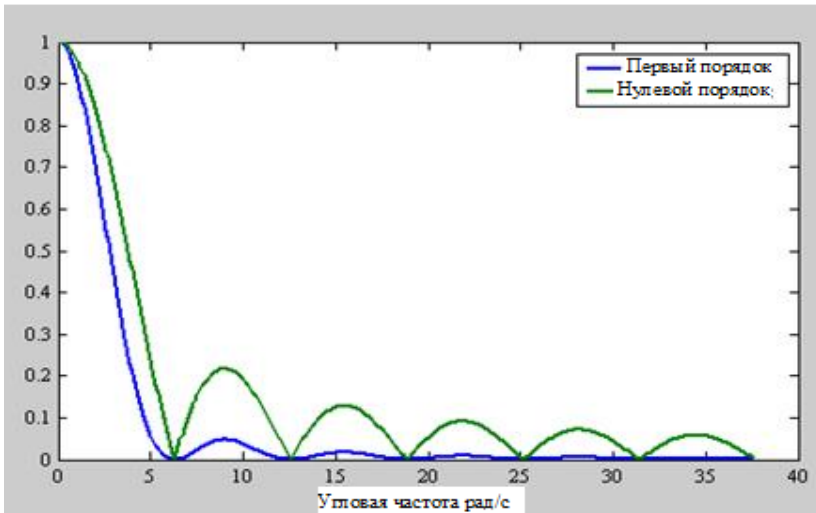


Рис.8.11. АЧХ интерполяторов нулевого и первого порядка при $T = 1$

Как следует из графиков, АЧХ фиксатора первого порядка имеет более крутой спад основного низкочастотного лепестка и главное - существенно более низкий уровень

пульсаций высокочастотных составляющих. Высокочастотные составляющие шума, сопровождающего процессы АЦП и ЦАП, подавляются идеальным ФНЧ. Но такой фильтр практически не реализуем.

Интерполятор первого порядка подавляет эти составляющие в значительно большей степени, чем интерполятор нулевого порядка. Поэтому он обеспечивает меньший уровень пульсаций, чем фиксатор нулевого порядка. Однако такой способ – более сложный, так как в каждой точке необходимо вычисление первой производной сигнала.

8.6. Восстановление неравномерно дискретизированных сигналов

В основу подавляющего большинства известных методов цифровой обработки сигналов (цифровая фильтрация, БПФ, преобразование Гильберта и др.), априори положено предположение, что значения обрабатываемого сигнала измеряются на равномерной

временной сетке (равноотстоящие дискретные отсчеты). Однако на практике существует множество случаев, когда реализуется противоположная ситуация, в которой изучаемые дискретные сигналы оказываются заданными на неравномерной временной сетке.

Дискретные сигналы с неравномерной частотой дискретизации (НЧД) используют в самых различных областях радиотехники и телекоммуникаций, например:

- при стохастическом и квазистохастическом кодировании;

- в синхронных многоканальных системах передачи информации с временным уплотнением, в асинхронно-адресных системах связи, в системах передачи информации с многостанционным доступом;

- в системах передачи информации с мобильных объектов последовательный регулярный опрос центральным устройством вызывных зон, в которых случайным образом может находиться объект, приводит к нерегулярному потоку канальных отсчетов;

– в спутниковых системах связи (в особенности при связи с самолетами) необходимо учитывать влияние на регулярность приема сообщений изменения времени запаздывания непрерывного (из-за взаимного перемещения абонентских станций и ретранслятора) и скачкообразного (из-за переключения ретрансляторов) и т.д.

В системах аудиозаписи: испорченные аудиозаписи есть ДС с пропущенными отсчетами, для которых оказываются неизвестными, как их точные значения, так и точные положения на временной оси.

В системах измерения параметров медленно изменяющихся во времени процессов, например, при измерении температуры тех или иных объектов в течение длительных интервалов наблюдений. Здесь для сокращения объемов получаемой информации контролируют изменения измеряемого параметра в последовательные моменты времени и только при превышении заданного порога сохраняют значения данного параметра и момент времени его достижения.

При этом также может адаптивно изменяться число уровней квантования (адаптивная дельта-модуляция, основанная на неравномерной дискретизации) в зависимости от величины изменения.

Применение в системах сжатия данных.

В задачах обработки экспериментально собираемой информации, например, в теплофизических, океанологических и океанографических исследованиях; в медицине при исследовании variability сердечного ритма ; в лазерной доплеровской анемометрии при измерении скорости частиц.

Обработка сигналов, дискредитированных на неравномерной временной сетке, традиционно, начинается с решения задачи их интерполяции в узлах равномерной временной сетки. Для этого используют, например, полиномы Лагранжа, Ньютона или сплайн-интерполяцию.

При этом, как показывают результаты анализа, авторы большинства методов исходят из априорного предположения о том, что координаты узлов

неравномерной временной сетки известны точно, которое, однако, на практике далеко не всегда выполняется.

Большинство известных алгоритмов восстановления неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки сводятся к решению многопараметрической оптимизационной задачи и ориентированы на нахождение одновременно всех неизвестных координат отсчетов сигнала. Однако рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска параметров ни в одной из изученных работ не приводится, но без таковых гарантировать нахождение глобального, но не локального минимума оптимизируемой функции оказывается достаточно проблематичным. Нахождение решения многопараметрической оптимизационной задачи также требует больших вычислительных затрат. В этой ситуации несомненный практический интерес представляют более простые с вычислительной точки зрения «квазиоптимальные» методы аппроксимации.

9. Устойчивость линейных дискретных систем

Линейная дискретная система (ЛДС) описывается линеаризованным дифференциальным уравнением вида[11]

$$A(D)y(t)=B(D)u(t), \quad (9.1)$$

где $u(t)$ входной процесс,

$y(t)$ – выходной процесс,

A, B – постоянные коэффициенты,

D – оператор дифференцирования.

Преобразование «вход-выход» системы описывается выражением[12]:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (9.2)$$

где $W(D)$ называется операторной передаточной функцией.

Один из способов моделирования систем заключается в представлении преобразования «вход-выход» в виде комплексной передаточной функции (ПФ, англ.transfer function – *tf*):

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (9.3)$$

которая получается путем применения преобразования Лапласа к выражению (9.2) при начальных нулевых условиях. Здесь s – комплексная переменная.

Связь между операторной (9.2) и комплексной (9.3) передаточными функциями можно записать в виде

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена $B(s)$, называются нулями передаточной функции, а корни многочлена $A(s)$ – полюсами. Динамические свойства систем характеризуют реакции на входные воздействия специального вида. В частности анализ выхода системы на единичный скачок и δ –функцию (дельта–функцию).

Переходной характеристикой $w(t)$ называют реакцию системы на поданную на вход функцию единичного скачка. Реакция системы на вход дельта–функции называют импульсной характеристикой системы $h(t)$. Поскольку дельта–функция – это производная от единичного скачка, то импульсная характеристика

системы является производной от переходной характеристики: $h(t)=dw(t)/dt$.

Частотной характеристикой $W(i\omega)$ стационарной динамической системы называется преобразование Фурье переходной функции.

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau)e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau, \quad (9.4)$$

где $w(t-\tau)$ – переходная функция системы.

Связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой, исходя из свойств преобразований Фурье можно представить в виде соотношения:

$$W(s) |_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фиксированном значении ω частотная характеристика является комплексным числом, и, следовательно, может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\omega + \psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega), \quad (9.5)$$

где $A(\omega) = |W(i\omega)|$ – амплитудно – частотная характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$ – фазово – частотная характеристика (ФНЧ);

$U(\omega) = \operatorname{Re}W(i\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im}W(i\omega)$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическое место точек $W(i\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от ω_0 до ω_1 (обычно $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \infty$), называется амплитудно–фазовой характеристикой А(ФХ) или частотным годографом Найквиста.

Для нахождения вещественной и мнимой части частотной ПФ нужно освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, а затем выполнить деление на вещественную и мнимую части. Передаточная функция приобретает вид

$$jW(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Задаваясь различными значениями частоты, можно найти множество пар: $\{P(\omega_1); jQ(\omega_1)\}$, $\{P(\omega_2); jQ(\omega_2)\}$, ..., $\{P(\omega_n); jQ(\omega_n)\}$. Затем по этим парам строится АФХ на

комплексной плоскости.

Имеет широкое практическое значение диаграмма Боде (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как $L = 20 \lg A(\omega)$, измеряется в децибелах и строится как функция от $\lg \omega$.

Линейные дискретные системы могут быть разомкнутые и замкнутые. Управление по разомкнутому циклу осуществляется без контроля результата. Такое управление называется жестким. Разомкнутые системы применяются для стабилизации и программного управления. В замкнутых системах управляющее воздействие формируется в непосредственной зависимости от управляемой величины (наличествует обратная связь).

Линейная система называется устойчивой, если при выведении ее внешними воздействиями из состояния равновесия (покоя) она возвращается в него после прекращения этих воздействий. Если после исчезновения внешнего воздействия система не возвращается к состоянию равновесия, то она либо является неустойчивой,

либо находится на границе устойчивости. Для нормального функционирования системы необходимо, чтобы она была устойчивой, так как в противном случае ошибки в ней становятся недопустимо большими.

Чтобы дискретная система была устойчива, ее импульсная и переходная характеристики должны затухать, а полюсы ее функции передачи должны находиться в левой комплексной полуплоскости.

Для проверки системы на устойчивость существуют критерии устойчивости.

Рассмотрим некоторые из них.

ЛДС устойчива по критерию Найквиста, если годограф Найквиста при изменении частоты от ω до $+\infty$ не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.

Запас устойчивости по амплитуде – это минимальный отрезок действительной оси h , характеризующий расстояние между критической точкой $(-1, j0)$ и ближайшей точкой пересечения годографом Найквиста вещественной оси (рис.9.1).

Запас устойчивости по фазе[12] γ – это минимальный угол, образуемый радиусом, проходящим через точку пересечения годографа Найквиста с окружностью единичного радиуса с центром в начале координат и вещественной отрицательной полуосью (рис.9.1).

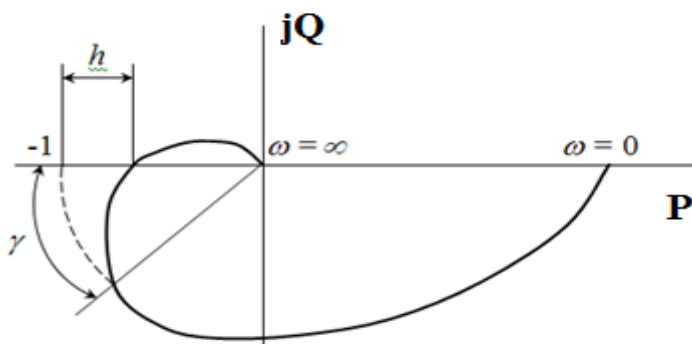


Рис.9 1. Запасы устойчивости системы по критерию Найквиста

Логарифмический критерий – это критерий Найквиста, оценивающий устойчивость САР по логарифмическим частотным характеристикам её разомкнутой части.

Для оценки устойчивости по частотным характеристикам надо сравнить две частоты: частоту

среза ω_{cp} и критическую частоту $\omega_{кр}$. Определяются эти частоты следующим образом:

$$|H(j\omega_{cp})| = 1, \quad \varphi(\omega_{кр}) = -\pi.$$

На частоте среза АЧХ пересекает единичный уровень (в случае ЛАЧХ – это уровень нуля, а на критической частоте ФЧХ пересекает уровень $-\pi(-180^\circ)$). Данная ситуация показана на рис.9.2.

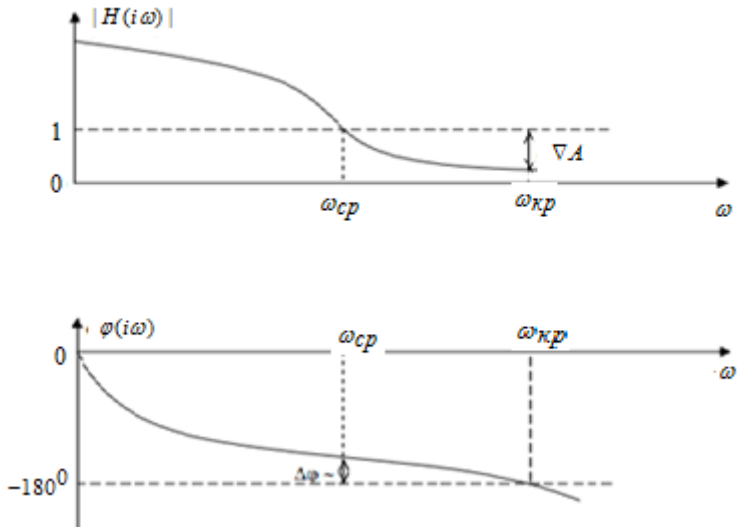


Рис.9.2. Оценка устойчивости системы

Оценка устойчивости системы по частотным характеристикам: запасы устойчивости равны по амплитуде ΔA и по фазе $\Delta\varphi$ соответственно.

Словарь терминов [6]

Термин 1	Определение 2
Измерительный радиотехнический сигнал	Электрическое напряжение или ток, изменяющийся во времени с заранее известными характеристиками, используемы для измерения характеристик радиотехнических цепей и их контроля
Мгновенное значение сигнала (отсчет сигнала)	Значение сигнала в заданный момент времени
Максимальное значение сигнала (Амплитуда)	Наибольшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Минимальное значение сигнала	Наименьшее мгновенное значение сигнала на протяжении заданного интервала времени
Постоянная составляющая сигнала	Среднее значение сигнала
Переменная составляющая сигнала (Центрированный сигнал)	Разность между сигналам и постоянной составляющей
Пиковое отклонение «вверх»	Наибольшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени
Пиковое отклонение «вниз»	Наименьшее мгновенное значение переменной составляющей сигнала на протяжении заданного интервала времени
Размах сигнала	Разность между максимальным и минимальным значениями сигнала на протяжении заданного интервала времени

1	2
Средневыпрямленное значение сигнала (среднее значение сигнала)	Среднее значение модуля сигнала
Среднеквадратичное значение сигнала (Среднеквадратичное значение, Действующее значение, Эффективное значение)	Корень квадратный из среднего значения квадрата сигнала
Средняя мощность сигнала, выделяемая на сопротивлении 1 Ом	Среднее значение квадрата сигнала
Энергия сигнала, выделяемая на сопротивлении 1 Ом	Интеграл из квадрата сигнала по всей оси времени
Период периодического сигнала (Период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала
Частота периодического сигнала (Частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала
Амплитудный спектр периодического сигнала (Спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала

1	2
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента
Одномерная плотность вероятности (Дифференциальный закон распределения вероятности. Распределение амплитуд)	Функция, равная пределу отношения вероятности пребывания случайного сигнала в некотором интервале значений к ширине этого интервала при стремлении его к нулю, при чем ее аргументом является значение, к которому стягивается интервал
Корреляционная функция (Автокорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей случайного сигнала и такой же переменной составляющей, но запаздывающей на заданное время.
Нормированная корреляционная функция (Коэффициент корреляции)	Функция, равная отношению корреляционной функции случайного сигнала к его дисперсии
Энергетический спектр (Спектральная плотность)	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от корреляционной функции, аргументом которой является частота.
Отношение сигнал/помеха	Отношение величин, характеризующих интенсивности сигнала и помехи.
Коэффициент модуляции «вверх» (Коэффициент глубины модуляции «вверх»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вверх» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции

1	2
Коэффициент модуляции «вниз» (Коэффициент глубины модуляции «вниз»)	Коэффициент, равный отношению пикового отклонения «вниз» закона модуляции к его постоянной составляющей при амплитудной модуляции
Девияция частоты «вверх»	Пиковое отклонение «вверх» закона модуляции при частотной модуляции
Девияция частоты «вниз»	Пиковое отклонение «вниз» закона модуляции при частотной модуляции
Индекс угловой модуляции (Индекс модуляции)	Пиковое отклонение закона модуляции при гармоническом законе модуляции
Взаимокорреляционная функция (Кросскорреляционная функция)	Функция, равная среднему значению произведения переменной составляющей одного случайного сигнала и запаздывающего на заданное время переменной составляющей другого случайного сигнала
Взаимный энергетический спектр	Функция, представляющая собой преобразование Фурье от взаимокорреляционной функции, аргументом которой является частота.
Время запаздывания	Параметр, равный значению переменного сдвига одного из сигналов, при котором достигается тождественное равенство его другому сигналу с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого.
Фазовый сдвиг (Сдвиг фаз)	Модуль разности начальных фаз двух гармонических сигналов одинаковой частоты

1	2
Коэффициент гармоник (Коэффициент нелинейных искажений, Клирфактор)	Коэффициент, характеризующий отличие формы данного периодического сигнала от гармонической, равный отношению среднеквадратического напряжения суммы всех гармоник сигнала, кроме первой, к среднеквадратическому напряжению первой гармоники
Относительное отклонение сигнала от линейного закона	Коэффициент, равный отношению абсолютного отклонения данного сигнала от прямой линии, соединяющей мгновенные значения сигнала, соответствующие началу и концу заданного интервала времени к максимальному значению сигнала на этом же интервале
Коэффициент нелинейности сигнала	Коэффициент, равный отношению размаха производной сигнала на заданном интервале времени к максимальному значению производной на этом же интервале
Абсолютное отклонение сигналов	Максимальное значение разности мгновенных значений сигналов, взятых в один и тот же момент времени на протяжении заданного интервала времени

Список источников

1. Белоус, И.А. Теория сигналов: Учеб. пособие.// И.А. Белоус, Ю.А. Левашов/ Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2017, – 100 с.

2. Вадутов О.С. Электроника. Математические основы обработки сигналов – М.: Издательство Юрайт, 2022. — 308 с.

3. Нефедов В. И., Сигов В.И. Радиотехнические цепи и сигналы : Учебник для вузов // В. И. Нефедов, В.И. Сигов /под ред. В. И. Нефедова./ – М. : Изд-во Юрайт, 2022. – 266 с.

4. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания /Под ред. проф. А.Н. Яковлева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 348 с.

5. Коптев Д. С. Теория радиотехнических сигналов: Учеб. пособие/ Курск.: Юго-Зап. гос. ун-т, 2019. – 240 с.

6. Сафин А.Р. Формирование колебаний и сигналов: Учебник для вузов / под ред. В. Н. Кулешова,

Н. Н. Удалова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во Юрайт, 2021. – 391 с.

7. Шаров Г.А. Основы теории сигналов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2021.-552 с.

8. Скляр Бернад Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс, 2016, – 1104 с.

9. Матвеев Ю.Н. Цифровая обработка сигналов// Ю.Н.Матвеев, К.К. Симончик, А.Ю. Тропченко, М.В. Хитров /Учебное пособие . – СПб: СПбНИУ ИТМО, 2013. – 166 с.

10. Михалин С.Н. Цифровая обработка сигналов. Курс лекций. – М.: «Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2017, - 192 с.

11. Гайдук А. Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB// А. Р. Гайдук, В.Е. Беляев, Т.А. Пьявченко – М.: Изд-во Лань, 2022, – 464 с.

12. Ким, Д. П. Теория автоматического управления: учебник и практикум для вузов – М. : Издательство Юрайт, 2021. – 276 с.

Содержание

1	Классификация сигналов	3
1.1	Виды сигналов	3
1.2	Параметры сигналов	12
2	Пространство сигналов	20
3	Преобразование Фурье	38
3.1	Виды и назначение преобразования Фурье	38
3.2	Виды и назначение преобразования Фурье	45
4	Преобразование Гильберта, модуляция сигнала	49
4.1	Описание и свойства преобразования Гильберта	49
4.2	Описание и свойства преобразования Гильберта	52
5	Дискретизация аналогового сигнала	64
6	Квантование сигналов	80
7	Основы линейной фильтрации	92
7.1	Математическая модель линейного фильтра	92
7.2	Характеристики системы	101
8	Цифро-аналоговое преобразование сигналов	105

8.1	Дискретизация аналогового сигнала по частоте	105
8.2	Математическая модель восстановления аналогового сигнала по его отсчетам в частотной области	107
8.3	Математическая модель восстановления аналогового сигнала по его отсчетам во временной области	111
8.4	Восстановление аналогового сигнала с помощью интерполяционного полинома нулевого порядка	115
8.5	Восстановление аналогового сигнала с помощью интерполяционного полинома первого порядка	120
8.6	Восстановление неравномерно дискретизированных сигналов	124
9	Устойчивость линейных дискретных систем	129
	Словарь терминов	137
	Список источников	142

Учебное издание

Е.А. Чернецова

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Публикуется в авторской редакции.

Подписано к публикации 09.02.2023. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 9,125. Заказ № 1350.

РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.